3 Homotopien und Isotopien

Definition. (Teilraumtopologie). Es sei$(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann bildet die Familie

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf A. Sie heißt die Teilraumtopologie.

Beachte dazu:

i) $\mathcal{O}_A$ ist abgeschlossen bzgl. beliebigen Vereinigungen;

$$\bigcup_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i}_{=U \in \mathcal{O}} = A \cap U \in \mathcal{O}_A$$

ii) $\mathcal{O}_A$ ist abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte

$$\bigcap_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \underbrace{\bigcap_{i \in I} U_i}_{=U \in \mathcal{O}} = A \cap U \in \mathcal{O}_A$$

mit I endliche Indexmenge.

iii) $\varnothing = A \cap \underbrace{\varnothing}_{\in \mathcal{O}} \in \mathcal{O}_A$

$A = A \cap \underbrace{X}_{\in \mathcal{O}} \in \mathcal{O}_A$

Beispiel. Betrachte $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ und die Abbildung $f : \mathbb{R} \to S^1$, gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Ist diese Abbildung steitg? Nach dem folgenden Satz muss dafür nur nachgeprüft werden, ob die Abbildung

$$i \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

stetig ist, und dies folgt leicht mit Methoden aus der Analysis.

Satz. *Es sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ und $i : A \hookrightarrow X$ bezeichne die Inklusion des Teilraumes. Ist $(X', \mathcal{O})$ ein beliebiger topologischer Raum und $f : X' \to A$ eine beliebige Abbildung, so ist $f : (X', \mathcal{O}) \to (A, \mathcal{O}_A)$ genau dann stetig, wenn*

$$i \circ f : \left(X', \mathcal{O}\right) \to (X, \mathcal{O})$$

stetig ist.

Beweis.

„⇒": Sei $i \circ f$ stetig. Sei $V \in \mathcal{O}_A$ eine offene Menge in A, d.h. es existiert $U \in \mathcal{O}$ mit $V = U \cap A$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (i \circ f)^{-1}(U) &= (i \circ f)^{-1}(A \cap U) \\ &= f^{-1}(A \cap U) \\ &= f^{-1}(V) . \end{aligned}$$

Also ist für jedes $V \in \mathcal{O}_A$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen.

„⇐": Sei f stetig. Um nachzuweisen, dass $i \circ f$ stetig ist, reicht es nachzuweisen, dass $i : A \hookrightarrow X$ stetig ist, denn dann ist $i \circ f$ als Verknüpfung von stetigen Abbildungen wieder stetig. Sei $U \in \mathcal{O}$, dann gilt

$$i^{-1}(U) = A \cap U \in \mathcal{O}_A .$$

Also ist i in der Tat stetig.

□

Definition. Eine Abbildung $f : (X', \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ heißt eine Einbettung, falls f ein Homöomorphismus auf das Bild $f(X')$ ist.

Zur Anschauung: Unter Verwendung der Abbildung f kann man sich X' als einen Teilraum von X vorstellen.

Beispiel.

i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ ist eine Einbettung.

ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann ist die Abbildung: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ eine Einbettung. Das Bild von F heißt der Graph von f.

Wie prüft man, ob eine Abbildung eine Einbettung ist?

Satz. *Eine Abbildung f:$(X', \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ ist genau dann eine Einbettung, wenn f injektiv und stetig ist, und weiterhin gilt: Für jede offene Menge $U' \in \mathcal{O}'$ ist die Bildmenge $f(U')$ offen in $f(X')$ mit der Teilraumtopologie. (ohne Beweis)*

Definition. (Produkt und Produkttopologie) Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)$ eine Familie von topologischen Räumen, indiziert über eine Indexmenge I. Dann bezeichnen wir mit

$$\prod_{i \in I} X_i$$

die Menge der I-tupel $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $iinI$. Die Menge heißt das Produkt der X_i. Wir versehen es mit zugehörige Topologie, die über die folgende Subbasis definiert wird:

$$\mathcal{S} = \left\{ pr_j^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_j \text{ und } j \in I \right\} ,$$

wobei $pr_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$ die Projektion auf den j-ten Faktor ist. Die über die Subasisbasis definierte Topologie des Produktes heißt Produkttopologie. Den zugehörigen Raum bezeichnen wir als das Produkt über die Familie $(X_i, \mathcal{O}_i)$.

Konvention: Ist $I = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}$ eine endliche Menge, so schreibt man auch

$$X_{i_0} \times X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n} \text{ für } \prod_{i\in I} X_i \,.$$

Beachte: Nach Konstruktion sind die Projektionsabbildungen $pr_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig.

Beispiel.

- Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ stimmt mit der durch die Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie überein.
- Ist $f : (X', \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O}')$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, so ist f genau dann stetig, wenn die Abbildung

  $$F : \left(X', \mathcal{O}'\right) \to \left(X', \mathcal{O}'\right) \times (X, \mathcal{O})\,,\ x' \mapsto \left(x', f\left(x'\right)\right)$$

  eine Einbettung ist. $F(X') \subset X \times X'$ heißt der Graph von f.
  (ohne Nachweis)

Satz. *Eine Abbildung $g : X' \to \prod_{i\in I} X_i$ von einem topologischen Raum $(X', \mathcal{O}')$ in den Produktraum ist genau dann stetig, wenn jede Abbildung*

$$g_j : X' \xrightarrow{g} \prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{pr_j} X_j,\ x' \mapsto pr_j \circ g\left(x'\right)$$

stetig ist. (ohne Beweis)

Beispiel. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ mit

$$f_\alpha(t) = ((\cos(t), \sin(t)), (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t)))\,.$$

f_α ist stetig, denn sowohl

$$pr_1 \circ f_\alpha : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

ist stetig, da die Komposition $i \circ f_\alpha : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist, als auch

$$pr_2 \circ f_\alpha : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$$

ist stetig.

Satz. *Ist $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sind $A_i \subset X_i$ für $i \in I$ Teilmengen, so stimmt die Produkttopologie $\prod_{i\in I} A_i$, die durch die Teilräume $(A_i, \mathcal{O}_{A_i})$ definiert ist, mit der Teilraumtopologie von $\prod_{i\in I} A_i$, die durch denn Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$ induziert wird, überein.*

Definition. (Homotopie) Sind $(X', \mathcal{O}')$ und $(X, \mathcal{O})$ zwei topologische Räume, so heißt eine stetige Abbildung

$$H : X' \times [0,1] \to X$$

eine *Homotopie*. Für $t \in [0,1]$ definieren wir die Einbettungen

$$i_t : X' \to X' \times [0,1]\,,\; x' \mapsto \left(x', t\right).$$

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X' \to X$ heißen *homotop*, falls es eine Homotopie $H : X' \times [0,1] \to X$ gibt, sodass: $f = H \circ i_0$ und $g = H \circ i_1$.

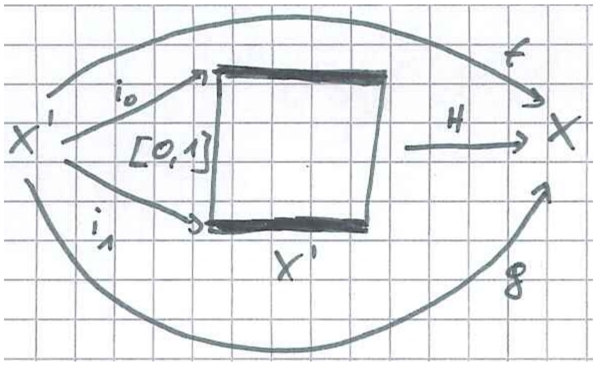

Abbildung 3.1: graphische Darstellung

Notation. Wir schreiben für das Einheitsinterval $I = [0,1]$. Ist H eine Homotopie, so setzen wir $H_t = H \circ i_t$ für $t \in I$. D.h. zwei Abbildungen f und g sind homotop genau dann, wenn es eine Homotopie h gibt mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

Beispiel.

i) $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, $((x,y), t) \mapsto (x,y,t)$ ist eine Homotopie

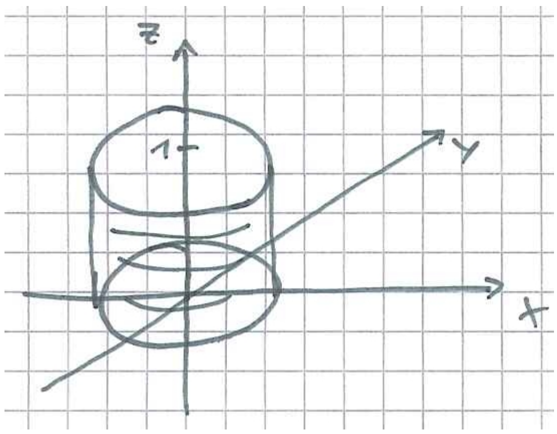

Abbildung 3.2: Skizze

ii) $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ sei definiert durch

$$H\left(\left(\left(x,y\right),t\right)\right) = \left(\left(\left(1-t\right)+ta\right)\cdot x, \left(\left(1-t\right)+tb\right)\cdot y, t\right)$$

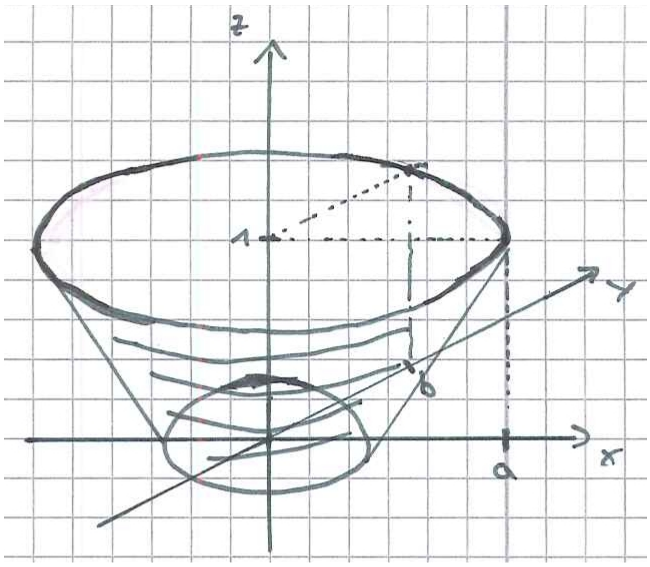

Abbildung 3.3: Skizze

iii) $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, $H\left(\left(\left(x,y\right),t\right)\right) = \left(t\cdot x, t\cdot y, t\right)$

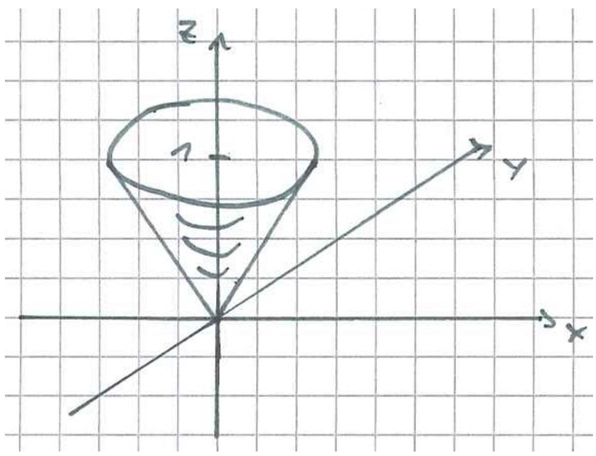

Abbildung 3.4: Skizze

Definition. Es seien $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : X' \to X$ heißt nullhomotop, wenn es ein x_0 in X gibt, so dass f homotop zu der Abbildung $c_{x_0} : X' \to X$ ist, die alle Punkte in X' auf x_0 abbildet.

Beispiel. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^3$. Das obige Beispiel *iii*) zeigt, dass die Abbildung $H \circ i_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ nullhomotop ist.
(H ist eine Homotopie $\Rightarrow$ $H \circ i_0$ ist homotop zu $H \circ i_1$.)

Beispiel. Jeder Punkt in S^1 kann man schreiben in der Form $(\cos(t), \sin(t))$ für ein geeignetes t. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir eine Abbildung

$$f_n : S^1 \to S^1,\ (\cos(t), \sin(t)) \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))\ .$$

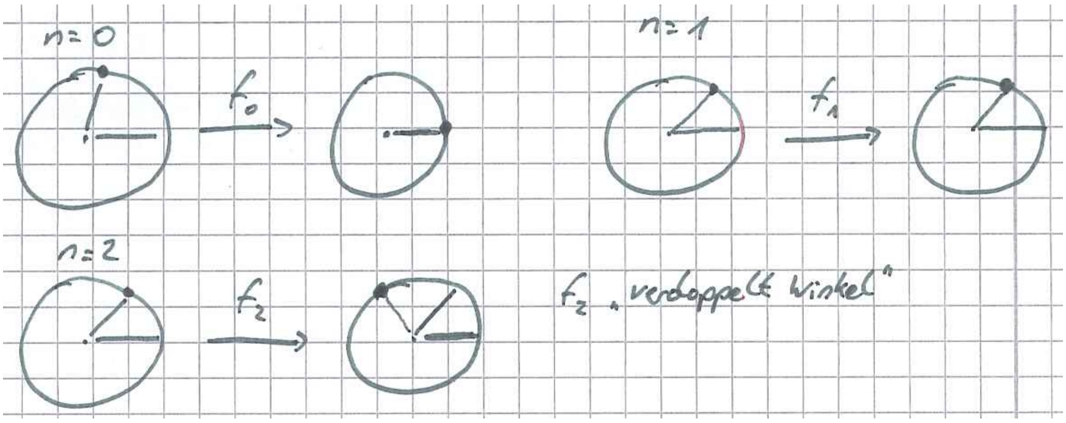

Abbildung 3.5: graphische Darstellung für verschiede n

Behauptung. Die Abbildung f_n und f_m sind für $n \neq m$ paarweise nicht homotop.

Nachweis. Wir betrachten dazu die stetige Funktion

$$e : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Es gilt $e(0) = (1, 0)$. Die Abbildung e ist surjektiv und es gilt

$$e^{-1}(e(t)) = \{t + 2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}\ .$$

Sei $f : S^1 \to S^1$ eine beliebige stetige Funktion. Wir wollen f eine ganze Zahl zuordnen, den sogenannten Abbildungsgrad $\deg(f)$. Dies geht wie folgt.

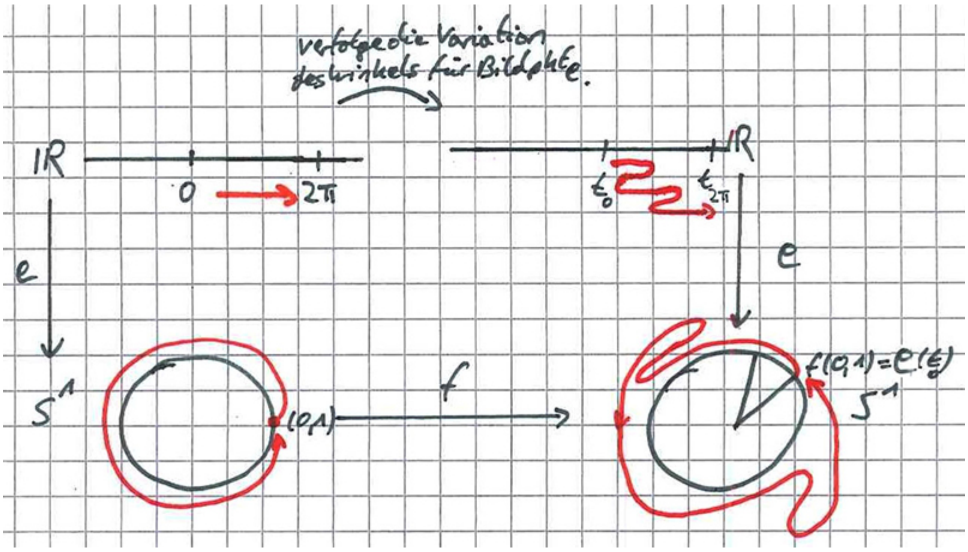

Abbildung 3.6: Graphische Darstellung

Wenn wir das Interval $[0, 2\pi]$ durchlaufen, durchläuft das Bild bzgl. e die S^1 genau einmal (in mathematisch positiver Richtung), und es gilt $e(0) = e(2\pi)$. Wir betrachten nun das Bild $f((1,0)) = f(e(0))$ und wählen eine reelle Zahl t_0, so dass $f(e(0)) = e(t_0)$. Wenn wir den Parameter s von 0 nach 2π laufen lassen, so bewegt sich der Bildpunkt $f(e(s))$ auf der S^1, und wir können zu t_0 auf genau eine Weise eine reelle Zahl t_s in stetiger Abhängigkeit vom Parameter s wählen, so dass $f(e(s)) = e(t_s)$. Es gilt dann $t_{2\pi} \in e^{-1}(e(t_0))$, d.h. $t_{2\pi} = t_0 + 2\pi m$ für genau ein $m \in \mathbb{Z}$. Setze $\deg(f) := m$. Beispielsweise erhält man für die oben eingeführten Abbildungen f_n als Abbildungsgrad $\deg(f_n) = n$.

Es gilt nun: Sind $f, f' : S^1 \to S^1$ homotop, so ist $\deg(f) = \deg(f')$. Heuristisch argumentiert man dazu wie folgt. Sei $H : S^1 \times I \to S^1$ eine zugehörige Homotopie. Wir betrachten nun die Abbildungnen $H_s : S^1 \to S^1, (x,y) \mapsto H((x,y), s)$. Man überzeugt sich nun davon, dass die Abbildung $D : [0,1] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \deg(H_s)$ stetig ist. Da sie nur Werte in der diskreten Menge $\mathbb{Z}$ annimmt, ist D konstant. Also folgt

$$\deg(f) = \deg(H_0) = D(0) = D(1) = \deg(H_1) = \deg(g)$$

Es gilt sogar: Sind $f, g : S^1 \to S^1$ stetige Abbildungen mit $\deg(f) = \deg(g)$, so sind f und g homotop. (ohne Nachweis)

Satz. *Die Eigenschaft zweier stetiger Abbildungen homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt für stetige Abbildungen $f, g, h : X' \to X$*

i) Reflexivität: $f \simeq f$,

ii) Symmetrie: $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$,

iii) Transitivität: $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

Notation. Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung $f : X' \to X$ wird mit $[f]$ bezeichnet. Sind f und g homotop, so kann man dies also durch $[f] = [g]$ ausdrücken.

Beweis.

i) Setze $H : X' \times I \to X$ fest durch $H(x', t) = f(x')$. Dann gilt $H_0(x') = f(x')$, $H_1(x') = f(x') \Rightarrow f \simeq f$.

ii) Sei $H : X' \times I \to X$ eine Homotopie mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$, dann definiere $H' : X' \times I \to X$ durch $H'(x', t) = H(x', 1-t)$. Dann gilt $H'_0 = H_1 = g$ und $H'_1 = H_0 = f \Rightarrow g \simeq f$.

iii) Sei $H : X' \times I \to X$ Homotopie mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und weiterhin sei $H' : X' \times I \to X$ Homotopie mit $H'_0 = g$, $H'_1 = h$, dann definiere $H'' : X' \times I \to X$ durch

$$H''\left(x', t\right) = \begin{cases} H(x', 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x', 2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

H'' ist nach nachfolgendem Lemma stetig und es gilt $H''_0 = H_0 = f$ und $H''_1 = H'_1 = h \Rightarrow f \simeq h$.

□

Beachte: H'' wurde so definiert, dass man Einschränkungen auf $A_1 = X' \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ und $A_2 = X' \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ benutzt hat. A_1 und A_2 sind abgeschlossene Teilmengen in $X' \times [0,1]$.

Lemma. *Es seien $(X', \mathcal{O}')$ und $(X, \mathcal{O})$ topologische Räume und es seien $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ eine endliche Familie von abgeschlossenen Teilmengen in X' mit der Eigenschaft, dass $X' = \bigcup_{i=1}^{n} A'_i$ („abgeschlossene Überdeckung"). Dann ist eine Abbildung $f : X' \to X$ stetig, wenn alle Einschränkungen $f|_{A'_i} : A'_i \to X$ stetig sind.*

Beweis. Sei B abgeschlossen in X. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(B) \cap X' \\ &= f^{-1}(B) \cap \bigcup_{i=1}^{n} A'_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B) \cap A'_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}|_{A'_i}(B) \end{aligned}$$

Da die $f|_{A'_i}$ nach Voraussetzung stetig sind und B abgeschlossen ist, ist die Menge $\left(f|_{A'_i}\right)^{-1}(B)$ abgeschlossen in A'_i für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach nachfolgendem technischen Lemma folgt dann, dass $\left(f|_{A'_i}\right)^{-1}(B)$ abgeschlossen in X' sind. Dann ist aber $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f|_{A'_i}\right)^{-1}(B)$ abgeschlossen in X'. □

Lemma. *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein top. Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $B \subset A$ eine im Teilraum A abgeschlossene Teilmenge, dann ist B abgeschlossen in X.*

Beweis. B ist abgeschlossen in A, d.h. $(A \backslash B)$ ist offen in A, d.h. es gibt eine offene Menge U in X, sodass $A \backslash B = A \cap U$.

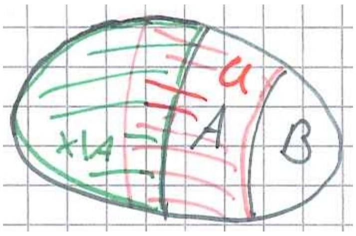

Abbildung 3.7: Skizze

Andererseits ist A abgeschlossen in X, d.h. $X \backslash A =: V$ ist offen in X.

$$A \backslash B = A \cap U \Rightarrow B = A \cap (X \backslash U)\ ,$$

$$X \backslash A = V \Rightarrow A = X \backslash V\ .$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} X \backslash (U \cup V) &= (X \backslash U) \cap (X \backslash V) \\ &= (X \backslash U) \cap A \\ &= A \backslash U \\ &= B\ . \end{aligned}$$

D.h. B ist das Komplement der offenen Menge $(U \cup V)$ und damit abgeschlossen.

□

Satz. *Sind $f_0, f_1 : X'' \to X'$ und $g_0, g_1 : X' \to X$ zwei Paare von homotopen stetigen Abbildungen, d.h. es gilt $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$, so sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ homotop d.h. $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Notation. Wir definieren dann für stetige Abbildungen $f : X'' \to X'$ und $g : X' \to X$ die Verknüpfung ihrer Homotopieklassen durch

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

Nach obiger Aussage, ist diese Definition mit der Homotopierelation verträglich.

Beweis des Satzes. Ist $F : X'' \times I \to X'$ eine Homotopie mit $F_0 = f_0$ und $F_1 = f_1$, und $G : X' \times I \to X$ eine Homotopie mit $G_0 = g_0$ und $G_1 = g_1$, so ist die Abbildung

$$H : X'' \times I \to X,\ H(x'', t) = G(F(x'', t), t)$$

eine Homotopie mit

$$\begin{aligned} H_0(x'') &= G(H(x'',0),0) = G(H_0(x''),0) = G_0(H_0(x'')) = g_0(f_0(x'')) = g_0 \circ f_0(x'') \\ H_1(x'') &= G(H(x'',1),1) = G(H_1(x''),1) = G_1(H_1(x'')) = g_1(f_1(x'')) = g_1 \circ f_1(x'') \end{aligned}$$

□

Definition. Zwei topologische Räume X und X' heißen homotopieäquivalent, falls es stetige Abbildungen $F : X \to X'$ und $g : X' \to X$ gibt, so dass $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_{X'}$. Wir schreiben dann $X \simeq X'$. Ein Raum X heißt kontraktibel, falls er homotopieäquivalent zum ein Punktraum $*$ ist, also $X \simeq *$ gilt.

Beispiel. Es gilt $\mathbb{R}^n \simeq *$. Dazu wähle $f : \mathbb{R}^n \to *, x \mapsto *$, und $g : * \to \mathbb{R}^n, * \mapsto 0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $g \circ f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x,t) \mapsto xt$ ist eine Homotopie mit $F_0 = g \circ f$ und $F_1 = id_{\mathbb{R}^n}$. Weiterhin gilt $f \circ g(*) = *$, und es ist $G : * \times I \to *, (*,t) \mapsto *$ eine Homotopie mit $G_0 = f \circ G = id_* = G_1$.

Beispiel. Seien R_1, R_2 zwei reelle Zahlen mit $0 < R_1 < 1 < R_2$ Wir setzen dann

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le R_2\}$$

Dann gilt $S^1 \simeq A$. Dazu betrachte die Abbildungen

$$f : S^1 \to A,\ (x,y) \mapsto (x,y) \ \text{ und } \ g : A \to S^1,\ (x,y) \mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Der Nachweis für die Homotopieäquivalenz der Räume ergibt sich dann aus den Homotopien

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I \to S^1, &\qquad ((x,y),t) \mapsto (x,y) \\ G : A \times I \to A, &\qquad ((x,y),t) \mapsto \frac{(x,y)}{(1-t) + t\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Definition. Homotopieäquivalent zu sein erfüllt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, d.h. für topologische Räume X, X', X'' gilt

i) Reflexivität: $X \simeq X$.

ii) Symmetrie: $X \simeq X' \Leftrightarrow X' \simeq X$.

iii) Transitivität: $X \simeq X', X' \simeq X'' \Rightarrow X \simeq X''$.

Definition. Eine Homotopie $H : X' \times I \to X$ heißt eine Isotopie, wenn jede der Abbildungen $H_t : X' \to X$ für $t \in [0,1]$ eine Einbettung ist.

Beispiel.

- $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $H((x,y),t) \mapsto ((t + (1-t)a)x, (t + (1-t)b)y, t)$ ist eine Isotopie.

- $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, $H((x,y),t) \mapsto (tx, ty, t)$ ist keine Isotopie, da die Abbildung $H_0 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ keine Einbettung ist. Zur Erinnerung, eine Einbettung ist eine stetige Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das Bild ist, d.h. wäre H_0 eine Einbettung, so müsste die Abbildung $H_0 : S^1 \to H_0\left(S^1\right) = \{0,0,0\}$ bijektiv, stetig und offen sein. Ist sie aber nicht!

Definition. Zwei Einbettungen f, g heißen *isotop*, wenn es eine Isotopie $f, g : X' \to X$ gibt, sodass $H_0 = f$ und $H_1 = g$ gilt.

Lemma. *Die Eigenschaft zweier Einbettungen isotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Geht genauso, wie beim entsprechenen Nachweis bei der Homotopie. □