Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 9

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 3.6.2019, 10:15 Uhr

1. Es sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Fitting, dass der Hauptraum von f zum Eigenwert λ jeden f-invarianten Untervektorraum U von V enthält, für den $(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)|_U : U \to U$ nilpotent ist.

   (4 Punkte)

2. Zeigen Sie:

   (a) Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ und eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gilt $(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS$.

   (b) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$, dann gilt
   $$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

   (c) Finden Sie ein Beispiel für $A, B \in K^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$, so dass es ein m gibt mit
   $$(A+B)^m \neq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

   (d) Die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ sei gegeben durch
   $$A := \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$, so dass $A = S^{-1}(D+N)S$ mit $N \cdot D = D \cdot N$, wobei $N \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ nilpotent und $D \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ diagonalisierbar ist. Berechnen Sie A^{50} mit Hilfe von (a) und (b) und ohne Computer.

   (8 Punkte)

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $A = B^2$, wenn entweder $A = 0$ oder $A^2 \neq 0$ gilt.

   Hinweis. Schreiben Sie A in Jordan-Normalform. (4 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Nicht vergessen:
Am 05.06. ab 14 Uhr findet das große Sommerfest unseres Fachbereichs statt! Es wird eine Hüpfburg, eine Wasserrutsche, Würstchen, vegane Bratlinge und Bier vom Fass sowie eine Überraschung für Euch geben. Meldet Euch auch mit Eurem Team für das Fußball- oder Volleyballturnier an, es gibt tolle Preise zu gewinnen! Bei weiteren Fragen meldet Euch einfach bei uns oder schaut in der aktuellen Complex nach.
Eure Fachschaft