1 Metrische Räume

Definition. Eine Metrik auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \to \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ mit der Eigenschaft:

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in X$

ii) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall x, y \in X$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \ \ \forall x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X heißt metrischer Raum.

Beispiele.

i) n-dimensionaler euklidischer Raum

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i\}$$

$$\text{mit } d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

ii) Die sogenannte diskrete Metrik auf einer Menge X ist gegeben durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

iii) Normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$.
Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Norm auf V ist eine Funktion

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}_0^+, \ x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \ x \in V$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \ \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in V$

Wir erhalten dann eine zugehörige Metrik auf der Menge V durch

$$d(x,y) = \|x - y\|, \ \forall x, y \in V.$$

Zum Beispiel

- $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- *Für eine beliebige Menge* X *betrachte den Vektorraum der beschränkten Funktionen*

$$F_b(X;\mathbb{R}) = \{\textit{beschränkte Funktion } f : X \to \mathbb{R}\}$$

mit der Summeoperation, gegeben durch: $(f+g)(x) := f(x) + g(x))\ \forall x \in X$ *für Funktionen* $f, g \in F_b(X;\mathbb{R})$, *und der skalaren Multiplikation, gegegben durch :* $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)\ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Eine Norm $\|.\|$ *auf* $F_b(X;\mathbb{R}$ *ist gegeben durch*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Beachte: Die Menge $\mathbb{R}^n$ *können wir mit den (beschränkten) Funktionen auf der Menge* $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ *identifizieren.*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longleftrightarrow & F_b(\underline{n};\mathbb{R}) \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f : i \mapsto x_i \\ (f(1), f(2), \ldots, f(n)) & \leftarrow\!\shortmid & f \end{array}$$

Die Metriken auf $\mathbb{R}^n$ *und* $F_b(\underline{n};\mathbb{R})$ *entsprechen sich nicht, z.B. gilt für* $n = 2$

- *in* $\mathbb{R}^2 : d((0,0),(1,1)) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- *in* $F_b(\underline{2};\mathbb{R})$: $d((0,0),(1,1)) = \sup\{1,1\} = 1$

Definition. Sei (X, d) metrischer Raum. Für $x \in X$ und $r > 0$ nennen wir wir

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

die *offene Kugel* um x mit Radius r.

- $U \subset X$ heißt offen $:\Leftrightarrow\ \forall x \in U\ \exists r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset U$
- $A \subset X$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow\ X \backslash A$ offen
- Eine Teilmenge $V \subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset V$.

Beispiel. Die Kugeln $B_1(0,0)$ vom Radius 1 um den Ursprung $(0,0)$ sind in $\mathbb{R}^2$ und in $F_b(\underline{2};\mathbb{R})$ unterschiedlich. Die Teilmengen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

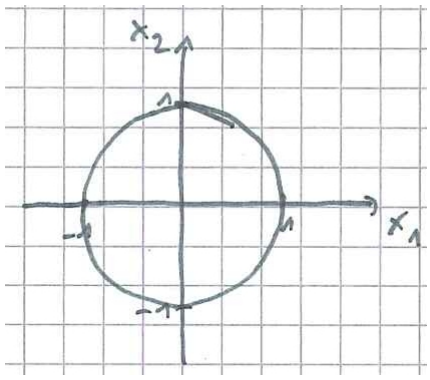

Abbildung 1.1: Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$

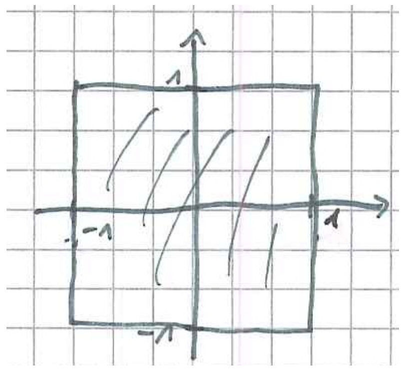

Abbildung 1.2: Einheitskugel im $F_b(\underline{2};\mathbb{R})$

Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

i) Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

ii) Durchschnitte von endlich vielen offenen Mengen sind offen.

iii) $\varnothing \subset X$ und $X \subset X$ sind offenen Mengen.

iv) $Y \subset X$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ existiert eine Umgebung U von y mit $U \subset Y$.

Beweis.

i) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von offenen Mengen. Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i = U$. Dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Da U_{i_0} offen ist, existiert ein $r > 0 : B_r(x) \subset U_{i_0} \Rightarrow B_r(x) \subset U$.

ii) Seien $U_1, \dots, U_n$ offene Mengen und $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i = U$. Da $x \in U_i$ ist und die U_i offen sind, gibt es ein $r_i > 0$: $B_{r_i}(x) \subset U_i \; \forall i$. Setze $r = \min_{i\in I} r_i$, dann gilt (da die Familie I unendlich ist) $r > 0$ und $x \in B_r(x) = \bigcap_{i\in I} B_{r_i}(x) \subset \bigcap_{i\in I} U_i = U$. $\Rightarrow U$ ist offen.

iii) relativ klar

iv) genauso klar

□

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$.
$x \in X$ heißt *innerer Punkt von A*, falls A eine Umgebung von x ist.
$x \in X$ heißt *Randpunkt von A*, falls gilt: Für jeder Umgebung V von x gilt:

$$A \cap V \neq \varnothing \text{ und } (X \backslash A) \cap V \neq \varnothing .$$

Wir definieren weiter:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \{x \in X \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\} \text{ Inneres von } A\\ \partial A &= \{x \in A \mid x \text{ ist Randpunkt von } A\} \text{ Rand von } A\\ \overline{A} &= \dot{A} \cup \partial A \text{ Abschluss von } A\end{aligned}$$

Beispiele. *i)* $A = (0,1] \subset \mathbb{R} = X,\ \dot{A} = (0,1),\ \partial A = \{0,1\},\ \overline{A} = [0,1]$

ii) item $A = (0,1] = X,\ \dot{A} = (0,1],\ \partial A = \varnothing,\ \overline{A} = (0,1]$

Definition. Sei (X,d) metrischer Raum. Für nichtleere Teilmengen $A, B \subset X$ definieren wir den Abstand zwischen A und B durch

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\}\ .$$

Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $\varnothing \neq A \subset X$.*

i) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(\{x\},A) = 0.$

ii) $x \in \partial A \Leftrightarrow d(\{x\},A) = 0$ *und* $d(\{x\},X\backslash A) = 0.$

iii) $x \in \dot{A} \Leftrightarrow d(\{x\},X\backslash A) > 0.$

Beweis.

i)„ ⇒": Gilt $d(\{x\},A) = \varepsilon > 0$, so folgt $x \notin A$. Außerdem gilt $\forall y \in B_\varepsilon(x)$

$$d(\{y\},A) > 0\,.$$

Insbesondere ist also $y \notin A$ und daher $x \notin \partial A$. Insbesondere gilt $x \notin A \cup \partial A = \overline{A}$.

„⇐": Sei nun $d(\{x\},A) = 0$ und V eine Umgebung von x, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset V$

$$\begin{aligned} d(\{x\},A) = 0 &\Rightarrow \exists y \in A \cap B_\varepsilon(x)\\ &\Rightarrow A \cap V \neq \varnothing \end{aligned} \tag{1.1}$$

Also gilt:

- falls $x \in A \overset{(1.1)}{\Rightarrow} x \in \dot{A}$
- falls $x \notin A \overset{(1.1)}{\Rightarrow} x \in \partial A$

Also insbesondere $x \in \overline{A}$.

ii)„⇐": Aus $d(\{x\},A) = 0 \overset{\text{i)}}{\Rightarrow} x \in \overline{A}$ und $d(\{x\},X\backslash A) = 0 \overset{\text{i)}}{\Rightarrow} x \in \overline{X\backslash A}$ folgt

$$d(\{x\},A) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{X\backslash A} = \partial A$$

„ ⇒": $x \in \partial A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow d(\{x\}, A) \leq \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} d(\{x\}, X\backslash A) = 0$.
Analog erhält man $d(\{x\}, X\backslash A) = 0$.

iii) „⇒": $x \in \dot{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A \Rightarrow d(\{x\}, X\backslash A) \geq \varepsilon > 0$

„ ⇐": $d(\{x\}, X\backslash A) > 0 \Rightarrow x \notin X\backslash A$ und mit ii) und $x \notin \partial A \Rightarrow x \in A\backslash\partial A \subset \overline{A}\backslash\partial A = \dot{A}$

□

Definition. Es seien (X, d) und (X', d') zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \colon x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \, .$$

Äquivalent dazu ist: Eine Funktion $f : X \to X'$ heißt stetig in x_0, falls das Urbild von einer Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0 ist.
Die Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist. Dies ist äquivalent zu: Eine Abbildung f ist stetig, wenn das Urbild einer jeden offenen Menge von X' eine offene Menge von X ist.

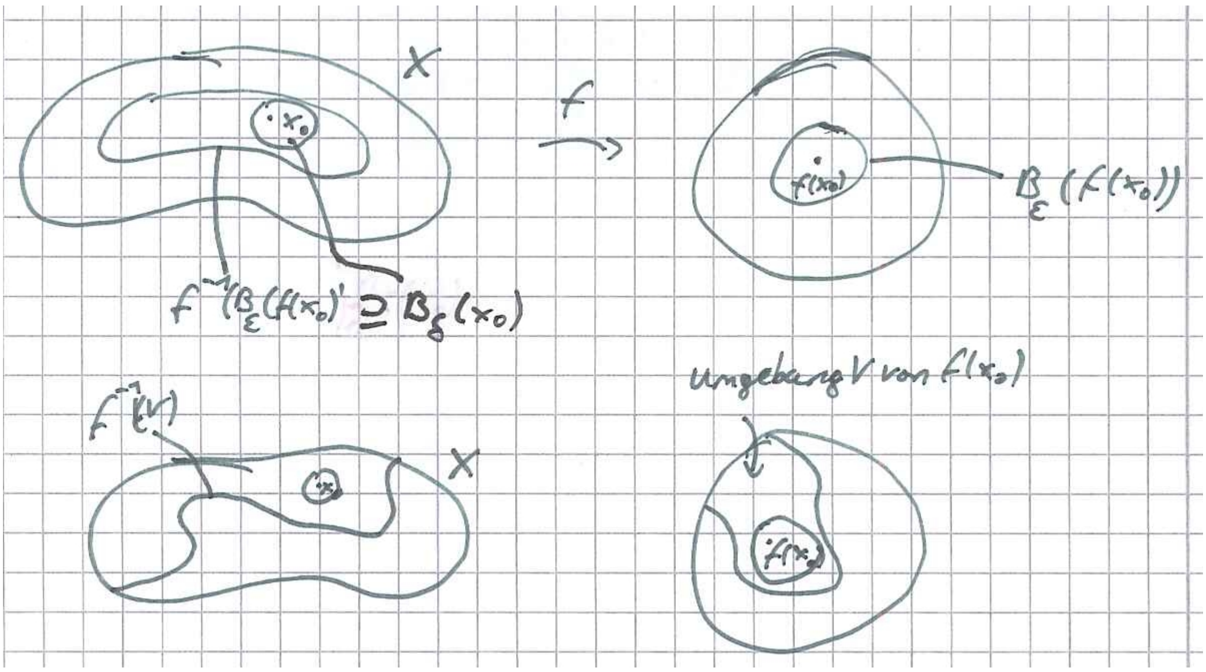

Abbildung 1.3: anschauliche Darstellung

Definition. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert gegen ein Element $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x) \, .$$

$x \in X$ heißt Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgeglieder liegen.

Bemerkung. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so ist x der einzige Häufungspunkt der Folge.

Satz. *In jedem metrischen Raum (X,d) gilt für eine nicht leere Menge A:*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von Elementen } x_n \in A, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert.}$$

Eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen metrischen Räumen (X,d) und (X',d') ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jede gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Bilder $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. der ersten Aussage:

„$\Leftarrow$": Es konvergiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$. Gilt $x \in A$, so sind wir fertig. Wir nehmen daher an, dass $x \notin A$. Sei V eine Umgebung von x. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subset V$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert existiert zu ε ein N, sodass $x_n \in B_\varepsilon(x)$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt: $x_N \in V \cap A$, $x \notin A$. Da V beliebig war, gilt $x \in \partial A$. Also gilt in jedem Fall $x \in A \cup \partial A = \overline{A}$.

„$\Rightarrow$": Da $x \in \overline{A}$, gilt $\forall r > 0$: $B_r(x) \cap A \neq \varnothing$.
Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A\,.$$

Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

□