

## 6 Flächen

**Definition.** Es sei  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl. Ein topologischer Raum  $X$  heißt lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , falls es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$  mit einem Homöomorphismus  $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt.

*Bemerkung.* Ein Raum  $X$  ist genau dann lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , wenn es zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$ , sowie ein  $\varepsilon > 0$ , ein  $t_0 \in \mathbb{R}^n$  und einen Homöomorphismus  $\varphi'_x : U_x \rightarrow B_\varepsilon(t_0)$  gibt. Denn für eine offene Kugel  $B_\varepsilon(t_0) \subset \mathbb{R}^n$  ist die folgende Abbildung

$$\psi_{t_0, \varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow B_\varepsilon(t_0), \quad s \mapsto t_0 + \varepsilon \frac{s}{\sqrt{1 + |s|^2}}$$

ein Homöomorphismus, und daher ist dann auch die Komposition  $\psi_{t_0, \varepsilon}^{-1} \circ \varphi'_x$  ein Homöomorphismus.

**Beispiel.**  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ist lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^1$ .

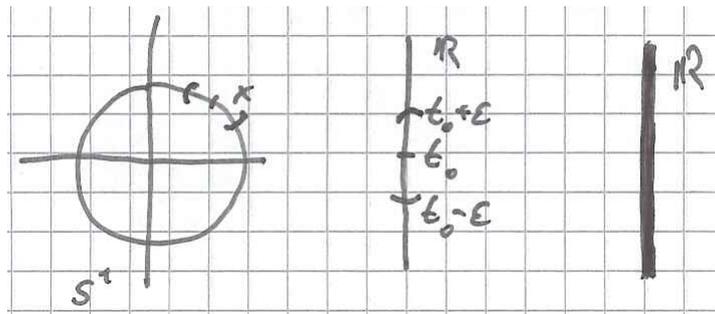


Abbildung 6.1: Skizze

Es sei  $x = (\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0))$ . Dann ist die folgende Abbildung für ein (beliebiges)  $0 < \varepsilon < 1$  eine Einbettung auf eine Umgebung  $U_x$

$$\begin{aligned} (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) &\xrightarrow{e_x} S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Also ist für jedes  $x \in X$  die Umkehrfunktion  $\varphi'_x := (e_x)^{-1} : U_x \rightarrow B_\varepsilon(t_0)$ , bzw. die Komposition  $\varphi_x = \varphi'_x \circ \psi_{t_0, \varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow U_x$  ein Homöomorphismus wie man ihn für den Nachweis der Eigenschaft fordert.

**Beispiel.** Es sei  $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$ . Für jeden Punkt  $(x, x') \in S^1 \times S^1$  setzen wir  $U_{x, x'} = U_x \times U_{x'}$ , und dann ist mit den Funktionen  $\varphi_x$  und  $\varphi_{x'}$  aus dem voranstehenden Beispiel die Abbildung

$$(\varphi_x, \varphi_{x'}) : U_x \times U_{x'} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

für jedes Paar  $(x, x')$  ein Homöomorphismus. Der Raum  $S^1 \times S^1$  ist also lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

**Beispiel.** Die 2-Sphäre  $S^2$  ist definiert durch

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

$S^2$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . Um dies zu nachzuweisen, betrachten wir nun die Punkte  $N = (0, 0, 1)$  und  $S = (0, 0, -1)$  und folgende Funktion, die sogenannte stereographische Projektion

$$\varphi_S : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right)$$

Geometrisch kann man die Abbildung so beschreiben: Einem Punkt  $X \in S^2 \setminus \{N\}$  wird der Punkt in der  $(u, v)$ -Ebene zugeordnet, der sich als Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden von  $N$  und  $X$  ergibt.

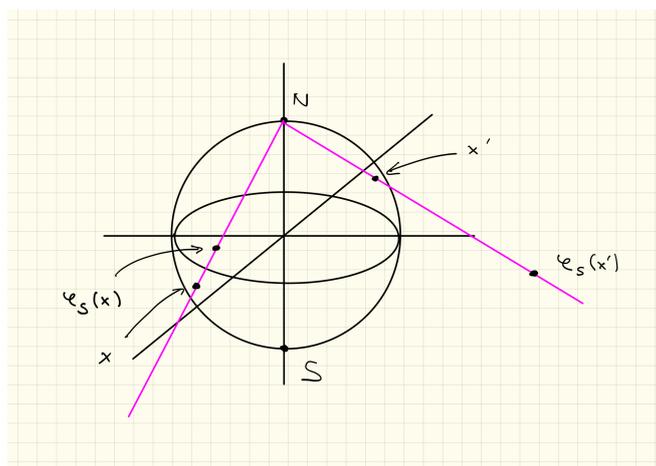


Abbildung 6.2: Stereographische Projektion

Wir setzen dann  $U_S = S^2 \setminus \{N\}$ . Mit der Abbildung  $\varphi_S$  sehen wir, dass  $U_S$  eine Umgebung von  $S$  ist, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist. Ist  $X \in S^2$  beliebig, so können wir eine Drehung  $\varrho_X$  finden, die  $X$  auf  $S$  abbildet. Dann ist  $U_X := \varrho_X^{-1}(U_S)$  eine Umgebung von  $X$ , die mit  $\varphi_X := \varphi_S \circ \varrho_X$  homöomorph auf  $\mathbb{R}^2$  abbildet. Insgesamt haben wir damit nachgewiesen, dass  $S^2$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Definition.** Eine Fläche ist ein topologischer Raum, der lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist und sich in einen  $\mathbb{R}^N$  für ein  $N \geq 2$  einbetten lässt.

*Bemerkung.* Offensichtlich gilt: Ist  $X \subset \mathbb{R}^N$  für ein  $N \geq 2$  ein Teilraum, der lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist, so ist  $X$  eine Fläche. Klassisch wird eine Fläche ein wenig anders definiert (vgl. Bonusaufgabe auf Blatt 9)

**Beispiel.**  $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$  und  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  sind Flächen.

**Beispiel.** Betrachte folgende stetige Abbildung

$$e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, u) \longmapsto (\sin(2\pi t)(2 + \sin(2\pi u)), \cos(2\pi t)(2 + \sin(2\pi u)), \cos(2\pi u))$$

Das Bild von  $e$  ist homöomorph zum Torus. Einen Homöomorphismus  $h$  erhält durch die Faktorisierung von  $e$  aus folgendem Diagramm

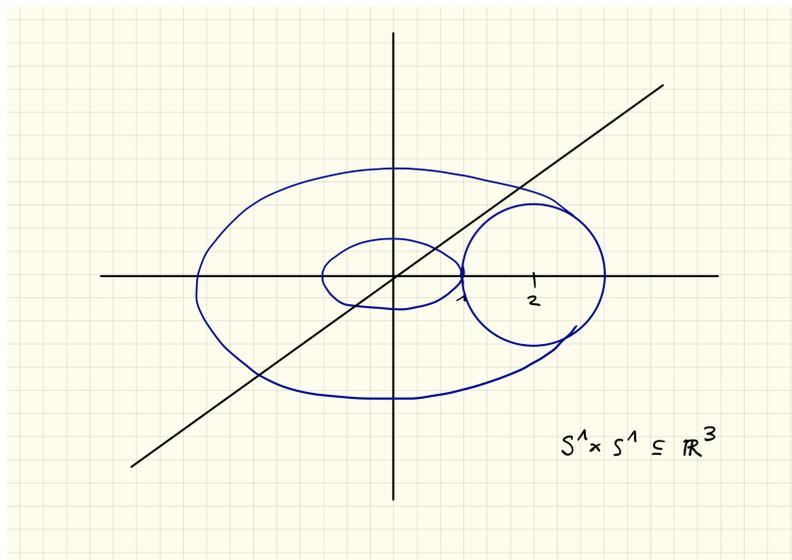
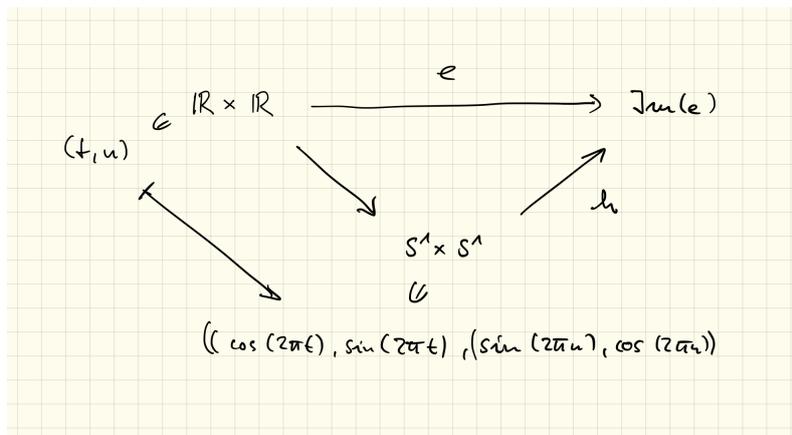
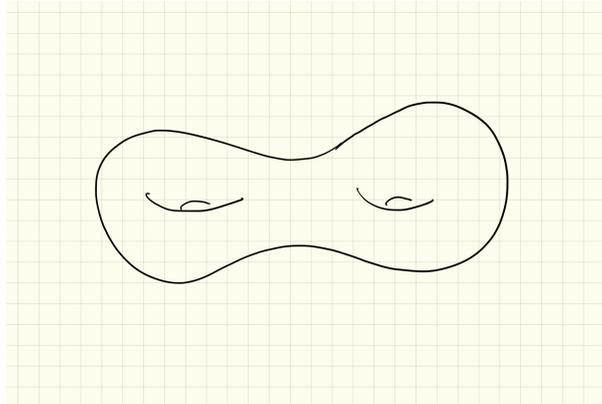


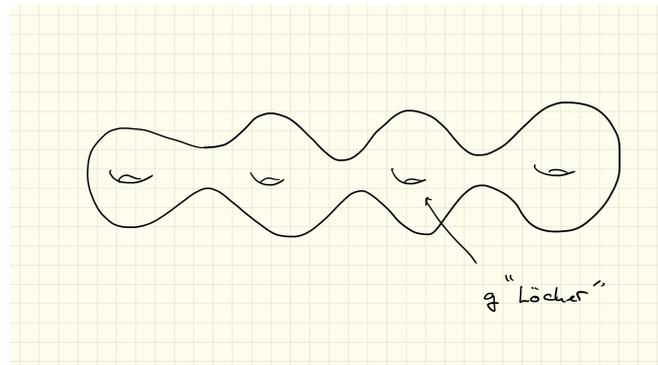
Abbildung 6.3: Skizze von  $\text{Im}(e)$

Im Folgenden stellen wir nun einige Flächen durch Skizzen vor.

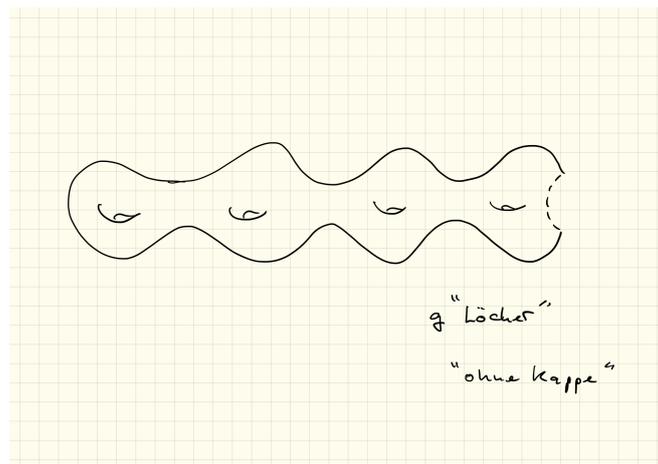
**Beispiel.** (Brezelfläche)



**Beispiel.** (Orientierte) Fläche vom Geschlecht  $g$

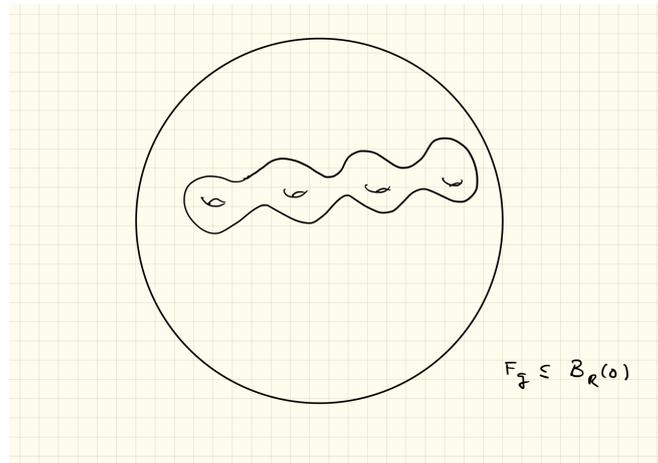


**Beispiel.** (Orientierte) Fläche vom Geschlecht  $g$  mit "abgeschnittener Kappe".



**Definition.** Eine Teilmenge  $Y \subset \mathbb{R}^N$  für ein  $N$  heißt beschränkt, falls es reelle Zahl  $R > 0$  gibt, so dass  $Y \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ .

**Beispiel.**  $F_g \subset \mathbb{R}^3$  ist beschränkt.



**Definition.** Eine Fläche  $X$  heißt geschlossen, wenn es eine Einbettung von  $X$  in einen  $\mathbb{R}^N$  mit  $N \geq 2$  gibt, so dass das Bild der Einbettung abgeschlossen und beschränkt ist

*Bemerkung.* Obige Eigenschaft ist (nach dem Satz von Heine-Borel) äquivalent dazu, dass  $X$  kompakt ist.

**Definition.** Es sei  $\lambda$  eine Indexmenge und  $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Menge von topologischen Räumen. Die disjunkte Vereinigung dieser Menge topologischer Räume  $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  ist der topologische Raum, dessen zugrundeliegende Menge die disjunkte Vereinigung der Mengen  $X_\lambda$  ist, und dessen Topologie gegeben ist durch

$$U \subset \sqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ ist offen genau dann, wenn } U \cap X_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda$$

Die Räume  $X_\lambda$  sind also insbesondere Teilräume von  $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ . Ist  $\lambda$  eine endliche Menge, etwa  $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ , so schreiben wir für die zugehörige disjunkte Summe auch

$$X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$$

**Definition.** Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, falls es keine zwei nicht-leere topologische Räume  $X_1$  und  $X_2$  gibt, so dass  $X \cong X_1 \sqcup X_2$ .

**Definition.** Ein topologischer Raum heißt wegzusammenhängend, falls es zu jedem Paar  $(x_0, x_1)$  von Punkten aus  $X$  eine stetige Abbildung  $w : I \rightarrow X$  mit  $w(0) = x_0$  und  $w(1) = x_1$  gibt.

*Bemerkung.* Ist ein topologischer Raum wegzusammenhängend, so ist er zusammenhängend. Ist  $X$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^N$ , so ist  $X$  zusammenhängend genau dann, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist.

**Satz.** *Bis auf Homöomorphie gibt es nur abzählbar viele zusammenhängende geschlossene Flächen, die sich in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten lassen. Genauer gilt: ist  $X$  eine nicht-leere geschlossene Fläche, so ist  $X$  entweder homöomorph zu  $S^2$  oder es gibt genau eine natürliche Zahl  $g > 0$ , so dass  $X$  und  $F_g$  homöomorph sind.  $S^2$  nennt man auch die orientierte Fläche vom Geschlecht 0 und schreibt daher für die Fläche auch  $F_0$ . (ohne Beweis)*

Im Folgenden wollen wir eine explizite Beschreibung der Flächen geben. Dazu benötigen wir das Konzept der Quotiententopologie.

**Definition.** (Quotiententopologie) Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Sei  $\pi : X \rightarrow X/R$  die kanonische Projektion auf die Menge der Äquivalenzklassen. Wir nennen eine Teilmenge  $U \subset X/R$  offen, falls  $\pi^{-1}(U) \subset X$  offen ist. Dies definiert eine Topologie auf  $X/R$ , die sogenannte *Quotiententopologie*.  $X/R$  heißt dann der Quotient von  $X$  nach  $R$ .

**Beispiel.** Sei  $X = [0, 1]$  und

$$R = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = y \text{ oder } x = 0 \wedge y = 1 \text{ oder } x = 1 \wedge y = 0\}$$

Hier werden 0 und 1 zu einem Punkt in  $X/R$  identifiziert. In  $X/R$  ist  $\pi([0, t))$  für  $0 < t < 1$  nicht offen, denn  $\pi^{-1}(\pi([0, t))) = [0, t) \cup \{1\}$  ist nicht offen.

**Satz.** *Es sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation  $R$ . Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, die mengentheoretisch durch  $X/R$  faktorisiert, so ist  $f$  genau dann stetig, wenn die Abbildung  $f/R : X/R \rightarrow Y$  stetig ist. (ohne Beweis)*

**Beispiel.** Es sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$ . D.h.  $x \sim y$  falls die Differenz eine ganze Zahl ist. Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 e: & \mathbb{R} & \rightarrow S^1 \\
 & \downarrow \nearrow & \\
 & \mathbb{R}/\mathcal{Z} & \\
 \\
 e(t) & = & (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))
 \end{array}$$

Die Abbildung  $e/\mathcal{Z} : \mathbb{R}/\mathcal{Z} \rightarrow S^1$  ist nach voranstehendem Satz stetig.  $e/\mathcal{Z}$  ist sogar ein Homöomorphismus.

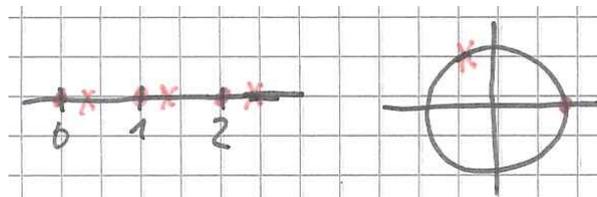


Abbildung 6.4: Skizze

**Beispiel.** Die Abbildung  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow ([0,1]/R) \times ([0,1]/R) \cong S^1 \times S^1$  ist surjektiv. Sei  $\mathcal{S} = \{(x, y, x', y') \in [0, 1]^2 \times [0, 1]^2 \mid f(x, y) = f(x', y')\}$ .  $\mathcal{S}$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $[0, 1]^2$ . Dann ist die Abbildung

$$f/\mathcal{S} : [0,1]^2/\mathcal{S} \rightarrow S^1 \times S^1$$

stetig.  $f/\mathcal{S}$  ist sogar ein Homöomorphismus, also gilt:

$$[0,1]^2/\mathcal{S} \cong [0,1]/R \times [0,1]/R$$

Wie veranschaulicht man den Quotientenraum?

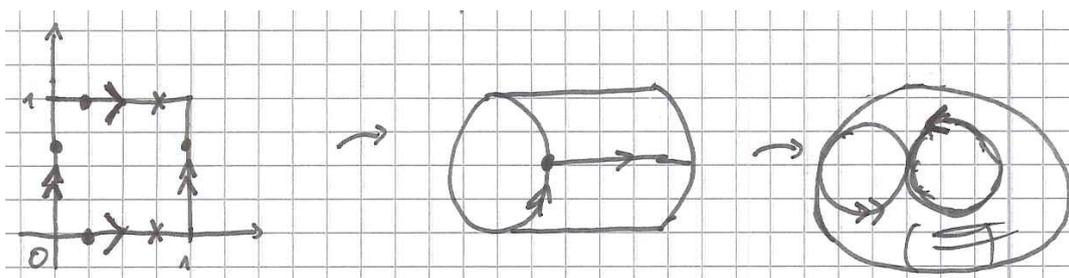
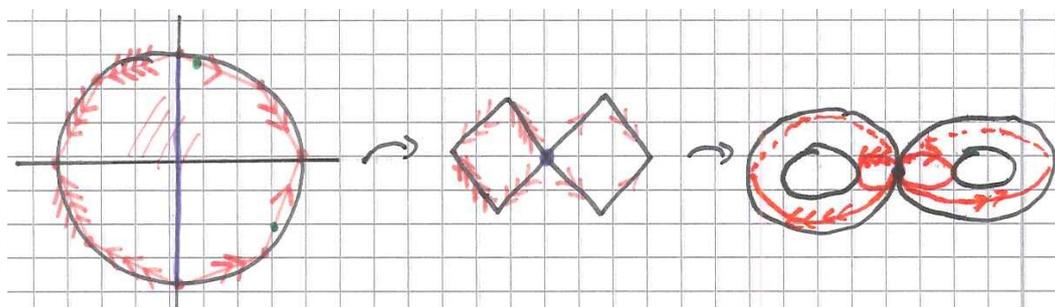
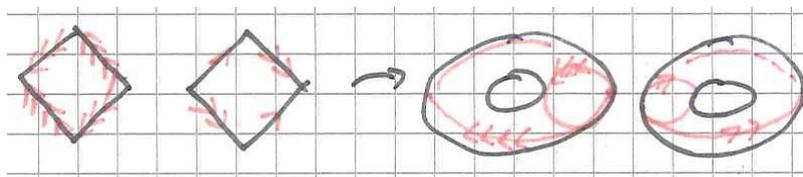


Abbildung 6.5:  $[0, 1]^2 \curvearrowright [0, 1] \times [0,1]/R \curvearrowright [0,1]/R \times [0,1]/R = [0,1]^2/\mathcal{S}$

**Beispiel.** Sei  $P_8$  das in den Einheitskreis (in  $\mathbb{R}^2$ ) eingeschriebene reguläre Achteck. Welcher Raum entsteht durch nachfolgende Identifizierung?

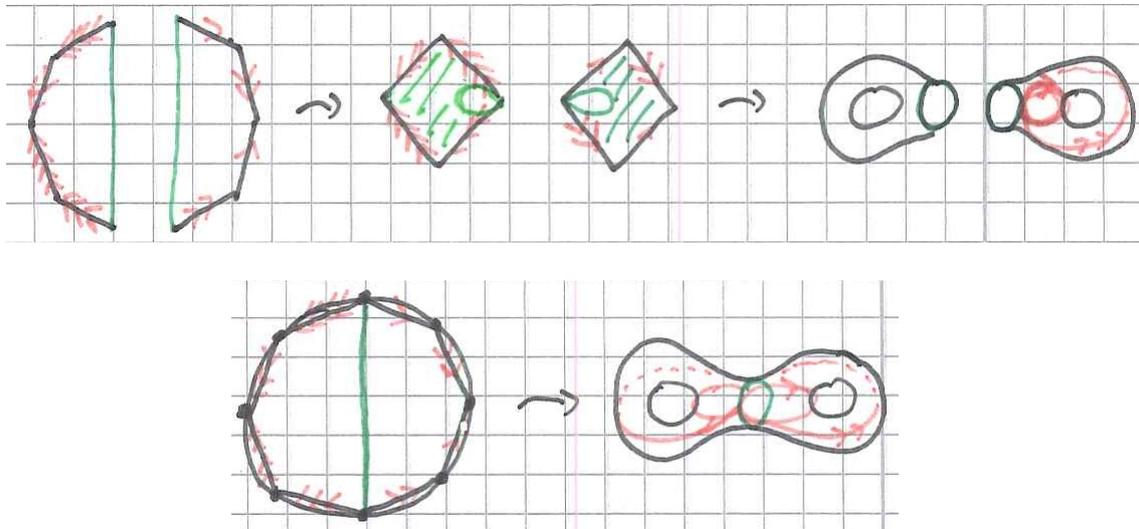


Zwei disjunkte Kopien der zwei Quadrate ergeben nach Identifizierung zwei Tori:



Um die ursprüngliche Identifizierung zu veranschaulichen schneiden wir zunächst das Achteck einmal diagonal. Wie die nachfolgenden Skizzen zeigen, erhalten wir dann zwei

Tori, aus denen ein offener Ball herausgeschnitten ist. Das gesuchte Objekt erhalten wir dann durch eine Identifikation der beiden Kreisränder, und es entsteht die Fläche  $F_2$ .



**Definition.** Es sei  $g \geq 1$  eine natürliche Zahl. Die orientierte Fläche  $F_g$  vom Geschlecht  $g$  wird als Quotientenraum aus dem regulären  $4g$ -Eck  $P_{4g}$  mit Ecken im Einheitskreis definiert. Man erhält sie, indem man (den Bezeichnungen im nachfolgenden Skizze folgend) jeweils die Kanten  $a_i$  und  $a'_i$ , bzw.  $b_i$  und  $b'_i$  für  $i = 1..g$  gemäß der dargestellten Orientierungen miteinander identifiziert.

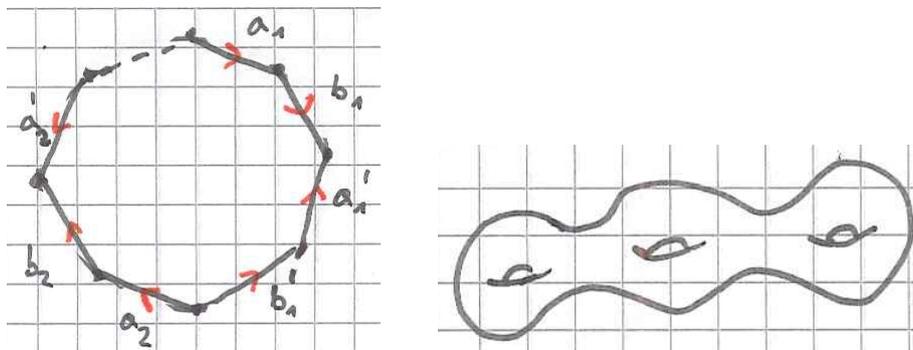


Abbildung 6.6: Regelmäßiges  $4g$ -Eck / Aus dem regelmäßigen  $12$ -Eck entsteht  $F_3$

Die Fläche  $F_g$  entspricht einer „Brezelfläche mit  $g$  Löchern“. Jeweils vier benachbarte Kanten mit paarweise zu identifizierenden Kanten ergeben eine weitere Komponente mit einem "Loch".

**Proposition.** Der topologische Raum  $F_g$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Wir müssen also nachweisen, dass jeder Punkt  $x \in F_g$  eine offene Umgebung  $U_x$  besitzt, die homöomorph zum  $\mathbb{R}^2$  ist. Wir betrachten dazu drei Fälle

Fall 1.  $\pi^{-1}(x)$  besteht aus genau einem Punkt  $\tilde{x}$  im Innern des  $4g$ -Ecks  $P_{4g}$ . Wähle eine  $\varepsilon$ -Kugel um  $\tilde{x}$ , sodass  $B_\varepsilon(\tilde{x})$  den Rand von  $P_{4g}$  nicht schneidet. Dann erhalten wir für diese Umgebung  $U_{\tilde{x}} := B_\varepsilon(\tilde{x})$  einen Homöomorphismus

$$\varphi_{\tilde{x}} := (\psi_{\tilde{x},\varepsilon})^{-1} : B_\varepsilon(\tilde{x}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Dabei ist  $\psi_{\tilde{x},\varepsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow B_\varepsilon(\tilde{x})$  wie in Bemerkung auf Seite 65 definiert.

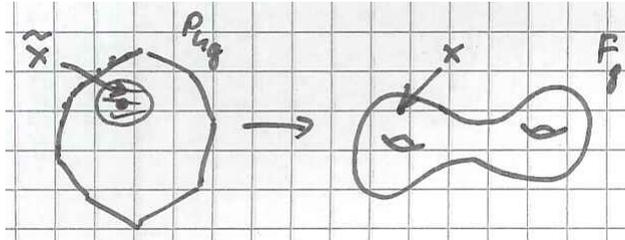


Abbildung 6.7:  $\pi : P_{4g} \rightarrow F_g$

Fall 2.  $\pi^{-1}(x)$  liegt in der Vereinigung der Kanten, enthält jedoch keinen Eckpunkt. Wähle  $\varepsilon$ -Kugeln um die beiden Urbilder  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ , sodass die  $\varepsilon$ -Kugeln keine Eckpunkte enthalten. Wenn wir die beiden Randsegmente in  $B_\varepsilon(\tilde{x}_1) \cap P_{4g}$  und  $B_\varepsilon(\tilde{x}_2) \cap P_{4g}$  identifizieren, entsteht eine Umgebung  $U_{\tilde{x}} := \pi(B_\varepsilon(\tilde{x}_1) \cap P_{4g} \cup B_\varepsilon(\tilde{x}_2) \cap P_{4g})$ , die offensichtlich homöomorph zu  $B_\varepsilon(0)$  im  $\mathbb{R}^2$  ist. Die Umkehrung des Homöomorphismus

$$\psi_{\tilde{x}} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} B_\varepsilon(\tilde{x}) \xrightarrow{\cong} U_{\tilde{x}}$$

liefert einen Homöomorphismus  $\varphi_{\tilde{x}} := \psi_{\tilde{x}}^{-1}$ , wie wir ihn für den Nachweis der lokalen Homöomorphie brauchen.

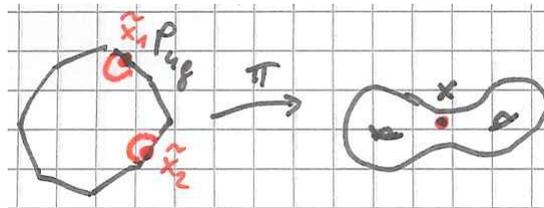


Abbildung 6.8: Skizze

Fall 3.  $\pi^{-1}(x)$  besteht aus den  $4g$  Eckpunkten  $\tilde{x}_i$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass sich die  $\varepsilon$ -Kugeln um die Eckpunkte nicht schneiden. Dann erhalten wir analog zum zweiten Fall einen Homöomorphismus

$$\psi_{\tilde{x}} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} B_\varepsilon(\tilde{x}) \xrightarrow{\cong} U_{\tilde{x}} = \pi(B_\varepsilon(\tilde{x}_1) \cap P_{4g} \cup B_\varepsilon(\tilde{x}_2) \cap P_{4g} \cup \dots \cup B_\varepsilon(\tilde{x}_{4g}) \cap P_{4g})$$

und das Inverse  $\varphi_{\tilde{x}} := \psi_{\tilde{x}}^{-1}$  ist ein Homöomorphismus, wie wir ihn für den Nachweis der lokalen Homöomorphie brauchen..

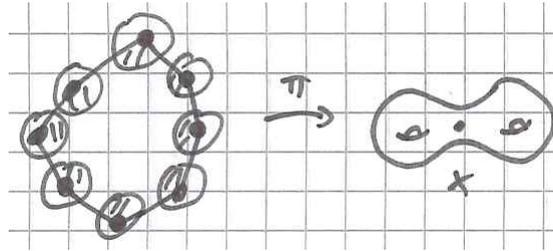


Abbildung 6.9: Skizze

□

Es gibt auch geschlossenen Flächen, die sich nicht in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten lassen.

**Definition.** Sei  $g \geq 2$ . Die unorientierte Fläche  $F'_g$  vom Geschlecht  $g$  erhält man aus  $P_{2g}$ , wenn man (mit den Bezeichnungen aus der nachfolgenden Skizze) jeweils die Kantenpaare  $a_i$  und  $a'_i$  für  $i = 1..g$  miteinander identifiziert.

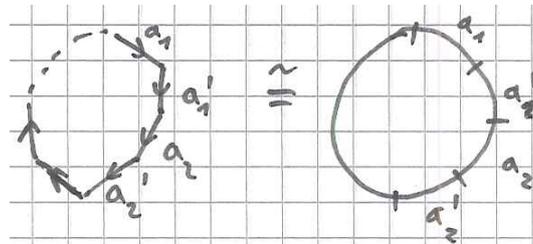


Abbildung 6.10: Identifizierungsvorschrift

Für  $g = 1$  entsteht  $F'_g$  entsprechend durch eine Identifizierung aus dem Einheitskreis.

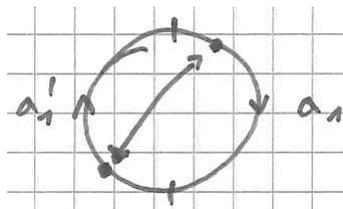


Abbildung 6.11: Identifizierungsvorschrift

**Satz.** Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu  $F_g$  oder  $F'_g$  für ein geeignetes  $g$ . (ohne Beweis)

**Satz.** Für  $g \geq 1$  ist  $F'_g$  nicht in den  $\mathbb{R}^3$ , wohl aber in den  $\mathbb{R}^4$  einbettbar. (ohne Beweis)

Zur Veranschaulichung von  $F'_1$ :

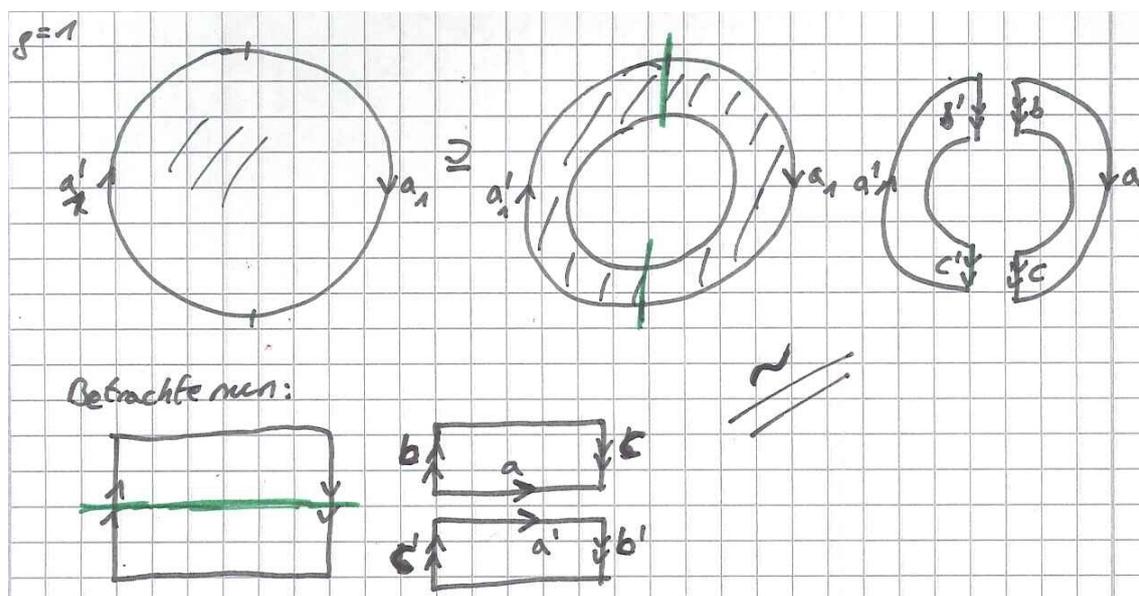


Abbildung 6.12: Veranschaulichung für die Flächen  $F'_1$

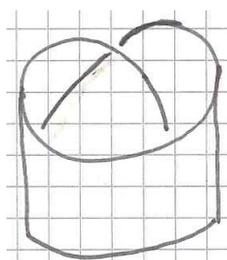


Abbildung 6.13:  $F'_1$  ohne einen offenen Ball ergibt das Möbiusband

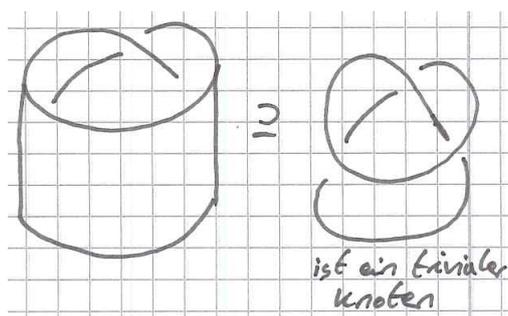


Abbildung 6.14: Der Rand des Möbiusbandes ist homöomorph zu einer Kreislinie

Wir sehen damit:

$$\begin{aligned} \text{Möbiusband} &\cong F'_1 \text{ ohne eine offene Kreisscheibe} \\ &\Rightarrow F'_1 = \text{Möbiusband} \sqcup D / \sim \end{aligned}$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  den Rand des Möbiusbandes mit dem Rand einer Kreisscheibe identifiziert.

Wir konstruieren nun eine Einbettung von  $F'_1$  in den  $\mathbb{R}^4$ . Dazu sei eine Einbettung des Möbiusbandes in den  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Wir identifizieren das Möbiusband mit seinem Bild im  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Einbettung von  $S^1$  auf den Rand des Möbiusbandes  $M$ , und  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Standardeinbettung:  $g(x, y) = (x, y, 0)$ . Weiterhin sei  $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Isotopie des Raumes  $\mathbb{R}^3$  mit  $g = H_1 \circ f$ . Dann ist

$$\begin{aligned} F: S^1 \times I &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (z, t) &\mapsto (H_t \circ f(z), t) \end{aligned}$$

eine Einbettung und

$$D = F(S^1 \times I) \cup \overline{B_1(0)} \times \{1\}$$

ist homöomorph zu einer zweidimensionalen Kreisscheibe im  $\mathbb{R}^4$ . Die Vereinigung  $M \times \{0\} \cup D$  ist dann das Bild einer Einbettung von  $F'_1$ .

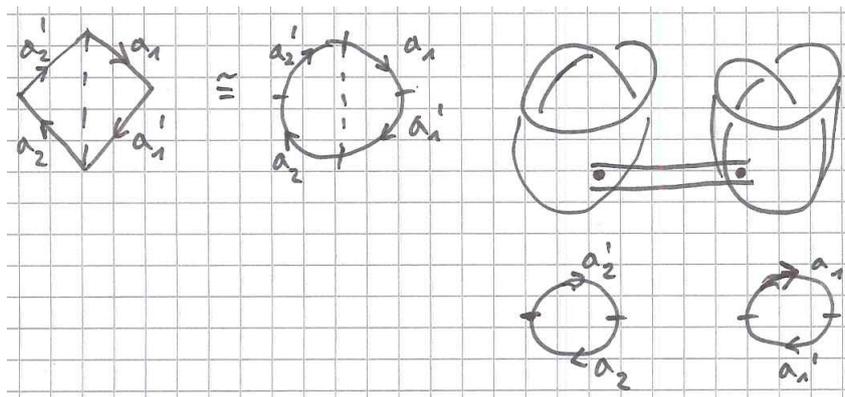


Abbildung 6.15: Veranschaulichung von  $F'_2$

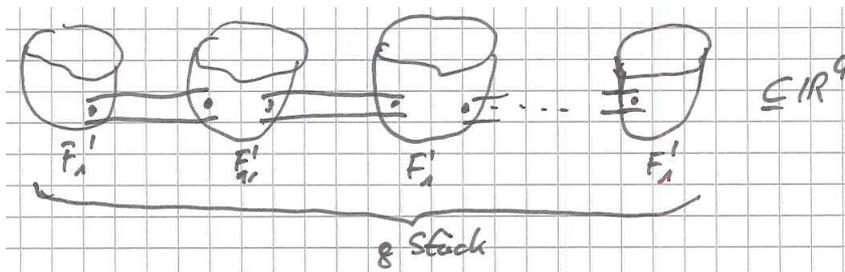


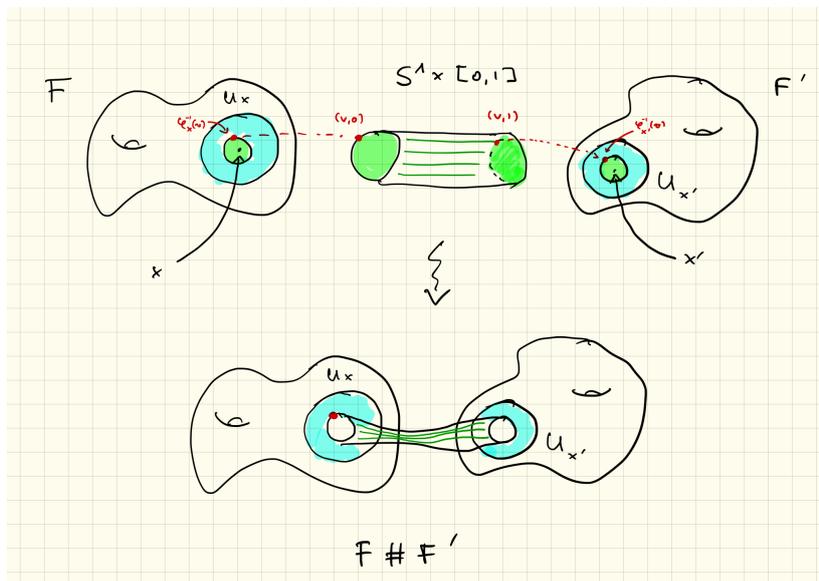
Abbildung 6.16: Veranschaulichung von  $F'_g$  für beliebiges  $g \geq 2$

*Bemerkung.* Die Skizzen in den obigen Abbildungen zeigt ein Bild von  $F'_g$ , das dadurch entsteht, dass man  $g$  Kopien von  $F'_1$  durch die sogenannte zusammenhänge Summenkonstruktion zusammenfügt. Diese Konstruktion geht wie folgt.

**Definition.** Es seien  $F$  und  $F'$  zwei (nicht-leere) geschlossene Flächen, und  $x \in F$  und  $x' \in F'$  zwei Punkte. Zu den zwei Punkten wähle Umgebungen  $U_x$  und  $U_{x'}$  mit Homöomorphismen  $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\varphi_{x'} : U_{x'} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Für die Homöomorphismen gelte  $\varphi_x(x) = 0$ , bzw.  $\varphi_{x'}(x') = 0$ . Dann ist die zusammenhängende Summe von  $F$  und  $F'$  gegeben durch

$$F \# F' = (F \setminus \varphi_x^{-1}(B_1(0))) \sqcup (S^1 \times [0, 1]) \sqcup (F' \setminus \varphi_{x'}^{-1}(B_1(0))) / \sim$$

wobei wir für alle  $v \in S^1$  wie folgt Punkte identifizieren:  $\varphi_x^{-1}(v) \sim (v, 0)$ ,  $(v, 1) \sim \varphi_{x'}^{-1}(v)$ . Die resultierende Fläche hängt bis Homöomorphie nicht von den getroffenen Wahlen ab.



**Satz.** Es gilt  $F_g \# F_{g'} \cong F_{g+g'}$ ,  $F'_g \# F'_{g'} \cong F'_{g+g'}$ ,  $F_g \# F'_{g'} \cong F'_{2g+g'}$  (Übungsaufgabe)

*Bemerkung.* Eine weitere Möglichkeit, die Fläche  $F'_2$  zu erhalten ist wie folgt:

