2 Topologische Räume

Definition. Es sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen in X heißt *Topologie* auf X, falls:

i) Jede Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$, d.h. für jede Indexmenge I gilt:
$$U_i \in \mathcal{O},\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$$

ii) Jeder endliche Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$, d.h. für jede endlcihe Indexmenge I gilt:
$$U_i \in \mathcal{O},\ i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$$

iii) $\varnothing \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

Ein Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt ein topologischer Raum. Die zu $\mathcal{O}$ gehörige Teilmengen aus X heißen offen. Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Die Elemente von X nennen wir Punkte.

Beispiel.

i) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bilden die im metrsichen Sinne offenen Mengen in X eine Topologie auf X.

ii) Diskrete Topologie auf einer Menge X: Hier ist $\mathcal{O}$ die Familie aller Teilmengen aus X.

iii) Die Klumpentopologie auf einer Menge X ist gegeben durch $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$, d.h. $\varnothing$ und X sind die einzigen offenen Mengen.

Bemerkung. Statt zu sagen, welche Mengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ offen sind (um damit eine Topologie festzulegen), kann man alternativ sagen, welche Mengen die abgeschlossenen Mengen sind.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} = \{A \text{ abgeschlossen in } (X, \mathcal{O})\} & \leftrightarrow & \mathcal{O} \overset{\text{def.}}{=} \{\text{offene Teilmengen in } (X, \mathcal{O})\} \\ A & \mapsto & X \backslash A \\ X \backslash U & \leftarrow\!\shortmid & U \end{array}$$

Definition. Eine Familie $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *Basis* der Topologie, falls jede offene Menge von X eine Vereinigung von Teilmengen in $\mathcal{B}$ ist. Eine Familie $\mathcal{S}$ von offenen Mengen in X heißt *Subbasis* der Topologie, falls die Menge der endlichen Durchschnitte von Teilmengen in $\mathcal{S}$ eine Basis der Topologie ist.

Beispiel.

- Die Menge der offenen Intervalle (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, bilden eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie, d.h. der durch die Metrik $d(x, y) = |x - y|$ induzierten Topologie (siehe Übungsaufgabe Blatt 2).
- Die Menge der Intervalle $(-\infty, b)$ und (a, ∞) für $a, b \in \mathbb{R}$ bilden eine Subbasis der Topologie von $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Ist $\mathcal{S}$ beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X, so erhalten wir eine weitere Menge $\mathcal{B}$ durch Hinzunahme aller endlichen Durchschnitte von Teilmengen in $\mathcal{S}$. Weiterhin erhalten wir dann eine Familie $\mathcal{O}$ durch Hinzunahme beliebiger Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{B}$. Die Familie $\mathcal{O}$ ist dann eine Topologie auf X, $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie und $\mathcal{S}$ ist eine Subbasis der Topologie.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ als Menge! Sei $\mathcal{S} = \{\{0\}, \{1\}\}$.

- Beliebige endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$:

  $$\bigcap_{\varnothing} \overset{\text{(Def)}}{=} X,\ \{0\} \cap \{1\} = \varnothing,\ \{0\},\ \{1\}$$

  Die Menge dieser Teilmengen definieren wir als die Menge $\mathcal{B}$.

- Beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$:

  $$\bigcup_{\varnothing} \overset{\text{(Def)}}{=} \varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0, 1\},\ X$$

  Die Menge dieser Teilmengen defineiren wir als die Menge $\mathcal{O}$. Nacj oboger Bemerkung ist die Menge $\mathcal{O}$ ist dann eine Topologie auf X, $\mathcal{B}$ eine Basis dieser Topologie, und $\mathcal{S}$ eine Subbasis dieser Topologie.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

- $V \subset X$ heißt *Umgebung von x*, falls es eine offene Menge $U \subset X$ gibt, so dass $x \in U \subset V$. Wir setzen $\mathcal{V}(x) := \{V \subset X \mid V \text{ ist eine Umgebung von } x\}$
- Eine Teilfamilie $B(x) \subset \mathcal{V}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von x, falls es zu jeder Umgebung V von x eine Menge $V' \in B(x)$ gibt mit $V' \subset V$.
  Zum Beispiel: $\mathcal{O}_x = \{U \subset X \mid U \text{ ist offen und } x \in U\}$ ist eine Umgebungsbasis.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.

- $x \in A$ heißt *innerer Punkt von A*, falls $A \in \mathcal{V}(x)$, d.h. A ist eine Umgebung von x. Wir setzen $\dot{A} = \{x \in X \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$. $\dot{A}$ wird mit „Inneres von A" bezeichnet. Offensichtlich gilt $\dot{A} \subset A$.

- Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt von A*, falls für jedes $V \in \mathcal{V}(x)$ gilt:

$$V \cap A \neq \varnothing \text{ und } V \cap (X \backslash A) \neq \varnothing .$$

  Wir setzen $\partial A = \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } A\}$

- Die Menge $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ gilt } V \cap A \neq \varnothing\}$ heißt der Abschluss von A.

Bemerkung.

i) $\overline{A} = \dot{A} \cup \partial A$, $\dot{A} \cap \partial A = \varnothing$

ii) $X \backslash \overline{A} = (X \dot{\backslash} A)$

Nachweis.

i) Sei $x \in \dot{A}$ und sei V eine beliebige Umgebung von x (also $V \in \mathcal{V}(x)$). Da $x \in V$ folgt $V \cap A \neq \varnothing$, da $\dot{A} \subset A$. Also gilt $x \in \overline{A}$.
Ist $x \in \partial A$, so gilt offensichtlich für $V \in \mathcal{V}(x)$: $V \cap A \neq \varnothing$. Also folgt $\partial A \subset \overline{A}$.
Sei $x \in \overline{A}$. Dann gilt für x genau eine der folgenden Eigenschaften:

   a) Für jede Umgebung $V \in \mathcal{V}(x)$ gilt $V \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$

   b) Es gibt eine Umgebung $V \in \mathcal{V}(x)$ mit $V \cap (X \backslash A) = \varnothing$

   Im Fall a) ist x ein Randpunkt von A. Im Fall b) folgt, dass $V \subset A$. Da $V \in \mathcal{V}(x)$ ist dann auch $A \in \mathcal{V}(x)$. Also gilt dann $x \in \dot{A}$.
   Insgesamt gilt also, $\overline{A} = \dot{A} \cup \partial A$. Da a) und b) sich ausschließen gilt weiterhin $\dot{A} \cap \partial A = \varnothing$.

ii)
$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ gilt } V \cap A \neq \varnothing\}$$

$$\begin{aligned} X \backslash \overline{A} &= \{x \in X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ mit } V \cap A = \varnothing\} \\ &= \{x \in X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ mit } V \subset X \backslash A\} \\ &= \{x \in X \mid X \backslash A \in \mathcal{V}(x)\} \\ &= (X \dot{\backslash} A) \end{aligned}$$

Bemerkung.

i) $\dot{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, d.h. ist U offen und $U \subset A$, so gilt $U \subset \dot{A}$.

$$\dot{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U$$

ii) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. ist B abgeschlossen und $A \subset B$, so gilt $\overline{A} \subset B$.
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abg.}}} B$$

Nachweis.

i) Sei U offen und $U \subset A$. Dann gilt für jeden Punkt $x \in U$, dass $U \subset \mathcal{V}(x)$ und somit auch $A \in \mathcal{V}(x)$. x ist also innerer Punkt und es folgt $U \subset \dot{A}$. Da U beliebig war, gilt
$$\bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U \subset \dot{A}\,.$$

Andererseits ist $\dot{A}$ offen, denn ist $x \in \dot{A}$, so ist x nach Definition innerer Punkt von A, d.h. A ist eine Umgebung von x, d.h. $\exists U_x$ offen mit $x \in U_x \subset A$. Also erhalten wir
$$\dot{A} = \bigcup_{x \in \dot{A}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \dot{A}} U_x \subset \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U\,.$$

ii) Wir betrachten nun
$$X \backslash \overline{A} = (X \dot{\backslash} A) \overset{\text{mit i)}}{=} \bigcup_{\substack{U \subset X \backslash A \\ U \text{ offen}}} U\,.$$

$$\begin{aligned} X \backslash (X \backslash A) &= X \backslash \left(\bigcup_{\substack{U \subset X \backslash \overline{A} \\ U \text{ offen}}} U \right) \\ &= \bigcap_{\substack{U \subset X \backslash A \\ U \text{ offen}}} (X \backslash U) \\ &= \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abg.}}} B\,, \end{aligned}$$

wegen $X \backslash \left(X \backslash \overline{A}\right) = \overline{A}$ folgt also ii).

Definition. In einem top. Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt eine Teilmenge A dicht, falls $\overline{A} = X$.

Beispiel. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ (mit der Standardtopolgie).

Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen

Definition. Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ heißt *stetig*, falls die Urbilder aller offenen Mengen $(X', \mathcal{O}')$ wieder offen in $(X, \mathcal{O})$ sind. f heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in X$, falls das Urbild einer jeder Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0 ist.

Bemerkung. Äquivalent kann man auch sagen: f ist *stetig* genau dann, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist (ohne Beweis).

Bemerkung. Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, denn

$$\begin{array}{ccc} U' \text{ offen in } (X', \mathcal{O}') & \overset{f \text{ stetig}}{\longleftrightarrow} & f^{-1}(U') \text{ ist offen in } (X, \mathcal{O}) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A' = X' \setminus U' \text{ abg.} & & f^{-1}(A') = f^{-1}(X' \setminus U') \overset{(*)}{=} X \setminus f^{-1}(U') \text{ ist abg.} \end{array}$$

zu $(*)$: $f^{-1}(X' \setminus U') = \{x \in X \mid f(x) \in X' \setminus U'\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) \in U'\} = X \setminus f^{-1}(U')$

Satz. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen top. Räumen ist genau dann stetig, wenn für eine beliebige Subbasis $\mathcal{S}'$ der Topologie von X' die Mengen $f^{-1}(S')$ offen sind für alle $S' \in \mathcal{S}'$.*

Beweis.

„$\Rightarrow$": Alle $S' \in \mathcal{S}'$ sind offen. Angenommen, f ist stetig, dann gilt $f^{-1}(S')$ ist offen.

„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{B}'$ die aus $\mathcal{S}'$ entstehende Basis der Topologie auf X'. Dann ist $U' \in \mathcal{B}'$ ein endlicher Durchschnitt

$$U' = \bigcap_{i=1}^{n} S_i' \text{ mit } S_i' \in \mathcal{S}' .$$

Dann gilt: $f^{-1}(U') = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n S_i'\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(S_i')$. Da $f^{-1}(S_i')$ nach Voraussetzung offen sind, folgt

$$f^{-1}\left(U'\right) \text{ ist offen.}$$

Jede offene Menge von $(X', \mathcal{O}')$ ist die Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}'$, d.h. $V' \in \mathcal{O}'$ lässt sich schreiben als $V' = \bigcup_{i \in I} U_i'$ mit $U_i' \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$f^{-1}\left(V'\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i'\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(U_i'\right) \text{ ist offen in } X$$

$\Rightarrow f$ ist stetig.

$\square$

Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist stetig im Sinne metrischer Räume (Kapitel 1), d.h.: Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \Leftrightarrow B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$. Mit den in der Analysis schon verwendeten Methoden erhält man daraus, dass die Mengen $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$ offen sind.
Da f surjektiv ist, bilden die Mengen $\{B_\varepsilon(f(x_0)) \mid x_0 \in X\}$ eine Subbasis der Topologie von $\mathbb{R}$ und somit ist f mit dem obigen Satz stetig im Sinne der Definition in Sinne topologischer Räume (Kapitel 2).

Allgemein gilt:

Satz. *Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen metrischen Räumen (X, d) und (X', d') ist genau dann stetig im Sinne von Kapitel 1, falls sie stetig im Sinne der Definition für topologische Räume ist. (Übungsaufgabe)*

Definition. Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen Mengen X und X' heißt *bijektiv*, falls es eine Abbildung $g : X' \to X$ gibt, so dass $g(f(x)) = x$, $f(g(x')) = x'$ für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ oder anders ausgedrückt $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_{X'}$. Die Abbildung g ist dann durch die Bedingungen eindeutig bestimmt und wird als die Umkehrabbildung von f bezeichnet. Man schreibt dann f^{-1} für die Umkehrabbildung von f.

Lemma. *Es sei $f : X \to X'$ eine stetige bijektive Abbildung. Die Abbildung f^{-1} ist genau dann stetig, wenn f offene Mengen auf offene Mengen abbildet.*

Beweis.

„$\Leftarrow$": Sei $U \subset X$ offen. Dann ist auch $f(U)$ offen.

$$\begin{aligned} \text{Urbild von } U \text{ bzgl. } f^{-1} &= \{x' \in X' \mid f^{-1}(x') \in U\} \\ &= \{x' \in X' \mid (f \circ f^{-1})(x') \in f(U)\} \\ &= \{x' \in X' \mid x' \in f(U)\} \\ &= f(U) \text{ ist offen in } X'. \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$": f^{-1} sei stetig und U sei offen in X.

$$\begin{aligned} f(U) &= \{x' \in X' \mid \exists x \in U \text{ mit } f(x) = x'\} \\ &= \{x' \in X' \mid \exists x \in U \text{ mit } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x')\} \\ &= \{x' \in X' \mid \exists x \in U \text{ mit } x = f^{-1}(x')\} \\ &= f^{-1}(X') \cap U \text{ offen in } X. \end{aligned}$$

□

Definition. Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen top. Räumen $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ heißt *offen*, falls sie offenen Mengen auf offene Mengen abbildet.

Homöomorphie

Definition. Eine bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ heißt *Homöomorphismus*, falls sowohl f auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Bemerkung. Mit obigem Lemma ist eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen topologischen Räumen ein Homöomorphismus genau dann, wenn f stetig, bijektiv und offen ist.

Satz. *Seien $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ und $(X'', \mathcal{O}'')$ topologische Räume. Die Komposition zweier stetiger bzw. offener Abbildungen $f : X \to X'$ und $g : X' \to X''$ ist wieder stetig bzw. offen.*

Korollar. *Sind $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ und $g : (X', \mathcal{O}') \to (X'', \mathcal{O}'')$ Homöomorphismen, dann ist auch*

$$(g \circ f) : (X, \mathcal{O}) \to \left(X'', \mathcal{O}''\right)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. des Satzes: ...... für die Stetigkeit: Sei $U'' \subset X''$ offen.

$$(g \circ f)^{-1}\left(U''\right) = \underbrace{f^{-1}\underbrace{\left(g^{-1}\left(U''\right)\right)}_{\substack{\text{offen in } X', \\ \text{da } g \text{ stetig}}}}_{\text{offen in } X, \text{ da } f \text{ stetig}}$$

ist offen in $X \Rightarrow (g \circ f)$ ist stetig.

...... für die Offenheit: Sei $U \subset X$ offen.

$$(g \circ f)(U) = \underbrace{g\underbrace{(f(U))}_{\substack{\text{offen in } X', \\ \text{da } f \text{ offen}}}}_{\text{offen in } X, \text{ da } g \text{ offen}}$$

ist offen in $X \Rightarrow (g \circ f)$ ist stetig.

□

Definition. Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ heißen homöomorph, falls es ein Homöomorphismus $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ gibt. Schreibweise:

$$(X, \mathcal{O}) \cong \left(X', \mathcal{O}'\right) \text{ oder } X \cong X'.$$

Beispiel. Der Teilmenge $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist mit der induzierten Metrik $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ein metrischer Raum, also auch ein topologischer Raum.

Ebenso ist die Teilmenge $E_{a,b} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ ist mit der induzierten Metrik $d\left((x,y),(x',y')\right) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ eine metrischer Raum, also auch ein topologischer Raum.
Die Abbildung

$$f : S^1 \to E_{a,b},\ (x,y) \mapsto (ax, by)$$

ist ein Homöomorphismus. Ihre Umkehrabbildung ist

$$f^{-1} : E_{a,b} \to S^1,\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

- f ist wohldefiniert, da: Ist $(x,y) \in S^1$, dann gilt für (ax, by):

  $$\left(\frac{ax}{a}\right)^2 + \left(\frac{by}{b}\right)^2 = x^2 + y^2 = 1$$

  $\Rightarrow (ax, by) \in E_{a,b}$.
  f^{-1} analog

- Stetigkeit von f: $\underbrace{(x_n, y_n)}_{\in S^1} \to \underbrace{(x,y)}_{\in S^1} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \underbrace{(ax_n, by_n)}_{\in E_{a,b}} \overset{n\to\infty}{\to} \underbrace{(ax, by)}_{\in E_{a,b}} = f(x,y)$

Satz. *Homöomorphie erfüllt die Eigenschaften einer Aquivalenzrelation.*

i) Reflexivität: Ein topologischer Raum X erfüllt $X \cong X$, ausführlicher: $(X, \mathcal{O}) \cong (X, \mathcal{O})$.

ii) Symmetrie: Falls $X \cong X'$, dann gilt auch $X' \cong X$.

iii) Transitivität: Falls $X \cong X'$ und $X' \cong X''$, dann gilt auch $X \cong X''$.

Beweis.

i) $id_X : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O})$ ist ein Homöomorphismus.

ii) Ist $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ eine Homöomorphismus, dann ist auch $f^{-1} : (X', \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ ein Homöomorphismus.

iii) Sind $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ und $g : (X', \mathcal{O}') \to (X'', \mathcal{O}'')$ Homöomorphismen, dann ist auch $g \circ f{:}(X, \mathcal{O}) \to (X'', \mathcal{O}'')$ ein Homöomorphismus.

$\square$