7 Graphentheorie

Definition. Ein Graph ist ein Paar (E, K) bestehend aus einer Eckenmenge E und einer Kantenmenge K, zusammen mit einer Zuordnung, die jedem Element der Menge K genau zwei Elemente der Menge E zuweist. Die Elemente der Menge E nennt man Ecken, die der Menge K Kanten. Eine Zuordnung wie oben kann man alternativ als eine Funktion $f : K \to E^{(2)}$ von der Kantenmenge in die Menge $E^{(2)}$ der ungeordneten Paare von Ecken auffassen. Ein Graph ist demnach nichts anderes als ein Tripel (E, K, f), bestehend aus einer Menge E, einer Menge K und einer Funktion $f : K \to E^{(2)}$.

Bemerkung. Ist M eine Menge, so bezeichnet $M \times M$ die Menge der geordneten Paare von Elementen aus M. Sind $m, n \in M$ Elemente aus M, so bezeichnet (m, n) ein geordnetes Paar, also ein Element in $M \times M$. Verzichten wir auf die Ordnung, so bezeichnen wir das zugehörige Paar mit $[m, n]$. Beachte, dass also $[m, n]$ und $[n, m]$ das gleiche ungeordnete Paar bezeichen. Die Menge der ungeordneten Paare von Elementen in M bezeichnen wir mit $M^{(2)}$.

Wir wollen uns in diesem Kapitel auf endliche Graphen, das heißt auf Graphen (E, K, f) einschränken, für die die Mengen E und K jeweils endliche Mengen sind.

Beispiele. *Die folgende Liste gibt Beispiele für Graphen mit einer zweielementigen Eckenmenge $E = \{A, B\}$ an.*

i) $E = \{A, B\}$, $K = \{a\}$ *mit* $f(a) = [A, A]$;

ii) $E = \{A, B\}$, $K = \{a\}$ *mit* $f(a) = [A, B]$;

iii) $E = \{A, B\}$, $K = \{a, b\}$ *mit* $f(a) = [A, A]$, $f(b) = [A, B]$;

iv) $E = \{A, B\}$, $K = \{a, b, c\}$ *mit* $f(a) = [A, B]$, $f(b) = [A, B]$, *und* $f(c) = [B, B]$.

In der Regel werden Graphen nicht durch ein Tripel (E, K, f) wie oben angegben, sondern durch ein zugehöriges sogenanntes Graphendiagramm. Jede Ecke entspricht dabei einem (verdickten) Punkt in der Ebene, wobei verschiedenen Ecken auch verschiedene Eckpunkte zugewiesen werden. Für jede Kante des Graphen gibt es eine stetige, stückweise differenzierbare Abbildung von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}^2$, und wie bei den Knotendiagrammen von stückweise glatten Knoten verlangt man auch hier, dass die Abbildungen nur an endlich vielen Stellen nicht differenzierbar sind, und dass man stets eine von Null verschiedene Richtungsableitung hat. Des Weiteren dürfen sich die Bilder der Abbildungen nur in endlich vielen Punkten schneiden, und es dürfen sich jeweils nur maximal die Bilder von zwei Kurven in einen gegebenen Punkt schneiden, wobei die Richtungsableitungen der beiden Kurven dann linear unabhängig sein müssen.

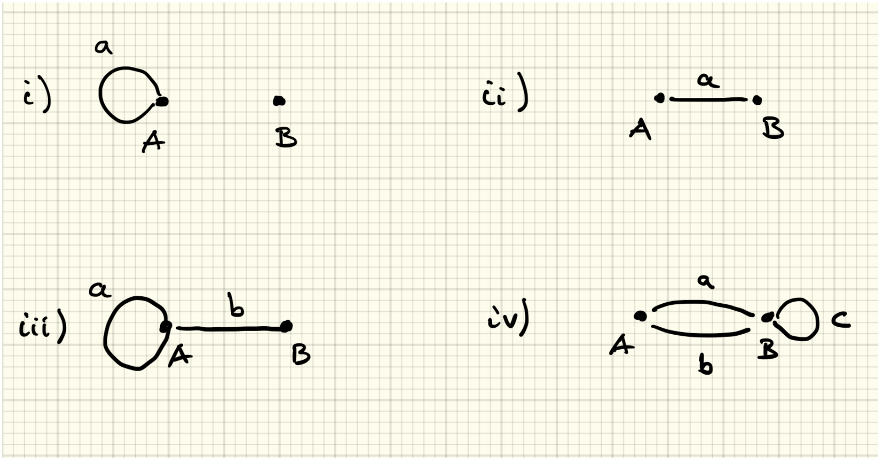


Abbildung 7.1: Graphendiagramme zu den obigen Beispielen

Die folgenden Begriffe und Bezeichnungen für einen Graphen (E, K, f) sind durch die Veranschaulichung von Graphen durch Graphendiagramme motiviert.

- Die einer Kante $k \in K$ zugeordneten Ecken heißen die Ecken der Kante. Wir sagen dann auch, dass die betreffenden Kante die beiden Ecken verbindet. Zwei Ecken, die über eine Kante miteinander verbunden sind, nennen wir benachbart. Die eine Ecke heißt dann auch Nachbar der anderen Ecke. Eine Ecke, die keinen Nachbar besitzt, nennen wir eine isomlierte Ecke.

- Eine Kante, deren beide Eckpunkte identisch sind, heißt eine Schlinge. Wir sagen, dass ein Graph Mehrfachkanten besitzt, falls es mindestens zwei verschiedene Kanten gibt, denen das gleiche Eckenpaar zugewiesen ist. Ein Graph heißt schlicht, falls er weder Schlingen noch Mehrfachkanten besitzt.

Bemerkung. Die Zuordnungsfunktion eines Graphens kann man auch durch eine Tabelle, die sogenannte Inzidenztafel, angeben. Die Zeilen und Spalten der Inzidenztafel entsprechen dabei der Kanten- und der Eckenmenge E, und ist eine Ecke die Ecke einer gegebenen Kante, so schreibt man an die zugehörige Stelle in der Tabelle ein Kreuz.

Für die obigen vier Beipiele sind die Inzidenztafeln wie folgt gegeben

	A	B
a	x	

	A	B
a	x	x

	A	B
a	x	
b	x	x

	A	B
a	x	x
b	x	x
c		x

Bemerkung. Die Zuordnungsfunktion eines Graphens ohne Mehrfachkanten kann man im Wesentlichen auch durch die sogenannte Nachbarschaftstafel erhalten. Die Nachbarschaftstafel ist eine Tabelle, deren Zeilen und Spalten der Eckenmenge entprechen. Sind zwei Ecken benachbart, so setzt man an der betreffenden Stelle in der Tabelle eine Kreuz.

Die Nachbarschaftstafeln für die obigen Beipiele sehen wie folgt aus.

	A	B
A	x	
B		

	A	B
A		x
B	x	

	A	B
A	x	x
B	x	

	A	B
A		x
B	x	x

Man erkennt anhand einer Nachbarschaftstafel bei einem Graph ohne Mehrfachkanten sofort, ob es sich um einen schlichten Graphen handelt oder nicht. Der betreffende Graph ist genau dann ein schlichter Graph, wenn es keinen Eintrag auf der Diagonale in der Inzidenztafel gibt. Weiß man nicht a priori, dass es sich um einen Graphen ohne Mehrfachkanten handelt, so gibt es im allgemeinen viele grundsätzlich verschiedene Graphen, die die gleiche Inzidenztafeln besitzen. Ist von vorneherein bekannt, dass es sich um einen Graphen ohne Mehrfachkanten handelt, so bestimmt die Nachbarschaftstafel den Graphen bis auf Isomorphie (s.u.).

Definition. Zwei Graphen (E, K, f) und (E', K', f') heißen isomorph, falls es bijektive Abbildungen $\phi : E \to E'$ und $\psi : K \to K'$ gibt, so dass für alle Kanten $k \in K$ die Gleichung $f'(\psi(k)) = \phi^{(2)}(f(k))$; dabei ist $\phi^{(2)} : E^{(2)} \to E'^{(2)}$ die Abbildung, die ein Paar $[A, B] \in E^{(2)}$ auf $[\phi(A), \phi(B)] \in E'^{(2)}$ abbildet. Das Paar (ϕ, ψ) heißt dann einen Isomorphismus.

Beispiel. Es sei $\mathcal{G}$ der Graph mit Eckenmenge $E = \{A, B\}$, Kantenmenge $K = \{e\}$ und Zuordnungsfuntion $f : K \to E^{(2)}$ mit $f(e) = [A, A]$. Der Graph $\mathcal{G}'$ sei gegeben durch die Kantenmenge E, die Kantenmenge e' und Zuordnungsfunktion $f' : K' \to E^{(2)}$ mit $f'(e') = [B, B]$. Dann ist das Paar (ϕ, ψ) mit $\phi(A) = B$, $\phi(B) = A$, und $\psi(e) = e'$ ein Isomorphimus. Die Graphen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ sind also isomorph.

Wichtige Größen eines Graphen sind die Mächtigkeit $|E|$ der Eckenmenge, sowie die Mächtigkeit $|K|$ der Kantenmenge. Diese Größe $|E|$ nennt man auch die Ordnung des Graphen. Die folgenden zwei Familien von Graphen werden über die beiden Größen $|E|$ bzw. K eingeführt. Sei dazu n jeweils eine vorgegebene nicht-negative ganze Zahl.

Definition.

- Ein leerer Graph der Ordnung n ist ein Graph, dessen Ordnung n und dessen Kantenmenge leer ist (d.h. es gilt $|E| = n$ und $|K| = 0$). Den leeren Graph der Ordnung n mit Eckenmenge $E_n = \{1, 2, ..., n\}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_n$.
- Ein vollständiger Graph der Ordnung n ist ein schlichter Graph der Ordnung n, bei dem für jedes Paar von verschiedenen Ecken eine Kante existiert, die diese Punkte miteinander verbindet. Den volständigen Graphen der Ordnung n mit Eckenmenge E_n, Kantenmenge $K_n = \{k_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n\}$ und Zuordnungsfunktion f, gegeben durch $f(k_{ij}) = [i, j]$, bezeichnen wir mit $\mathcal{K}_n$.
- Ein bipartiter Graph ist ein Graph mit einer Zerlegung der Eckenmenge in zwei Teilmengen E' und E'', bei dem es jeweils genau eine Kante von jeder Ecke aus E zu jeder Ecke in E' gibt, und sonst keine weiteren. Für zwei natürliche Zahlen

m, n bezeichne $\mathcal{K}_{m,n}$ den bipartiten Graph (E, K, f) mit der Eckemengemenge $E = E' \cup E''$, gegeben durch $E' = \{1, \ldots m\}$ und $E'' = \{m+1, \ldots, m+n\}$, der Kantenmenge $K = \{k_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ m+1 \leq j \leq m+n\}$ und der Zuordnungsfunktion f, gegeben durch $f(k_{ij}) = [i, j]$.

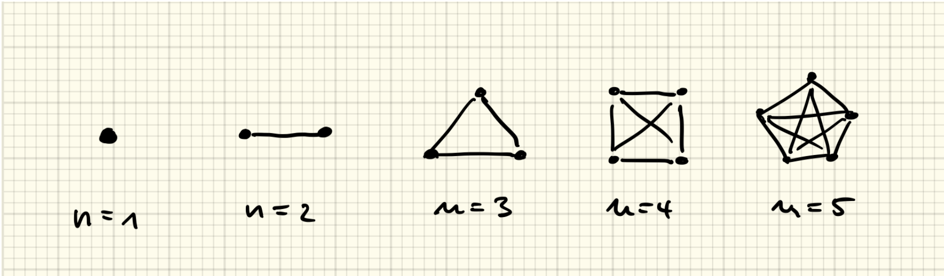


Abbildung 7.2: Graphendiagramme der vollständigen Graphen $\mathcal{K}_n$ für kleine n

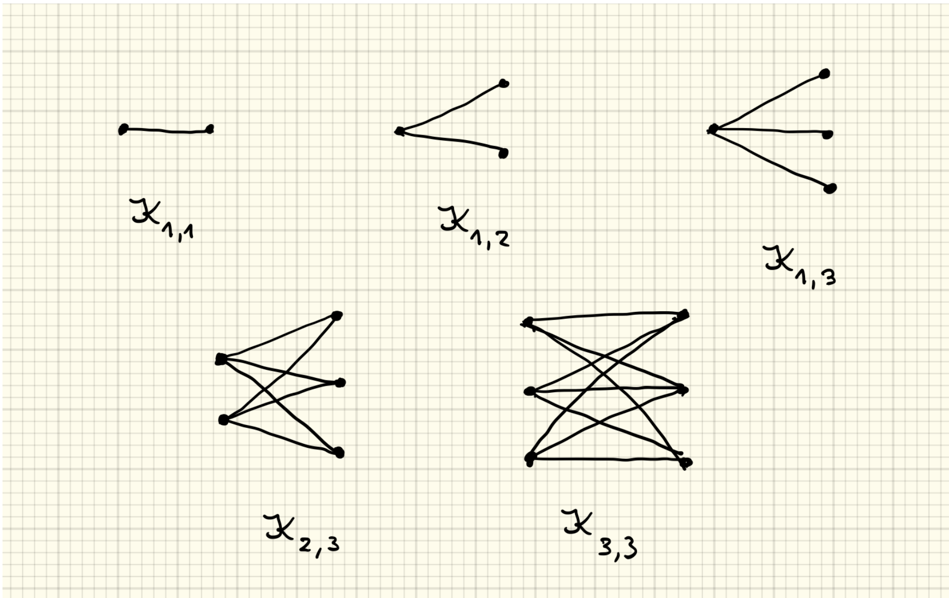


Abbildung 7.3: Graphendiagramme für bipartite Graphen $\mathcal{K}_{m,n}$ für kleine m und n

Beispiele.

- *Die Graphen $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}_m$ sind für verschiedene Werte m und n nicht isomorph, da es dann keine bijektive Abbildung $\phi : E_n \to E_m$ gibt. Ebenso sind auch die Graphen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$ für verschiedene Werte m und n nicht isomorph. Die Graphen $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{K}_n$ sind genau dann isomorph, falls $n = 0$ ist.*

- *Jeder leere Graph der Ordnung n ist isomorph zu dem Graphen $\mathcal{E}_n$. Jeder vollständige Graph der Ordnung n ist isomorph zum $\mathcal{K}_n$.*

Definition. Ein Untergraph (engl. *subgraph* eines Graphen (E, K, f) ist ein Graph (E', K', f') mit $E' \subset E$, $K' \subset K$, dessen Zuordnungsfunktion f' sich durch Einschränkung der Zuordnungsfuntion f ergibt, d.h. für alle Kanten $k \in K'$ gilt $f'(k) = f(k)$. Insbesondere ist ein Untergraph schon durch das Paar (E', K') bestimmt. Jeder Graph mit Eckenmenge E_n ist ein Untergraph des vollständigen Graphen $\mathcal{K}_n$.

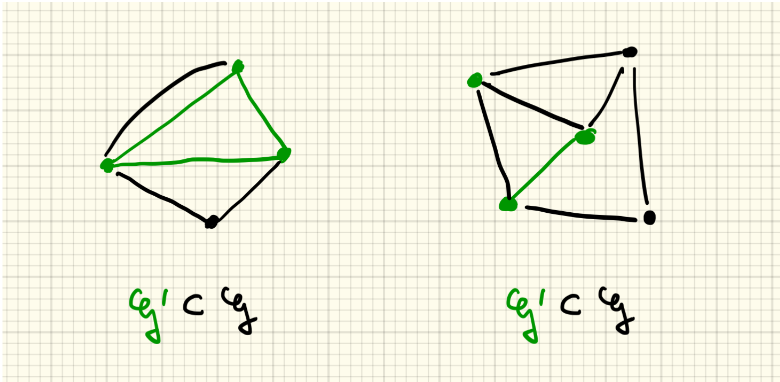


Abbildung 7.4: Graphendiagramme von Untergraphen und zugehörigen Graphen

Definition. Ist ein Graph (E, K, f) und eine Teilmenge $E' \subset E$ gegeben, so definiert man den von E' erzeugten Untergraphen durch das Paar (E', K') mit $K' = \{k \in K \mid f(k) \in E'^{(2)}\}$. Den Graphen bezeichnen wir mit $\langle E' \rangle$. Der durch E' definierte Untergraph hat die Eigenschaft, dass er jeden Untergraphen von (E, K, f) mit zugrundeliegender Eckenmenge E' enthält.

Definition. Der durch eine Teilmenge $K' \subset K$ erzeugte Untergraph eines Graphen (E, K, f) ist durch das Paar (E', K') mit $E' = \{A \in E \mid A \text{ ist Ecke einer Kante in } K'\}$ gegeben. Den durch K' erzeugten Untergraphen bezeichnen wir mit $\langle K' \rangle$. Der durch K' definierte Untergraph hat die Eigenschaft, dass jeder Untergraph von (E, K, f), dessen Kantenmenge die Menge K' enthält ihn als Untergraph enthält.

Wir betrachten nun sogenannte Kantenzüge in Graphen. Anschaulich ist das Konzept eines Kantenzuges in einem Graphen leicht zu verstehen. Ein Kantenzug entspricht im Wesentlichen einem Weg, der in einem Graphendiagramm von einem Eckpunkt zu einem anderen Eckpunkt führt. Da das Konzept eines Kantenzuges aber unabhängig von einem Graphendiaramm definiert werden soll, verwenden wir dafür die folgende formale Definition.

Definition. Ein Kantenzug (engl. *walk*) in einem Graphen (E, K, f) ist eine endliche geordnete Menge $(A_1, k_1, A_2, k_2, ..., A_n)$ in der abwechselnd *Ecken* $A_i \in E$ und Kanten $k_i \in K$ auftreten. Die Sequenz beginnt und endet mit Ecken und unterliegt der Bedingung, dass für alle Kanten k_i die Gleichung $f(k_i) = [A_i, A_{i+1}]$ gilt. Die Ecke A_1 heißt der Anfang, und die Ecke A_n heißt das Ende des Kantenzuges. Die Zahl n heißt die Länge des Kantenzuges.

Bemerkung. Ist $\mathcal{G}$ ein Graph mit einer Schlinge und ist eine Schlinge ein Element eines Kantenzugs, so passt das Bild, dass ein Kantenzug ein Weg in einem zugehörigen Graphendiagramm entspricht nicht ganz. Eine Durchlaufrichtung für die Schlinge kann man aus einem Kantenzug nicht ableiten.

Definition. Ein Graph (E, K, f) heißt zusammenhängend, falls man zu jedem Eckenpaar $(A, B) \in E^2$ einen Kantenzug mit A als Anfang und B als Ende finden kann. Ein maximaler zusammenhängender Untergraph heißt eine Komponente des Graphen.

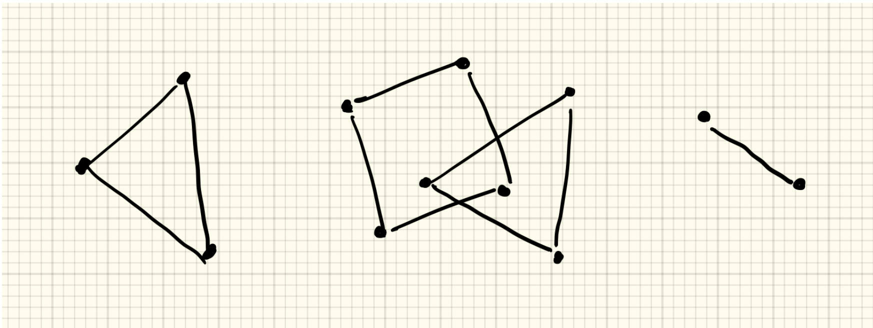


Abbildung 7.5: Graphendiagramm eines Graphen mit 4 Komponenten

Bemerkung. Wir werden später noch sehen, dass die Eigenschaft zusammenhängend zu sein eine topologische Eigenschaft des Graphens ist.

Definition. Eine Zerlegung eines Graphen (E, K, f) ist eine disjunkte Zerlegung der Eckenmenge in disjunkte Teilmengen E_1, E_2, ..., E_n, so dass Ecken aus E_i und E_j nur dann benachbart sind, falls $i = j$ gilt.

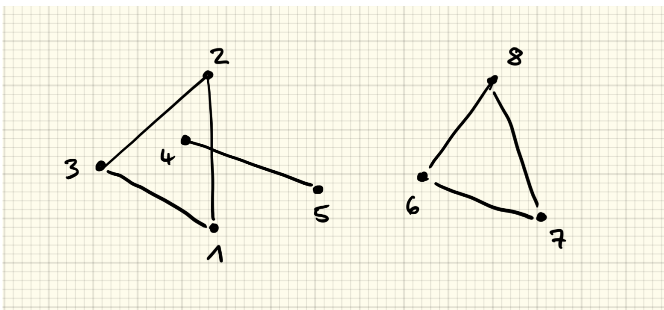
Bemerkung. Eine Zerlegung einer endlichen Menge M ist eine Familie von Teilmengen $M_i \subset M$ mit der Eigenschaft, dass

i) $M_i \cap M_j = \varnothing$ falls $i \neq j$

ii) $\cup_i M_i = M$

gilt. Eine Zerlegung eines Graphens entspricht also einer Zerlegung der Eckenmenge, für die man eine zusätzliche Eigenschaft fordert.

Beispiel. Wir betrachten den Graphen mit nachfolgenden Graphendiagramm



Wir erhalten für ihn folgende Zerlegungen.

- $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7,8\}$
- $\{1,2,3,4,5\}$, $\{6,7,8\}$
- $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6,7,8\}$
- $\{1,2,3,6,7,8\}$, $\{4,5\}$
- $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Beispiel. Die Menge der Komponenten eines Graphens bildet eine kanonische Zerlegung des Graphens. In obigem Beispiel entspricht sie der ersten Zerlegung.

Das nachstehenden Lemma brauchen wir zum Beweis der Eulerformel für plättbare Graphen (s.u.).

Lemma. *Es sei $\mathcal{G} = (E, K, f)$ ein nicht-leerer, zusammenhängender Graph, dessen Eckenmeg E und Kantenmege K beides endliche Mengen sind. Es sei $e = |E|$, und $k = |K|$.*

- *Es gibt eine Folge von zusammenhängenden Untergraphen $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_e$, sodass $\mathcal{G}_i$ für alle $1 \leq i \leq e$ jeweils genau i Ecken hat.*
- *Es gibt eine Folge von zusammenhängenden Untergraphen $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_k$, sodass $\mathcal{G}_i$ für alle $0 \leq i \leq k$ jeweils genau i Kanten hat.*

Beweis.

- Wir konstruieren eine Folge von Graphen wie im Lemma gefordert induktiv mit einer Induktion über die Ordnugn der Untergraphen. Der gegebene Graph $\mathcal{G}$ ist nicht leer, und wir wählen zunächst einen beliebigen Punkt aus und setzen $\mathcal{G}_1$ fest als den leeren Graphen, dessen Eckenmege genau aus dem gewählten Punkt besteht. Wir nehmen nun an, dass wir $\mathcal{G}_i = (E_i, K_i, f_i)$ mit i Ecken schon konstruiert haben, und dass noch $i < e$ gilt. Dann enthält die Eckenmenge E_i also noch nicht alle Ecken in E. Wir wählen nun eine Ecke $A_{i+1} \in E \backslash E_i$, die mit einer Ecke aus E_i verbunden. Eine solche Ecke muss es geben, denn andernfalls wäre $\{E_i, E \backslash E_i\}$ eine Zerlegung von $\mathcal{G}$, und eine solche Zerlegung kann es nicht geben, da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir setzen nun $E_{i+1} = E_i \cup \{A_{i+1}\}$ und definieren $\mathcal{G}_{i+1}$ als den von E_{i+1} erzeugten Untergraph. Insgesamt ergibt sich so eine Folge von Untergraphen mit den gesuchten Eigenschaften.
- Wir konstruieren eine Folge von Graphen wie im Lemma gefordert induktiv mit einer Induktion über die Mächtigkeit der Kantenmenge der Untergraphen. Wir beginnen mit der Induktion wie im ersten Fall durch Auswahl eines Punktes und definieren $\mathcal{G}_0$ als den zugehörigen leeren Graphen. Wir nehmen nun an, dass wir $\mathcal{G}_i = (E_i, K_i, f_i)$ mit i Kanten schon konstruiert haben, und dass noch $i < k$ gilt. Stimmt der Graph $\mathcal{G}_i$ nicht mit dem durch die Eckenmenge E_i erzeugten Unetrgraph, so wählen wir eine Kante k_{i+1} aus dem durch die Eckenmenge E_i erzeugten

Untergraph, die nicht in K_i enthalten ist. Wir setzen nun $K_{i+1} = K_i \cup \{k_{i+1}\}$ und definieren $\mathcal{G}_{i+1}$ als den von K_{i+1} erzeugten Untergraphen. Stimmt der Graph $\mathcal{G}_i$ mit dem durch die Eckenmenge E_i erzeugten Untergraph, so ist $E \backslash E_i$ nicht leer, und wie im ersten Fall gibt es also eine Ecke A_{i+1}, die über eine Kante k_{i+1} mit einer Ecke in E_i verbunden sein muss. Wir setzen dann $K_{i+1} = K_i \cup \{k_{i+1}\}$ und definieren $\mathcal{G}_{i+1}$ als den von dieser Kantenmenge K_{i+1} erzeugten Untergraphen. Insgesamt ergibt sich so eine Folge von Untergraphen mit den gesuchten Eigenschaften.

□

Definition. Ein Graphendiagramm, bei dem sich die Verbindungslinien nicht kreuzen, heißt ein planares Graphendiagramm. Ein Graph heißt plättbar, wenn er ein planares Graphendiagramm besitzt.

Bemerkung. Ist ein Graph durch ein Graphendiagramm gegeben, bei dem sich die Verbindungslinien kreuzen, so kann es sich trotzdem um einen plättbaren Graphen handeln.

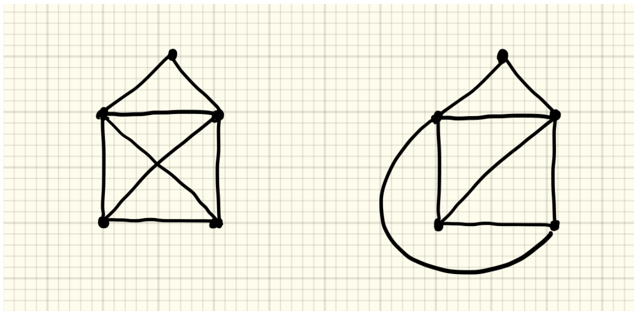


Abbildung 7.6: Graphendiagramme eines Graphen mit und ohne Doppelpunkt

Definition. Für ein planares Graphendiagramm definieren wir die Flächenzahl f als die Anzahl der Flächen, in die die Ebene durch das Graphendiagramm unterteilt wird.

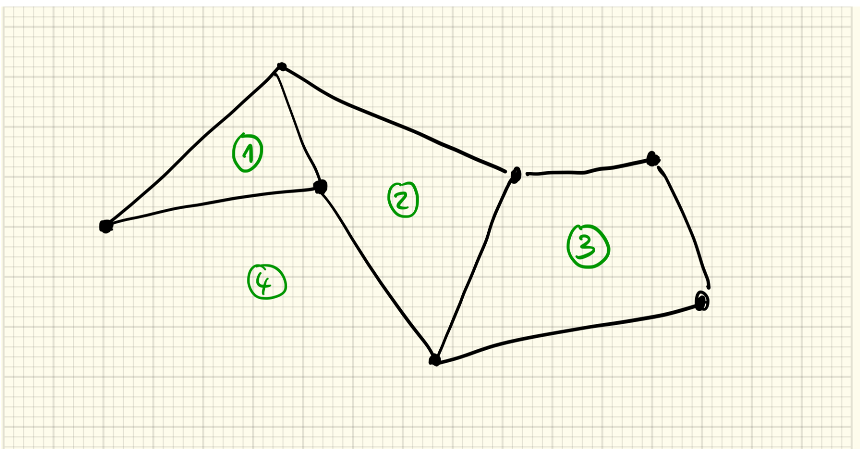


Abbildung 7.7: Planares Graphendiagram mit Flächenzahl $f = 4$

Satz (Eulerformel)**.** *Es sei* $\mathcal{G} = (E, K, f)$ *ein zusammenhängender plättbarer Graph mit mindestens einer Ecke. Ist ein planares Graphendiagramm für* $\mathcal{G}$ *gegeben, so gilt*

$$e - k + f = 2,$$

wobei

$$\begin{aligned} e &= \textit{Anzahl der Ecken } |E|, \\ k &= \textit{Anzahl der Kanten } |K|, \\ f &= \textit{Flächenzahl des Diagramms.} \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit einer Induktion über die Kantenanzahl $k = |K|$. Sei zunächst $k = 0$. Da $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist, besitzt $\mathcal{G}$ in diesem Fall nur eine Ecke. Dann gilt $e = 1$, $k = 0$ und $f = 1$. Also $e - k + f = 1 - 0 + 1 = 2$. Wir nehmen nun an, dass die Aussage für planare Graphendiagramme von zusammenhängenden plättbaren Graphen mit mindestens einer Ecke und höchstens k' Kanten gilt, und es sei $\mathcal{G}$ ein zusammenhängender plättbarer Graph mit $k = k' + 1 > 0$ Kanten. Aus dem Beweis der zweiten Aussage des voranstehenden Lemmas ergibt sich, dass es einen nicht-leeren, zusammenhängenden Untergraphen $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}$ mit k' Kanten gibt. Ein planares Graphendiagramm für $\mathcal{G}$ liefert auch ein planares Graphendiagramm für $\mathcal{G}'$. Laut Induktionsvorausetzung erfüllt $\mathcal{G}'$ mit diesem Graphendiagramm die Voraussetzungen für die Induktionsannahme, und es gilt daher für die Eckenzahl e', die Kantenanzahl k' und die Flächenzahl f' des zugehörigen Graphendiagramms die Gleichung $e' - k' + f' = 2$. Wir erhalten das Graphendiagramm für $\mathcal{G}$ zurück, indem wir die Kante mit ihren Ecken wieder hinzunehmen. Dabei können die folgenden drei Fälle auftreten.

1) y ist eine Schlinge. In diesem Fall gilt $e = e'$, $k = k' + 1$, $f = f' + 1$, also $e - k + f = e' - k - 1 + f' + 1 = 2$.

2) y verbindet zwei verschiedene Ecken, die beide zu $\mathcal{G}'$ gehören. In diesem Fall gilt $e = e'$, $k = k' + 1$, $f = f' + 1$, also $e - k + f = e' - k - 1 + f' + 1 = 2$.

3) y stellt eine Verbindung zu einer Ecke her, die nicht zu $\mathcal{G}'$ gehört. In diesem Fall gilt $e = e' + 1$, $k = k' + 1$, $f = f'$, also $e + 1 - k + f = e' - k - 1 + f' = 2$.

Eine Veranschaulichung der drei Fälle ist in der nächstenb Abbildung dargestellt. In jedem dieser drei Fälle gilt die Eulerformel also auch für $\mathcal{G}$. $\square$

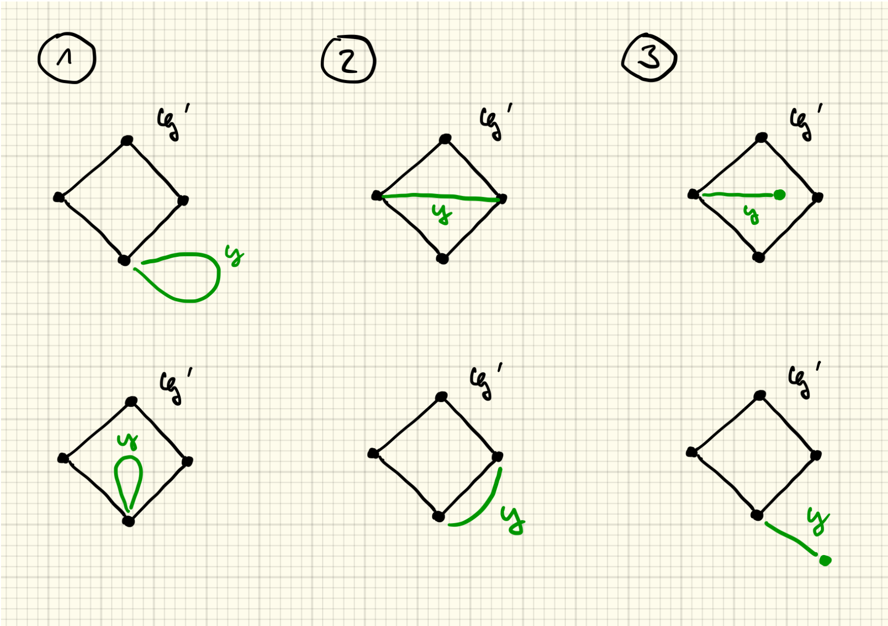


Abbildung 7.8: Skizzen zu den drei möglichen Fällen im Induktionsschritt

Bemerkung. Die Flächenzahl, die wir einem planaren Graphendiagramm zugeordnet haben, hängt de facto nur von dem zugehörigen Graphen (E, K, f) ab. Sie ist also eine Invariante eines plättbare Graphen und gegeben durch $f = 2 + k - e = 2 + |K| - |E|$.

Definition. Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Es sei der Untergraph des vollständigen Graphen $\mathcal{K}_n$, der durch die Kantenmenge $K^{\mathcal{C}} = \{k_{12}, k_{23}, \ldots, k_{n-1,n}, k_{1n}\}$ erzeugte Untergraph. Ein Graph, der isomorph zu $\mathcal{C}_n$ ist, heißt Kreis der Lmänge n. Einen Kreis der Länge n nennt man auch ein n-Eck. Ein zusammenhängender, schlichter Graph der keinen Kreis enthält, nennt man einen Baum.

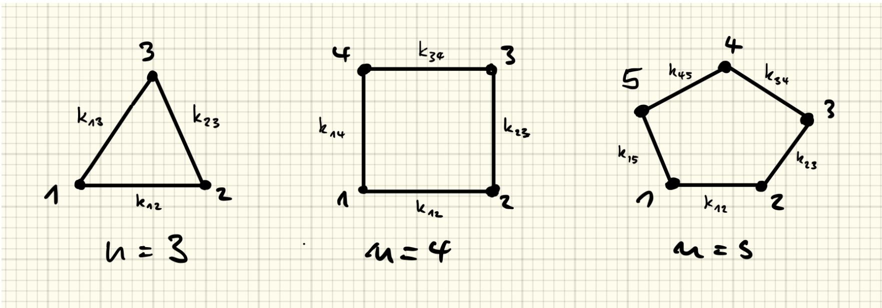


Abbildung 7.9: Graphendiagramme für die $\mathcal{C}_n$ für kleine n

Bemerkung. Die Eigenschaft, dass ein Graph einen Kreis als Untergraph besitzt, ist eine topologische Eigenschaft.

Satz. *Es sei $\mathcal{G}$ ein zusammenhängender, schlichter, plättbarer Graph der Ordnung $n \geq 3$.*

i) $\mathcal{G}$ hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

ii) Ist $\mathcal{G}$ kein Baum, und ist g die Länge eines kleinsten Kreises in $\mathcal{G}$, so gilt

$$k \leq \max\left\{\frac{g}{g-2}(n-2), n-1\right\}.$$

Beweis wird nicht ausgeführt. □

Korollar.

- *Der $\mathcal{K}_5$ ist nicht plättbar. Denn in diesem Fall gilt $e(\mathcal{K}_5) = 5$, $k(\mathcal{K}_5) = 10$ und $g(\mathcal{K}_5) = 3$, und es ist $10 > \max\{\frac{3}{3-1}(5-2), 5-1\} = 9$.*
- *Der $\mathcal{K}_{3,3}$ (der sog. GEW-Graph) ist nicht plättbar. Denn in diesem Fall gilt $e(\mathcal{K}_{3,3}) = 6$, $k(\mathcal{K}_{3,3}) = 9$ und $g(\mathcal{K}_{3,3}) = 4$, und es ist $9 > \max\{\frac{4}{4-2}(6-2), 6-1\} = 8$.*

Satz. *Jeder Graph, der einen nichtplättbaren Untergraphen besitzt, ist nicht plättbar.*

Beweis. Diese Aussage ist sofort einsehbar, denn hätte man einen planares Graphendiagramm für den Graphen gegeben, so erhielte man sofort durch Herausnahme von Ecken und Kanten ein planares Graphendiagramm für den Untergraphen. Also wäre damit auch der Untergraph ein plättbarer Graph. Widerspruch! □

Beispiel. Enthält ein Graph den $\mathcal{K}_5$ oder den $\mathcal{K}_{3,3}$ als einen Untergraphen, so ist er nicht plättbar.

Definition. Ein Graph $\mathcal{G}'$ heißt Unterteilung eines Graphen $\mathcal{G}$, wenn man ein Graphendiagramm für $\mathcal{G}'$ dadurch erhält, dass man zusätzliche Eckpunkte auf Verbindungslinien in einem Graphendiagramm von $\mathcal{G}$ einführt.

Bemerkung. Offensichtlich ist eine Unterteilung eines Graphens genau dann plättbar, wenn der Graph selbst plättbar ist.

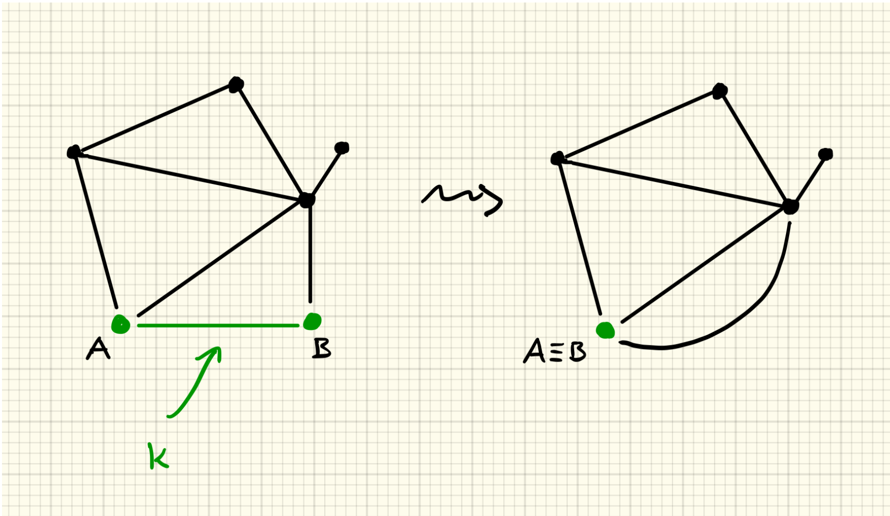
Satz. *Jeder Graph, der eine Unterteilung eines nicht-plättbaren Graphen als Untergraph enthält, ist nicht plättbar.*

Beweis. Die Aussage folgt im Wesentlichen analog wie im obigen Satz. □

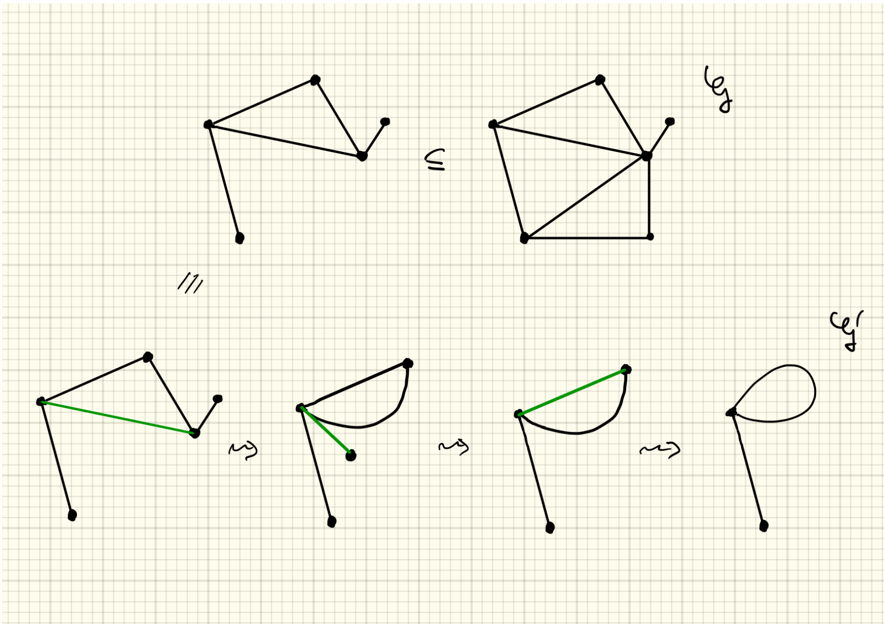
Satz (Kuratowski)**.** *Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er weder eine Unterteilung des Graphen $\mathcal{K}_5$ noch eine Unterteilung des Graphen $\mathcal{K}_{3,3}$ als Untergraphen enthält.*

Beweis wird nicht ausgeführt. □

Definition. Es sei $\mathcal{G} = (E, K, f)$ ein Graph. Wir sagen, dass ein Graph $\mathcal{G}'$ durch Kantenkontraktion aus $\mathcal{G}$ entsteht, wenn es eine Kante $k \in K$ gibt, so dass $\mathcal{G}'$ dadurch entsteht, dass die Kante k aus der Kantenmenge entfernt wird, die beiden Ecken in $f(k)$ miteinander identifiziert werden und sich die Zuordnungsfunktion f' von $\mathcal{G}'$ durch die Identifikation aus f ergibt.



Definition. Es sei $\mathcal{G} = (E, K, f)$ ein Graph. Wir sagen, dass ein Graph $\mathcal{G}'$ ein Minor von $\mathcal{G}$ ist , wenn er durch eine endliche Folge von Kantenkontraktionen aus einem Untergraphen von $\mathcal{G}$ entsteht.



Satz (Wagner)**.** *Ein zusammenhängender, schlichter Graph ist genau dann plättbar, wenn er weder einen Minor, der isomorph zu $\mathcal{K}_5$ ist, noch einen Minoren, der isomorph zu $\mathcal{K}_{3,3}$ ist, besitzt.*

Beweis wird nicht ausgeführt. □

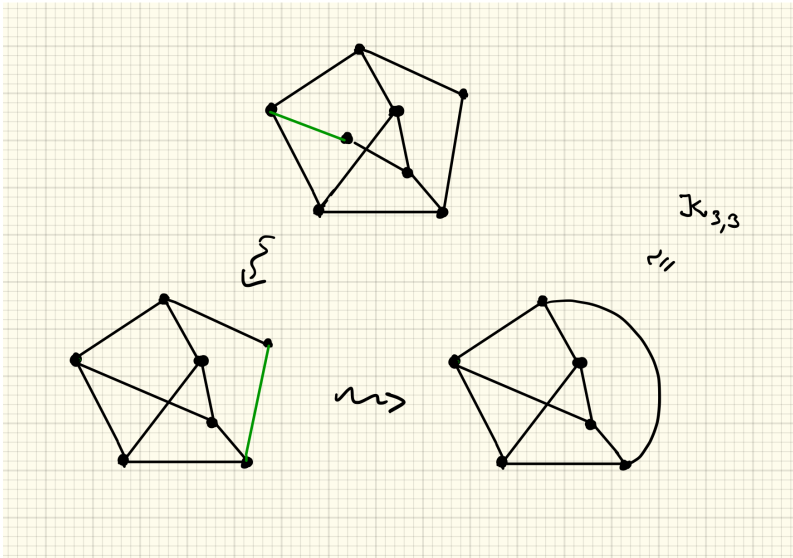


Abbildung 7.10: Beispiel für einen nicht-plättbaren Graph

Definition. Ein gerichteter Graph $\tilde{\mathcal{G}}$ ist ein Tripel $(E, K, \tilde{f})$, bestehend aus einer Eckenmene E, einer Kantenmenge K, und einer Zuordnungsfunktion $\tilde{f} : K \to E^2 = E \times E$. Ist $k \in K$ eine Kante mit $\tilde{f}(k) = (A, B)$, so verstehen wir k als eine Kante, die von der Ecke A zur Ecke B läuft. In diesem Sinne besitzt jede Kante eien Durchlaufrichtung.

Indem wir die Durchlaufrichtungen vergessen erhalten wir aus einem gerichteten Graphen einen zugehörigen zugrundeliegenden Graphen $\mathcal{G} = (E, K, f)$, dessen Zuordnungsfunktion f gegeben ist durch

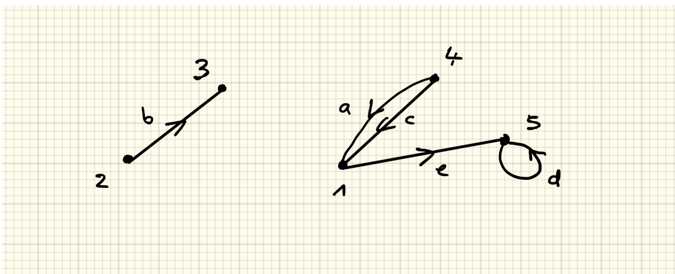
$$\begin{aligned} f : K \xrightarrow{\tilde{f}} \quad & E^2 && \longrightarrow E^{(2)} \\ & (A, B) && \longmapsto [A, B] \end{aligned}$$

Graphendiagramme von gerichteten Graphen sind Graphendiagramme des zugrundeliegenden Graphen, bei der jede Verbindungslinie durch eine an ihr angebrachten Pfeilspitze mit einer Durchlaufrichtung versehen wird.

Beispiel. Es sei $\tilde{\mathcal{G}}$ der gerichtete Graph mit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $K = \{a, b, c, d, e\}$, und

$$\tilde{f}(a) = (4, 1), \quad \tilde{f}(b) = (2, 3), \quad \tilde{f}(c) = (4, 1), \quad \tilde{f}(d) = (5, 5),, \quad \tilde{f}(e) = (1, 5)$$

Ein zu $\tilde{\mathcal{G}}$ gehöriges Graphendiagramm könnte z.B. wie folgt aussehen:

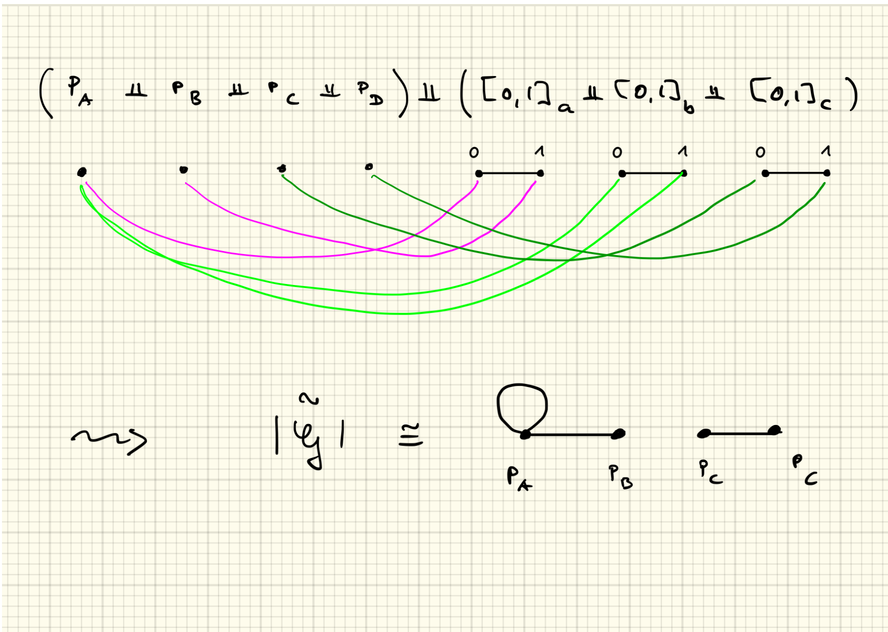


Definition. Die geometrische Realisierung eines gerichteten Graphen $\tilde{\mathcal{G}} = (E, K, \tilde{f})$ ist gegeben durch den folgenden topologischen Raum: Für jede Ecke $A \in E$ sei P_A der Raum, der nur aus einem Punkt mit Namen A besteht; für jede Kante $k \in K$ sei $[0,1]_k$ jeweils eine Kopie des Einheitsintervals $[0,1]$; die geometrische Realisierung $|\tilde{\mathcal{G}}|$ ist dann der Quotientenraum

$$\left(\coprod_{A \in E} P_A \quad \amalg \quad \coprod_{k \in K} [0,1]_k \right) / \sim$$

wobei die definierende Äquivalenzrelation erzeugt wird durch die folgenden Identifizierungen: für jede Kante $k \in K$ mit $\tilde{f}(k) = (A, B)$ identifiziert man $0 \in [0,1]_k$ mit $A \in P_A$, und $1 \in [0,1]_k$ mit $B \in P_B$.

Beispiel. $\tilde{\mathcal{G}}$ sei der wie folgt gegebene gerichtete Graph: $E = \{A, B, C, D\}$, $K = \{a, b, c\}$, und $\tilde{f}(a) = (A, B)$, $\tilde{f}(b) = (A, A)$, $\tilde{f}(c) = (C, D)$. Die nachfolgende Skizze veranschaulicht den Identifizierungsprozeß.



Bemerkung. Sind $\tilde{\mathcal{G}}_1$ und $\tilde{\mathcal{G}}_2$ zwei gerichtete Graphen mit gleichem zugrundeliegenden Graphen, so gilt $|\tilde{\mathcal{G}}| \cong |\tilde{\mathcal{G}}|$.

Bemerkung. Planare Graphendiagramme entsprechen Einbettungen von $|\tilde{\mathcal{G}}|$ nach $\mathbb{R}^2$. Gewöhnliche Graphendiagramme entsprechen speziellen stetigen Abbildungen von $|\tilde{\mathcal{G}}|$ nach $\mathbb{R}^2$.

Frage. Welche (gerichteten) Graphen besitzen eine Einbettung von $|\tilde{\mathcal{G}}|$ nach S^2?
Es sind genau die plättbaren Graphen!

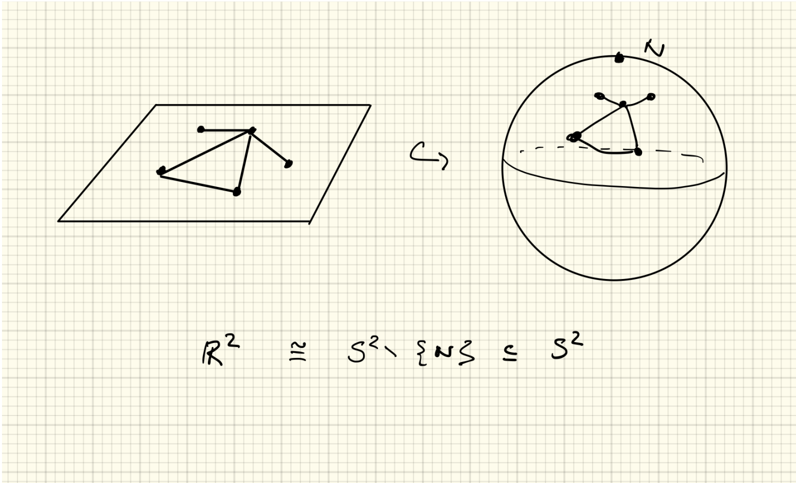


Abbildung 7.11: Einbettung eines plättbaren Graphen nach S^2

Frage. Welche (gerichteten) Graphen besitzen eine Einbettung von $|\tilde{\mathcal{G}}|$ nach $S^1 \times S^1$?

Frage. Oder konkreter, es sei $\tilde{\mathcal{G}}$ ein gerichteter Graph, dessen zugrundeliegender Graph isomorph zu $\mathcal{K}_5$ ist. Gibt es eine Einbettung $\tilde{\mathcal{G}}$ nach $S^1 \times S^1$?
Dies geht, wie man durch untenstehendes Diagramm sieht:

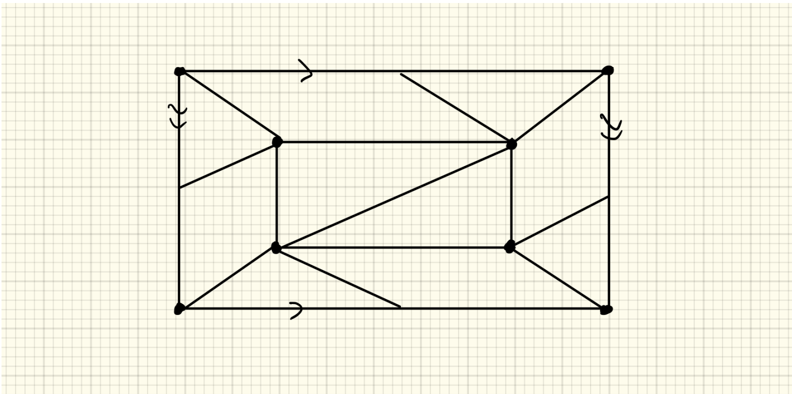


Abbildung 7.12: Skizze für eine Einbettung des $\mathcal{K}_5$ in den Torus

Auch Realisierungen von gerichteten Graphen, deren zugrundeliegenden Graphen isomorph zum $\mathcal{K}_6$ oder zum $\mathcal{K}_7$ lassen sich einbetten.

Satz (E. Joachim)**.** *Der $\mathcal{K}_{3,7}$ und der $\mathcal{K}_8$ ohne ein Dreieck sind minimale Graphen für $S^1 \times S^1$, d.h. ist $\tilde{\mathcal{G}}$ ein gerichteter Graph mit zugrundeliegendem Graph $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{K}_{3,7}$ oder zum $\mathcal{K}_8$ ohne ein Dreieck, so läßt er sich nicht nach $S^1 \times S^1$ einbetten . Dies wird allerdings möglich, sobald man nur eine Kante aus dem Graphen herausnimmt.*

Beweis wird nicht ausgeführt. □

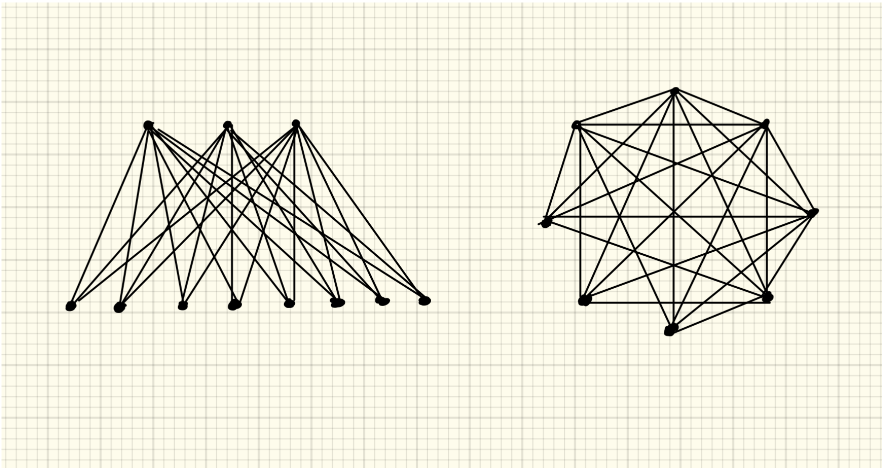


Abbildung 7.13: Graphendiagramm für den $\mathcal{K}_{3,7}$ und den $\mathcal{K}_8$ ohne ein Dreieck

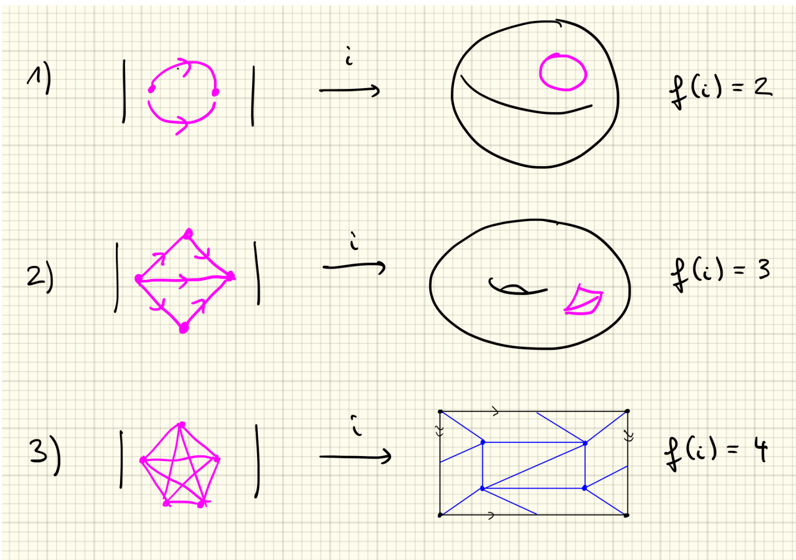
Wir wollen nun eine Invariante für Einbettungen von Realisierungen von Graphen in eine Fläche definieren. Dazu führen wir folgende Definition ein.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, dass zwei Punkte $x, x' \in X$ durch einen Weg verbindbar sind, falls es eine stetige Abbildung $w : [0,1] \to X$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = x'$. Dieses Eigenschaft ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennt man Wegekomponeneten.

Definition. Ist $\tilde{\mathcal{G}}$ ein gerichteter Graph, und ist $i : |\tilde{\mathcal{G}}| \to F$ eine Einbettung von $|\tilde{\mathcal{G}}|$ in eine Fläche F, so definieren wir die Flächenzahl

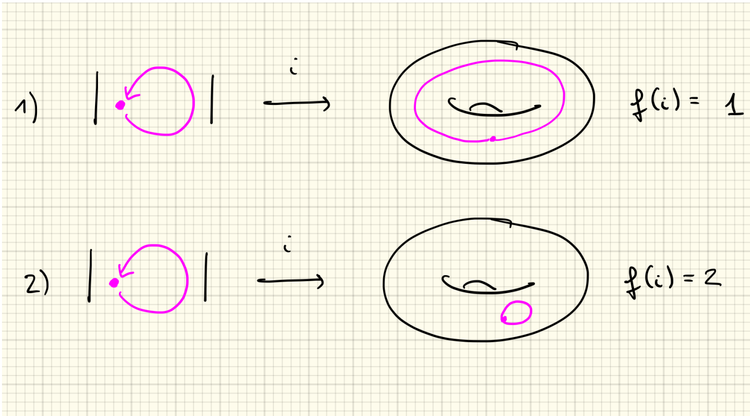
$$f(i) = \text{Anzahl der Wegekomponenten von } F \backslash i(|\tilde{\mathcal{G}}|)$$

Beispiele.



Bemerkung. Ist $\mathcal{G}$ ein plättbarer Graph und ist $i : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}^2$ eine Einbettung, die einem planaren Graphendiagramm entspricht, so gilt $e - k + f(i) = 2$, also $f(i)n = 2 + k - e$. Die Flächenzahl hängt also in diesem Fall gar nicht von der expliziten Einbettung i ab!

Beispiele. *Für Einbettung einer gegebenen Realisierung in den Torus hängt die Flächenzahl im Allgemeinen explizit von der Einbettung ab.*



Definition. Ein nicht-leerer Raum X heißt kontraktibel, wenn es $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $H : X \times I \to X$ mit $H(x, 0) = x_0$ und $H(x, 1) = x$ für alle $x \in X$ gibt.

Beispiel. $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ ist kontraktibel. Für den Nachweis nutze etwa die Abbildung $H : X \times I \to X,\ H(x, t) = t \cdot x$, mit $x_0 = 0$.

Definition. Es sei $\tilde{\mathcal{G}}$ ein gerichteter Graph und F eine zusammenhängende, geschlossene Fläche. Eine Einbettung $i : |\tilde{\mathcal{G}}| \to F$ heißt *zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignet*, falls alle Wegekomponenten von $F \backslash i(|\tilde{\mathcal{G}}|)$ kontraktibel sind.

Beispiele. *Für Einbettung einer gegebenen Realisierung in den Torus hängt die Flächenzahl im Allgemeinen explizit von der Einbettung ab.*

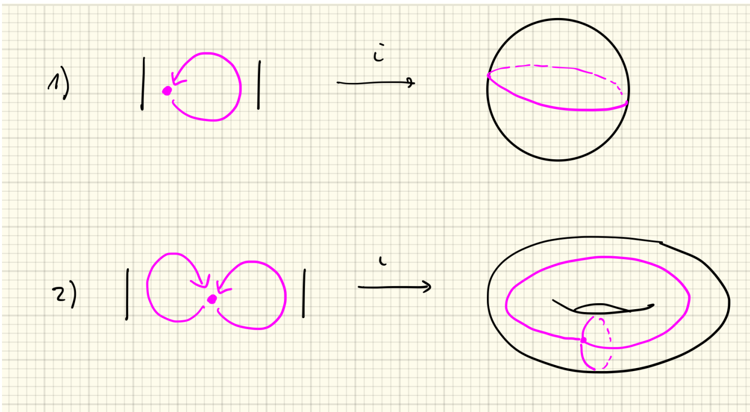


Abbildung 7.14: Zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignete Einbettungen

Satz. *Ist $\tilde{\mathcal{G}}$ ein gerichteter Graph und $i : |\tilde{\mathcal{G}}| \to F$ eine zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignete Einbettung, so hängt $f(i)$ gar nicht von der konkreten Einbettung, sondern nur von dem Graphen $\mathcal{G}$ und der Fläche F ab.*

Definition (mit einer zu beweisenden Aussage)**.** Für eine geschlossene Fläche definieren wir die Eulercharakteristik durch

$$\chi(F) = e - k - + f(i)$$

für eine zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignete Einbettung $i : |\tilde{\mathcal{G}}| \to F$. Insbesondere heißt dies implizit auch, dass die Zahl $\chi(F)$ weder von der Wahl des (gerichteten) Graphen $\tilde{\mathcal{G}}$ noch von der Einbettung i abhängt.

Beweisidee. Um einen Beweis für die in die Definition eingehende Aussage zu erhalten, kann man so ähnlich wie bei dem Beweis der Eulerformel (s.o.) vorgehen. Der Beweis wird hier nicht ausgeführt. □

Bemerkung. Für jede zusammenhängende, geschlossene Fläche F exisitiert eine zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeignete Einbettung

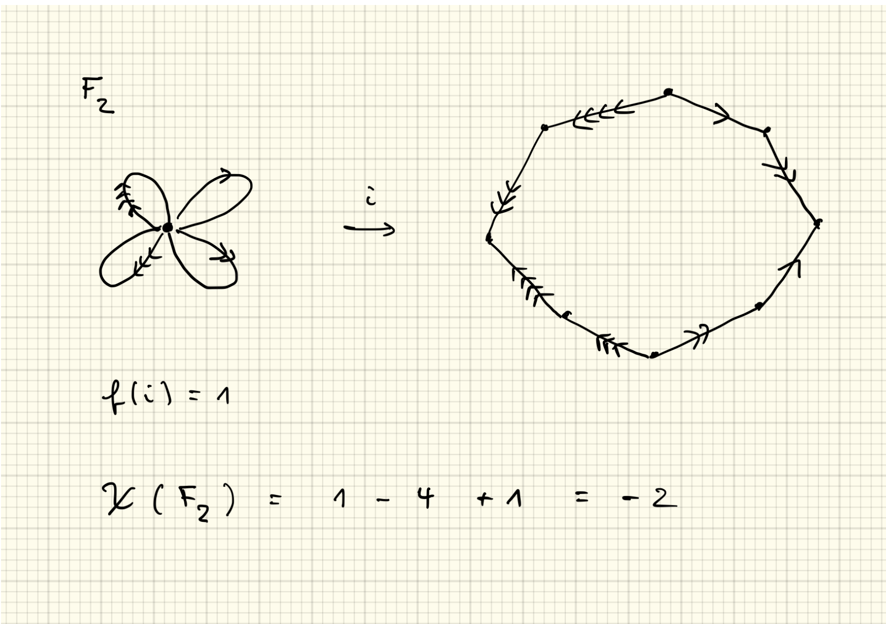


Abbildung 7.15: Flächenzahlen für die Standardkonstruktionen von F_g

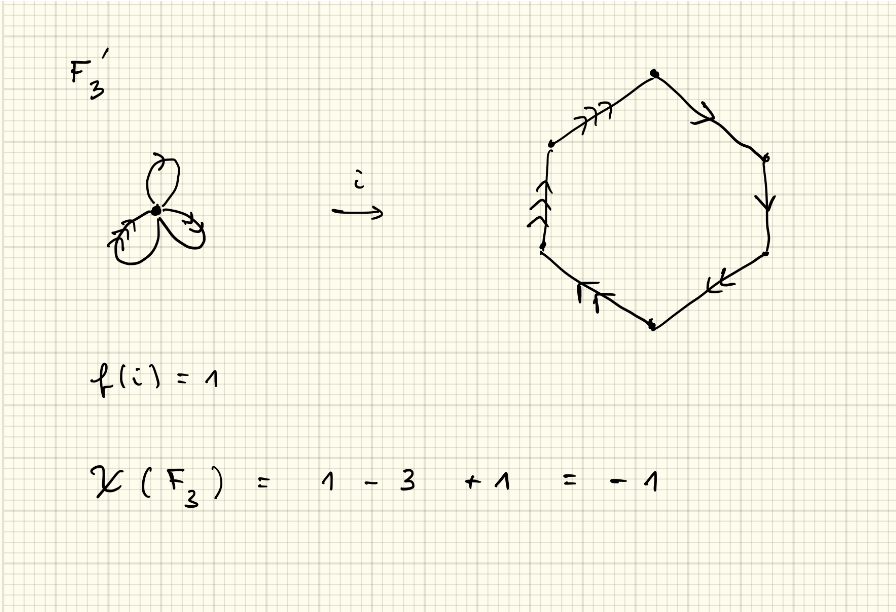


Abbildung 7.16: Flächenzahlen für die Standardkonstruktionen von F_g'

Satz. *Die Eulercharakteristiken für die Standardflächen sind gegeben durch*

$$\chi(F_g) = 2 - 2g, \quad \chi(F_g') = 2 - g$$

Definition. Ein Polyeder im $\mathbb{R}^3$ ist eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge P des $\mathbb{R}^3$, deren Rand ∂P die Vereinigung von endlich vielen ebenen Polygonen ist, die sich paarweise jeweils nur in einer Kante, einem Eckpunkt oder gar nicht schneiden.

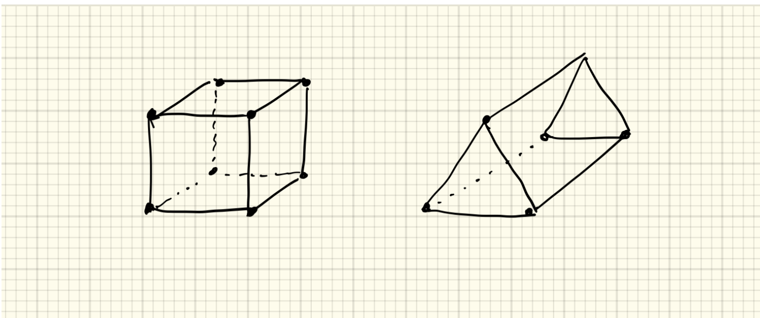


Abbildung 7.17: Polyeder im $\mathbb{R}^3$

Definition. Eine regulärer Polyeder ist ein nicht-leerer, konvexer Polyeder P im $\mathbb{R}^3$ mit $\overline{\dot{P}} = P$ und der Eigenschaft, dass

- Der Rand ∂P besteht aus der vereinigung von kongruenten, regelmäßigen Polygonene, die sich entweder genau in einer Kante oder garnicht schneiden;
- An jedem Eckpunkt dieser Polygone treffen genau gleichviele Polygonekanten von ∂P zusammen.

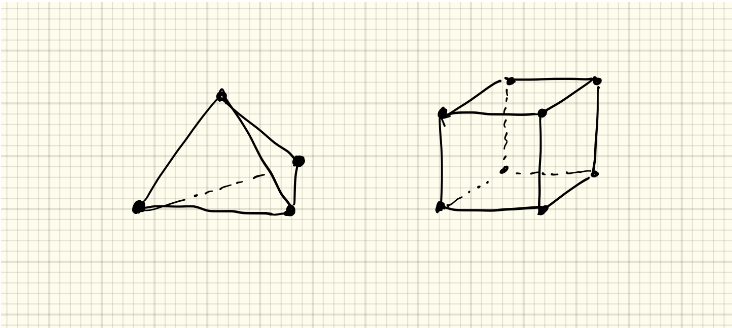


Abbildung 7.18: Reguläre Polyeder im $\mathbb{R}^3$

Lemma. *Ist P ein regulärer Polyeder, so ist ∂P homöomorph zur S^2.*

Beweisidee. Da P beschränkt ist gibt es ein reelle Zahl $R > 0$, so dass $P \subset B_R(0))$. Für einen geeigneten Punkt $Q \in \dot{P}$ können wir einen Homöomorphismus $\varphi : \partial P \to \partial B_R(0)$ definieren, in dem wir einem Punkt $x \in \partial P$ den Schnittpunkt des Halbstrahl von Q durch x mit dem Rand der Kugel $\partial B_R(0)$ zuordnen. Einen Hömöomorphimsus von ∂P nach S^2 erhalten wir wenn wir den Homöomorphismus φ mit einem Homöomorphismus $\partial B_R(0) \cong S^2$ verknüpfen. □

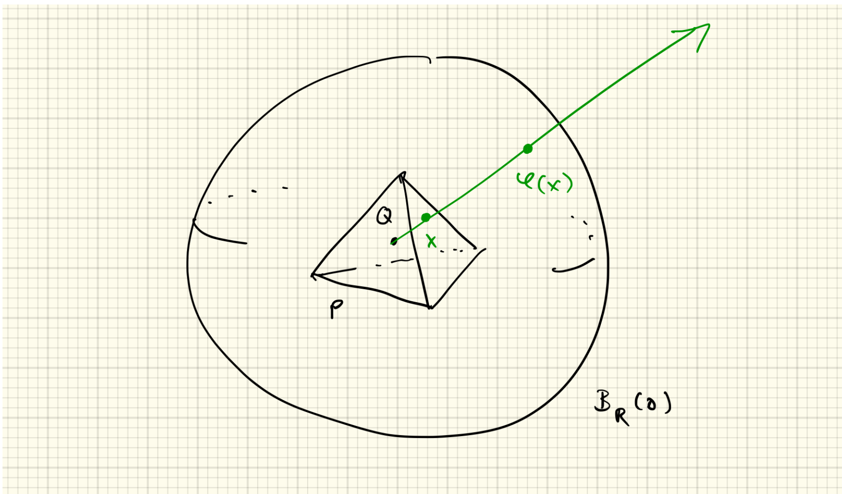


Abbildung 7.19: Visualisierung des Homöomorphismus $\varphi : \partial P \to \partial B_R(0)$

Lemma. *Für den Rand eines regulären Polyeders P, der aus reglemäßigen m-Ecken besteht und bei dem an jeder Ecke n Kanten zusammenlaufen, gilt*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

Beweis. Wir setzen

$$\begin{aligned} e &= \text{Anzahl der Ecken in } \partial P \\ k &= \text{Anzahl der Kanten in } \partial P \\ f &= \text{Anzahl der Flächenstücke in } \partial P \end{aligned}$$

Die Ecken und Kanten entsprechen einer Einbettung eines zur Bestimmung der Eulercharakteristik geeigneten Einbettung einer realisierung eines gerichteten Graphens nach S^2. Von daher gilt die Eulerformel $e - k + f = \chi(S^2) = 2$, und weiterhin

- $e = \frac{2k}{n}$, da jede Kante genau zwei Eckpunkte hat und jeweils n Kanten an einem Eckpunkt zusammen kommen.
- $f = \frac{2k}{m}$, da jede Kante genau an zwei Fächenstücke grenzt und jede Fläche m Kanten hat.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} e - k + f &= \frac{2k}{n} - k + \frac{2k}{m} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Da aus den Voraussetzungen des Lemmas folgt, dass $n \geq 3$ und $m \geq 3$ gilt. Also ergeben sich somit für m und n also die durch Folgerung des Lemmas nur folgende Möglichkeiten:

$n = 3$	$m = 3$:	Dies ist erfüllt für den Tetraeder.
$n = 3$	$m = 4$:	Dies ist erfüllt für den Hexaeder.
$n = 3$	$m = 5$:	Dies ist erfüllt für den Dodekaeder.
$n = 4$	$m = 3$:	Dies ist erfüllt für den Oktaeder.
$n = 5$	$m = 3$:	Dies ist erfüllt für den Ikosaeder.

Eine Visualisierung der fünf Polyeder (Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder, Oktaeder,Ikosaeder) befindet sich auf der nächsten Seite. Man nennt sie auch die platonischen Körper.

Satz (Eulerscher Polyedersatz). *Jeder reguläre Polyeder im* $\mathbb{R}^3$ *ist entweder ein Tetraeder, ein Hexaeder, ein Dodekaeder, ein Oktaeder, oder ein Ikosaeder.*

Abbildung 7.20: Die regulären Polyeder (Quelle: Wikipedia)