

4 Knotentheorie

Anschaulich: Knoten sind spezielle Einbettungen von S^1 in den \mathbb{R}^3 .

$$i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto i(x, y)$$

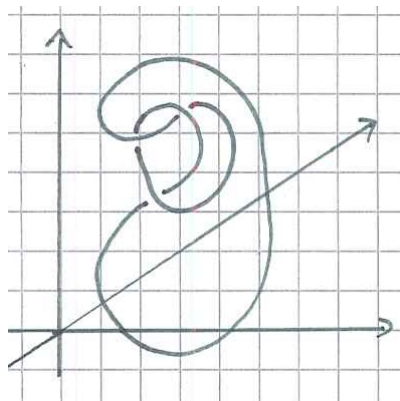


Abbildung 4.1: Beispiel

Beispiel. Auch folgendes Bild ist die Veranschaulichung einer Einbettung $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, jedoch passt sie nicht zu unserer Vorstellung von Knoten.

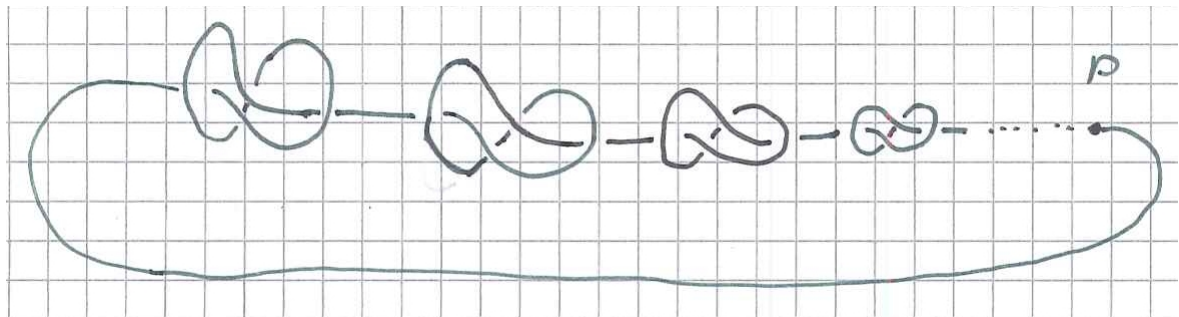


Abbildung 4.2: Beispiel

Definition. Eine Einbettung $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *glatter Knoten*, falls die Komposition

$$c = i \circ e : \mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \mapsto i(\cos(t), \sin(t))$$

stetig differenzierbar ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Abbildung c nennt man dann auch eine glatte geschlossene reguläre Kurve.

Bemerkung. Das Bild der Einbettung im zweiten Beispiel ist beispielsweise nicht das Bild eines glatten Knotens. Die zugehörige Kurve $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist nicht differenzierbar mit $c'(t) \neq 0$ am Urbild von P . Er ist auch kein stückweise glatter Knoten im Sinne der folgenden Definition.

Definition. Eine Einbettung $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ nennen wir einen *stückweise glatten Knoten*, falls es eine natürliche Zahl n und Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 2\pi$ gibt, so dass die Kompositionen

$$c_k = i \circ e : \begin{array}{ccc} [t_k, t_{k+1}] & \xrightarrow{e} & S^1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) & \mapsto & i(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

für alle $k = 0, \dots, n-1$ stetig differenzierbar sind mit $c'_k(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Wir nennen einen stückweise glatten Knoten *polygonal*, falls die Bilder Einschränkung c_k für alle k Geradensegmente im \mathbb{R}^3 sind. Ein polygonaler Knoten durchläuft also eine endliche Folge von Streckensegmenten und liefert insgesamt einen geschlossenen Streckenzug.

Bemerkung. Polygonale Knoten sehen zwar nicht so schön aus wie glatte Knoten, mit ihnen kann man aber sehr gut kombinatorisch arbeiten.

Frage: Wann sind zwei Knoten im Wesentlichen gleich?

- Homotopie? Nicht gut, da dann alle Knoten im Wesentlichen gleich wären, da \mathbb{R}^3 kontraktibel ist.
- Isotopie?

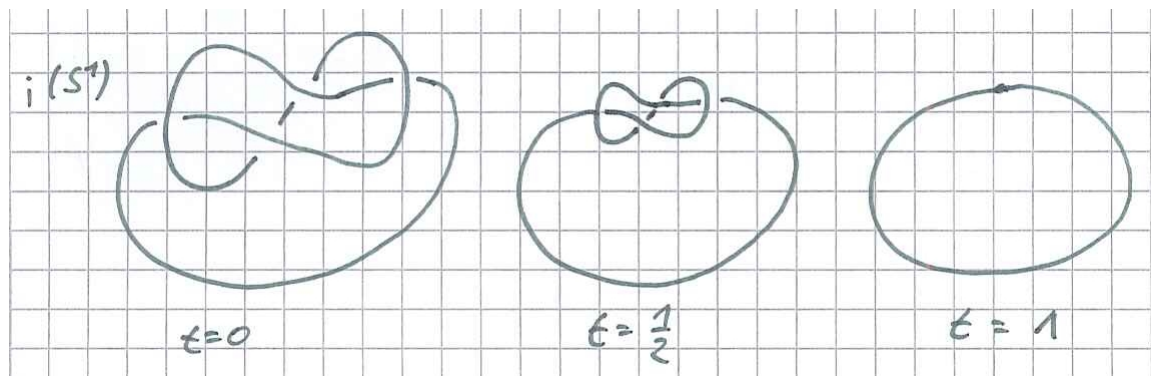


Abbildung 4.3: Ziehe Knoten auf einen Punkt zusammen

Lemma. Jeder glatte Knoten (polygonale Knoten) ist isotop zu einem Standard-Trivialen Knoten.

Beweisidee. Schiebe die Knoten zwischen den „normal“ aussehenden Teilen zusammen.

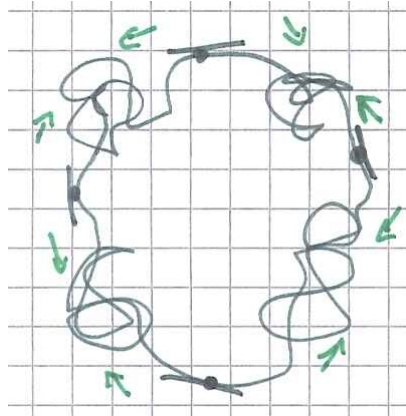


Abbildung 4.4: Idee

□

Definition. Ist (X, \mathcal{O}) ein top. Raum, so heißt eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow X$ eine *Isotopie des Raumes X* , falls $H_t = H \circ i_t$ für jedes $t \in [0, 1]$ ein Homöomorphismus ist. (Zur Erinnerung: $i_t : X \rightarrow X \times I; x \mapsto (x, t)$)

Bemerkung. Eine Isotopie $H : X \times I \rightarrow X$ ist eine Isotopie des Raumes X genau dann, wenn H_t für jedes $t \in [0, 1]$ surjektiv ist.

Definition. Zwei Einbettungen $f, g : X' \hookrightarrow X$ heißen *ambient isotop*, falls es eine Isotopie $(H : X \times I \rightarrow X)$ des Raumes X gibt, sodass

$$H_0 = id_X \text{ (und somit } f = H_0 \circ f \text{)}$$

und

$$g = H_1 \circ f.$$

Beispiel. Wir betrachten folgende Einbettungen: $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ und $g : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (-x, -y, 1)$.

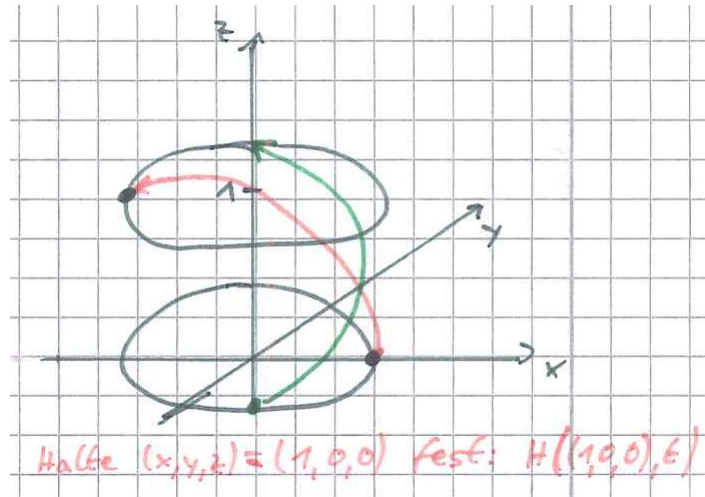


Abbildung 4.5: Skizze

Definiere $H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$H((x, y, z), t) = (\cos(\pi t)x - \sin(\pi t)y, \sin(\pi t)x + \cos(\pi t)y, z + t)$$

Dann gilt $H_0(x, y, z) = (x, y, z)$, d.h. $H_0 = id_{\mathbb{R}^3}$, und

$$H_1 \circ f(x, y) = H_1(x, y, 0) = (-x, -y, 1).$$

Also sind f und g ambient isotop.

Satz. *Jeder glatte Knoten ist ambient isotop zu einem polygonalen Knoten.*

Beweisidee. Jede glatte Abbildung kann man durch einen polygonalen Knoten approximieren/annähern. Sind zwei Einbettungen „nah beieinander“, so kann man sie durch eine ambiente Isotopie ineinander überführen; insbesondere werden Punkte bei der Isotopie nur wenig bewegt. \square

Definition. Eine Einbettung $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt ein *Knoten*, wenn sie ambient isotop zu einem glatten Knoten ist. Zwei Knoten heißen äquivalent, falls sie ambient isotop sind.

Die Definition macht nur Sinn, wenn ambiente Isotopie eine Äquivalenzrelation darstellt.

Lemma. *Es seien X' und X top. Räume. Dann definiert ambiente Isotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Einbettungen von X' in X , d.h. für Einbettungen $f, g, h : X' \hookrightarrow X$ gilt*

- i) *Reflexivität: f ist ambient isotop zu f .*
- ii) *Symmetrie: f ist genau dann ambient isotop zu g , wenn g ambient isotop zu f ist.*
- iii) *Transitivität: Ist f ambient isotop zu g und g ist ambient isotop zu h , so ist f ambient isotop zu h .*

Beweis.

i) Setze $H : X \times I \rightarrow X$ fest durch: $H(x, t) = x$. Dann gilt für jedes $t \in I$, dass $H_t = id$.
Daher gilt $H_0 = id$, $f = H_1 \circ f = id \circ f = f$.

ii) Sei $H' : X \times I \rightarrow X$ fest durch

$$H'(x, t) = H_1^{-1}(H(x, 1-t)) .$$

H' ist die Komposition von drei stetigen Abbildungen

$$H' = H'_1 \circ H \circ \chi ,$$

wobei $\chi : X \times I \rightarrow X \times I$ gegeben ist durch

$$\chi(x, t) = (x, 1-t) .$$

(Stetigkeit von χ folgt aus Kriterium für Stetigkeit für Abbildungen in ein Produkt.)

Also ist H' stetig. H' ist eine Isotopie des Raumes, denn

$$H'_t(x) = H'_1 \circ H(x, 1-t) = H_1^{-1} \circ H_{1-t}(x) .$$

Da H eine Isotopie des Raumes X ist sind H_1 und H_{1-t} Homöomorphismen. Damit sind aber auch H_1^{-1} und $H_1^{-1} \circ H_{1-t}$ Homöomorphismen.

Weiterhin gilt:

$$H'_0(x) = H_1^{-1} \circ H(x, 1-0) = H_1^{-1} \circ H_1(x) = (H_1^{-1} \circ H_1)(x) = x ,$$

also gilt $H'_0 = id$. Die Gleichung $f = H'_1 \circ g$ ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} H'_1 \circ g(x') &= H'_1(g(x')) \\ &= H_1^{-1}(H(g(x'), 1-1)) \\ &= H_1^{-1}(H_0(g(x'))) \\ &= H_1^{-1}(g(x')) \\ &\stackrel{g=H_1 \circ f}{=} H_1^{-1}(H_1 \circ f(x')) \\ &= (H_1^{-1} \circ H_1)(f(x')) \\ &= f(x') \end{aligned}$$

iii) Sei $H : X \times I \rightarrow X$ eine Isotopie des Raumes X mit $H_0 = id$, $g = H_1 \circ f$ und sei $H' : X \times I \rightarrow X$ eine Isotopie des Raumes X mit $H'_0 = id$, $h = H'_1 \circ g$. Setze $H'' : X \times I \rightarrow X$ fest durch

$$H''(x, t) = H'(H(x, t), t) .$$

H'' ist die Komposition von zwei stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} H'' : & X \times I & \xrightarrow{(H, pr_2)} & X \times I & \xrightarrow{H'} & X \\ & (x, t) & \mapsto & (H(x, t), t) & \mapsto & H'(H(x, t), t) \end{array}$$

Also ist H'' stetig.

H'' ist eine Isotopie des Raumes X , denn

$$H_t''(x) = H'(H(x, t), t) = H_t'(H(x, t)) = H_t'(H_t(x)) = (H_t' \circ H_t)(x)$$

und da H_t und H_t' Homöomorphismen sind, ist es auch H_t'' .

Also haben wir gesehen, dass H'' eine Isotopie ist. Weiterhin gilt:

- $H_0'' = H_0' \circ H_0 = id \circ id = id$
- $H_1'' \circ f = H_1' \circ H_1 \circ f = H_1' \circ g = h$

□

Wir beschäftigen uns nun etwas genauer mit der graphischen Präsentation von Knoten.

Definition. Unter der Projektion eines Knotens $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ verstehen wir die Abbildung

$$p \circ i : S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definition. Die Projektion eines glatten Knotens heißt *regulär*, falls

- Die Funktion $p \circ i \circ e : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Richtungsableitung $(p \circ i \circ e)'(t) \neq 0$ besitzt.
- Für die Funktion $p \circ i$ hat jeder Punkt in \mathbb{R}^2 maximal zwei Urbilder in S^1 , und die Anzahl der Punkte in \mathbb{R}^2 mit genau zwei Urbildern ist insgesamt endlich. Solche Punkte im \mathbb{R}^2 nennen zukünftig Doppelpunkte.
- Sind z und z' in S^1 zwei Urbilder (bzgl. $p \circ i$), die auf denselben Punkt in \mathbb{R}^2 abgebildet werden (d.h. es gilt $p \circ i(z) = p \circ i(z')$), so sind die beiden zugehörigen Richtungsableitungen im \mathbb{R}^2 für z und z' linear unabhängig.

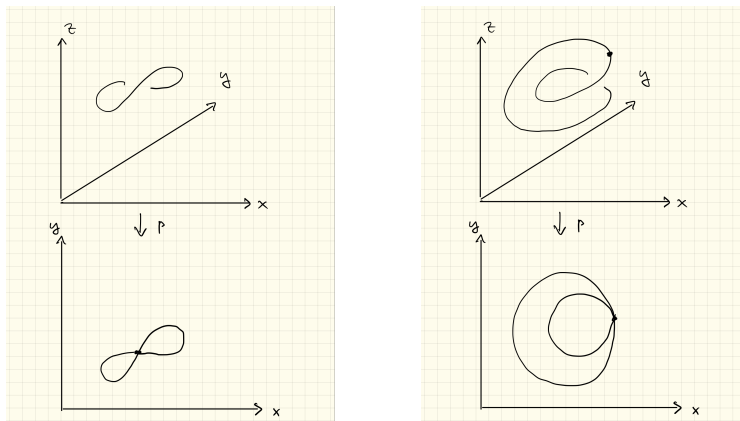


Abbildung 4.6: Glatte Knoten mit regulärer und mit nicht regulärer Knotenprojektion

Proposition. Zu jedem Knoten $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein äquivalenter glatter Knoten $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einer regulären Projektion, so dass $\|i(z) - j(z)\| < \varepsilon$ für alle $z \in S^1$ gilt. Insbesondere gibt es damit in jeder Äquivalenzklasse eines Knotens einen glatten Knoten mit regulärer Knotenprojektion.

Beweisidee. Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ findet man einen äquivalenten polygonalen Knoten $J : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, für den $\|i(z) - j(z)\| < \varepsilon$ für alle $z \in S^1$ gilt. Der polygonale Knoten setzt sich aus endlich vielen Streckenzügen zusammen. Indem man die Ecken notfalls noch etwas verschiebt, kann man sicherstellen, dass keine der Streckenzüge parallel zur z -Achse verläuft und dass keine zwei Streckenzüge mittels auf parallele Streckenzüge im \mathbb{R}^2 abgebildet werden.

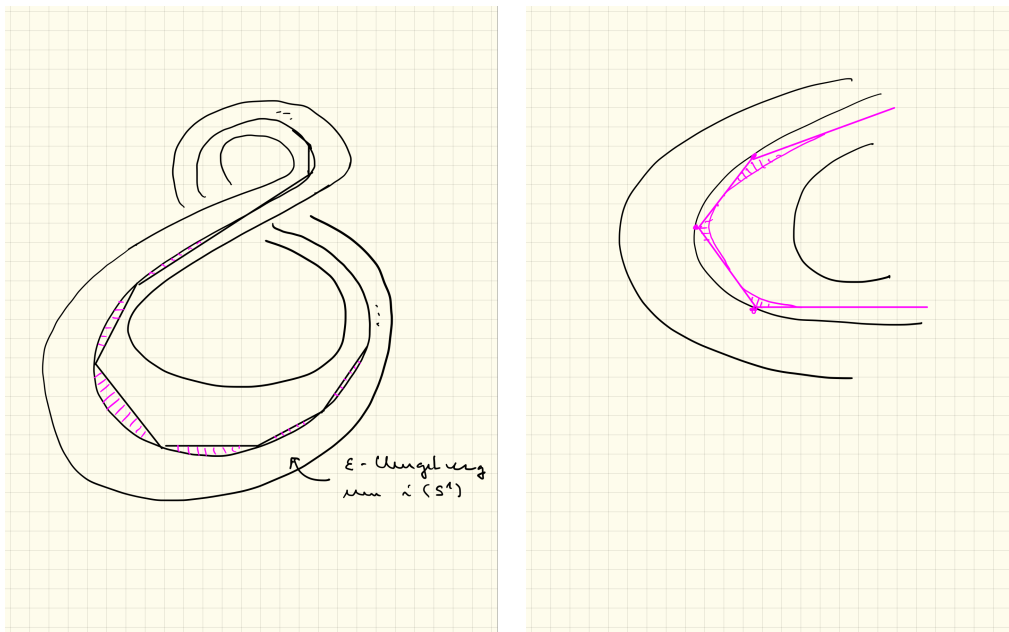


Abbildung 4.7: Approximation durch Polygonzug / Glättung des Polygonzugs an Ecken

Nun kann man die Streckenzüge in der Nähe der Eckpunkte glätten. Diese Glättung führt man in der durch die beiden angrenzenden Strecken aufgespannten Ebene durch. Auf diese Weise erhält man dann den gesuchten Knoten $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. \square

Frage: Sind zwei glatte Knoten mit regulärer Knotenprojektion gleich, wenn ihre Knotenprojektionen übereinstimmen? Nein! Beispielsweise kann man den links- und den rechtsdrehenden Kleeblattknoten so in den \mathbb{R}^3 einbetten, dass ihre Knotenprojektionen übereinstimmen (siehe nachstehende Abbildung).

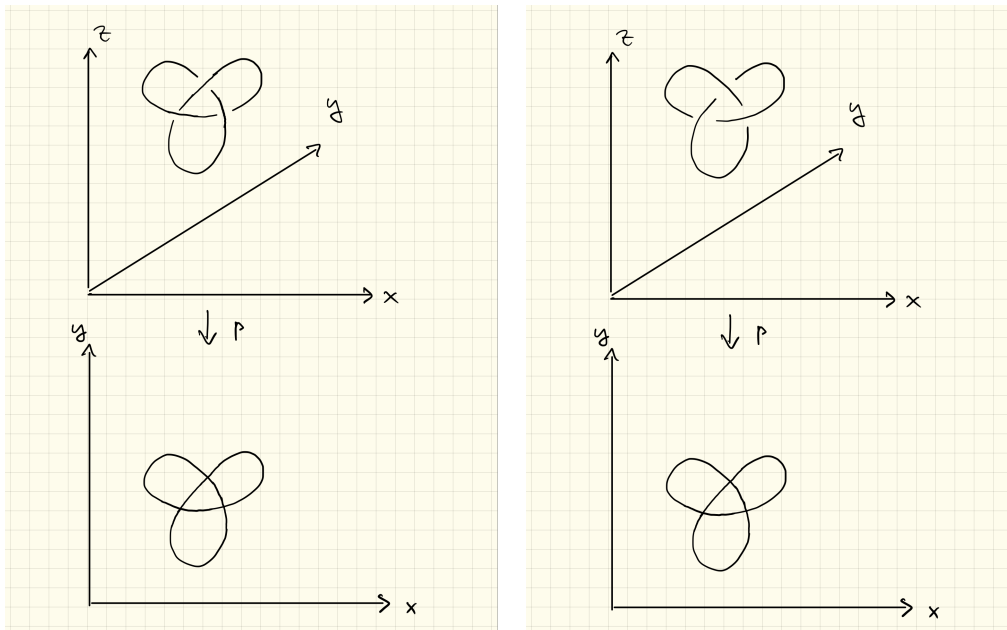


Abbildung 4.8: Links- und rechtsdrehender Kleeblattknoten

Definition. Ist $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glatter Knoten mit regulärer Knotenprojektion, so nennen wir das Bild der Projektion das naive Knotendiagramm des Knotens. Unter dem Knotendiagramm des Knotens versteht man das naive Knotendiagramm, zusammen mit der Information, für welchen der beiden Bildpunkte $i(z)$ und $i(z')$ über einem Doppelpunkt $p(i(z)) = p(i(z')) \in \mathbb{R}^2$ der Wert der dritten Koordinate größer ist. Zeichnerisch kodieren wir dies im Bild eines naiven Knotendiagramm dadurch, dass wir an dem Doppelpunkt den Bildbogen des Bogens mit dem dem höheren Wert durchziehen, während der andere Bildbogen durch das Bild des durchgezeichneten Bogens durchtrennt wird. Wir zeichnen sozusagen eine Projektion des Knoten "von oben".

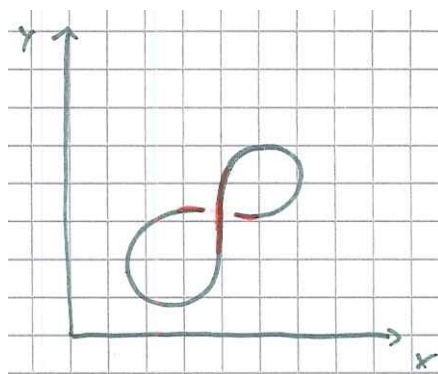


Abbildung 4.9: Projektion mit Über-/Unterkreuzung

Satz. Besitzen zwei glatte Knoten mit regulären Projektionen die gleiche Knotenprojektion und das gleiche Knotendiagramm, so sind die Knoten äquivalent.

Beweisskizze. Es seien i und j zwei glatte Knoten mit regulären Knotendiagrammen, für die die Knotenprojektionen und die Knotendiagramme übereinstimmen. Um zu sehen, dass die beiden Knoten äquivalent sind, ändern wir sie zunächst innerhalb ihrer Äquivalenzklassen so ab, dass für die Urbilder z und z' eines Doppelpunktes jeweils $i(z) = j(z)$ und $i(z') = j(z')$. Die Änderung machen wir so, dass sich die Knotenprojektionen und die Knotendiagramme nicht ändern.

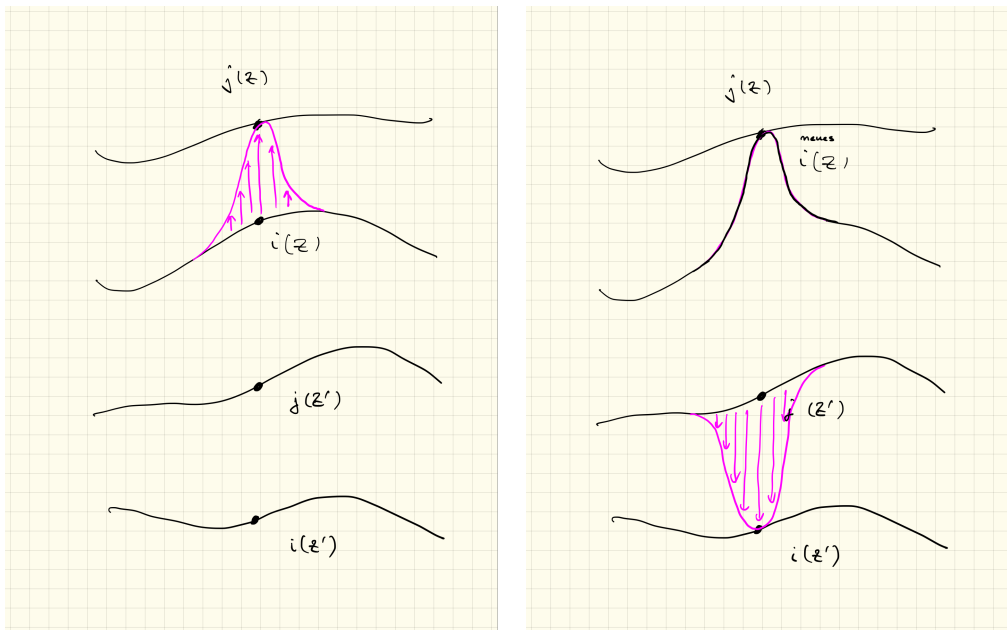


Abbildung 4.10: Die Knoten werden lokal so abgeändert, dass die Bildpunkte der Knotens nach der Modifikation über den Doppelpunkten übereinstimmen

Die Änderungen führen lokal über den Doppelpunkten in zwei Schritten durch. Ist über einem Doppelpunkt $z \in S^1$ der Punkt, der die höhere dritte Koordinate besitzt, so ziehen wir den Strang mit der niedrigeren dritten Koordinate bei $i(z)$ bzw. $j(z)$ lokal zu dem Strang mit der höheren dritten Koordinate hoch bis beide Punkte über dem Doppelpunkte die gleiche dritte Koordinate besitzen. Im zweiten Schritt ziehen wir den Strang mit der höheren dritten Koordinate bei $i(z')$ bzw. $j(z')$ lokal zu dem Strang mit der niedrigeren dritten Koordinate hinunter bis beide Punkte über dem Doppelpunkte ebenfalls die gleiche dritte Koordinate besitzen. Die Modifikation kann mittels einer ambienten Isotopie erreicht werden.

Wir betrachten nun für jedes $z \in S^1$ das Liniensegment L_z , das $i(z)$ und $j(z)$ miteinander verbindet, und bilden die Vereinigung der Liniensegmente

$$D = \bigcup_{z \in S^1} L_z$$

Für ein geeignetes (kleines) $\varepsilon > 0$ ist die ε -Umgebung von D ein eingebetteten Torus. Man kann nun eine Isotopie des Torus finden, die den Rand des Torus festlässt und die Einbettung $i : S^1 \rightarrow T$ in die Einbettung $j : S^1 \rightarrow T$ ambient isotopiert. Indem man die Isotopie des Torus außerhalb des Torus trivial fortsetzt, erhält man eine Isotopie des \mathbb{R}^3 , die die Einbettung $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in die Einbettung $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ambient isotopiert.

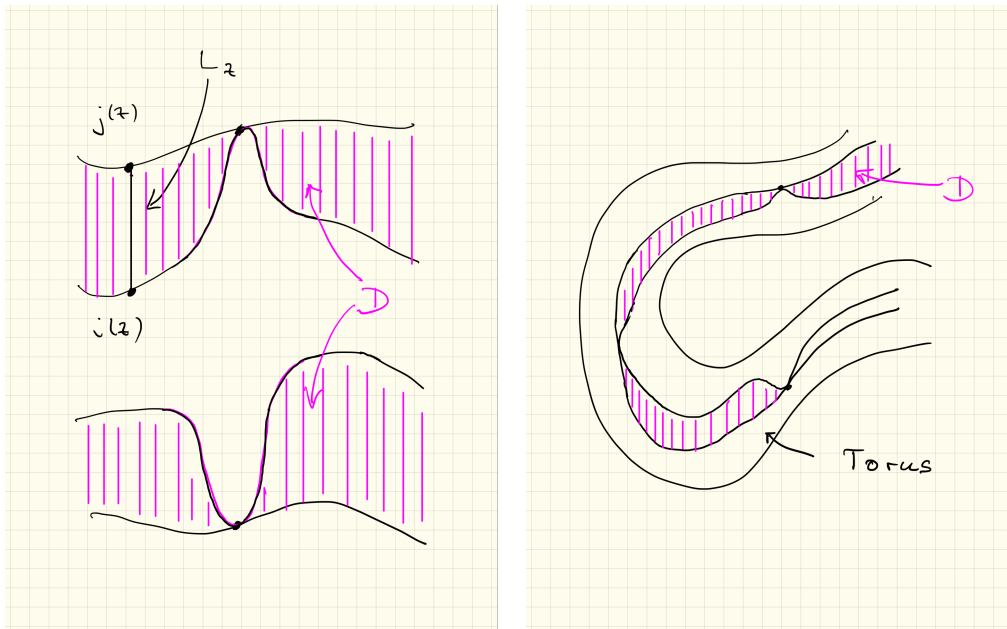


Abbildung 4.11: Die Vereinigung D der Linienelement L_z ist ein über den Doppelpunkten zusammengedrückter Schlauch. Innerhalb des Torus kann der eine Knoten jetzt in den anderen ambient isotopiert werden

□

Frage: Inwieweit bestimmt das Knotendiagramm eines glatten Knotens mit regulärer Projektion schon seine Äquivalenzklasse?

Definition. Für einen Knoten $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir den Knoten $\bar{i} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned} \bar{i} : S^1 &\rightarrow S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned}$$

\bar{i} heißt der Umkehrknoten von i . Ein Knoten i heißt umkehrbar, falls $[i] = [\bar{i}]$. Wir sagen, dass sich zwei Äquivalenzklassen $[i], [j]$ höchstens um eine Orientierung unterscheiden, wenn $[i] = [j]$ oder $[i] = [\bar{j}]$.

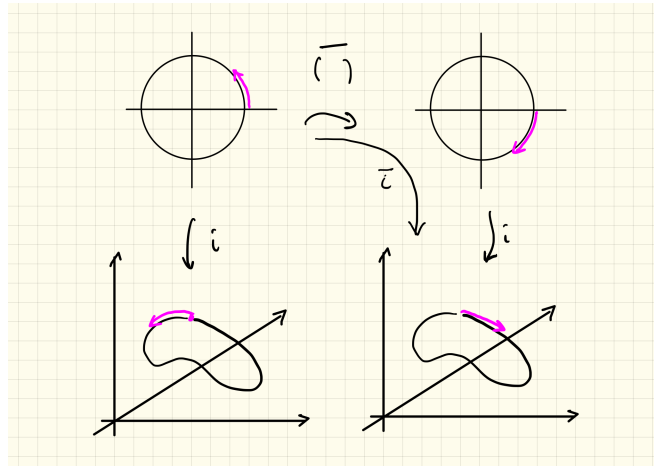


Abbildung 4.12: Knoten und zugehöriger Umkehrknoten

Antwort auf vorstehende Frage: Die Äquivalenzklasse von zwei glatten Knoten mit gleichen Knotendiagrammen unterscheiden sich höchstens um eine Orientierung. D.h. gibt man zu einem Knotendiagramm eine Durchlaufrichtung (Orientierung) an, so legt dies eindeutig eine Äquivalenzklasse fest. Dies folgt aus nachstehendem Satz.

Elementare Änderungen von Knotendiagrammen

Definition. Wir sagen, dass in (orientiertes) Knotendiagramm eines glatten Knotens aus einer Scheiben-Deformation aus dem (orientierten) Knotendiagramm eines anderen glatten Knotens entsteht, falls es eine in den \mathbb{R}^2 eingebettete (2-dimensionale) Scheibe D und zwei verschiedene Punkte P und Q auf dem Rand von D gibt, so dass die Schnittmenge der Kurve des einen Knotens mit der Scheibe D genau eines der beiden Randsegmente von D , die P und Q verbinden, ist, und das andere Knotendiagramm dadurch entsteht, dass dieses Randsegment durch das andere Randsegment ersetzt wird.

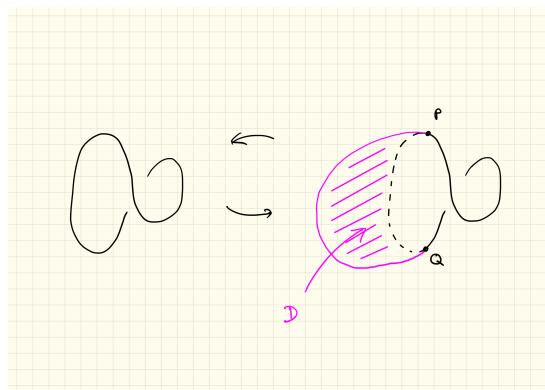


Abbildung 4.13: Originalknoten und Knoten nach Scheiben-Deformation

Die folgenden Änderungen führen ebenfalls nicht zur Änderung der Äquivalenzklassen.

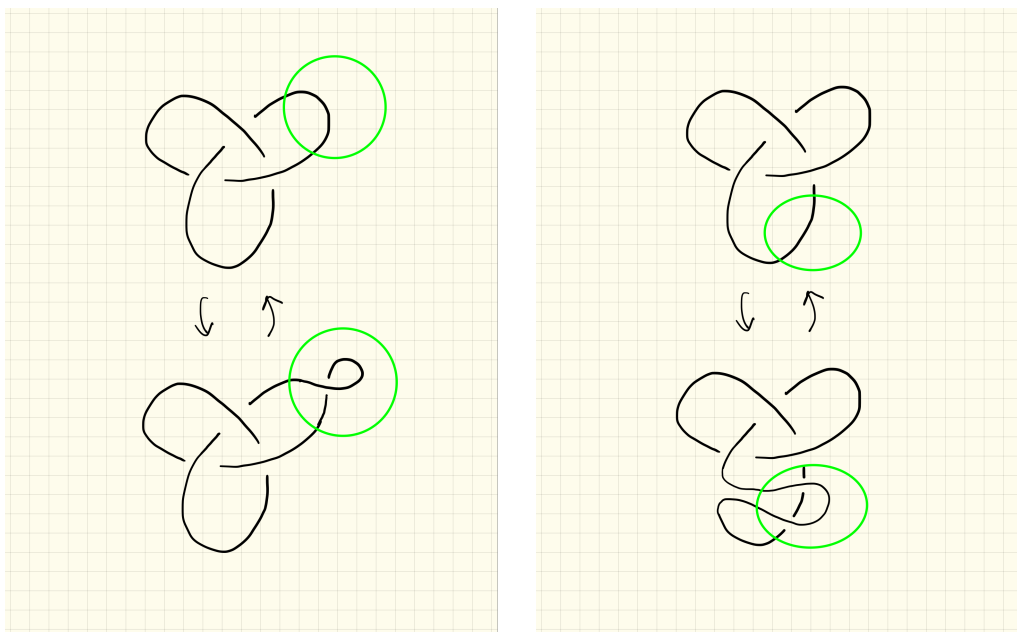
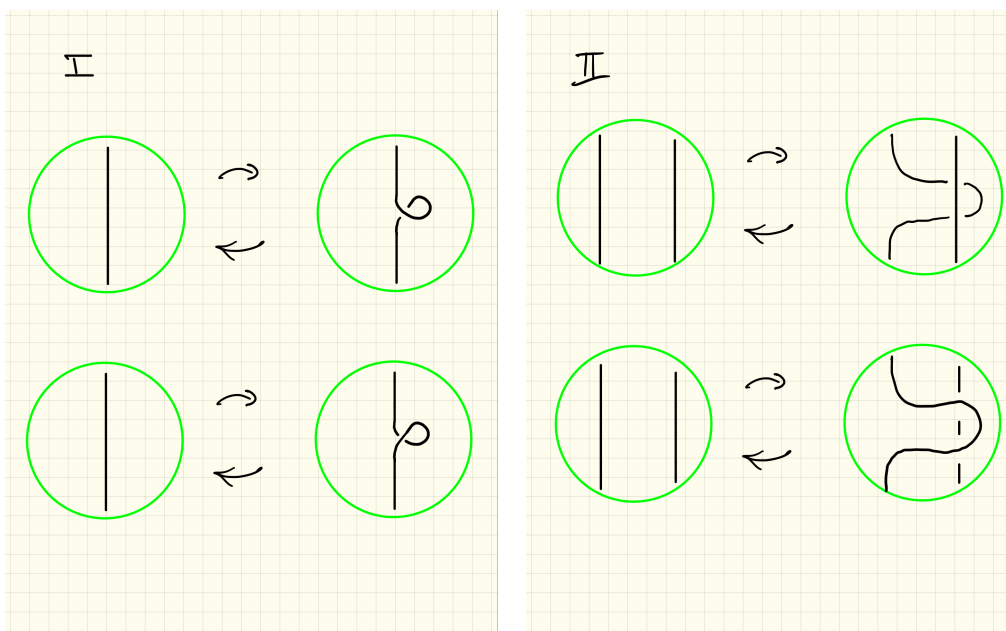


Abbildung 4.14: Beispiele für elementare Modifikationen

Definition. Ändert man ein (orientiertes) Knotendiagramm lokal wie in den nachstehenden drei Skizzen beschriebene Weise ab, so sagen wir, dass das neue Knotendiagramm durch eine *Reidemeisterbewegung* von Typ I, II bzw. III aus dem alten Knotendiagramm entsteht.



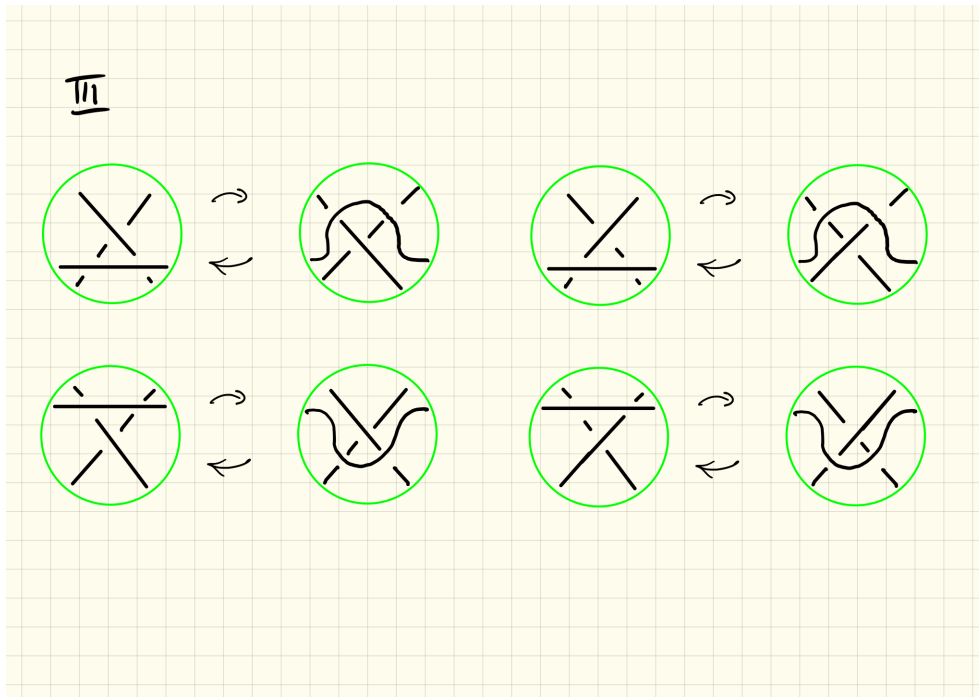


Abbildung 4.15: Reidemeister-Bewegungen

Satz. Zwei glatte Knoten mit regulären Knotenprojektionen sind genau dann äquivalent, wenn ihre orientierten Knotendiagramme durch eine Folge von Scheiben-Deformationen (im \mathbb{R}^2) und Reidemeisterbewegungen auseinander hervorgehen.

Beweisskizze. Man kann leicht zeigen, dass zwei glatte Knoten genau dann äquivalent sind, wenn sie durch eine Folge von Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^3 auseinander hervorgehen. Man zeigt dann, dass der Effekt einer geeigneten Scheiben-Deformation im \mathbb{R}^3 im Knotendiagramm durch eine Folge von Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^2 und Reidemeisterbewegungen gegeben ist. Umgekehrt kann man Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^2 und Reidemeisterbewegungen im Knotendiagramm zu einer Folge von Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^3 liften. \square

In den zwei nachfolgenden Skizzen wird veranschaulicht, wie Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^3 eine Reidemeisterbewegung vom Typ II oder eine Reidemeisterbewegung vom Typ III im zugehörigen Knotendiagramm induzieren können.

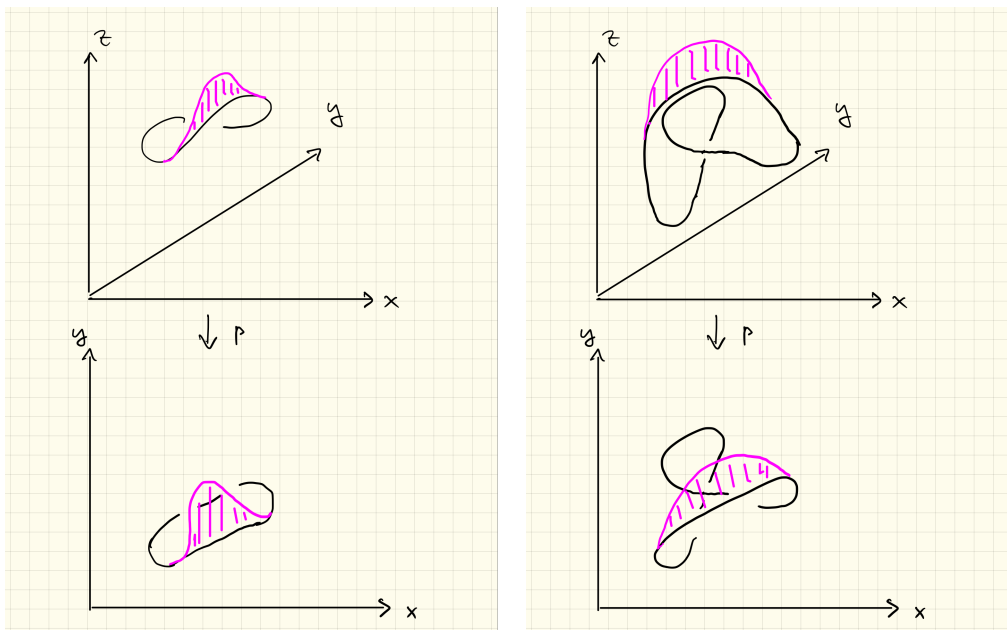


Abbildung 4.16: Scheiben-Deformationen im \mathbb{R}^3 / Wirkung auf die Knotendiagramme

Definition. Eine *Verschlingung* ist eine endliche geordnete Menge von Knoten $V = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, deren Bilder sich nicht schneiden. Die einzelnen Knoten einer Verschlingung nennt man die Komponenten der Verschlingung.

Zwei Verschlingungen $V = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ und $V' = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ heißen *äquivalent*, wenn es eine Isotopie des \mathbb{R}^3 gibt, die die Eigenschaft hat, dass sich für jedes $t \in I$ die Bilder der Einbettungen $H_t \circ i_k$ nicht schneiden und $H_1 \circ i_k = j_k$ für alle $k = 1, \dots, r$ gilt.

Die meisten Begriffe für Knoten lassen sich direkt auf Verschlingungen übertragen. Insbesondere können wir analog das Konzept der *Verschlingungsdiagramme* einführen. Eine Verschlingung heißt *trivial*, wenn sie äquivalent zu einer Verschlingung ist, die eine doppelunktpunktfreie Projektion besitzt.

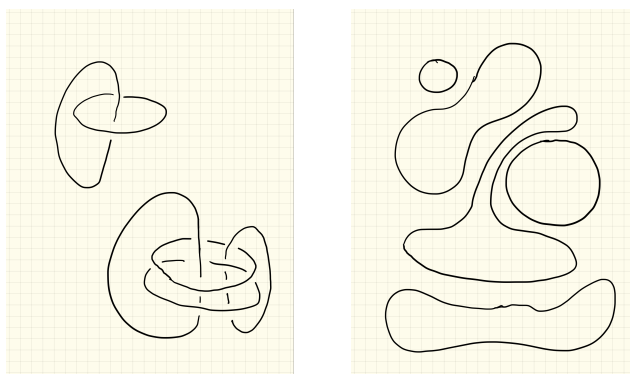


Abbildung 4.17: Verschlingungsdiagramme