

5 Knoteninvarianten

Kochrezept:

Schritt 1: Leite eine Eigenschaft aus einem Knotendiagramm ab.

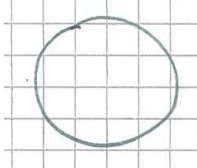
Schritt 2: Zeige, dass eine Änderung des Knotendiagramms durch eine Scheibendeformation (im \mathbb{R}^2) oder eine Reidemeisterbewegung keine Änderung der abgeleiteten Größe ergibt.

Definition. Ein Knotendiagramm heißt *färbbar*, wenn jeder Bogen des Diagramms mit einer von drei Farben gefärbt werden kann, sodass

- i) mindestens zwei Farben auftreten,
- ii) an jedem Kreuzungspunkt die zusammentreffenden Farben übereinstimmen oder alle verschieden sind.

Beispiel.

- i) Spezielles Diagramm für den Trivialen Knoten



→ nicht färbbar, da nur eine Farbe auftreten kann.

- ii)

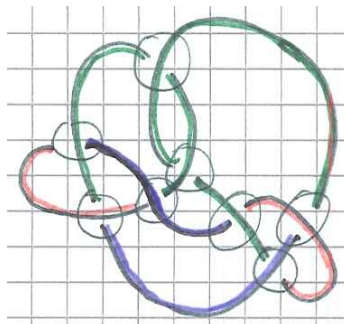


Abbildung 5.1: Beispiel 2

→ Knotendiagramm ist färbbar.

Bemerkung. In einer Färbung eines färbbaren Knotendiagramms kommen stets alle drei Farben vor.

Satz. Die Eigenschaft eines Knotendiagramms färbbar zu sein ändert sich nicht, wenn das Knotendiagramm durch Scheiben-Deformationen (im \mathbb{R}^2) oder durch Reidemeisterbewegungen verändert wird.

Definition. Wir sagen: ein Knoten K heißt färbbar, falls er äquivalent zu einem Knoten mit einem färbbaren Knotendiagramm ist.

Beweis. (vom obigen Satz)

- eine Scheiben-Deformation in \mathbb{R}^2 ändert die Eigenschaft eines Knotendiagramms färbbar zu sein nicht:

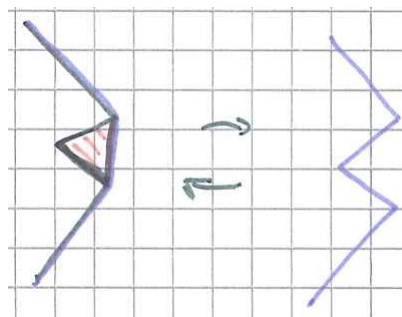


Abbildung 5.2: Skizze

- die Reidemeisterbewegung vom Typ I ändern die Eigenschaft genauso nicht:

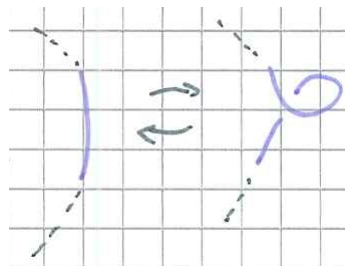


Abbildung 5.3: Skizze

- die Reidemeisterbewegung vom Typ II ändern die Eigenschaft nicht: Dazu betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1.

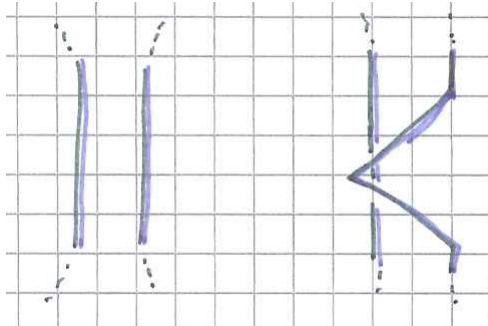


Abbildung 5.4: Skizze

Fall 2.

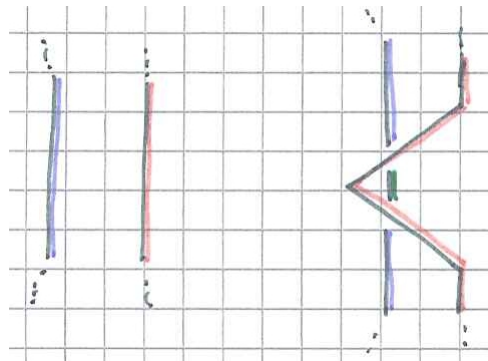


Abbildung 5.5: Skizze

- die Reidemeisterbewegung vom Typ III ändert die Eigenschaft auch nicht:

Fall 1.

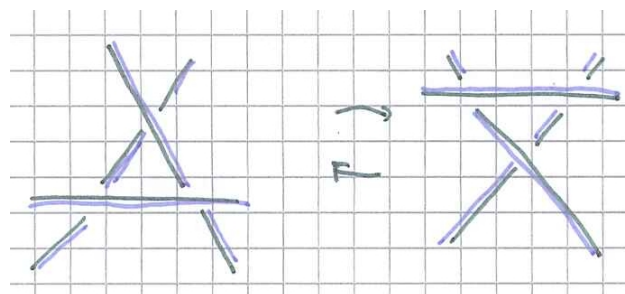


Abbildung 5.6: Skizze

Fall 2.

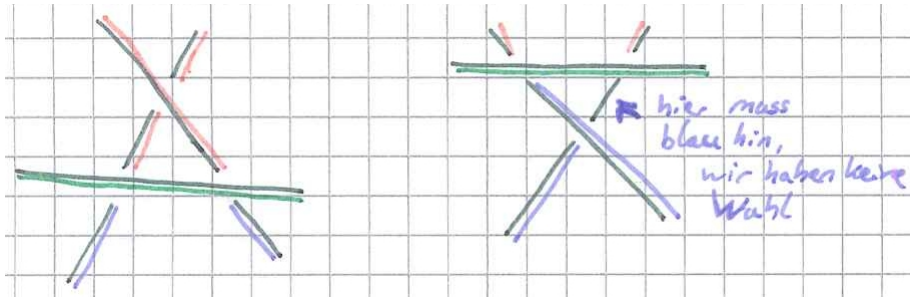


Abbildung 5.7: Skizze

Fall 3.

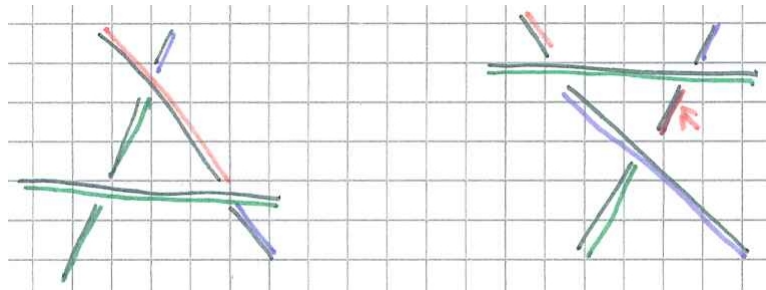


Abbildung 5.8: Skizze

Fall 4.

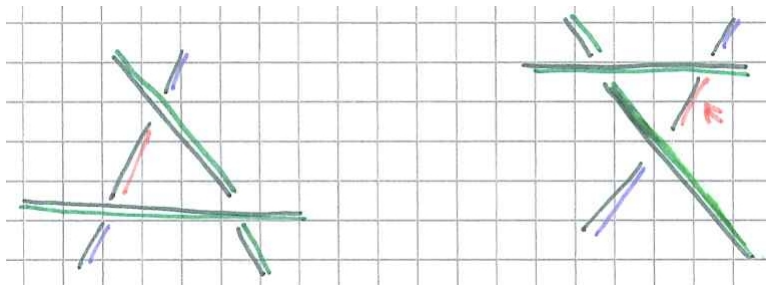


Abbildung 5.9: Skizze

Fall 5.

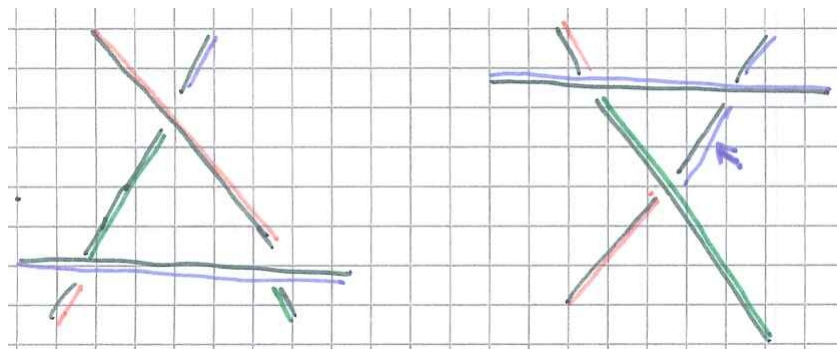


Abbildung 5.10: Skizze

□

Bemerkung. Im Beweis haben wir mehr bewiesen als nötig war. Wir haben auch gezeigt, dass sich die Färbungen des gegebenen Knotendiagramms und die des durch eine Scheiben-Deformation, bzw. Reidemeisterbewegung, geänderten Knotendiagramms 1:1 entsprechen.

Definition. Für einen beliebigen Knoten K definieren wir: $c(K) :=$ Anzahl der Färbungen eines Knotendiagramms eines Knotens, der äquivalent zu K ist.

Bemerkung. Ist K ein glatter Knoten mit regulärer Projektion, dessen Knotendiagramme nicht färbbar sind, so gilt: $c(K) = 0$, d.h. K färbbar $\Leftrightarrow c(K) \geq 1$.

Definition. Für ein Knotendiagramm D definieren wir die Kreuzungszahl als: $Kr(D) :=$ Anzahl der Kreuzungen (Doppelpunkte) des Knotendiagramms D .

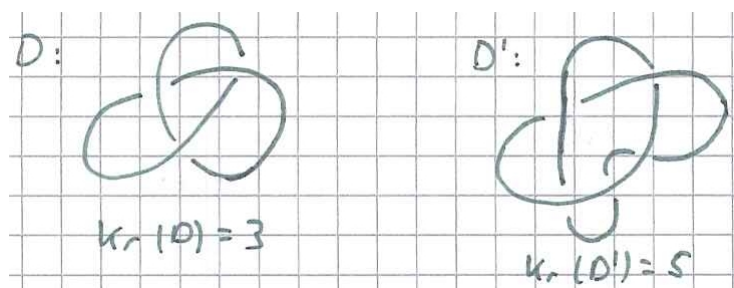


Abbildung 5.11: Beispiel

Definition. Sei K ein Knoten. Dann definiert man die Kreuzungszahl

$$Kr(K) = \min \left\{ Kr(D) \mid \begin{array}{l} D \text{ Knotendiagramm für einen} \\ \text{zu } K \text{ äquivalenten Knoten} \end{array} \right\}.$$

Bemerkung.

- $Kr(\text{Trivialer Knoten}) = 0$.
- Ist K nicht äquivalent zum trivialen Knoten, so gilt $Kr(K) \geq 3$.

Definition. Eine *Brücke* in einem Knotendiagramm ist ein Bogen, der mindestens über einen Doppelpunkt läuft.

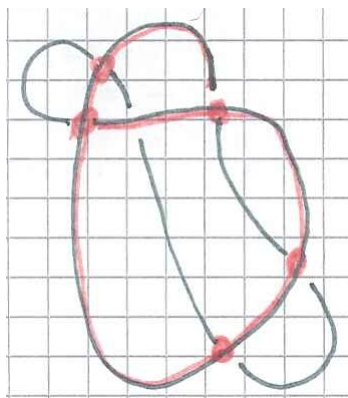


Abbildung 5.12: Diagramm mit *einer* Brücke

Definition. Die Brückenzahl in einem Knotendiagramm D ist

$$br(D) = \# \text{ Brücken in } D.$$

Für einen Knoten K definieren wir die Brückenzahl

$$br(K) = \min \left\{ br(D) \mid \begin{array}{l} D \text{ Knotendiagrammen für einen} \\ \text{zu } K \text{ äquivalenten Knoten} \end{array} \right\}.$$

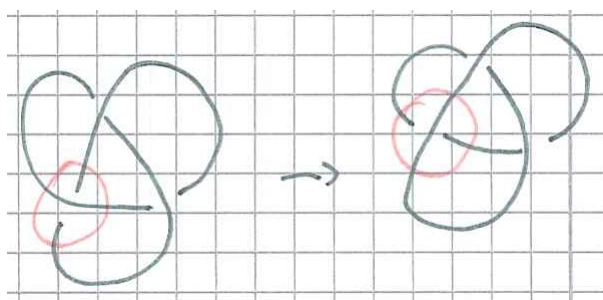


Abbildung 5.13: Kreuzungsänderung

Definition. Die Entknotungszahl eines Knotens ist definiert durch

$$e(D) = \text{minimale Anzahl von Kreuzungsänderungen, die benötigt wird, damit das Diagramm } D \text{ nach Durchführen der Kreuzungsänderungen den trivialen Knoten darstellt}$$

Die Entknotungszahl eines Knotens ist definiert durch

$$e(K) = \min \left\{ e(D) \mid \begin{array}{l} D \text{ Knotendiagramm für einen} \\ \text{zu } K \text{ äquivalenten Knoten} \end{array} \right\}$$

Bemerkung. Beim Durchlaufen des Knotens ab einem Startpunkt führe Kreuzungsänderungen so durch, dass an den Doppelpunkten das Knotendiagramm erst oben herläuft und beim zweiten Mal unten her.

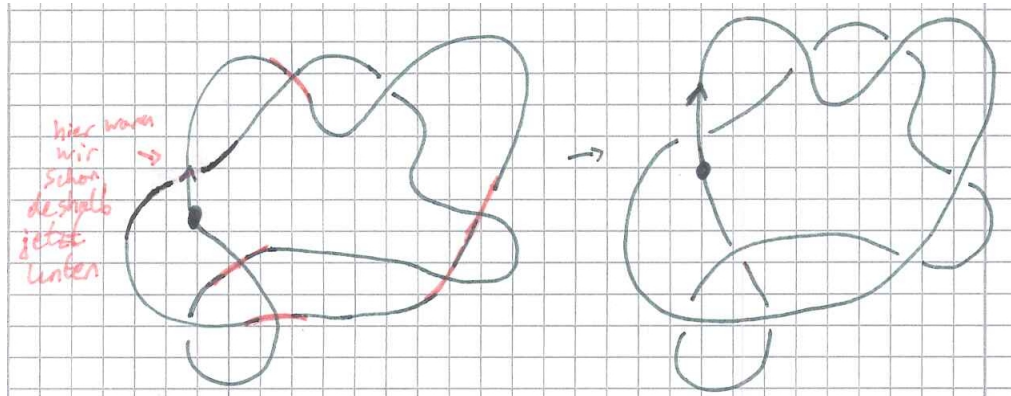


Abbildung 5.14: Skizze

Man erhält dann ein Knotendiagramm, das den trivialen Knoten darstellt. Man kann es sich so vorstellen, dass man das neue Diagramm ab dem Startpunkt abläuft und dabei immer weiter in die Zeichenebene hineinläuft und nach Durchlaufen des Diagramms über den Startpunkt wieder nach vorn läuft.

Eine sehr effektive und auch berechenbare Knoteninvariante ist das sogenannte Jones-Polynom. Zur Definition bedarf es einiger Vorbereitungen.

Markierungen:

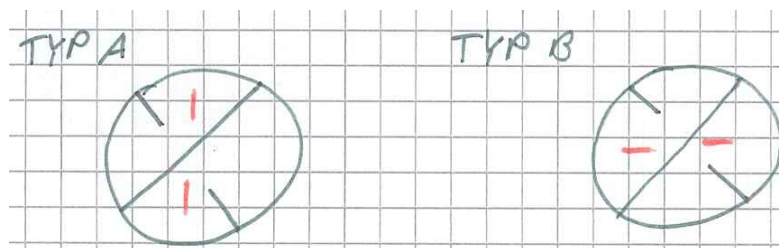


Abbildung 5.15: Markierungen in einem Verschlingungsdiagramm

Eine Markierung vom Typ A an einer Überkreuzung liegt vor, falls die Markierung beim Drehen der oberliegenden Strecke auf die untenliegende Strecke im mathematisch positiven Sinn überstrichen wird.

Eine Markierung vom Typ B an einer Überkreuzung liegt vor, falls die Markierung beim Drehen der oberen Strecke auf die unterliegende Strecke im mathematisch negativen Sinn überstrichen wird.

Entwerrung:

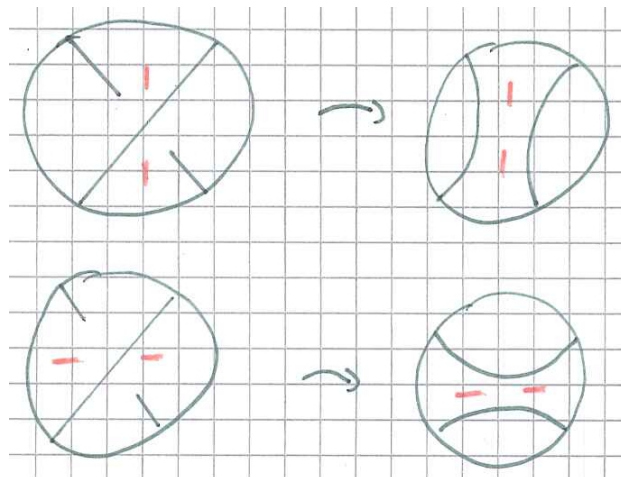


Abbildung 5.16: Entwerrung von markierten Verschlingungsdiagrammen

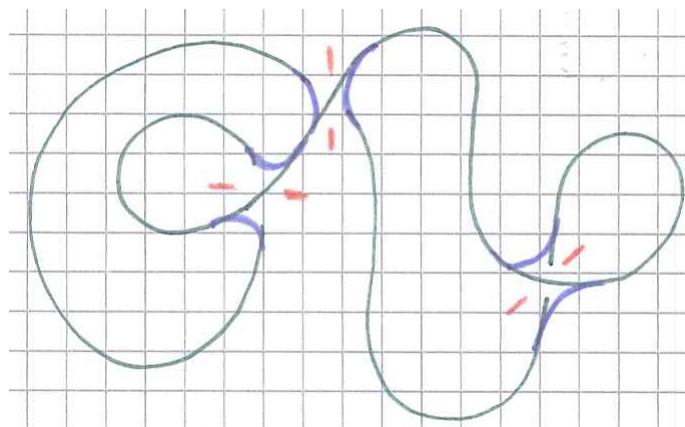


Abbildung 5.17: Beispiel

Im Beispiel stellt das neue Diagramm die triviale Verschlingung mit 2 Komponenten dar.

Für ein markiertes Verschlingungsdiagramm Z definieren wir:

$$a(Z) = \# \text{ der Markierungen vom Typ A}$$

$$b(Z) = \# \text{ der Markierungen vom Typ B}$$

$|Z| = \#$ der Komponenten der Verschlingung nach der Entwirrung
 Ein markiertes Verschlingungsdiagramm nennen wir einen *Zustand*.

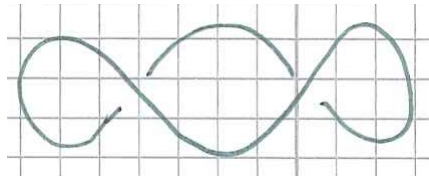


Abbildung 5.18: Beispiel: Verschlingungsdiagramm V

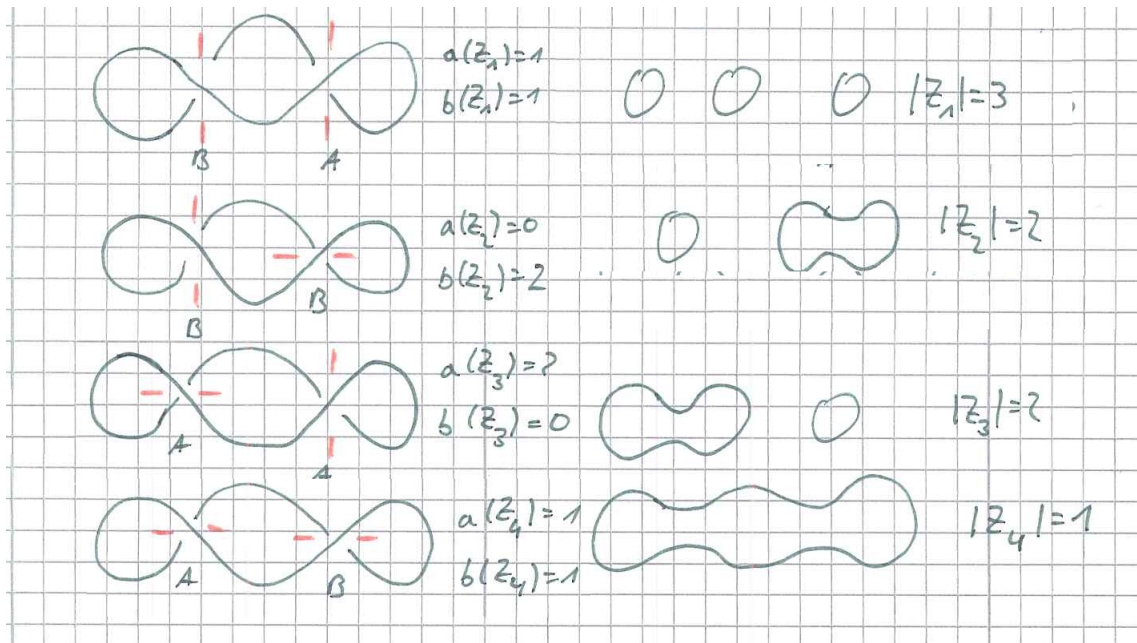


Abbildung 5.19: Zustände von V

Definition. Für ein Verschlingungsdiagramm V definieren wir das Bracketpolynom (Klammerpolynom) durch

$$\langle V \rangle = \sum_{z \text{ Zustand von } V} A^{a(z)} B^{b(z)} \cdot d^{|z|-1}.$$

Für ein Verschlingungsdiagramm V ohne Überkreuzungen definiert man

$$\langle V \rangle = d^{r-1},$$

wobei r die Anzahl der Komponenten von V ist.

Beispiel. $\langle V \rangle$ für V wie im oberen Beispiel:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= A^1 B^1 d^{3-1} + A^0 B^2 d^{2-1} + A^2 \cdot B^0 d^{2-1} + A^1 B^1 d^{1-1} \\ &= ABd^2 + (A^2 + B^2)d + AB. \end{aligned}$$

Notation. O bezeichnet die triviale Verschlingung

$$S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

Sind $V = (K_1, K_2, \dots, K_r)$ und $V' = (K'_1, K'_2, \dots, K'_{r'})$ zwei glatte Verschlingungen mit regulären Projektionen, deren Bilder im \mathbb{R}^2 sich nicht schneiden, so definieren wir die Verschlingung $V \sqcup V' = (K_1, K_2, \dots, K_r, K'_1, K'_2, \dots, K'_{r'})$.

Hilfssatz 1.

i) $\langle O \rangle = 1$

ii) $\langle O \sqcup V \rangle = d \langle V \rangle$ falls $p(V) \neq \emptyset$

iii) Ist X eine Überkreuzung und sind V_A bzw. V_B die Verschlingungsdiagramme, die man erhält, wenn man die Kreuzung X nach Typ A bzw. Typ B auflöst. Dann gilt:

$$\langle V \rangle = A \cdot \langle V_A \rangle + B \cdot \langle V_B \rangle .$$

Beweis.

i) Definition

ii) Die Zustände von V und $O \sqcup V$ entsprechen sich 1:1. Bei der Entwirrung eines Zustandes von $O \sqcup V$ erhält man stets eine Komponente mehr als bei der Entwirrung des zugehörigen Zustandes von V .

iii)

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \sum_Z A^{a(Z)} B^{b(Z)} d^{|Z|-1} \\ &= \sum_{\substack{Z \text{ mit} \\ \text{Typ A} \\ \text{bei } X}} A^{a(Z)} B^{b(Z)} d^{|Z|-1} + \sum_{\substack{Z \text{ mit} \\ \text{Typ B} \\ \text{bei } X}} A^{a(Z)} B^{b(Z)} d^{|Z|-1} \\ &= \sum_{\substack{Z \text{ mit} \\ \text{Typ A} \\ \text{bei } X}} A \cdot A^{a(Z')} B^{b(Z')} d^{|Z'|-1} + \sum_{\substack{Z \text{ mit} \\ \text{Typ B} \\ \text{bei } X}} B \cdot A^{a(Z'')} B^{b(Z'')} d^{|Z''|-1} \\ &= A \cdot \langle V_A \rangle + B \cdot \langle V_B \rangle , \end{aligned}$$

hierbei ist Z' der durch Z bestimmte Zustand von V_A , und Z'' der durch Z bestimmte Zustand von V_B .

□

Hilfssatz 2. Das Bracketpolynom ist invariant bzgl. Reidemeisterbewegungen vom Typ II und III, falls man $B = A^{-1}$ und $d = -A^2 - A^{-2}$ setzt. Für den Beweis benutzen wir „Diagrammrechnung“; als Diagrammrechnung schreibt sich Aussage iii) vom Hilfssatz 1:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle$$

Abbildung 5.20: Aussage iii)

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle \\ &= A (A \cdot \langle \text{Diagram 4} \rangle + B \langle \text{Diagram 5} \rangle) \\ &\quad + B \cdot (A \cdot \langle \text{Diagram 6} \rangle + B \langle \text{Diagram 7} \rangle) \\ &= A \cdot B \cdot d \langle \text{Diagram 8} \rangle + A^2 \langle \text{Diagram 9} \rangle \\ &\quad + B^2 \cdot \langle \text{Diagram 10} \rangle + AB \langle \text{Diagram 11} \rangle \\ &= (ABd + A^2 + B^2) \langle \text{Diagram 8} \rangle + AB \langle \text{Diagram 11} \rangle \end{aligned}$$

Abbildung 5.21: Typ II

Setzt man für $B = A^{-1}$ und $d = -A^2 - A^{-2}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &= (A \cdot A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) + A^2 + A^{-2}) \langle \text{Diagram 8} \rangle + A \cdot A^{-1} \langle \text{Diagram 11} \rangle \\ &= \langle \text{Diagram 11} \rangle \end{aligned}$$

Abbildung 5.22: Ergebnis

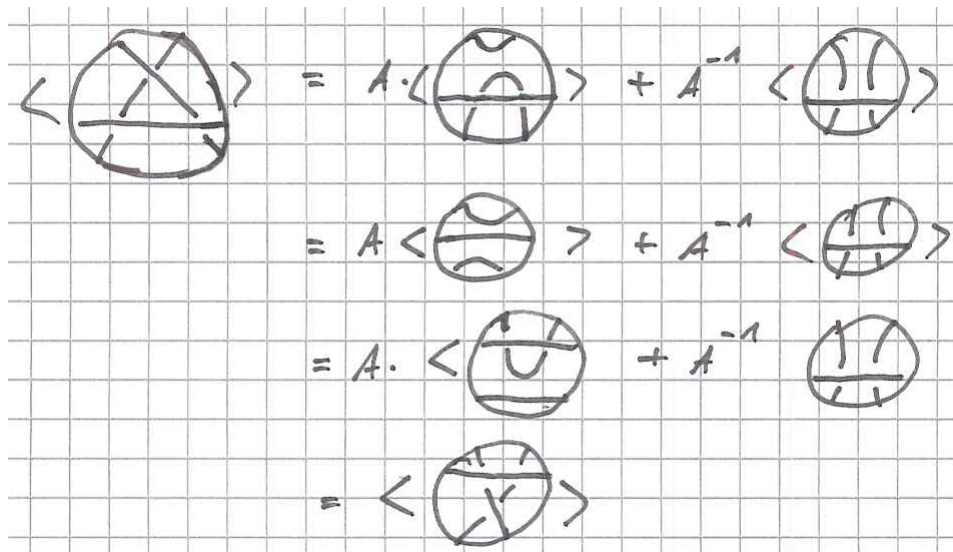


Abbildung 5.23: Typ III

□

Definition. (Verdrillungszahl) In einem (orientierten) Verschlingungsdiagramm heißt eine Überkreuzung:

- positiv, falls man durch Drehen mit math. pos. Drehsinn zunächst die obenliegende orientierte Strecke auf die untenliegende orientierte abbildet.
- negativ, falls man durch Drehen mit math. neg. Drehsinn zunächst die obenliegende orientierte Strecke auf die untenliegende orientierte abbildet.

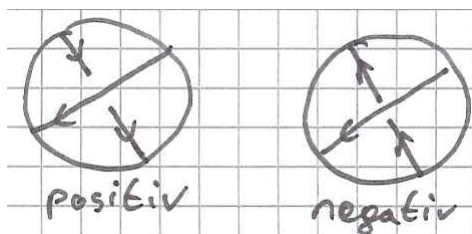


Abbildung 5.24: Beispiele

Die *Verdrillungszahl* eines Verschlingungsdiagramms V ist definiert als

$$w(V) = \# \text{ pos. Überkreuzungen} - \# \text{ neg. Überkreuzungen.}$$

Definition. $\langle\langle V \rangle\rangle := \langle V \rangle$ mit $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$

$$J_V(A) = (-A)^{-3w(V)} \cdot \langle\langle V \rangle\rangle$$

heißt *Jones-Polynom* des Verschlingungsdiagramms V .

Satz. $J_V(A)$ ist invariant bzgl. Reidemeisterbewegungen vom Typ I, II, III.

Beweis. Invarianz bzgl. der Reidemeisterbewegungen vom Typ II und Typ III ergibt sich aus Hilfssatz 2, aufgrund der Tatsache, dass sich die Verdrillungszahlen bei Reidemeisterbewegungen vom Typ II bzw. Typ III nicht ändern.

Entsteht \hat{V} aus V durch eine Reidemeisterbewegung vom Typ I, so hat man folgendes Bild:

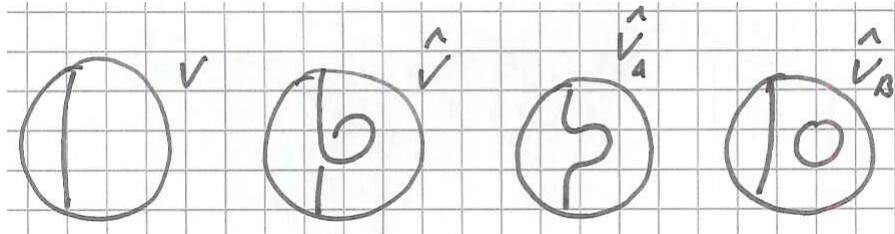


Abbildung 5.25: Typ I

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle\langle \hat{V} \rangle\rangle &= A \langle\langle \hat{V}_A \rangle\rangle + B \langle\langle \hat{V}_B \rangle\rangle \\
 &= A \langle\langle V \rangle\rangle + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) \cdot \langle\langle V \rangle\rangle \\
 &= (A + A^{-1} (-A^2 - A^{-2})) \langle\langle V \rangle\rangle \\
 &= (A - A - A^{-3}) \langle\langle V \rangle\rangle \\
 &= (-A)^{-3} \langle\langle V \rangle\rangle .
 \end{aligned}$$

Es gilt $w(\hat{V}) = w(V) - 1$.

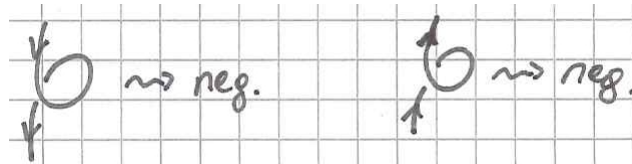


Abbildung 5.26: Nachweis dafür

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
 J_{\hat{V}}(A) &= (-A)^{-3w(\hat{V})} \langle\langle \hat{V} \rangle\rangle \\
 &= (-A)^{-3(w(V)-1)} \cdot (-A)^{-3} \langle\langle V \rangle\rangle \\
 &= (-A)^{-3w(V)} \cdot \langle\langle V \rangle\rangle = J_V(A) .
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. $J_V(A)$ ist also eine Verschlingungsinvariante.

Beispiel.

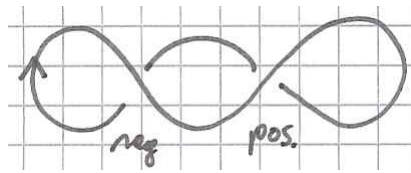


Abbildung 5.27: Skizze

$$\begin{aligned}
 J_V(A) &= (-A)^0 \langle\langle V \rangle\rangle \\
 &= \underbrace{A \cdot A^{-1} (-A^2 - A^{-2})^2}_{ABd^2} + \underbrace{(A^{-1})^2 (-A^2 - A^2)}_{B^2d} + \underbrace{A^2 (-A^2 - A^{-2})}_{A^2d} + \underbrace{AA^{-1}}_{AB} \\
 &= \dots = 1 = J_O(A)
 \end{aligned}$$

Beispiel.

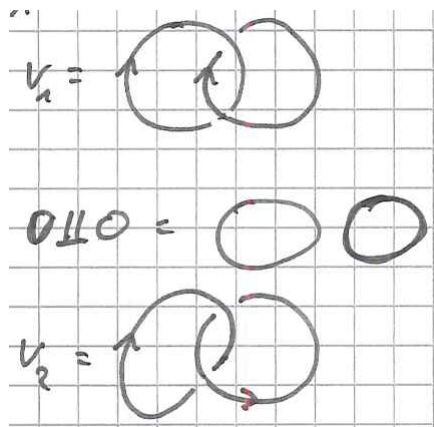


Abbildung 5.28: Skizze

Aus den Übungsaufgaben: $\langle\langle V_1 \rangle\rangle = -A^4 - A^{-4}$

$$\rightarrow J_{O \parallel O}(A) = -A^2 - A^2 = \langle\langle O \parallel O \rangle\rangle$$

$w(V_1) = 2$

$$\rightarrow J_{V_1}(A) = (-A)^{-3 \cdot 2} (-A^4 - A^{-4}) = -A^{-2} - A^{-10}$$

$w(V_2) = -2$

$$\rightarrow J_{V_2}(A) = (-A)^6 (-A^4 - A^{-4}) = -A^{10} - A^2$$

Definition.

- Die Umkehrverschlingung einer Verschlingung $V = (K_1, K_2, \dots, K_r)$ ist gegeben durch die geordnete Folge der Umkehrknoten $\bar{V} = (\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_r)$ d.h. alle Durchlaufrichtungen der einzelnen Knoten von V werden umgekehrt. Für die Umkehrverschlingung einer Verschlingung V schreiben wir \bar{V} .
- Das Spiegelbild V^* einer Verschlingung V ist dadurch definiert, dass man in einem Verschlingungsdiagramm alle Überkreuzungen durch Unterkreuzungen (und damit auch umgekehrt) ersetzt. D.h. in jeder Kreuzung führt man einen Kreuzungswechsel durch.

Satz. *Es gilt*

- i) $J_{\bar{V}}(A) = J_V(A)$.
- ii) $J_{V^*}(A) = J_V(A^{-1})$.

Beispiel. Kleeblattknoten

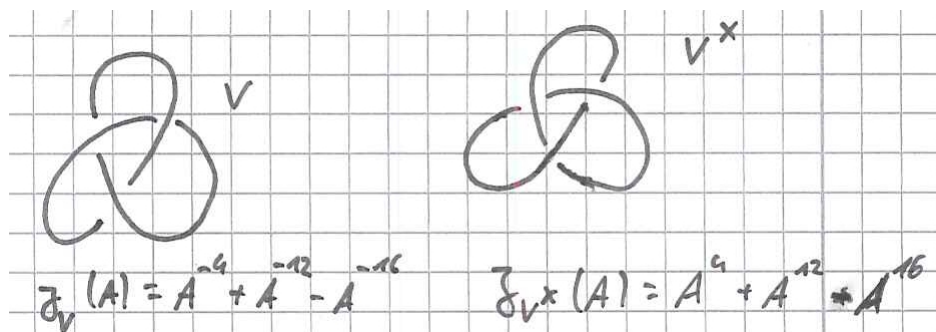


Abbildung 5.29: Beispiel

Definition. Wir sagen, dass drei Verschlingungen V_+ , V_- , V_0 bzw. drei Verschlingungsäquivalenzklassen $[V_+]$, $[V_-]$, $[V_0]$ in Entwirrungsrelation stehen, falls es zugehörige Verschlingungsdiagramme und eine eingebettete Kreisschreibe $D \subset \mathbb{R}^2$ gibt, sodass die Verschlingungsdiagramme außerhalb von D übereinstimmen und in D wie folgt aussehen:

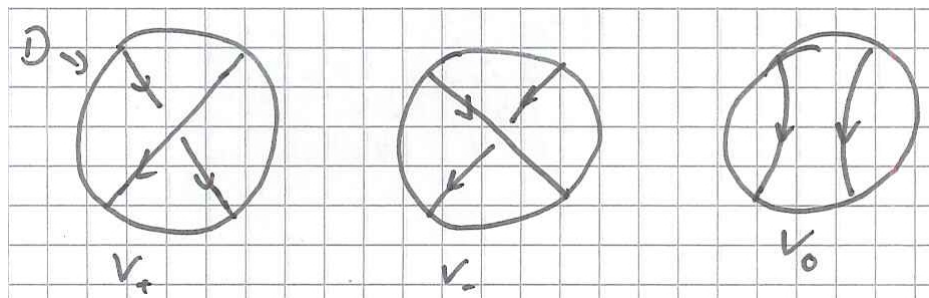


Abbildung 5.30: V_+ , V_- , V_0

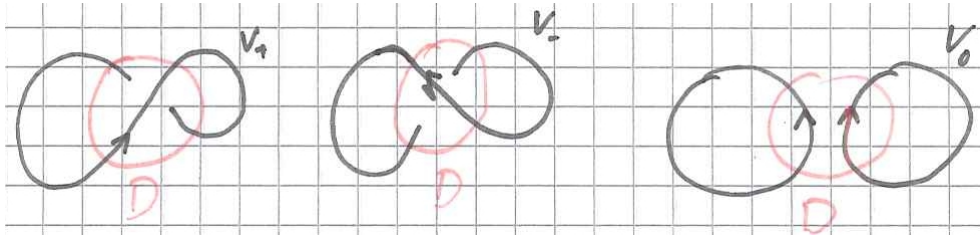


Abbildung 5.31: Beispiel

V_+ , V_- und V_0 stehen in Entwirrungsrelation.

Definition. Eine Entwirrungsinvariante ist eine Funktion

$$\gamma : \{\text{Äquivalenzklassen von Verschlingungen}\} \rightarrow R,$$

wobei R ein kommutativer Ring mit 1 ist, so dass

- i) es Elemente a_+ , a_- , a_0 in R gibt, die Inverse bzgl. der Multiplikation besitzen, sodass für Verschlingungen V_+ , V_- , V_0 , die in einer Entwirrungsrelation stehen, gilt:

$$a_+ \cdot \gamma(V_+) + a_- \cdot \gamma(V_-) + a_0 \cdot \gamma(V_0) = 0,$$

- ii) $\gamma(O) = 1$ gilt.

Bemerkung. Entwirrungsinvarianten lassen sich ganz hervorragend berechnen.

Im Beispiel oben:

$$\begin{aligned} a_+ \gamma(O) + a_- \gamma(O) + a_0 \gamma(O \sqcup O) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow a_+ + a_- + a_0 \gamma(O \sqcup O) &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma(O \sqcup O) &= \frac{-a_+ - a_-}{a_0} \end{aligned}$$

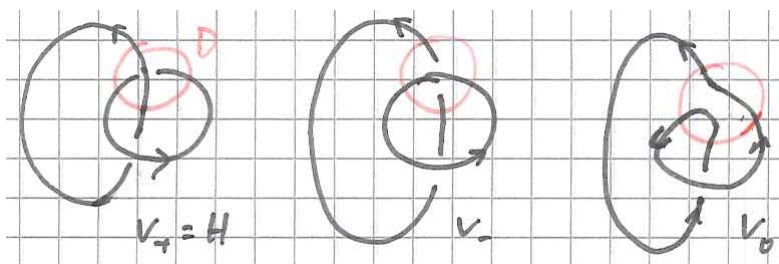


Abbildung 5.32: Weiters Beispiel

$$\begin{aligned}
a_+ \gamma(V_+) + a_- \gamma(V_-) + a_0 \gamma(V_0) &= 0 \\
\Leftrightarrow a_+ \gamma(V_+) + a_- \gamma(O \sqcup O) + a_0 \gamma(O) &= 0 \\
\Leftrightarrow a_+ \gamma(V_+) + a_- \left(\frac{-a_+ - a_-}{a_0} \right) + a_0 \cdot 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow \gamma(V_+) &= -\frac{a_0}{a_+} + \frac{a_-}{a_+} \left(\frac{a_+ + a_-}{a_0} \right) \\
\Leftrightarrow \gamma(H) &= -\frac{a_0}{a_+} + \frac{a_-}{a_0} + \frac{a_-^2}{a_+ a_0}
\end{aligned}$$

Beispiel. Kleeblattknoten

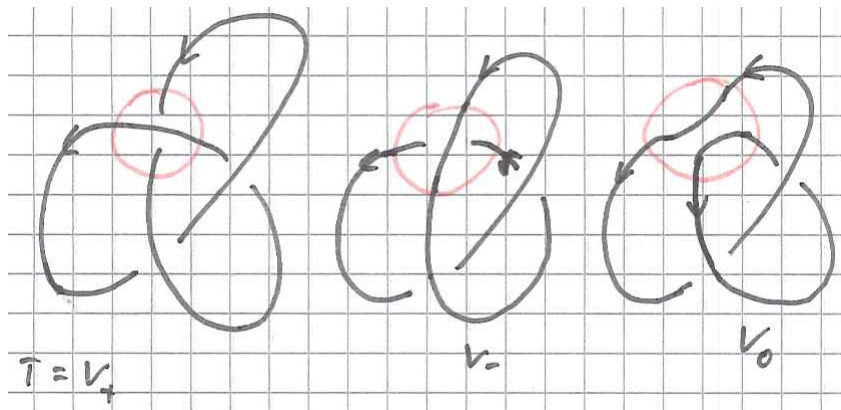


Abbildung 5.33: Skizze

$$\begin{aligned}
a_+ \gamma(T) + a_- \gamma(V_-) + a_0 \gamma(V_0) &= 0 \\
\Leftrightarrow a_+ \gamma(T) + a_- \gamma(O) + a_0 \gamma(H) &= 0 \\
\Leftrightarrow a_+ \gamma(T) + a_- \gamma(O) + a_0 \cdot \left(-\frac{a_0}{a_+} + \frac{a_-}{a_0} + \frac{a_-^2}{a_+ a_0} \right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \gamma(T) &= -\frac{a_-}{a_+} + \frac{a_0^2}{a_+^2} - \frac{a_-}{a_+} - \frac{a_-^2}{a_+^2} \\
&= -2\frac{a_-}{a_+} + \frac{a_0^2}{a_+^2} - \frac{a_-^2}{a_+^2}
\end{aligned}$$

Proposition. Das Jones-Polynom $V \mapsto J_V(A)$ ist eine Entwirrungsinvariante mit zugehörigem Ring $R = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ und zugehörigen Entwirrungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
a_+ &= A^4 \\
a_- &= -A^{-4} \\
a_0 &= (A^2 - A^{-2})
\end{aligned}$$

Beweis. Mit einer Diagrammrechnung erhält man:

$$A \cdot \langle\langle \text{circle with two diagonal lines} \rangle\rangle = A \cdot A \langle\langle \text{circle with two vertical lines} \rangle\rangle + A \cdot A^{-1} \langle\langle \text{circle with two horizontal lines} \rangle\rangle$$

$$A^{-1} \cdot \langle\langle \text{circle with two diagonal lines} \rangle\rangle = A^{-1} \cdot A \langle\langle \text{circle with two horizontal lines} \rangle\rangle + A^{-1} \cdot A^{-1} \langle\langle \text{circle with two vertical lines} \rangle\rangle$$

Abbildung 5.34: Diagrammrechnung

weiterhin hat man

$$w(V_+) = w(V_0) + 1$$

$$w(V_-) = w(V_0) - 1$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 0 &= a_+ J(V_+) + a_- J(V_-) + a_0 J(V_0) \\
 &= A^4 \cdot (-A)^{-3w(V_+)} \langle\langle V_+ \rangle\rangle + (-A^{-4}) (-A)^{-3w(V_-)} \langle\langle V_- \rangle\rangle + (A^2 - A^{-2}) (-A)^{-3w(V_0)} \langle\langle V_0 \rangle\rangle \\
 &= A^4 \cdot (-A)^{-3 \cdot (w(V_0)+1)} \langle\langle V_+ \rangle\rangle + (-A^{-4}) (-A)^{-3(w(V_0)-1)} \langle\langle V_- \rangle\rangle + (A^2 - A^{-2}) (-A)^{-3w(V_0)} \langle\langle V_0 \rangle\rangle \\
 &= -A^1 (-A)^{-3w(V_0)} \langle\langle V_+ \rangle\rangle + (A^{-1}) (-A)^{-3w(V_0)} \langle\langle V_- \rangle\rangle + (A^2 - A^{-2}) (-A)^{-3w(V_0)} \langle\langle V_0 \rangle\rangle \\
 &= -A \langle\langle V_+ \rangle\rangle + A^{-1} \langle\langle V_- \rangle\rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle\langle V_0 \rangle\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 0 &= -A^2 \langle\langle \text{circle with two vertical lines} \rangle\rangle - \langle\langle \text{circle with two horizontal lines} \rangle\rangle \\
 &+ \langle\langle \text{circle with two horizontal lines} \rangle\rangle + A^{-2} \langle\langle \text{circle with two vertical lines} \rangle\rangle \\
 &+ (A^2 - A^{-2}) \langle\langle \text{circle with two vertical lines} \rangle\rangle \\
 &= 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

□

Definition. Eine Entwirrungsinvariante

$$\Gamma : \{ \text{Äquivalenzklassen von Verschlingungen} \} \rightarrow S$$

heißt universell, wenn es zu jeder Entwirrungsinvariante

$$\gamma : \{ \text{Äquivalenzklassen von Verschlingungen} \} \rightarrow R$$

einen Ringhomomorphismus $\psi : S \rightarrow R$, sodass

$$\gamma(V) = \psi(\Gamma(V))$$

gilt.

Satz. *Es gibt eine kanonische universelle Entwirrungsinvariante*

$$\Gamma : \{ \text{Äquivalenzklassen von Verschlingungen} \} \rightarrow \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}],$$

wobei die Entwirrungskoeffizienten durch a_+, a_-, a_0 gegeben sind.

(ohne Beweis)

Proposition. *Es gilt für die kanonische universelle Entwirrungsinvariante*

$$i) \Gamma(\bar{V}) = \Gamma(V), \text{ d.h. } \Gamma(\bar{V})(a_+, a_-, a_0) = \Gamma(V)(a_+, a_-, a_0),$$

$$ii) \Gamma(V^\times)(a_+, a_-, a_0) = \Gamma(V)(a_-, a_+, a_0).$$

(ohne Beweis)

Beispiel. Das Jones-Polynom erhalten wir aus der kanonischen universellen Entwirrungsinvarianten über den Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}] \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}[[A, A^{-1}]]$$

mit $\psi(a_+) = A^4$, $\psi(a_-) = -A^{-4}$, $\psi(a_0) = A^2 - A^{-2}$.

Obige Proposition ergibt für das Jones-Polynom die uns schon bekannten Formeln

$$i) J_{\bar{V}}(A) = J_V(A),$$

$$ii) J_{V^\times}(A) = J_V(A^{-1}).$$

Beispiel. Das Alexander-Polynom $\Delta_V(t)$ für eine Verschlingung V erhält man, wenn man als Ring $R = \mathbb{Z}[[t, t^{-1}]]$ setzt und die Koeffizienten $a_+ = 1$, $a_- = -1$ und $a_0 = -(t - t^{-1})$ setzt. Für den obigen Kleeblattknoten T erhalten wir aus der für die universelle Entwirrungsinvariante hergeleiteten Formel

$$\Gamma(T) = -2 \frac{a_-}{a_+} + \frac{a_0^2}{a_+^2} - \frac{a_-^2}{a_+^2}$$

damit das zugehörige Alexander-Polynom durch einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta_T(t) &= -2 \frac{(-1)}{1} + \frac{(-t - t^{-1})^2}{1^2} - \frac{(-1)^2}{1^2} \\ &= t^2 - 1 - t^{-2} \end{aligned}$$

Beispiel. Das Conway-Polynom $\nabla_V(t)$ für eine Verschlingung V erhält man, wenn man als Ring $R = \mathbb{Z}[[z, z^{-1}]]$ setzt und die Koeffizienten $a_+ = 1$, $a_- = -1$ und $a_0 = -z$ setzt. Für den obigen Kleeblattknoten T erhalten wir analog zu oben

$$\nabla_T(t) = 1 + z^2$$

Beispiel. Das HOMFLY-Polynom $P_V(a, z)$ für eine Verschlingung V erhält man, wenn man als Ring $R = \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ setzt und die Koeffizienten $a_+ = a$, $a_- = -a^{-1}$ und $a_0 = -z$ setzt. Das Jones- und das Conway-Polynom sind Spezialfälle des HOMFLY-Polynoms. Man erhält die beiden ersten Polynome jeweils durch Ersetzung der Variablen: für das Jones-Polynom setzt man $a := A^4$ und $z = -A^2 + A^{-2}$; für das Conway Polynom $a = 1$ und $z = z$.

Anmerkung zum Begriff der ambienten Isotopie: Bislang haben wir nur ambiente Isotopieklassen von Einbettung betrachtet, da diese genau für den Begriff der Äquivalenzklasse eines Knotens bzw. einer Verschlingung relevant waren. Genauso kann man aber auch ambiente Isotopieklassen von allgemeinen Abbildungen von einem topologischen Raum in einen anderen betrachten.

Definition. Ein glatter singulärer Knoten ist eine stetige Abbildung $i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, für die folgende Eigenschaften gelten:

- Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} c = i \circ e: \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & S^1 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) & \mapsto & i(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

ist stetig differenzierbar, und es ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt,

- Jeder Punkt in \mathbb{R}^3 hat maximal zwei Urbilder in S^1 , und die Anzahl der Punkte mit genau zwei Urbildern ist endlich,
- Sind $t, t' \in \mathbb{R}$ zwei Elemente, mit $c(t) = c(t')$, aber $e(t) \neq e(t')$, so sind die Richtungsableitungen $c'(t)$ und $c'(t')$ linear unabhängig.

Ein singulärer Knoten ist eine stetige Abbildung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die ambient isotop zu einem singulären glatten Knoten ist. Analog wie bei (nicht-singulären) Verschlingungen definiert man eine singuläre Verschlingung dann als eine endliche geordnete Menge von singulären Knoten.

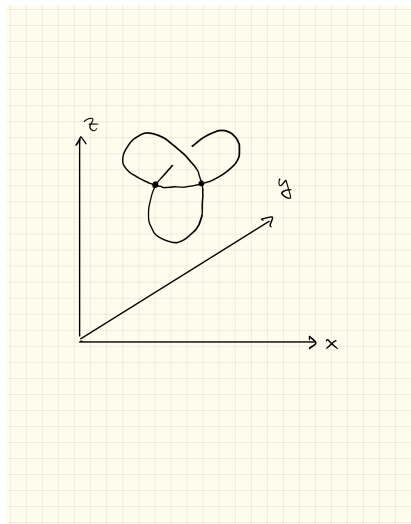


Abbildung 5.35: Singuläre Verschlingung mit zwei Doppelpunkten

Wie bei Knoten bzw. Verschlingungen kann man das Konzept der regulären Projektionen sowie (singuläre) Verschlingungsdiagramme für singuläre Verschlingungen einführen. Ein solches singuläres Verschlingungsdiagramm weist dann endlich viele Doppelpunkte auf.

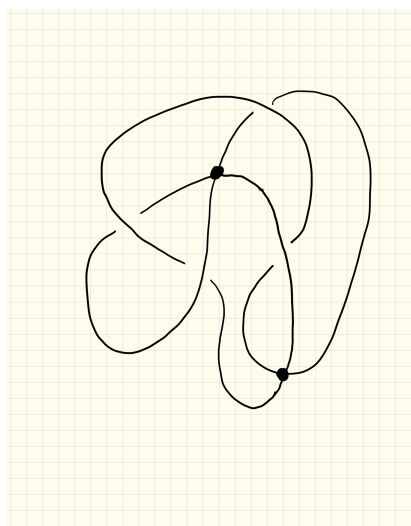


Abbildung 5.36: Singuläres Verschlingungsdiagramm

Definition. Eine Abbildung

$$\delta : \{ \text{Äquivalenzklassen von singulären Verschlingungen} \} \longrightarrow R$$

in einen Ring R heißt eine singuläre Verschlingungsinvariante, falls folgende Diagrammrechnungsgleichung gilt:

$$\delta \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = \delta \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - \delta \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right)$$

Bemerkung. Die Menge der Äquivalenzklassen von regulären Verschlingungen bildet eine Teilmenge der Äquivalenzklassen von singulären Verschlingungen. Demzufolge liefert eine singuläre Verschlingungsinvariante durch Einschränkung immer auch eine Verschlingungsinvariante. Der nachfolgende Satz besagt, dass es - umgekehrt - zu jeder Verschlingungsinvariante auch genau eine singuläre Verschlingungsinvariante gibt.

Satz. Zu jeder Verschlingungsinvariante

$$\gamma : \{ \text{Äquivalenzklassen von singulären Verschlingungen} \} \longrightarrow R$$

in einen Ring R gibt es genau eine zugehörige singuläre Verschlingungsinvariante, so dass

$$\delta(V) = \gamma(V) \quad \text{für alle (regulären) Verschlingungen}$$

Beweis. Wir definieren die singuläre Verschlingungsinvariante induktiv, und zwar mit einer Induktion über die Anzahl der Doppelpunkte einer Verschlingung.

Induktionsanfang: Besitzt eine singuläre Verschlingung keinen Doppelpunkt, d.h. es handelt sich um eine reguläre Verschlingung, so setzen wir $\delta(V) := \gamma(V)$.

Induktionsschritt: Wir nehmen nun an, dass δ schon für alle singulären Verschlingungen mit bis zu n Doppelpunkten definiert ist. Sei V nun eine singuläre Verschlingung mit $(n + 1)$ Doppelpunkten. Wir wählen nun einen Doppelpunkt P , und bezeichnen das singuläre Verschlingungsdiagramm, das wir erhalten, wenn wir P durch eine positive Kreuzung ersetzen mit V_+^P , und das singuläre Verschlingungsdiagramm, das wir erhalten, wenn wir P durch eine negative Kreuzung ersetzen mit V_-^P . Wir definieren dann

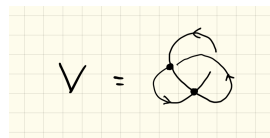
$$\delta(V) := \delta(V_+^P) - \delta(V_-^P)$$

Die Definition ist unabhängig von der Auswahl des Doppelpunktes P . Denn ist Q ein weiterer Doppelpunkt, so gilt

$$\begin{aligned}
 \delta(V) &= \delta(V_+^P) - \delta(V_-^P) \\
 &= (\delta((V_+^P)_+^Q) - \delta((V_+^P)_-^Q)) - (\delta((V_-^P)_+^Q) - \delta((V_-^P)_-^Q)) \\
 &= (\delta((V_+^Q)_+^P) - \delta((V_-^Q)_+^P)) - (\delta((V_+^Q)_-^P) - \delta((V_-^Q)_-^P)) \\
 &= \delta((V_+^Q)_+^P) - \delta((V_-^Q)_+^P) - \delta((V_+^Q)_-^P) + \delta((V_-^Q)_-^P) \\
 &= (\delta((V_+^Q)_+^P) - \delta((V_+^Q)_-^P)) - (\delta((V_-^Q)_+^P) - \delta((V_-^Q)_-^P)) \\
 &= \delta(V_+^Q) - \delta(V_-^Q)
 \end{aligned}$$

□

Beispiel. Wir betrachten nun den singulären Knoten mit folgendem singulären Knotendiagramm



Ist γ eine Verschlingungsinvariante mit einer zugehörigen singulären Verschlingungsinvariante δ erhalten wir $\delta(V)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \delta(V) &= \delta \left(\text{Diagram 1} \right) - \delta \left(\text{Diagram 2} \right) \\
 &= \gamma \left(\text{Diagram 1} \right) - \gamma \left(\text{Diagram 2} \right) \\
 &\quad - \left(\gamma \left(\text{Diagram 3} \right) - \gamma \left(\text{Diagram 4} \right) \right) \\
 &= \gamma(0) - \gamma(0) \\
 &\quad - \gamma(0) + \gamma \left(\text{Diagram 5} \right) = \gamma(\tau^x) - \gamma(0)
 \end{aligned}$$

Beispielsweise erhält man für den Fall, dass γ das Jones-Polynom ist:

$$J_V(A) = J_{T^x}(A) - 1 = A^4 + A^{12} - A^{16} - 1$$

Definition. Eine singuläre Verschlingungsinvariante δ heißt vom Grad $\leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, falls $\delta(V) = 0$ für alle singulären Verschlingungen mit mehr als n Doppelpunkten gilt. Solche Invarianten nennt man allgemein auch Vassiliev-Invarianten.

Beispiel (Satz von Bar-Natan). Für jede natürliche Zahl n ist der Koeffizient von z^n im Conway-Polynom ∇_V eine singuläre Verschlingungsinvariante vom Grad $\leq n$.

Vermutung. Nimmt man alle Vassiliev-Invarianten zusammen, so erhält man damit eine vollständige Knoteninvariante, d.h. sind K und K' zwei nicht-äquivalente Knoten, so gibt es eine natürliche Zahl n und eine Vassiliev-Invariante δ vom Grad $\leq n$, so dass

$$\delta(K) \neq \delta(K').$$