

Jörn Frederik Voigt

Analytische Berechnung der  
hadronischen Vakuumpolarisation des Photons  
mit nichtperturbativ erweiterten Feynmanregeln  
für die Quantenchromodynamik

1999



Theoretische Physik

**Analytische Berechnung der  
hadronischen Vakuumpolarisation  
des Photons  
mit nichtperturbativ erweiterten  
Feynmanregeln  
für die Quantenchromodynamik**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

**Jörn Frederik Voigt**

aus Elmshorn

-1999-

Dekan: Prof. Dr. N. Schmitz

Erster Gutachter: Prof. Dr. M. Stingl

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. G. Münster

Tag der mündlichen Prüfung:

Tag der Promotion:





# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Eine systematisch erweiterte Störungstheorie</b>	<b>5</b>
1.1 Die QCD-Störungstheorie . . . . .	5
1.2 Die spontane Massenskala $\Lambda$ . . . . .	7
1.3 Die Systematik der nicht-perturbativen Erweiterung . . . . .	8
1.4 Der DS-Selbstkonsistenzmechanismus . . . . .	10
1.5 Ansätze für die nichtperturbativ modifizierten Basisvertizes . . . . .	12
1.5.1 Der Fermion-Propagator . . . . .	12
1.5.2 Der Gluon-Propagator . . . . .	14
1.5.3 Der Drei-Gluon-Vertex . . . . .	15
1.5.4 Der Quark-Gluon-Vertex . . . . .	16
1.6 Lösung der Selbstkonsistenzgleichungen . . . . .	16
1.7 Bemerkungen zu Slavnov-Taylor-Identitäten . . . . .	22
<b>2 QCD-Summenregeln</b>	<b>25</b>
2.1 Korrelationsfunktion . . . . .	26
2.2 Operator-Produkt-Entwicklung . . . . .	27
2.3 SVZ-Entwicklung . . . . .	29
2.4 Bestimmung der $\rho$ -Mesonmasse nach SVZ . . . . .	36
<b>3 Der Quark-Photon-Vertex</b>	<b>40</b>
3.1 Randbedingungen . . . . .	42
3.1.1 Perturbative Divergenz der Vakuumpolarisation . . . . .	42
3.1.2 Masselosigkeit des Photons . . . . .	44
3.2 Photon-Vertex in $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ . . . . .	46
3.2.1 Selbstkonsistenz durch WTI . . . . .	46

3.2.2	Selbstkonsistenz durch DS-Gleichung . . . . .	48
3.3	Photon-Vertex in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Ein-Loop-Selbstenergie</b>	<b>55</b>
4.1	Ein-Loop-Beitrag . . . . .	55
4.2	Vergleich mit SVZ-Entwicklung . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Zwei-Loop-Selbstenergie</b>	<b>65</b>
5.1	Die Counterterm-Graphen . . . . .	66
5.2	Zwei-Loop-Graphen . . . . .	68
5.2.1	Formulierung der Zwei-Loop-Graphen . . . . .	68
5.2.2	Berechnung der Zwei-Loop-Graphen . . . . .	73
5.3	Auswertung der Ergebnisse . . . . .	81
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Ein-Loop-Basisintegrale</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b><math>(q = 0)</math>-Rekursionsmechanismus</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Zwei-Loop-Basisintegrale</b>	<b>97</b>
<b>D</b>	<b>Zwei-Loop-Spezialintegrale</b>	<b>100</b>
<b>E</b>	<b>Zwei-Loop-Basisgrößen</b>	<b>107</b>
<b>F</b>	<b>Zwei-Loop-<math>(q^2 = 0)</math>-Basisgrößen</b>	<b>126</b>



# Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine nicht-abelsche Eichtheorie und liefert die nach heutigem Kenntnisstand richtige Beschreibung der starken Wechselwirkung. Da sie eine asymptotisch freie Theorie ist, kann sie im Hochenergiebereich störungstheoretisch behandelt werden. Bei kleineren Impulsüberträgen versagt die reine Störungstheorie allerdings, da sie in jeder Ordnung die Quarks und Gluonen als freie, asymptotisch detektierbare Teilchen enthält, was der Beobachtung des als „Confinement“ bezeichneten Phänomens widerspricht, daß diese nur als sehr kurzlebige Elementaranregungen oder in gebundener Form als stabile Farbsingulett-Zustände vorliegen.

Einen Versuch, dieses bisher nicht analytisch beschreibbare, komplexe Verhalten im Infrarotbereich der Theorie zu behandeln, stellt der Vorschlag von M. Stingl [STI 96] dar, mit Hilfe der in  $g^2$  nichtanalytischen Massenskala  $\Lambda$  eine nichtperturbativ erweiterte iterative Lösung zu etablieren, die in Kapitel 1 vorgestellt wird. Bei der Lösung des hierbei auftretenden Selbstkonsistenzproblems auf Basis des Dyson-Schwinger-Integralgleichungssystems wurde im Fall masseloser Fermionen mit  $N_F = 2$  eine eindeutige reelle Lösung für die zusammenhängenden und 1-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen gefunden, die Confinement in dem Sinne zeigt, daß die Propagatoren der elementaren Felder einen raumzeitlich kurzreichweitigen (Reichweite  $\sim 1/\Lambda$ ) Charakter aufweisen [DRI 97, KUH 97] bzw. [STI 97, DRI 98].

Aufgabe der vorliegenden Arbeit soll es sein, im Rahmen dieser erweiterten Störungstheorie eine vom Experiment her gesehen besonders wichtige höhere Korrelationsfunktion, nämlich diejenige des hadronischen elektromagnetischen Stromes, und hierin insbesondere die Rolle der  $\rho$ -Meson-Resonanz zu untersuchen. Eine wesentliche Rolle als Vergleichstheorie kommt dabei der in Kapitel 2 vorgestellten semi-phenomenologischen  $SVZ$ -Summenregel-Methode zu, die durch indirekten Vergleich eines semi-empirischen Ansatzes für die Resonanzregion mit einer durch die Vakuumkondensate parametrisierten  $\Lambda^2/q_E^2$ -Entwicklung der  $\rho$ -Mesonstrom-Korrelationsfunktion  $\Pi_\rho^{\mu\nu}(q)$  die „Bestimmung“ der  $\rho$ -Mesonmasse - genauer: deren Korrelierung mit den experimentellen Daten für die Kondensate - ermöglicht.

Die zentrale, bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung zu berechnende Größe ist die hadronische Vakuumpolarisation des Photons  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ , die identisch ist mit der Korrela-

tionsfunktion zweier elektromagnetischer Ströme leichter Quarks. Durch eine Vektordominanzargumentation wird  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  in direkte Beziehung zu  $\Pi_\rho^{\mu\nu}(q)$  gebracht und so eine Analyse der  $\rho$ -Mesonresonanz auf Basis der Kenntnis von  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  ermöglicht.

Wichtige allgemeine Forderungen an diese Größe, wie die Erhaltung der perturbativen Ultraviolettdivergenz und vor allem der Masselosigkeit des Photons, werden dadurch garantiert, daß bei der Konstruktion des nichtperturbativ erweiterten Photon-Vertex in Kapitel 3 die Erfüllung der Ward-Takahashi-Identität über die selbstkonsistente Bestimmung mittels der DS-Gleichungen gestellt wird. Diese Strategie ermöglicht es, die Schleifenberechnung auf der nichtperturbativen Approximationsstufe  $r = 1$  mit ihrem noch überschaubaren algebraischen Komplexitätsgrad auszuführen. In dem dadurch definierten Rahmen werden erstmals für eine einfache, aber wichtige Vertexfunktion - die hadronische Vakuumpolarisation des Photons - sowohl die Korrektur der nichtperturbativen nullten Ordnung durch Zweischleifenbeiträge als auch die führende quasi-perturbative Korrektur (der Ordnung  $e^2 g^2$  mit  $g =$  starke Kopplung) berechnet. Daß diese in der Tat das aus allgemeinen Überlegungen erhoffte Verhalten aufweisen - die Korrekturen zum Selbstkonsistenzverfahren der nullten Ordnung sind klein, und die quasi-perturbative erste Ordnung vermittelt eine „weiche“ Niederenergie-Fortsetzung der logarithmisch singulären rein perturbativen Strahlungskorrekturen - , darf als wesentliches Resultat der vorliegenden Arbeit gelten.

In Kapitel 4 werden die Ein-Loop-Resultate für die hadronische Vakuumpolarisation präsentiert und mittels oben genannter Vektordominanzargumentation ein Vergleich mit der SVZ-Entwicklung angestellt. Deutlich wird an dieser Stelle, daß es nicht möglich ist, aus den Ergebnissen auf die Existenz einer  $\rho$ -Mesonmasse rückzuschließen, was die Notwendigkeit einer erweiterten Behandlung deutlich macht. Im Rahmen dieser Arbeit geschieht diese Erweiterung durch Berücksichtigung der schon genannten Zwei-Loop-Beiträge, die in Kapitel 5 berechnet werden. Es zeigt sich allerdings, daß diese in der hier behandelten Form noch nicht die im Hinblick auf ein SVZ-artiges Verfahren wünschenswerte Korrektur der Ein-Schleifen-Resultate bewirken - ein negatives, aber nicht vorhersehbares und wegen der hohen Komplexität der Zwei-Schleifen-Rechnung auch nichttriviales Resultat. Auch bei einer durch die Padé-Fortsetzung in der laufenden Kopplung approximierten unendlichen Teilsummation der Störungsreihe, wie sie zur direkten Erzeugung von Bindungszuständen notwendig ist, zeigt sich keine Resonanz. Die Resultate weisen in die Richtung, daß ein besserer Kompromiß zwischen selbstkonsistenter Dynamik der transversalen Freiheitsgrade und Wahrung der Ward- bzw. Slavnov-Taylor-Identitäten wohl erst auf höherer Stufe der nichtperturbativen globalen Approximation erzielt werden kann.

# Kapitel 1

## Eine systematisch erweiterte Störungstheorie

### 1.1 Die QCD-Störungstheorie

Die Quantenchromodynamik ist die nach heutigem Kenntnisstand richtige quantenfeldtheoretische Beschreibung der starken Wechselwirkung. Sie ist eine  $SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorie mit  $N_F$  minimal angekoppelten Quark-Flavours, die im euklidischen Kontinuum definiert ist durch die Lagrangedichte [BEL 91, MUT 87]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E(x) &:= \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x) \\ &+ \frac{1}{2\xi_0} (\partial^\mu A_a^\mu(x))^2 + (\partial^\mu \bar{\chi}_a(x)) [\partial^\mu \delta_{ab} + g_0 f_{abc} A_c^\mu(x)] \chi_b(x) \\ &+ \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[ -i \not{\partial} \delta^{ij} + m_0^{(f)} \delta^{ij} + g_0 T_a^{ij} \gamma^\mu A_a^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{mit } G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + g_0 f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) \quad . \quad (1.2)$$

Im Pfadintegralformalismus lassen sich aus dem erzeugenden Funktional

$$\begin{aligned} Z_E[J, \xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}] &:= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\ &\exp \left\{ - \int d^4x \left( \mathcal{L}_E + A_a^\mu(x) J_a^\mu(x) + \bar{\eta}_a(x) \chi_a(x) + \bar{\chi}_a(x) \eta_a(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_f \left( \bar{\xi}_{(f)}^i(x) \psi_{(f)}^i(x) + \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \xi_{(f)}^i(x) \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

durch funktionales Ableiten nach den Quellen die Greenschen Funktionen definieren [YND 93]. Von diesen gelangt man mittels einer Reduzibilitätsanalyse zu den zusammenhängenden, amputierten und 1-Teilchen-irreduziblen Greensfunktionen, die auch als („eigentliche“) Vertex-Funktionen  $\Gamma_N$  bezeichnet werden. Für die QCD

erhält man folgenden Satz oberflächlich divergenter Vertizes (Basisvertizes):

$$\Gamma_{div} := \{\Gamma_{VV}, \Gamma_{F\bar{F}}, \Gamma_{G\bar{G}}, \Gamma_{3V}, \Gamma_{F\bar{F}V}, \Gamma_{G\bar{G}V}, \Gamma_{4V}\} \quad . \quad (1.4)$$

Entsprechend der gewählten Reihenfolge gelten folgende Bezeichnungen:

$\{\Gamma_{VV}, \Gamma_{F\bar{F}}, \Gamma_{G\bar{G}}\}$  sind die Selbstenergien des Gluon-, Quark- bzw. Geistfeldes und  $\{\Gamma_{3V}, \Gamma_{F\bar{F}V}, \Gamma_{G\bar{G}V}, \Gamma_{4V}\}$  der Drei-Gluon-, der Quark-Gluon-, der Geist-Gluon- und der Vier-Gluon-Vertex.

Alle übrigen Vertexfunktionen sind oberflächlich konvergent und lassen sich in Abhängigkeit von den Basisvertizes durch Skelettgraphenentwicklungen darstellen. Die Dynamik der Theorie kann durch die Dyson-Schwinger(DS)-Gleichungen [DS 49] beschrieben werden. Diese sind ein unendliches, hierarchisches System gekoppelter Integro- Differentialgleichungen:

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + g_0^2 \Phi_N [\Gamma_2, \dots, \Gamma_{N+2}], \quad (1.5)$$

wobei  $\Phi_N$  das DS-Funktional im Impulsraum und die nackten Vertizes  $\Gamma_N^{(0)pert}$  die nullte störungstheoretische Ordnung bezeichnen. Die übliche Störungstheorie erhält man als Potenzreihe im Quadrat der Kopplung durch Iteration von  $\Phi_N$  um die perturbative nullte Ordnung:

$$\Gamma_N^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{(p)pert} \quad , \quad (1.6)$$

$$\Gamma_N^{(p)pert} = \Gamma_N^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p g(\nu)^{2p'} \Gamma_N^{(p')pert} \quad . \quad (1.7)$$

Die Schleifenintegrale im DS-Funktional  $\Phi_N$  bilden UV-Divergenzen aus, die dimensionell regularisiert werden können durch Verringerung der Anzahl der Raum-Zeit-Dimensionen  $4 \rightarrow D = 4 - 2\varepsilon$ . Hierdurch wird die nackte Kopplung dimensionsbehaftet:  $g_0 \rightarrow g_0 \nu_0^\varepsilon$  mit einer willkürlichen, aber festen Massenskala  $\nu_0$ . Die Beseitigung der Divergenzen geschieht im Rahmen eines Renormierungsprozesses, bei dem u.a. die nackte Kopplung durch eine renormierte ersetzt wird. Im *MS*-Schema ist diese Ersetzung gegeben durch:

$$g_0^2 \nu_0^{2\varepsilon} = g^2(\nu) \nu^{2\varepsilon} Z_\alpha(g^2(\nu); \varepsilon) \quad (1.8)$$

mit der Renormierungskonstanten auf Ein-Loop-Niveau:

$$Z_\alpha(g^2(\nu); \varepsilon) = 1 - \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \beta_0 + \mathcal{O}(g^4) \quad . \quad (1.9)$$

Hierbei bezeichnet

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F \quad (1.10)$$

den ersten Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion

$$\beta(g) := \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} \quad , \quad (1.11)$$

die im dimensionellen Regularisierungsschema die folgende Gestalt besitzt [THO 73]:

$$\beta(g(\nu), \varepsilon) = -g(\nu) \left( \varepsilon + \beta_0 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right) . \quad (1.12)$$

Unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der nackten Kopplung  $g_0$  von der Renormierungsskala  $\nu$  gelangt man zu einer Integraldarstellung der Renormierungskonstanten  $Z_\alpha$ :

$$Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \exp \left( - \int_0^\alpha \frac{d\alpha'}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} \right) \quad (1.13)$$

mit  $\alpha = \frac{g^2(\nu)}{4\pi}$ . Durch Abspaltung des in  $\varepsilon = 0$  regulären Anteils

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} =: \frac{1}{4\pi\varepsilon f(0) + \alpha'} + \varepsilon \rho_\alpha(\alpha', \varepsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_\alpha(0, \varepsilon) = 0 \quad (1.14)$$

ergibt sich:

$$Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \frac{4\pi\varepsilon/\beta_0}{4\pi\varepsilon/\beta_0 + \alpha} \exp \left( -\varepsilon \int_0^\alpha d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \varepsilon) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 . \quad (1.15)$$

Die Differenz zwischen dem in erster Ordnung divergenten perturbativen  $Z_\alpha$  (1.9) und dem für  $\varepsilon = 0$  verschwindenden exakten  $Z_\alpha$  (1.15) ist von der Ordnung  $\alpha^2$  und wird durch die nächsthöhere Ordnung in  $\alpha$  korrigiert [COL 84]. Bei unendlicher Aufsummation der Störungsreihe verschwindet die Differenz zwischen perturbativer und exakter Renormierungskonstante. Dieses bedeutet, daß die auftretenden Divergenzen bei endlicher Störungsordnung keine Divergenzen der exakten Theorie sind.

## 1.2 Die spontane Massenskala $\Lambda$

Im Kontext der Kopplungsrenormierung wird durch dimensionelle Transmutation die renormierungsgruppeninvariante Massenskala  $\Lambda \equiv \Lambda_{QCD}$  eingeführt. In einer masselosen Theorie ist diese der einzige fundamentale, dimensionsbehaftete Parameter und skaliert renormierungsgruppeninvariante Größen mit Massendimension wie beispielsweise das Gluon-Kondensat:

$$\langle \Omega | : G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} : | \Omega \rangle \propto \Lambda^4 . \quad (1.16)$$

Aus einer Analyse der Renormierungsgruppengleichung für  $\Lambda$  ergibt sich:

$$\Lambda^2(g(\nu), \nu) = \nu^2 \exp \left( -2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right) \quad (1.17)$$

$$= \nu^2 \exp \left( -\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(g^2)) \right) . \quad (1.18)$$

Dieser Gleichung entnimmt man, daß die Potenzreihenentwicklung von  $\Lambda$  in  $g^2$  identisch verschwindet mit dem Konvergenzkreis  $R = 0$ .

$\Lambda$  hängt über die frei wählbare Grenze  $g_1$  sowie über die höheren Betafunktionskoeffizienten  $\beta_n$  mit  $n \geq 2$  vom Renormierungsschema ab und ist erst auf Zwei-Loop-Niveau bestimmbar. Man kann der Literatur [SCH 96] folgenden gemittelten Wert für  $\Lambda$  im  $\overline{MS}$ -Schema entnehmen:

$$\Lambda_{QCD}^{\overline{MS}} \approx 287(\pm 31) \text{ MeV} \quad . \quad (1.19)$$

Im Hochenergiebereich findet man durch Lösung der RG-Differentialgleichung schließlich als Darstellung für die effektive Kopplung:

$$\bar{g}^2(Q^2) \approx \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad \text{für} \quad \frac{Q^2}{\Lambda^2} \gg 1. \quad (1.20)$$

Für  $\beta_0 > 0$  ( $N_F < 16$ ) verschwindet diese für große Impulsskalen bzw. kleine Abstände, was als asymptotische Freiheit bezeichnet wird.

### 1.3 Die Systematik der nicht-perturbativen Erweiterung

Dieser Arbeit zugrunde liegt der Gedanke, daß die Vertizes  $\Gamma_N$  -über die invers-logarithmische Abhängigkeit (1.20) hinaus, die lediglich eine Reparametrisierung der Störungsreihe darstellt- eine „echt nichtperturbative“ von  $\Lambda$  besitzen, die aufgrund der nichtanalytischen Kopplungsabhängigkeit von  $\Lambda$  (1.18) durch eine störungstheoretische Entwicklung nicht erfaßt werden, wohl aber durch rationale Approximanten in  $\Lambda$  wiedergegeben werden kann. Dieses wird als Ursache dafür angenommen, daß die Störungstheorie, die zwar ein bewährtes Verfahren für Prozesse in der QCD bei hinreichend großen Energien darstellt, in jeder endlichen Ordnung hingegen die Quarks und Gluonen als die freien Teilchen der Theorie besitzt. Dieses widerspricht dem experimentellen Befund, daß diese nur in gebundener Form als Hadronen beobachtet werden. Als Indiz hierfür mag angeführt werden, daß die Berechnung von Mesonmassen mittels der im folgenden Kapitel vorzustellenden QCD-Summenregeln basiert auf nichtverschwindenden Vakuum Erwartungswerten wie beispielsweise obigem Gluon-Kondensat (1.16).

Ziel dieses Abschnitts ist es, [STI 96] folgend die systematisch erweiterte Störungstheorie vorzustellen, die eine solche  $\Lambda$ -Abhängigkeit in den Approximanten der Vertexfunktionen ansetzt und ein Selbstkonsistenzverfahren hierfür mittels der Dyson-Schwinger-Gleichungen auf Basis des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus formuliert.

Die Vertexfunktionen werden, wie in der üblichen Störungstheorie, in eine formale Potenzreihe in  $g^2(\nu)$  entwickelt. Diese semikonvergente Entwicklung ist möglich,

da die skalenabhängige, renormierte Kopplung  $g(\nu)$  für alle Skalen  $\nu$  hinreichend klein ist. Wie sowohl phänomenologische Arbeiten [SS 96] als auch Gitterrechnungen [LUE 94] zeigen, ist  $\alpha$  auch für kleine Skalen hinreichend klein. Die Koeffizienten dieser Entwicklung hängen jedoch polynomial bzw. rational von der RG-invarianten Massenskala  $\Lambda$  ab, die, obwohl sie über (1.18) mit  $g(\nu)$  verknüpft ist, formal als unabhängiger Parameter behandelt wird.

Die systematische Entwicklung der erweiterten Störungstheorie formuliert man als Doppelsequenz:

$$\Gamma_N(\{p\}; g(\nu); \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,p]}(\{p\}; g(\nu); \nu) \quad , \quad (1.21)$$

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{p\}; g(\nu); \nu) = \Gamma_N^{[r,0]}(\{p\}; \Lambda) + \sum_{p'=1}^p g(\nu)^{2p'} \Gamma_N^{[r,p']}(\{p\}; \Lambda; \nu). \quad (1.22)$$

$\{p\}$  steht für sämtliche Impulsabhängigkeiten, der Index  $p$  zählt die Potenz der Kopplung und der Index  $r$  bezeichnet den Grad der rationalen Approximationsstufe in  $\Lambda$ .

Man formuliert folgende physikalischen Randbedingungen für die nichtperturbativ erweiterten Ansätze:

Im formalen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  für  $g^2 > 0$  („perturbativer Limes“), der sinnvoll ist, da  $\Lambda$  für  $g^2 \rightarrow 0$  aufgrund seiner nichtanalytischen Kopplungsabhängigkeit schneller als jede Potenz von  $g^2$  verschwindet, müssen die nichtperturbativ erweiterten Vertexansätze in ihre störungstheoretische Form übergehen:

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{p\}; \Lambda = 0; \nu) = \Gamma_N^{(p)pert}(\{p\}; \nu) \quad . \quad (1.23)$$

Beim Hochskalieren aller äußeren Impulse sollen die nichtperturbativen Vertexansätze der Ordnung  $p = 0$  in die entsprechenden perturbativen Größen übergehen („naive“ asymptotische Freiheit):

$$\Gamma_N^{[r,0]}(\{\lambda p\}; \Lambda) \longrightarrow \Gamma_N^{(0)pert}(\{\lambda p\}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad . \quad (1.24)$$

Für  $p > 0$  ist die asymptotische Freiheit durch Verschwinden der laufenden Kopplung

$$\bar{g}^2(Q^2) \longrightarrow 0 \quad \text{für } \frac{Q^2}{\Lambda^2} \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

sichergestellt (siehe auch (1.20)).

Die Impulsabhängigkeit der  $\Gamma_N^{[r,p]}$  soll den Divergenzgrad im Vergleich zur Störungstheorie nicht erhöhen.

Diese physikalischen Randbedingungen schränken die Struktur der Ansätze erheblich ein, da die Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit und die Globalität

der Approximation im Impuls -denn die Approximanten sollen in Schleifenintegralen über den gesamten Impulsraum verwendbar sein- eine rationale Impulsabhängigkeit und damit auch eine rationale  $\Lambda$ -Abhängigkeit der nichtperturbativ erweiterten Vertextansätze erfordern.

## 1.4 Der DS-Selbstkonsistenzmechanismus

Die explizite Gestalt der rationalen Approximanten für die einzelnen Vertizes wird im folgenden Abschnitt angegeben werden. Zuvor soll der Selbstkonsistenzmechanismus der Approximantenfolge (1.22) auf Basis der Dyson-Schwinger-Gleichungen dargestellt werden. In niedrigster perturbativer Ordnung ergibt sich im ersten Iterationsschritt aus (1.5) für beliebige Stufe  $r$  die Approximation:

$$\left\{ \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N \left[ \Gamma_N^{[r,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)pert} + \mathcal{O}(g^2(\nu), \epsilon(r+1)) \quad (1.26)$$

Mit  $\epsilon(r+1)$  ist der Fehler bezeichnet, der sich aus der endlichen globalen Approximationsstufe  $r$  ergibt und sich nicht wie der Fehler der perturbativen Entwicklung  $\mathcal{O}(g^2(\nu))$  durch einen „kleinen“ Parameter abschätzen läßt. Die Gleichung kann nur an einer endlichen Anzahl von Impulsstützstellen erfüllt werden. Diese „Vergleichsdaten“ sind bei rationalen Approximanten grundsätzlich frei wählbar. In [KUH 97] und [DRI 97] sind als Vergleichsdaten die Polstellen und Residuen der nichtperturbativen Vertexfunktionen gewählt worden und sind somit durch die nichtperturbative Approximation festgelegt.

Die modifizierten Vertexfunktionen höherer, perturbativer Ordnung  $\Gamma_N^{[r,p>0]}$  erhält man durch Iteration um  $\Gamma_N^{[r,0]}$ . In dieser Arbeit werden daher die  $\Gamma_N^{[r,0]}$  als „neue Feynman-Regeln“ der Theorie aufgefaßt, mit denen sich physikalische Meßgrößen wie beispielsweise der hadronische Anteil der Vakuumpolarisation des Photons berechnen lassen.

Die Bestimmung der  $\Gamma_N^{[r,0]}$  erfolgt gemäß (1.26) durch explizite Berechnung der Schleifenintegrale der Dyson-Schwinger-Funktionale im dimensionellen Renormierungsschema. Offenbar ist eine Selbstkonsistenz nur dann möglich, wenn diese Schleifenintegrale den Vorfaktor  $\left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2$  des DS-Funktional  $\Phi_N$  kompensieren und so Terme der Ordnung  $g^0$  ausbilden.

Dieses geschieht nach [STI 96] dadurch, daß zunächst divergente nichtperturbative Beiträge in  $\Phi_N$  tatsächlich kopplungs- und divergenzfrei werden („ $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus“). Voraussetzung ist, daß die Schleifenintegrale zusätzlich zur Divergenz  $\propto \frac{1}{\epsilon}$  den Faktor  $(\Lambda/\nu_0)^{-2\epsilon}$  produzieren. Folglich bilden Terme der linken Seite in Gleichung (1.26), die einen Beitrag in  $g^0$  liefern, den Faktor

$$\Pi(\epsilon) = \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \quad (1.27)$$



aus. Mittels elementarer Umformungen erhält man aus (1.18)

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon} = \frac{\alpha_1}{\alpha(\nu)} \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha(\nu)} \frac{d\alpha'}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'}\right) \quad (1.28)$$

und schließlich unter Ausnutzung der Integraldarstellung der Renormierungskonstanten (1.13):

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\varepsilon} \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha(\nu)} \frac{d\alpha'}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'}\right) \quad (1.29)$$

$\Pi(\varepsilon)$  ist exakt kopplungsunabhängig und, wie man durch Abspaltung des in  $\varepsilon = 0$  regulären Beitrags sieht, für  $\varepsilon \rightarrow 0$  endlich:

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon) &= \frac{\alpha_1}{4\pi\varepsilon} \frac{4\pi\varepsilon/\beta_0}{4\pi\varepsilon/\beta_0 + \alpha_1} \exp\left(-\varepsilon \int_0^{\alpha_1} d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \varepsilon)\right) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0}, \quad \text{da } \rho_\alpha(0, \varepsilon) = 0 \quad (1.30) \end{aligned}$$

Man unterscheidet demnach drei Beiträge in den Lösungen der Schleifenintegrale des DS-Funktional  $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N$ :

Die nichtperturbativen Divergenzen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im „perturbativen“ Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  verschwinden. Diese modifizieren mittels des oben beschriebenen „ $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus“ die nullte Ordnung der Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{[r,0]}$ .

Die perturbativen Divergenzen, auf die infolge der Randbedingung (1.23) dieser exakte Mechanismus nicht angewendet werden darf, bleiben auch im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  als solche erhalten und werden störungstheoretisch renormiert. Der Grund dafür ist, daß die in allen Ordnungen aufsummierte nackte Kopplung  $g_0 \propto \varepsilon$  ist (siehe (1.13)) und somit die  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenz kompensiert. Wendet man diesen exakten Mechanismus jedoch auf die gesamte Theorie an, verschwinden alle Greens-Funktionen mit mehr als zwei äußeren Beinen. Nach [THO 73] darf  $g_0$  im perturbativen Rahmen nur in Form seiner Potenzreihe in  $g^2$  mit für  $\varepsilon \rightarrow 0$  divergenten Koeffizienten behandelt werden, und diese Einschränkung überträgt sich auf die erweiterte Theorie wegen der „perturbativen Randbedingung“ (1.23).

Die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  endlichen Anteile liefern einen Beitrag in erster Kopplungsordnung  $g^2(\nu)$ , d.h. in der Notation von Gleichung (1.22) die Funktionen  $\Gamma_N^{[r,1]}$ .

Zur selbstkonsistenten Modifikation der nullten Ordnung  $\Gamma_N^{[r,0]}$  müssen die DS-Integrale demnach nichtperturbative Divergenzen ausbilden, was nur im Falle der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen (1.4) geschieht.

Diese Selbstkonsistenzbedingung entkoppelt das unendlich hierarchische DS-Gleichungssystem und definiert ein endliches Selbstkonsistenz-Gleichungssystem, beschränkt auf die sieben Basisvertizes.

## 1.5 Ansätze für die nichtperturbativ modifizierten Basisvertizes

In [DRI 97] findet man eine vollständige Lösung des Selbstkonsistenzproblems auf Ein-Schleifen-Niveau in Landau-Eichung für die erste Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ) mit verschwindenden Fermionmassen ( $m_{(f)} = 0$ ). In [KUH 97] wird der Fermionsektor des Selbstkonsistenzproblems in beliebiger Stufe  $r$  der rationalen Approximation mit nichtverschwindenden Fermionmassen ( $m_{(f)} > 0$ ) in Landau-Eichung behandelt, wobei die Auswertung des algebraischen Koeffizienten-Gleichungssystems für  $r = 1$  erfolgt.

Diese Arbeit wird sich wie [DRI 97] im wesentlichen auf die erste Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ) beschränken und die Fermionen als masselos ( $m_{(f)} = 0$ ) annehmen, so daß in den Ansätzen sämtliche nichtperturbativen Massenskalen proportional zu  $\Lambda$  sind.

In diesem Abschnitt werden, wie in [STI 96] vorgeschlagen, die rationalen Approximanten des Gluon-Propagators, des Drei-Gluon- und des Quark-Gluon-Vertex in Stufe  $r = 1$  und die des Fermion-Propagators für beliebiges  $r$  formuliert. Für den Vier-Gluon-Vertex in Stufe  $r = 1$  wird aufgrund seiner komplizierten Gestalt auf [DRI 97] verwiesen. Der Geist-Sektor erfährt aufgrund der Divergenzstruktur in Landau-Eichung auf Ein-Schleifen-Niveau in nullter perturbativer Ordnung keine nichtperturbativen Modifikationen [DRI 97].

### 1.5.1 Der Fermion-Propagator

Die Propagatoren mit ungeradem Approximationsgrad  $r$  und paarweise komplex-konjugierten Propagatorpolen beschreiben bei geeigneter Parameterwahl im Gegensatz zu Polen bei reellen zeitartigen Impulsquadraten keine massiven Teilchenpole, sondern intrinsisch kurzlebige Elementaranregungen von Teilchen und Antiteilchen und entsprechen so der Forderung nach „Confinement“ [STI 96].

Der Fermion-Propagator (Flavour  $f$ ) schreibt sich auf der Stufe  $r$  der rationalen Approximation im euklidischen Impulsraum

$$\begin{aligned}
 S_{(f)}^{[r,0]}(p) &= \overset{[r,0]}{\text{---}\blacktriangleleft\text{---}} \\
 &= \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)}) (\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})} \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{(r+1)/2} \left( \frac{A_{r,t+}^{(f)}}{\not{p} + \kappa_{r,t+}^{(f)}} + \frac{A_{r,t-}^{(f)}}{\not{p} + \kappa_{r,t-}^{(f)}} \right) \quad (1.32)$$

mit den Residuen:

$$A_{r,t\pm}^{(f)} := \text{res}_{\not{p} = -\kappa_{r,t\pm}^{(f)}} \left( S_{(f)}^{[r,0]} \right). \quad (1.33)$$

Die Fermion-Selbstenergie oder der Zweipunkt-Fermion-Vertex ist das Negativinversse des Fermion-Propagators:

$$-\Gamma_{FF}^{[r,0]}(p) = \not{p} + \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}, \quad (1.34)$$

für  $r = 1, 3, 5, \dots$  mit  $\kappa_{r,1}^{(f)}, \kappa_{r,2}^{(f)}, \kappa_{r,3}^{(f)} \in \mathcal{R}$  und  $\kappa_{r,2s+2}^{(f)} = \kappa_{r,2s}^{(f)*}, \kappa_{r,2s+3}^{(f)} = \kappa_{r,2s+1}^{(f)*}$  für  $s = 2, 4, \dots, r-1$  sowie  $\kappa_{r,s+}^{(f)} = \kappa_{r,s-}^{(f)*}$ .

Der Zusammenhang zwischen den konjugiert-komplexen und den reellen Parametern ist:

$$\kappa_{r,2t+1}^{(f)} = \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (-\kappa_{r,2t}^{(f)} + \kappa_{r,s+}^{(f)}) (-\kappa_{r,2t}^{(f)} + \kappa_{r,s-}^{(f)})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (-\kappa_{r,2t}^{(f)} + \kappa_{r,2s}^{(f)})} \quad \text{für } t = 1, \dots, r, \quad (1.35)$$

und es gilt:

$$\kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} = \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^{(f)} + \kappa_{r,s-}^{(f)}) \quad (1.36)$$

Im folgenden wird, soweit keine Mißverständnisse möglich sind, der Flavour-Index  $(f)$  weggelassen. Da Fermionmassen vernachlässigt werden, können alle massenartigen Koeffizienten als proportional zu  $\Lambda$  angesetzt werden:

$$\begin{aligned} \kappa_{r,1/2} &= \omega_{r,1/2} \Lambda, \\ \kappa_{r,3}^2 &= \omega_{r,3} \Lambda^2 \quad \text{mit } \omega_{r,i} \in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Im Falle der ersten Stufe der rationalen Approximation werden, soweit keine Verwechslung möglich ist, die Indizes  $r = 1$  und  $p = 0$  weggelassen. In  $r = 1$  stellt sich der Fermion-Propagator damit dar als

$$S(p) = \frac{(\not{p} + \kappa_2)}{(\not{p} + \kappa_+)(\not{p} + \kappa_-)} \quad (1.38)$$

$$= \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \quad (1.39)$$

mit

$$A_+ = \frac{\kappa_2 - \kappa_+}{\kappa_- - \kappa_+}, \quad A_- = \frac{\kappa_2 - \kappa_-}{\kappa_+ - \kappa_-} \quad (1.40)$$



### 1.5.3 Der Drei-Gluon-Vertex

Die aus technischen Gründen notwendige Vereinfachung des Vier-Gluon-Vertex erfordert aus Konsistenzgründen, daß wie in der Störungstheorie angenommen wird, daß die Dyson-Schwinger-Gleichungen für den Drei-Gluon-Vertex keine Divergenzen proportional zur symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  ausbilden [DRI 97, STI 97]:

$$\Gamma_{3V_{abc}}^{\mu\nu\rho} = i f_{abc} \Gamma_{3V}^{\mu\nu\rho} \quad . \quad (1.50)$$

Das DS-Selbstkonsistenzsystem ist insofern noch reduziert [STI 96], als in allen äußeren Beinen transversal projiziert wird, denn die Landau-Eichung ermöglicht es, ein geschlossenes DS-Gleichungssystem mit nur transversalen Gluonamplituden aufzustellen. Diese Transversalprojektion bzw. die Projektion durch den transversalen Gluon-Propagator überleben vier unabhängige Lorentz-Tensorstrukturen. Zudem werden die Tensoren unterdrückt, die im DS-Funktional des Vier-Gluon-Vertex impulsabhängige Tensorstrukturen liefern [DRI 97]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3V_T}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(p_1, p_2, p_3) &= \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_2 \\ \nu_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \nu_3 \\ p_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ \nu_1 \end{array} \\ \Gamma_{3V_T} \end{array} \\ &= t^{\nu_1\mu_1}(p_1)t^{\nu_2\mu_2}(p_2)t^{\nu_3\mu_3}(p_3) \cdot \left( \delta^{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)^{\mu_3} \mathcal{F}_0(p_1^2, p_2^2; p_3^2) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\mu_2\mu_3}(p_2 - p_3)^{\mu_1} \mathcal{F}_0(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + \delta^{\mu_3\mu_1}(p_3 - p_1)^{\mu_2} \mathcal{F}_0(p_3^2, p_1^2; p_2^2) \right) \quad (1.51) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(p_2^2, p_3^2; p_1^2) &= \\ 1 + x_1 \left( \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} \right) + x_2 \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} + x_3 \frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} \\ + x_4 \frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} \left( \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} \right) + x_5 \frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} \quad . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Hierbei ist nicht das allgemeinste Nennerpolynom in  $p_1^2, p_2^2, p_3^2$  gewählt worden, sondern diese Approximante mit beim Umschreiben auf einen Hauptnenner faktorisierendem Nenner, um DS-Selbstkonsistenz zu ermöglichen. Ein allgemeiner, die Bosesymmetrie-Forderung erfüllender, vollständiger Ansatz ist in [BC 80] formuliert.

### 1.5.4 Der Quark-Gluon-Vertex

Aufgrund der globalen Eichinvarianz besitzt die nichtperturbative Approximante die gleiche Farbtensorstruktur wie das störungstheoretische Pendant. In Landau-Eichung, in der das einlaufende Gluonbein transversal projiziert wird, setzt man an:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}V_T a}^{l_1 l_2 \mu}(p, k, p') &= \text{Diagram} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\lambda_a\right)^{l_1 l_2} t^{\mu\nu}(k) \Gamma_{F\bar{F}V_T}^\nu(p, k, p') \quad . \quad (1.53)
 \end{aligned}$$

Nach [BER 68] besteht die allgemeinste Lorentz-Struktur aus 12 matrixwertigen Vektoren, von denen 8 die Transversalprojektion bezüglich des Gluonbeins überleben [BC 80]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}V_T}^\nu(p, k, p') &= \\
 &\gamma^\nu + z_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p}' + \kappa_2} \right) + z_2 \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p}' + \kappa_2} + z_3 \gamma^\nu \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} \\
 &+ z_4 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p}' + \kappa_2} \right) \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} + z_5 \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p}' + \kappa_2} \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} \quad . \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist die Impulsstruktur weiter eingeschränkt durch die Forderung, daß die Schleifenintegrale keine nichtperturbativen Divergenzen ausbilden, welche einen höheren Divergenzgrad als die perturbativen besitzen.

## 1.6 Lösung der Selbstkonsistenzgleichungen

Nach Ausführung der Schleifenintegrale der DS-Funktionale erhält man durch die Selbstkonsistenzforderung ein gekoppeltes algebraisches Gleichungssystem für die Ansatzparameter der im letzten Abschnitt vorgestellten Basisvertizes  $u_i, \omega_i, x_i, z_i$ , und der Parameter  $\zeta_i$  des Vier-Gluonen-Vertex.

Neben der Formulierung der DS-Gleichungen finden sich Details dieser Rechnungen<sup>2</sup> insbesondere für den Drei-Gluonen- und Vier-Gluonen-Vertex in [DRI 97], [STI 97], [DRI 98] und für den gesamten Fermionsektor inklusive nichtverschwindender Fermionmassen in beliebiger Stufe  $r$  der rationalen Approximation in [KUH 97].

<sup>2</sup>Ein Lösungsversuch mittels vereinfachender Annahmen ist zuvor von [KOE 90, REU 89, WIG 89] unternommen worden.



$$\begin{aligned}
 & + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\
 & \hspace{15em} (1.57)
 \end{aligned}$$

die Parameter-Selbstkonsistenzgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 u_3 z_4 &= \frac{9}{4} u_3 z_1 x_3 - \frac{9}{4} z_4 x_4 \\
 \beta_0 u_3 z_3 &= \frac{9}{4} u_3 x_3 - \frac{9}{4} z_3 x_4 \\
 \beta_0 u_3 z_1 &= \frac{9}{4} u_3 z_1 - \frac{9}{4} z_4 x_1 \\
 \beta_0 u_3 \omega_3 z_2 &= \frac{9}{4} u_3 \omega_3 z_1^2 - \frac{9}{4} u_3 z_2^2 - \frac{15}{2} \omega_3 x_1 z_5 \\
 &\quad + \frac{5}{4} \omega_3 x_3 z_5 + N_F \frac{2}{3} \omega_3 z_3 z_5 \\
 \beta_0 u_3 \omega_3 z_1 &= \frac{9}{4} u_3 \omega_3 z_1 - \frac{9}{4} u_3 z_1 z_2 - \frac{15}{2} \omega_3 x_1 z_4 \\
 &\quad + \frac{5}{4} \omega_3 x_3 z_4 + N_F \frac{2}{3} \omega_3 z_3 z_4 \quad .
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

Man beobachtet, daß das gesamte Gleichungssystem skalierbar ist. Neben den Vertex-Parametern wird auch die Massenskala  $\Lambda$  reskaliert. Die Ursache für diese nichttriviale Reskalierung liegt in der Schemaunabhängigkeit des Selbstkonsistenzmechanismus für die nullte Ordnung begründet. Als Skalierungsparameter wird der Drei-Gluon-Parameter  $x_1 \neq 0$  gewählt. Da  $x_1 = 0$  in die triviale und somit perturbative Lösung führt, schränkt diese Wahl den Lösungsraum nicht ein. Für  $x_1 > 0$  findet man:

$$\Lambda'^2 = x_1 \Lambda^2 \quad , \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
 u'_1 &= \frac{u_1}{x_1}, & u'_2 &= \frac{u_2}{x_1}, & u'_3 &= \frac{u_3}{x_1^2}, \\
 x_1 &= 1, & x'_2 &= \frac{x_2}{x_1^2}, & x'_3 &= \frac{x_3}{x_1}, & x'_4 &= \frac{x_4}{x_1^2}, & x'_5 &= \frac{x_5}{x_1^3}, \\
 Z'_1 &= \frac{Z_1}{x_1}, & Z'_2 &= \frac{Z_2}{x_1^2}, \\
 \omega'_1 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{x_1}}, & \omega'_2 &= \frac{\omega_2}{\sqrt{x_1}}, & \omega'_3 &= \frac{\omega_3}{x_1}, \\
 z_1 &= \frac{z_1}{\sqrt{x_1}}, & z'_2 &= \frac{z_2}{x_1}, & z'_3 &= \frac{z_3}{x_1}, & z'_4 &= \frac{z_4}{\sqrt{x_1}^3}, & z'_5 &= \frac{z_5}{x_1^2} \quad .
 \end{aligned}$$



Ändert man das Vorzeichen des Skalierungsparameters  $x_1 < 0$ , ergibt sich ein leicht anderes Skalierungsverhalten der fermionischen Parameter. Diese Lösung wird im späteren allerdings verworfen.

Als Freiheit bestehen bleibt, daß mit der Parametersatz-Lösung

$$\left\{ u'_1, u'_2, u'_3, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, x'_2, \dots, x'_5, z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5 \right\} \quad (1.60)$$

auch der „gespiegelte“ Parametersatz

$$\left\{ u'_1, u'_2, u'_3, -\omega'_1, -\omega'_2, \omega'_3, x'_2, \dots, x'_5, -z'_1, z'_2, z'_3, -z'_4, z'_5 \right\} \quad (1.61)$$

eine Lösung des SK-Problems darstellt.

Das Spektrum der numerisch möglichen Lösungen läßt sich mittels der reskalierten Propagatorpolstellen drei physikalisch unterschiedlichen Situationen zuordnen

$$u'_\pm = \frac{1}{2}(u'_1 + u'_2) \pm i\sqrt{\mathcal{C}_g} \quad (1.62)$$

mit der gluonischen Diskriminanten

$$\mathcal{C}_g := u'_3 - \frac{1}{4}(u'_1 - u'_2)^2 \quad (1.63)$$

und

$$\begin{aligned} \omega'_\pm &= \frac{1}{2}(\omega'_1 + \omega'_2) \pm i\sqrt{\mathcal{C}_f} \quad , \text{ bzw.} \\ \omega'^2_\pm &= \frac{1}{2}(\omega'^2_1 + \omega'^2_2) - \omega'_3 \pm (\omega'_1 + \omega'_2)i\sqrt{\mathcal{C}_f} \end{aligned} \quad (1.64)$$

mit der fermionischen Diskriminanten

$$\mathcal{C}_f := \omega'_3 - \frac{1}{4}(\omega'_1 - \omega'_2)^2 \quad . \quad (1.65)$$

Sind die Diskriminanten  $\mathcal{C}_g$  und  $\mathcal{C}_f$  positiv, dann besitzen die entsprechenden Polstellen  $u'_\pm$  und  $\omega'^2_\pm$  nichtverschwindende Imaginärteile und beschreiben kurzlebige Elementaranregungen („Confinement“).

Im Falle negativer Diskriminanten sind die Polstellen reell. Zu unterscheiden sind:

Eine Polstelle bei negativem euklidischen, d.h. zeitartigem Minkowskischen Impulsquadrat: Der entsprechende Propagator beschreibt ein physikalisches, asymptotisch detektierbares Teilchen. Dieses widerspricht der experimentellen Beobachtung des „Confinement“, stellt aber eine legitime Lösung des Gleichungssystems dar.

Eine Polstelle bei positivem euklidischen, d.h. raumartigem Minkowskischen Impulsquadrat: Der entsprechende Propagator beschreibt ein unphysikalisches Teilchen (Tachyon), ein Teilchen mit imaginärer Masse. Jede Lösung, die mindestens eine solche negativ-reelle Propagatorposition enthält, wird als unphysikalisch eingestuft.

Bei der Untersuchung des Parameter-Lösungsraums beobachtet man, daß im Falle eines negativen Vorzeichens des Skalierungsparamters  $x_1 < 0$  sowohl für  $N_F = 2$  als auch für  $N_F = 6$  alle für  $\omega'_3$  gefundenen Lösungen komplex sind und so zu unphysikalischen euklidischen Teilchenpolen führen. Diese Lösung wird daher verworfen.

Im Bereich  $0.3 \leq \omega'_1 \leq 1.2$  bzw. für den Fall der „gespiegelten“ Lösung (1.61) im Bereich  $-0.3 \geq \omega'_1 \geq -1.2$  finden sich unter den zehn numerischen Lösungen für  $\omega'_3$  zwei reelle. Von diesen beiden ist die negative erneut zu verwerfen, da sie zu „Tachyon“-Polpositionen führt. Die positive hingegen stellt die einzige physikalische Lösung dar, für die alle Vertex-Koeffizienten reell sind.

Man findet nun, daß im Bereich

$$0.5 \leq \omega'_1 \leq 0.9 \quad \text{bzw.} \quad -0.5 \geq \omega'_1 \geq -0.9 \quad (1.66)$$

die Diskriminanten positiv sind und demnach sowohl im Fermion- als auch im Gluon-Sektor „Confinement“ zeigen. Dieser Lösungsraum läßt sich nicht in Einklang bringen mit der Erfüllung des Bewegungsgleichungs-Kondensats des Eichfeldes. Stattdessen wird ein  $\omega'_1$  etwa aus der Mitte des Bereichs (1.66) gewählt. Da  $\omega'_2$  in (1.66) nur schwach um den Wert 0.7 variiert, wird zudem der Einfachheit halber  $\omega'_2 = \omega'_1$  festgelegt und so eine „typische Lösung“ definiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die „gespiegelte“ Lösung (1.61) als Parametersatz gewählt, da nur ein negatives  $\omega'_1$  das richtige Vorzeichen des Fermionkondensats in nullter Ordnung liefert. Zudem wird der Standpunkt bezogen, daß im Falle masseloser Fermionen die Wahl der Flavour-Zahl  $N_F = 2$  der realistischen Situation mit  $N_F = 6$  und unterschiedlich großen Fermionmassen besser entspricht als  $N_F = 6$ , da die Untersuchung des eichinvarianten, renormierten und in führender Störungsordnung RG-invarianten Gluon-Kondensats

$$\frac{g^2(\nu)}{4\pi^2} \langle G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \rangle_{ren} \quad (1.67)$$

zeigt, daß dieses nur im Fall  $N_F = 2$  das richtige Vorzeichen besitzt.

	$N_F = 2$		$N_F = 6$	
	$\omega'_1 < 0$	$\omega'_1 > 0$	$\omega'_1 < 0$	$\omega'_1 > 0$
$\omega'_1$	-0.6749	0.6749	-0.5036	0.5036
$\omega'_2$	-0.6749	0.6749	-0.5036	0.5036
$\omega'_3$	0.1202	0.1202	0.0479	0.0479
$z'_1$	0.9561	-0.9561	0.3777	-0.3777
$z'_2$	-0.9356	-0.9356	-0.2741	-0.2741
$z'_3$	-0.4282	-0.4282	-0.5583	-0.5583
$z'_4$	-0.4094	0.4094	-0.2108	0.2108
$z'_5$	0.2242	0.2242	0.0885	0.0885
$u'_1$	-0.3604	-0.3604	-0.5142	-0.5142
$u'_2$	-0.4884	-0.4884	0.2207	0.2207
$u'_3$	0.1299	0.1299	0.2644	0.2644
$x'_1$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$x'_2$	-8.7433	-8.7433	-14.5258	-14.5258
$x'_3$	8.9088	8.9088	10.8613	10.8613
$x'_4$	-3.2607	-3.2607	-5.9675	-5.9675
$x'_5$	-6.2711	-6.2711	-11.7466	-11.7466

Tabelle 1.1: Tabelle der reellen Parameterwerte, die „Confinement“ ( $\omega'_2 = \omega'_1 \in [-0.9, -0.5]$  bzw.  $\omega'_2 = \omega'_1 \in [0.5, 0.9]$ ) zeigen und mit  $u'_1{}^2 = u'_3$  das Bewegungsgleichungskondensat des Geistfeldes zum Verschwinden bringen

	$N_F = 2$		$N_F = 6$	
	$\omega'_1 < 0$	$\omega'_1 > 0$	$\omega'_1 < 0$	$\omega'_1 > 0$
$\omega'_+$	$-0.6749 + i 0.3467$	$0.6749 + i 0.3467$	$-0.5036 + i 0.2189$	$0.5036 + i 0.2189$
$\omega'_-$	$-0.6749 - i 0.3467$	$0.6749 - i 0.3467$	$-0.5036 - i 0.2189$	$0.5036 - i 0.2189$
$u'_+$	$-0.4245 + i 0.3547$	$-0.4245 + i 0.3547$	$-0.1468 + i 0.3597$	$-0.1468 + i 0.3597$
$u'_-$	$-0.4245 - i 0.3547$	$-0.4245 - i 0.3547$	$-0.1468 - i 0.3597$	$-0.1468 - i 0.3597$

Tabelle 1.2: Propagator-Polstellen

## 1.7 Bemerkungen zu Slavnov-Taylor-Identitäten

Die selbstkonsistente Bestimmung der Vertizes mittels der Dyson-Schwinger-Gleichungen hatte auf ein vom Vier-Gluon-Vertex formal entkoppeltes, nichtlineares und unterbestimmtes Gleichungssystem für die Vertex-Parameter geführt. Bereits auf Stufe  $r = 1$  der rationalen Approximation, um so mehr aber in einer (bisher nicht vollständig durchgeführten) höheren Approximationsstufe mit einem größeren Satz an Parametern, besteht die Notwendigkeit, zusätzliche Bestimmungs-Gleichungen zum System der DS-Gleichungen hinzuzunehmen. Dieses können ganz allgemein die Bewegungsgleichungs-Kondensate sein, die tatsächlich zur Bestimmung der hier verwendeten Parameter herangezogen wurden, oder aber die Slavnov-Taylor-Identitäten (STI) [ST 71], die im folgenden kurz in Zusammenhang mit der erweiterten Störungstheorie betrachtet werden.

Beschränkt man sich auf die Impulsstrukturen des Quark-Gluon-Vertex, die bei den Dreiecksgraphen (siehe etwa Gleichung (1.57)) keine höheren Divergenzen als die perturbativen erzeugen, so bilden die Hilfsamplituden in den Slavnov-Taylor-Identitäten in Landau-Eichung auf Ein-Schleifen-Niveau keine Divergenzen aus. Da zudem der Geistsektor in Landau-Eichung nicht modifiziert wird, lautet in nullter Kopplungsordnung und in Landau-Eichung die STI des Quark-Gluon-Vertex ebenso wie im abelschen Fall:

$$k^\mu \Gamma_{F\bar{F}V}^\mu(p, k, p - k) = \Gamma_{F\bar{F}}(p - k) - \Gamma_{F\bar{F}}(p) + \mathcal{O}(g_0^2) \quad . \quad (1.68)$$

In  $r = 1$  ergibt sich aufgrund von (1.68) der Transversalanteil des Quark-Gluon-Vertex zu Null (siehe Kap. 3):

$$\Gamma_{F\bar{F}V_\perp}^{\mu[1,0]}(p, k, p - k) = 0 \quad . \quad (1.69)$$

(Umgekehrt erlaubt also ein nichtverschwindender Transversalanteil bei  $r = 1$  keine exakte Erfüllung der STI, wie sich in den zitierten Arbeiten bestätigt hat.) Aus der Fermion-Selbstenergie in Ordnung  $r$  (1.34) folgt der Longitudinalanteil des Quark-Gluon-Vertex, der durch die STI festgelegt ist:

$$\Gamma_{F\bar{F}V\parallel}^{\mu[r,0]}(p, k, p - k) = \gamma^\mu - \sum_{s=1}^r \kappa_{2s+1}^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_{r,2s}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}' + \kappa_{r,2s}} \quad . \quad (1.70)$$

Löst man die DS-Gleichung des Fermion-Propagators in Stufe  $r$  mit  $\Gamma_{F\bar{F}V\perp}^{\mu[r,0]} = 0$ , so erhält man die SK-Gleichungen

$$\begin{aligned} \kappa_{r,1} &= \frac{4}{\beta_0} \kappa_{r,1} \quad , \\ \kappa_{r,2s+1}^2 &= \frac{4}{\beta_0} \kappa_{r,2s+1}^2 \quad , \end{aligned} \quad (1.71)$$

die offenbar nicht erfüllt sind. Insofern ist man gezwungen, Transversalanteile des Quark-Gluon-Vertex mitzuberücksichtigen. In  $r = 1$  gelingt dies nur durch Mitnahme des divergenzerhöhenden Terms:

$$\Lambda \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} (p + p')^\mu \frac{1}{\not{p}' + \kappa_2} \quad . \quad (1.72)$$

Der Transversalanteil schreibt sich in diesem Fall (siehe Kap. 3):

$$\begin{aligned} \Gamma_{F\bar{F}V\perp}^{\mu} (p, k, p - k) &= - \frac{\Lambda z_1}{2} \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \frac{1}{\not{p}' + \kappa_2} \\ &- \frac{\Lambda z_4}{2} \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \frac{1}{\not{p}' + \kappa_2} \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} \quad . \end{aligned} \quad (1.73)$$

Aus der DS-Gleichung in  $r = 1$  des Fermion-Propagators ergeben sich dann die SK-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{4}{\beta_0} \left[ \kappa_1 - \frac{z_1}{2} \Lambda \right] \quad , \\ \kappa_3^2 &= \frac{4}{\beta_0} \left[ \kappa_3^2 + \Lambda z_1 \left( \kappa_1 + \frac{3}{2} \kappa_2 \right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (1.74)$$

Diese Modifikation des Quark-Gluon-Vertex hat zur Folge, daß sich aus der DS-Gleichung des Fermion-Propagators Selbstkonsistenzgleichungen ergeben, aus denen sich  $\kappa_2$  gewinnen läßt (1.74 statt 1.56 bzw. 1.71). Zudem kann auch das „abelsche“ Diagramm in der Dyson-Schwinger-Gleichung des Quark-Gluon-Vertex in Landau-Eichung nichtperturbative Divergenzen ausbilden mit der Konsequenz, daß der Quark-Photon-Vertex, der in dieser Arbeit im wesentlichen durch die Erhaltung der Ward-Takahashi-Identitäten definiert wird, durch dessen DS-Gleichung nichtperturbativ

modifiziert werden kann. Die Etablierung der STI-Erhaltung im Fermion-Sektor kann ein nächster Schritt im Rahmen der erweiterten Störungstheorie sein, wird aber in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Es bleibt festzuhalten, daß bei Beschränkung auf Rechnungen niedriger Schleifenzahl die Mitnahme von Termen des Typs (1.72) ein legitimes provisorisches Mittel sein kann, um unter Beibehaltung der relativen Einfachheit der  $r = 1$ -Approximanten eine Erfüllung wichtiger Nebenbedingungen wie etwa der STI zu ermöglichen. In höherer Ordnung sollten diese Terme von selbst unnötig werden.

Die STI für den Drei-Gluon-Vertex  $\Gamma_{3V}$  mit voller Tensorstruktur lautet in nullter Kopplungsordnung für den  $k$ -Kanal in Landau-Eichung und Ein-Schleifen-Niveau:

$$k^{\nu_1} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{c_1 c_2 c_3}(k, -(p+k), p) = if_{c_1 c_2 c_3} \left\{ \Gamma_{VV_T}((p+k)^2) t^{\nu_2 \nu_3}(p+k) - \Gamma_{VV_T}(p^2) t^{\nu_2 \nu_3}(p) \right\} . \quad (1.75)$$

Man beobachtet, daß die Drei-Gluon-STI im  $k$ -Kanal mit obigen Anteilen der Selbstenergien (1.49) in erster Stufe der rationalen Approximation nicht erfüllt ist. Die Erhaltung der STI, und zwar aufgrund der Bosesymmetrie-Forderung in allen drei Kanälen, verlangt eine entsprechend höhere Stufe der rationalen Approximation in  $\Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{c_1 c_2 c_3}$ .

Da demnach keine konsistente Erfüllung der (chromodynamischen) STI durch die Ansätze in erster Stufe der rationalen Approximation erzielt werden kann, wird daher auch von dem in dieser Arbeit verwendeten ( $r = 1$ )-Ansatz für den Quark-Gluon-Vertex keine Erhaltung der entsprechenden Identität verlangt. Hingegen wird die Ward-Takahashi-Identität durch den ( $r = 1$ )-Ansatz für den Quark-Photon-Vertex exakt erfüllt sein (Kapitel 3). Insbesondere enthält dieser Ansatz zunächst auch eine Struktur der Form (1.72). Die Formulierung einer systematischen Erhaltung der STI in Stufe  $r$  bis auf Terme höherer Stufe der rationalen Approximation, analytisch exakt oder auf Basis einer vorgegebenen Anzahl von Impuls-Stützstellen, steht noch aus und ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Da die oberfächlich divergenten Grundfunktionen nicht eichinvariant sind, besteht im Prinzip eine Abhängigkeit der Parameter  $\omega_i, u_i, z_i, x_i$  von der gewählten Eichung  $\xi$ . Diese sollte sich jedoch in eichinvarianten Größen wie dem Fermionkondensat

$$g_0^2 \langle \Omega | : \bar{q} q : | \Omega \rangle = \frac{12}{\beta_0} (\omega_1^3 - 2\omega_1 \omega_3 - 2\omega_2 \omega_3) \Lambda^3 + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (1.76)$$

herausheben. Auf der gegenwärtigen Näherungsstufe ist dies wiederum nicht erfüllt. Diese Eichparameterabhängigkeit ist demnach als Störung aufzufassen, die sich als Folge der globalen aber quantitativ zunächst noch sehr groben Approximation der echten Vertizes durch die ( $r = 1$ )-Ansätze ergibt.

# Kapitel 2

## QCD-Summenregeln

Ein erprobtes, mächtiges Instrument der QCD ist die Operator-Produkt-Entwicklung (OPE), die es ermöglicht, über die Störungstheorie hinausgehend, Eigenschaften des physikalischen, nichtperturbativen QCD-Vakuums  $|\Omega\rangle$  zu berücksichtigen. Die Idee von Shifman, Vainshtein und Zakharov [SVZ 79] war es, die OPE auf Korrelationsfunktionen eichinvarianter Stromoperatoren anzuwenden und sich so der Meson-Resonanzregion von Seiten der asymptotischen Freiheit mit nichtperturbativen Korrekturen der Form  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$  zu nähern. Diese werden parametrisiert durch nicht-verschwindende Vakuumerwartungswerte wie das Gluon- und das Quark-Kondensat

$$\langle\Omega| : G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a : |\Omega\rangle \equiv \langle GG\rangle, \quad \langle\Omega| : \bar{q}q : |\Omega\rangle \equiv \langle\bar{q}q\rangle, \quad (2.1)$$

die im Perturbativen per Definition Null sind und somit den Zusammenbruch der asymptotischen Freiheit für kleiner werdende  $q^2$  erfassen. Ziel ist es, einen Überlappungsbereich zu finden zwischen dieser aus der asymptotisch freien Region kommenden Darstellung und einer bei kleinen Energien gültigen Dispersionsbeziehung in Abhängigkeit von Resonanzparametern wie der Mesonmasse, die auf diese Weise zu bestimmen sind.

Die Darstellung der QCD-Summenregeln in diesem Kapitel bezieht sich im wesentlichen auf Mesonen leichter Quarks, speziell das  $\rho$ -Meson. Als Übersichtsartikel zu den QCD-Summenregeln und deren Anwendungen in der Hadronphysik, auch im Hinblick auf Baryonen und Mesonen mit zumindest einem schweren Quark, seien [REI 85, REI 83] empfohlen. Eine Fülle weiterer Anwendungen findet sich in [NAR 89], während explizite Rechnungen speziell zum  $\rho$ -Meson in [PT 82] ausgeführt werden.

## 2.1 Korrelationsfunktion

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist der Strom:

$$j_\Gamma =: \bar{q}_i(x)\Gamma_{ij}q_j(x) : \quad \text{mit } \Gamma = 1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \dots \quad (2.2)$$

Im Fall des  $\rho \equiv \rho^0$ -Mesons wählt man  $\Gamma = \gamma^\mu$  und den Strom  $j^\mu$  mit den Quantenzahlen ( $I = 1, I_3 = 0, Y = 0$ ) des Quark-Antiquark-Systems  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ , aus dem sich das  $\rho$ -Meson im wesentlichen zusammensetzt:

$$j_\rho^\mu(x) = \frac{1}{2} : \bar{u}(x)\gamma^\mu u(x) - \bar{d}(x)\gamma^\mu d(x) : \quad (2.3)$$

Die Zweipunktkorrelationsfunktion, die durch einen Strom  $j^\mu$  induziert wird, ist die Fouriertransformierte des Vakuumerwartungswertes des zeitgeordneten Produktes von  $j^\mu(x)j_\mu(0)$ :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j^\mu(x) j^\nu(0) \} | \Omega \rangle \quad (2.4)$$

Aus der Erhaltung des Stroms  $j^\mu$  folgt, daß  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  transversal ist:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi_T(q^2) \quad , \\ \Pi_T(q^2) &= -\frac{i}{(D-1)q^2} \int d^Dx e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j^\mu(x) j_\mu(0) \} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aus der Cauchy-Integralformel für  $\Pi(q^2) \equiv \Pi_T(q^2)$  und der Wahl eines speziellen Integrationsweges, der die reelle Achse umgeht und im Unendlichen geschlossen wird, gewinnt man eine Spektraldarstellung, aus der man weitere durch Ableiten nach  $Q^2$  erhält. Im Fall des  $\rho$ -Mesons benutzt man:

$$-\frac{d\Pi(-Q^2)}{dQ^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\{\Pi(s)\}}{(s+Q^2)^2} \quad (2.6)$$

Aus dem Optischen Theorem folgt als Beziehung zwischen der Hadron-Produktionsrate  $\sigma$  und  $\text{Im}\{\Pi(q^2)\}$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{Hadronen}) = \frac{(4\pi\alpha)^2}{s} \text{Im}\{\Pi(q^2)\} \quad (2.7)$$

wobei in diesem Kapitel mit  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  die Feinstrukturkonstante bezeichnet wird und mit  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$  die starke Kopplung. Experimentell gemessen werden Produktionsraten im Verhältnis  $R$  zur Produktion von Myonpaaren:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (2.8)$$

Mit der Beziehung

$$R(s) := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi \text{Im}\{\Pi(s)\} \quad (2.9)$$



erhält man für (2.6) zu:

$$-\frac{d\Pi(-Q^2)}{dQ^2} = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+Q^2)^2} \quad . \quad (2.10)$$

Im Fall des  $\rho$ -Mesons betrachtet man das über der Energie  $\sqrt{s}$  aufgetragene Spektrum  $R(s) = R^{I=1}(s)$ , welches dominiert ist durch die Resonanz, die näherungsweise eine Lorentzkurve um die Masse des  $\rho$ -Mesons beschreibt. Man approximiert das Spektrum durch eine  $\delta$ -Funktion („narrow width“-Approximation) zuzüglich einem Kontinuum mit Schwelle  $s_0$  in Form einer  $\Theta$ -Funktion:

$$R(s) = \frac{12\pi^2 m_\rho^2}{f_\rho^2} \delta(s - m_\rho^2) + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \Theta(s - s_0) \quad . \quad (2.11)$$

Besitzt man also eine theoretisch begründete Darstellung von  $\Pi(q^2)$ , so lassen sich via Gleichung (2.10)  $f_\rho^2$  und  $m_\rho^2$  bestimmen. Im Kontext der QCD-Summenregeln, die nach ihren Entdeckern auch als SVZ-Summenregeln bezeichnet werden, erhält man  $\Pi(q^2)$  in Form einer  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ -Entwicklung, die aus der OPE gewonnen werden kann.

## 2.2 Operator-Produkt-Entwicklung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die auf Wilson [WIL 69] zurückgehende OPE in ihrer Anwendung auf Korrelationsfunktionen von Strömen leichter Quark-Antiquark-Systeme darzustellen.

Für das Produkt zweier beliebiger lokaler Feldoperatoren kann man folgende Entwicklung ansetzen:

$$A(x)B(0) = \sum_j C_j(x) N_j(x) \quad . \quad (2.12)$$

Hierbei bezeichnen die  $C_j$   $c$ -Funktionen, die für  $x \rightarrow 0$  singulär werden können und die  $N_j(x)$  Operatoren, die für  $x \rightarrow 0$  regulär sind. Einsetzen der Taylorentwicklung von  $N_j(x)$  in (2.12) liefert im Limes  $x^\mu \rightarrow 0$  in führender Ordnung nur Beiträge, die keinen Faktor  $x^\mu$  enthalten:

$$A(x)B(0) \stackrel{x^\mu \rightarrow 0}{\sim} \sum_n C_n(x) : \hat{O}_n(0) : \quad . \quad (2.13)$$

Dies ist die für kurze Distanzen gültige Wilsonsche Operator-Produkt-Entwicklung, die im Falle renormierbarer, wechselwirkender Theorien in allen Ordnungen der Störungstheorie existiert [SYM 97, ZIM 73]. In freien Theorien, die exakt skaleninvariant sind, wird ein lokaler Operator  $\hat{O}_n(x)$  bei Dilatationen transformiert gemäß

$$U^+(\lambda) \hat{O}_n(x) U(\lambda) = \lambda^{d(\hat{O}_n)} \hat{O}_n(\lambda x) \quad (2.14)$$

mit der kanonischen Operator-Dimension  $d(\hat{O})$  des Operators  $\hat{O}$ . Anwendung dieser Skalentransformation auf die Wilson-Entwicklung (2.13) liefert das Skalenverhalten der Wilson-Koeffizienten:

$$C_n(x) = x^{-\lambda_n} \quad \text{mit } \lambda_n = -d(\hat{O}_n) + d(A) + d(B) \quad . \quad (2.15)$$

Im Falle asymptotisch freier, wechselwirkender Theorien ist das Skalenverhalten der Wilson-Koeffizienten  $C_n(x)$  für  $x \rightarrow 0$  ebenfalls im wesentlichen durch (2.15) gegeben, allerdings mit von der Renormierungsgruppe vorhergesagten logarithmischen Korrekturen <sup>1</sup>.

Die Anwendung der Wilson-Entwicklung (2.13) auf die Korrelationsfunktion (2.4) liefert als Entwicklung im Fourierraum:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= -\frac{i}{(D-1)q^2} \int d^D x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j^\mu(x) j_\mu(0) \} | \Omega \rangle \\ &\stackrel{q^2 \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{l,k=0}^{\infty} \langle \Omega | : \hat{O}_{l,k}(0) : | \Omega \rangle \underbrace{\frac{-i}{(D-1)q^2} \int d^D x e^{iqx} C_{l,k}(x)}_{\tilde{C}_{l,k}(q^2)} \quad . \quad (2.16) \end{aligned}$$

$\{\hat{O}_{l,k}\}$  ist der Satz elementarer oder zusammengesetzter lokaler Operatoren mit Quantenzahlen des zu entwickelnden Produktes, geordnet nach steigender Massendimension  $2l$  und bei gleichem  $l$  durch willkürliches Abzählen  $k$ , beginnend mit  $\hat{O}_{0,0} = \mathbf{1}$ . Letzteres entspricht dem rein perturbativen Anteil der Entwicklung.

$\{\tilde{C}_{l,k}\}$  ist der Satz der Impulsraumkoeffizienten (Wilsonkoeffizienten) der Massendimension  $-(2l+2)$ , die perturbativ berechenbar sind. Sie haben die allgemeine Form:

$$\tilde{C}_{l,k}(q^2) = \frac{1}{(q^2)^{l+1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Potenzreihe in } g^2(\nu) \text{ mit von} \\ \text{ln}(-q^2) \text{ abhängigen Koeffizienten} \end{array} \right\}. \quad (2.17)$$

$\langle \Omega | : \hat{O}_{l,k}(0) : | \Omega \rangle \neq 0$  sind die Vakuumkondensate für skalare, eichinvariante Operatoren mit Quantenzahlen des Vakuums, deren Werte semi-empirisch zu ermitteln sind. Im Rahmen der OPE besteht keine Möglichkeit, diese nicht-perturbativen Größen theoretisch zu bestimmen.

Diese Reihenentwicklung kann bei geeigneter Dimension der Operatoren abgebrochen werden, da die Operatoren mit kleinster Massendimension bei nicht zu schweren Quarks die Reihe dominieren. Nach Abschätzung von [SVZ 79] genügt es hierbei,

<sup>1</sup>Eine ausführliche Darstellung findet sich beispielsweise in [STR 96].

$\mathbf{1}$	$d = 0$
$m\bar{q}_\alpha q_\alpha$ $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$	$d = 4$
$\bar{q}_\alpha \Gamma q_\alpha \bar{q}_\beta \Gamma q_\beta$ $\bar{q}_\alpha \Gamma (\lambda^a)_{\alpha\beta} q_\beta \bar{q}_\gamma \Gamma (\lambda^a)_{\gamma\delta} q_\delta$ $m\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^a}{2} q G_a^{\mu\nu}$ $f_{abc} G_a^{\mu\nu} G_{\nu\lambda}^b G_\mu^{c\lambda}$	$d = 6$

Tabelle 2.1: vollständiger Satz an eichinvarianten Operatoren mit nichtverschwindenden Vakuumerwartungswerten und Massendimension  $d \leq 6$

Terme bis zur Ordnung  $l \leq 2$  mitzunehmen. Da  $\Pi(q^2)$  eine meßbare physikalische Größe ist, müssen zudem die beitragenden Operatoren eichinvariant sein. Beispielsweise ergibt sich für die OPE des Stroms (2.2) bis zur Massendimension  $d = 4$  mit noch unbestimmten Wilsonkoeffizienten  $\tilde{C}_\mathbf{1} \equiv \tilde{C}_{0,0}, \tilde{C}_q \equiv \tilde{C}_{1,0}, \tilde{C}_G \equiv \tilde{C}_{1,1}$ , die allerdings Tabellen wie in [REI 85] entnommen werden können:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = \tilde{C}_\mathbf{1}(q^2) \mathbf{1} &+ \tilde{C}_q(q^2) \langle \Omega | : m\bar{q}q : | \Omega \rangle \\ &+ \tilde{C}_G(q^2) \langle \Omega | : G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a : | \Omega \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen der Entwicklung (2.16) in (2.10) erhält man die „Master“-Gleichung der QCD-Summenregeln

$$\frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+Q^2)^2} = -\frac{d}{dQ^2} \sum_{l,k=0}^\infty \tilde{C}_{l,k}(Q^2) \langle \Omega | : \hat{O}_{l,k}(0) : | \Omega \rangle \quad , \quad (2.19)$$

aus der sich die Mesonresonanzparameter gewinnen lassen.

## 2.3 SVZ-Entwicklung

Ziel dieses Abschnittes ist es, die wesentlichen Herleitungsschritte der SVZ-Entwicklung für die Korrelationsfunktion (2.4) des  $\rho$ -Mesonstroms (2.3) darzustellen. Ausgangspunkt ist die perturbative Entwicklung von  $\Pi_\rho(q^2)$ . Die Stromkorrelation (2.5) enthält, vom Standpunkt der elementaren Felder betrachtet, eine fermionische Vierpunktfunktion (mit paarweise identifizierten Raumzeitpunkten), deren führende Ordnung durch die unverbundenen Anteile gegeben ist. Die Rechnung erfolgt direkt im Minkowskischen. Die Anwendung des Wickschen Theorems [WIC 50] liefert als Beitrag

in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ :

$$\Pi_{\rho, \text{pert}}^{[0]}(q^2) = \text{---} \gamma^\mu \text{---} \begin{array}{c} \text{p} \\ \curvearrowright \\ u \\ \curvearrowleft \\ \text{p} - q \end{array} \gamma_\mu \text{---} + \text{---} \gamma^\mu \text{---} \begin{array}{c} \text{p} \\ \curvearrowright \\ d \\ \curvearrowleft \\ \text{p} - q \end{array} \gamma_\mu \text{---} \quad (2.20)$$

$$= \frac{i(\gamma^\mu)_{i,j}(\gamma_\mu)_{k,l}}{4(D-1)q^2} \int d^D x e^{iqx} \left\{ \langle 0 | T(u_{j,\alpha}(x) \bar{u}_{k,\beta}(0)) | 0 \rangle \langle 0 | T(u_{l,\beta}(0) \bar{u}_{i,\alpha}(x)) | 0 \rangle \right\} + (u \rightarrow d) \quad (2.21)$$

Mit der Darstellung des kontrahierten Terms

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(u_{i,\alpha}(x) \bar{u}_{j,\beta}(0)) | 0 \rangle &= i\delta_{\alpha,\beta} S_{ij}^{u,[0]}(x) \\ &= i\delta_{\alpha,\beta} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S_{ij}^{u,[0]}(p) e^{-ipx}; \quad S^{u,[0]}(p) \equiv S^{[0]}(p) = \frac{1}{\not{p}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ergibt sich dieser zu:

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho, \text{pert}}^{[0]}(q^2) &= -\frac{N_c i}{4(D-1)q^2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \text{tr} [\gamma^\mu S^{[0]}(p) \gamma_\mu S^{[0]}(p-q)] + (u \rightarrow d) \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + \frac{5}{3} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{u,d}^2}{q^2}\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + \text{const.} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{u,d}^2}{q^2}\right) \quad (2.23) \end{aligned}$$

Konstante Anteile werden weggelassen, da diese bei der später folgenden Boreltransformation verschwinden.

[REI 85, REI 83] folgend kann die Darstellung der nichtperturbativen Beiträge durch Modifikation der perturbativen Propagatoren gewonnen werden, so daß diese auch Effekte für kleine  $q^2$  berücksichtigen. Diagrammatisch wird die Modifikation des Fermionpropagators dargestellt durch:

$$\begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \quad \rightarrow \quad \text{---} \leftarrow \bullet \leftarrow \text{---} \\ \\ = \quad \text{---} \leftarrow \text{---} \quad + \quad \text{---} \times \quad \times \text{---} \quad . \end{array} \quad (2.24)$$

Die nichtperturbative Erweiterung ist getragen vom „ins Kondensat laufenden“ Quark. Diese wird im zweiten Schritt separiert vom perturbativen Anteil, der das Verhalten für große  $q^2$  beschreibt:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \times \times \text{---} &= \langle \Omega | : \bar{q}_{i,\alpha}(x) q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle \\
 &= \langle \Omega | : \bar{q}_{i,\alpha}(0) q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle + x^\mu \langle \Omega | : [\partial_\mu \bar{q}_{i,\alpha}(0)] q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle + \dots \quad .
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Weitere Terme der Entwicklung liefern keinen Beitrag zum Quark-Kondensatterm. Dieser folgt via (2.24) aus (2.20):

$$\Pi_{\rho, \bar{q}q}(q^2) = C_u \langle \bar{u}u \rangle + C_d \langle \bar{d}d \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{---} \times \times \text{---} + \text{---} \times \times \text{---} + (u \rightarrow d) \\
 &= -\frac{i}{4(D-1)q^2} (\gamma^\mu)_{i,j} (\gamma_\mu)_{k,l} \int d^D x e^{iqx} \\
 &\quad \cdot \left\{ \langle 0 | T(u_{j,\alpha}(0) \bar{u}_{k,\beta}(x)) | 0 \rangle \langle \Omega | : \bar{u}_{i,\alpha}(x) u_{l,\beta}(0) : | \Omega \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle 0 | T(u_{l,\beta}(0) \bar{u}_{i,\alpha}(x)) | 0 \rangle \langle \Omega | : \bar{u}_{k,\beta}(x) u_{j,\alpha}(0) : | \Omega \rangle \right\} + (u \rightarrow d) \\
 &= \frac{1}{4(D-1)q^2} \int d^D x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-i(p-q)x} \\
 &\quad \cdot \left\{ \langle \Omega | : \bar{u}_{i,\alpha}(x) u_{j,\alpha}(0) : | \Omega \rangle [\gamma^\mu S^{[0]}(p) \gamma_\mu]_{i,j} \right. \\
 &\quad \left. + \langle \Omega | : \bar{u}_{i,\alpha}(x) u_{j,\alpha}(0) : | \Omega \rangle [\gamma^\mu S^{[0]}(p) \gamma_\mu]_{i,j} \right\} + (u \rightarrow d) \quad .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Da nur Skalare nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte haben, gilt:

$$\langle \Omega | : \bar{q}_{i,\alpha}(0) q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{ij} A \quad . \tag{2.27}$$

Aus der Summation über Farb- und Spinorindizes folgt:

$$A = \frac{1}{12} \langle \Omega | : \bar{q}(0) q(0) : | \Omega \rangle \equiv \frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \quad . \tag{2.28}$$

Der nächste Term der Entwicklung (2.25)

$$\langle \Omega | : [\partial_\mu \bar{q}_{i,\alpha}(0)] q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle \quad (2.29)$$

ist im Gegensatz zum Quark-Kondensat, auf das dieser Ausdruck zurückgeführt werden soll, nicht eichinvariant. Die Lösung dieses Problems besteht darin, eine feste Eichung zu wählen, die (Fock-Schwinger)-Fixpunkt-Eichung:

$$x^\mu A_\mu(x) = 0 \quad . \quad (2.30)$$

Diese ermöglicht es, das Eichfeld  $A_\mu$  nach dem Gluon-Feldtensor  $G_{\mu\nu}$  und seinen kovarianten Ableitungen zu entwickeln:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \int_0^1 d\alpha \alpha G_{\rho\mu}^a(\alpha x) x^\rho \\ &= \frac{1}{2} x^\rho G_{\rho\mu}^a(0) + \frac{1}{3} x^\alpha x^\rho D_\alpha G_{\rho\mu}^a(0) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Entsprechend kann auch bei der Entwicklung der Quarkfelder die gewöhnliche Ableitung  $\partial^\mu$  durch die kovariante  $D^\mu$  ersetzt werden [PT 82, NAR 89]:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | : [\partial_\mu \bar{q}_{i,\alpha}(0)] q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle &\rightarrow \langle \Omega | : [D_\mu \bar{q}_{i,\alpha}(0)] q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{ij} B \quad . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Unter Ausnutzung der Bewegungsgleichung

$$[i\gamma^\mu D_\mu - m] q(x) = 0 \quad (2.33)$$

läßt sich nun zeigen:

$$B = \frac{i}{12D} m \langle \bar{q}q \rangle \quad . \quad (2.34)$$

(2.28) und (2.34) liefern als relevanten Beitrag zum Quark-Kondensat:

$$\langle \Omega | : \bar{q}_{i,\alpha}(x) q_{j,\beta}(0) : | \Omega \rangle = \frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{\alpha\beta} \left[ \delta_{ij} + \frac{i}{D} m x_\mu (\gamma^\mu)_{ij} \right] + \dots \quad . \quad (2.35)$$

Hierbei werden neben Beiträgen zu höherdimensionalen Kondensaten Terme der Ordnung  $\frac{m^2}{q^2} \langle \bar{q}q \rangle$  vernachlässigt. Den Quark-Kondensat-Beitrag erhält man durch Einsetzen von (2.35) in (2.26) und Ausführung der Integration:

$$\Pi_{\rho, \bar{q}q}(q^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(q^2)^2} \left[ m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle \right] \quad . \quad (2.36)$$

Ausgangspunkt für die Herleitung der weiteren Entwicklungsterme ist der perturbative Beitrag in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ . Betrachtet wird der Einfachheit halber die Korrelationsfunktion  $\Pi(q^2)$  des Stroms  $j^\mu =: \bar{q}\gamma^\mu q$ : leichter Quarks. Die Korrelationsfunktion des

$\rho$ -Mesonstroms ergibt sich hieraus durch  $\Pi_\rho(q^2) = 2\Pi(q^2)$ :

$$\Pi_{pert}^{[1]}(q^2) =$$

$$(2.37)$$

Unter Ausnutzung der Darstellung der Eichfeldkontraktion

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y))|0\rangle &= i\delta_{ab}D_{\mu\nu}^{[0]}(x-y) \\ &= i\delta_{ab}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}D_{\mu\nu}^{[0]}(k)e^{ik(x-y)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit

$$D_{\mu\nu}^{[0]}(k) = \frac{1}{k^2 + i\eta} \left\{ -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\eta} \right\} \quad (2.39)$$

ergibt sich der perturbative Zwei-Loop-Beitrag zu:

$$\begin{aligned} \Pi_{pert}^{[1]}(q^2) &= \frac{g^2}{(D-1)q^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} D_{\lambda\rho}^{[0]}(k) \\ &\cdot \left\{ \text{tr} \left[ S^{[0]}(p)\gamma^\lambda S^{[0]}(p-k)\gamma_\mu S^{[0]}(p-k+q)\gamma^\rho S^{[0]}(p+q)\gamma^\mu \right] \right. \\ &\quad + \text{tr} \left[ S^{[0]}(p)\gamma^\rho S^{[0]}(p-k)\gamma^\lambda S^{[0]}(p)\gamma_\mu S^{[0]}(p+q)\gamma^\mu \right] \\ &\quad \left. + \text{tr} \left[ S^{[0]}(p-q)\gamma_\mu S^{[0]}(p)\gamma^\rho S^{[0]}(p-k)\gamma^\lambda S^{[0]}(p)\gamma^\mu \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Ausführung der Integration, bei der aufgrund der Eichparameterunabhängigkeit die Feynmanzeichnung gewählt werden kann, liefert bis auf die Terme, die bei der später folgenden Boreltransformation verschwinden:

$$\Pi_{pert}^{[1]}(q^2) = -\frac{\alpha_s}{16\pi^3} \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) . \quad (2.41)$$

Die nichtperturbative Modifikation erhält man, indem die Gluonlinie in analoger Weise zum Fermion-Propagator (2.24) modifiziert wird

$$(2.42)$$

mit dem „ins Kondensat laufenden“ Gluon:

$$\text{---}\times\text{---} \quad \times\text{---} = \langle \Omega | : A_\lambda^a(y) A_\rho^a(z) : | \Omega \rangle \quad . \quad (2.43)$$

Als nichtperturbative Modifikation von  $\Pi_{pert}^{[1]}(q^2)$ , die vom Gluon-Kondensat getragen wird, ergibt sich z.B. aus dem ersten Zwei-Loop-Graphen in (2.37):

$$= \text{---}\gamma^\mu \text{---} + \text{---}\gamma^\mu \text{---} + (\dots) \quad . \quad (2.44)$$

Hierbei steht (...) für nichtperturbative Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , die ebenfalls vom perturbativen Anteil separiert werden und Kondensatbeiträge der Dimension  $d = 6$  enthalten, auf die später eingegangen wird. Insgesamt stellt sich der Gluon-Kondensat-Beitrag dar als:

$$\Pi_{GG}(q^2) =$$

$$\text{---}\gamma^\mu \text{---} + \text{---}\gamma^\mu \text{---} + \text{---}\gamma^\mu \text{---} \quad . \quad (2.45)$$

Dieser ergibt sich ähnlich wie der perturbative Beitrag (2.40) mit dem Unterschied, daß das  $A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)$ -Paar nicht kontrahiert wird:

$$\begin{aligned} \Pi_{GG}(q^2) = & -\frac{ig^2}{8(D-1)q^2} \int d^D y \int d^D z \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} \langle \Omega | : A_\lambda^a(y) A_\rho^a(z) : | \Omega \rangle \\ & \cdot \left\{ \text{tr} \left[ \gamma^\mu S^{[0]}(p_1) \gamma^\rho S^{[0]}(p_2) \gamma_\mu S^{[0]}(p_3) \gamma^\lambda S^{[0]}(p_1 - q) \right] e^{i(q-p_1+p_3)y} e^{i(p_1-p_2)z} \right. \\ & \left. + \text{tr} \left[ \gamma^\mu S^{[0]}(p_1) \gamma_\mu S^{[0]}(p_2) \gamma^\rho S^{[0]}(p_3) \gamma^\lambda S^{[0]}(p_1 - q) \right] e^{i(q-p_1+p_3)y} e^{i(p_2-p_3)z} \right\} \end{aligned}$$



$$+tr \left[ \gamma^\mu S^{[0]}(p_1 + q) \gamma^\lambda S^{[0]}(p_3) \gamma^\rho S^{[0]}(p_2) \gamma_\mu S^{[0]}(p_1) \right] e^{i(q+p_1-p_3)y} e^{i(p_3-p_2)z} \Big\} . \quad (2.46)$$

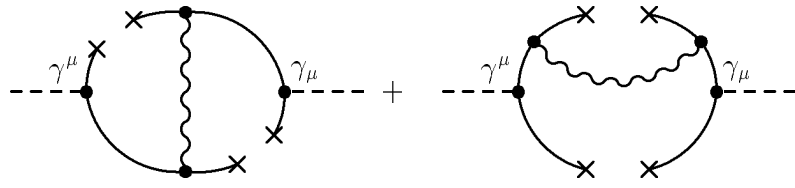
Mittels (2.31) ergibt sich der Vakuumerwartungswert zu:

$$\langle \Omega | A_\lambda^a(x) A_\rho^a(y) | \Omega \rangle = \frac{1}{4D(D-1)} y^\nu z^\varsigma [g_{\nu\varsigma} g_{\lambda\rho} - g_{\nu\rho} g_{\lambda\varsigma}] \langle GG \rangle + \dots \quad (2.47)$$

Einsetzen von (2.47) in (2.46) liefert nach Ausführung der Integration den Gluon-Kondensat-Beitrag

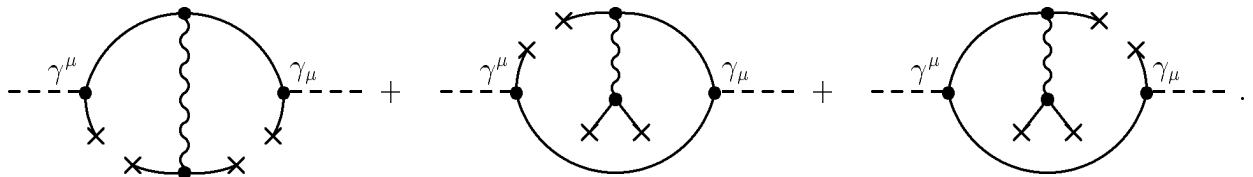
$$\Pi_{GG}(q^2) = \frac{1}{48(q^2)^2} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle , \quad (2.48)$$

der scheinbar einen Beitrag in 1. Ordnung in  $\alpha_s$  liefert. In Wahrheit wird  $\alpha_s$  vermöge des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus „aufgegessen“. Bisher sind nur Kondensatbeiträge bis zur Massendimension  $d = 4$  berücksichtigt worden. In  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  treten zudem noch ( $d = 6$ )-Kondensate auf, von denen zunächst das Vier-Fermion-Kondensat behandelt wird. Diagrammatisch stellen sich die Beiträge dar als:



$$(2.49)$$

zuzüglich der invertierten Diagramme. Zum anderen sind dies die Graphen:



$$(2.50)$$

In den Graphen (2.49) ersetzt man mittels der „saturation“-Hypothese [SVZ 79]

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | : \bar{q}_{\alpha a}^A(x) \bar{q}_{\beta b}^B(y) q_{\gamma c}^C(z) q_{\delta d}^D(t) : | \Omega \rangle \\ & \simeq \langle \Omega | : \bar{q}_{\alpha a}^A(x) q_{\delta d}^D(t) : | \Omega \rangle \langle \Omega | : \bar{q}_{\beta b}^B(y) q_{\gamma c}^C(z) : | \Omega \rangle \\ & - \langle \Omega | : \bar{q}_{\alpha a}^A(x) q_{\gamma c}^C(z) : | \Omega \rangle \langle \Omega | : \bar{q}_{\beta b}^B(y) q_{\delta d}^D(t) : | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

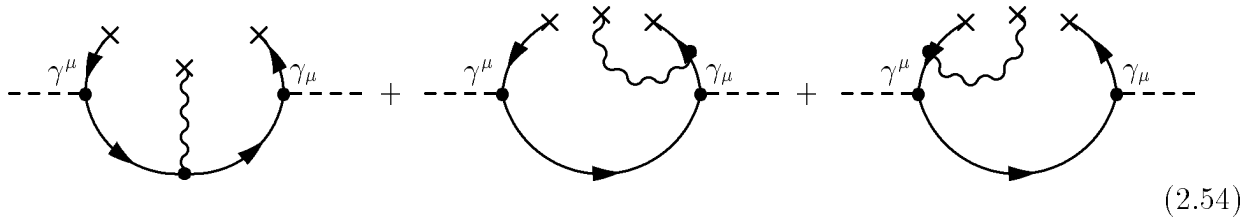
und erhält bei Vernachlässigung der Quarkmassen den Beitrag:

$$\Pi_{\bar{q}q q q}^{(1)}(q^2) = \frac{8}{9} \pi \alpha_s \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{(q^2)^3} . \quad (2.52)$$

Die Diagramme (2.50) und deren Invertierte hingegen lassen sich nicht in bisheriger Art und Weise mit perturbativen Methoden berechnen, da der Impuls des Gluonpropagators Null ist. Stattdessen generiert man sowohl die Beiträge (2.50) zum Vier-Fermion-Kondensat als auch die Beiträge zum gemischten Kondensat (2.54) durch Entwicklung des ins Kondensat laufenden Quarks (2.25) bis zur vierten Ordnung unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen in den niedriger-dimensionalen Kondensaten. Nach längerer Rechnung erhält man diesen zweiten Vier-Fermion-Kondensat-Beitrag zu:

$$\Pi_{\bar{q}q\bar{q}q}^{(2)}(q^2) = -\frac{16}{81} \frac{\alpha_s \pi}{(q^2)^3} \langle \bar{u}u \rangle^2 \quad . \quad (2.53)$$

Die Beiträge des gemischten Kondensats, die sich graphisch darstellen als



(2.54)

addieren sich hierbei zusammen mit deren Invertierten zu Null. Der ( $d = 6$ )-Beitrag lautet damit insgesamt:

$$\Pi_{\bar{q}q\bar{q}q}(q^2) = \frac{56}{81} \alpha_s \pi \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{(q^2)^3} \quad . \quad (2.55)$$

Unter Berücksichtigung aller Beiträge ergibt sich für die Korrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesons mit  $q^2 \rightarrow Q^2 = -q^2$ :

$$\begin{aligned} \Pi_\rho(-Q^2) &= -\frac{1}{8\pi^2} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \ln Q^2 + \frac{1}{2} [m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle] \frac{1}{Q^4} \\ &+ \frac{1}{24} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle \frac{1}{Q^4} - \frac{112}{81} \alpha_s \pi \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{Q^6} + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.56)$$

## 2.4 Bestimmung der $\rho$ -Mesonmasse nach SVZ

Die „Master“-Gleichung (2.19) mit (2.56) als OPE ergibt nun die gewünschte Summenregel für das  $\rho$ -Meson:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+Q^2)^2} &= \frac{3}{2Q^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 8\pi^2 [m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle] \frac{1}{Q^4} \right. \\ &\left. + \frac{2\pi^2}{3} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle \frac{1}{Q^4} - \frac{896}{27} \pi^3 \alpha_s \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{Q^6} + \dots \right\} \quad . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die rechte Seite ist eine gute Näherung für große  $Q^2$ , während die linke Seite Gültigkeit besitzt im Bereich kleiner  $Q^2$ , in dem die Dominanz des Spektrums durch die

$\rho$ -Meson-Resonanz gegeben ist. Ziel ist die Fortsetzung der beiden Lösungen in einen gemeinsamen Überlappungsbereich, der etwa im Bereich der  $\rho$ -Mesonmasse  $Q^2 \simeq 1\text{GeV}^2$  liegt. Nach [SVZ 79] gelingt dies durch die Boreltransformation:

$$\hat{B} \equiv \lim_{\substack{Q^2 \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty \\ Q^2/N = M^2 = \text{endl.}}} \frac{1}{\Gamma(N)} (-Q^2)^N \left( \frac{d}{dQ^2} \right)^N . \quad (2.58)$$

Mit

$$\hat{B}(Q^2 + s)^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(M^2)^\beta} e^{-s/M^2} \quad (2.59)$$

ergibt diese angewandt auf die Master-Gleichung (2.57):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds R(s) e^{-s/M^2} &= \frac{3}{2} M^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 4\pi^2 [m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle] \frac{1}{M^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{3} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle \frac{1}{M^4} - \frac{448}{81} \pi^3 \alpha_s \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{M^6} + \dots \right\} . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die linke Seite von (2.60) ist offenbar dominiert durch das  $\rho$ -Meson, während die Entwicklung der rechten Seite dadurch verbessert wird, daß höhere Terme der  $\frac{1}{(M^2)^\beta}$ -Entwicklung mit  $\frac{1}{\Gamma(\beta)}$  unterdrückt werden.

Die Kondensatwerte entnimmt man beispielsweise [REI 83]. Das Gluon-Kondensat, das aus dem Charmoniumspektrum gewonnen wird, ist angegeben mit

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle \simeq (340 \text{ MeV})^4 . \quad (2.61)$$

Für das Quark-Kondensat, das über die Strom-Algebra-Relation

$$(m_u + m_d) \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -m_\pi^2 f_\pi^2 \quad (2.62)$$

mit der Pionzerfallskonstante  $f_\pi$  und der Pionmasse  $m_\pi$  bestimmt wird, findet man:

$$\begin{aligned} m \langle \bar{q}q \rangle &\simeq -(100 \text{ MeV})^4 \text{ mit } m = m_u, m_d; \quad q = u, d \quad , \\ \langle \bar{u}u \rangle &\simeq -(250 \text{ MeV})^3 . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mit diesen Werten schreibt sich (2.60)

$$\int_0^\infty ds R(s) e^{-s/M^2} = \frac{3}{2} M^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \frac{0.036 \text{ GeV}^4}{M^4} - \frac{0.025 \text{ GeV}^6}{M^6} \right\} , \quad (2.64)$$

aus der man eine zweite Summenregel durch Ableiten nach  $M^2$  erhält:

$$\int_0^\infty ds s R(s) e^{-s/M^2} = \frac{3}{2} M^4 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} - \frac{0.036 \text{ GeV}^4}{M^4} + \frac{0.050 \text{ GeV}^6}{M^6} \right\} . \quad (2.65)$$

Zunächst ist auffällig, daß für  $M^2 \simeq (1\text{GeV})^2$  die Terme  $M^{-4}$  und  $M^{-6}$  einen ähnlich großen Beitrag liefern. Dies deutet allerdings keinen Abbruch der Entwicklung an,

sondern diese Anomalität ist ein Spezialfall der Ordnung  $M^{-6}$  und wiederholt sich nicht in höheren Ordnungen [SVZ 79]. Setzt man  $R(s)$  durch die erweiterte „narrow width“-Approximation (2.11) an und teilt nach Integration (2.65) durch (2.64), so folgt als Ausdruck für die Resonanzmasse des  $\rho$ -Mesons:

$$m_\rho^2 = M^2 \frac{\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{s_0}{M^2}\right) e^{-s_0/M^2}\right] - \frac{0.036 \text{ GeV}^4}{M^4} + \frac{0.050 \text{ GeV}^6}{M^6}}{\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \left[1 - e^{-s_0/M^2}\right] + \frac{0.036 \text{ GeV}^4}{M^4} - \frac{0.025 \text{ GeV}^6}{M^6}} \quad . \quad (2.66)$$

Offenbar ist  $m_\rho^2$  relativ unabhängig von der exakten Wahl der laufenden Kopplung

$$\alpha_s = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)} \quad . \quad (2.67)$$

Deren Auswertung für  $N_F = 6$  an der Stelle  $M^2 \simeq (1\text{GeV})^2$  mit  $\Lambda^2 \simeq (287\text{MeV})^2$  ergibt diese zu  $\alpha_s \simeq 0.7$ . Für die Kontinuumsschwelle  $s_0$  wird den experimentellen Daten von  $R(s)$  der  $e^+e^-$ -Annihilation der Wert  $s_0 \simeq 1.5\text{GeV}^2$  entnommen.

Als Stabilitätsforderung gilt, daß sich die  $\rho$ -Mesonmasse  $m_\rho$  in Abhängigkeit von  $M^2$  über einen gewissen Bereich, der als Überlappungsbereich der „Master“- Gleichung gedeutet wird, als konstant erweist. Um einen Eindruck von dieser Stabilitätsforderung zu bekommen, wird  $m_\rho$  als Funktion von  $M^2$  für unterschiedliche Werte der Kontinuumsschwelle  $s_0$  aufgetragen.

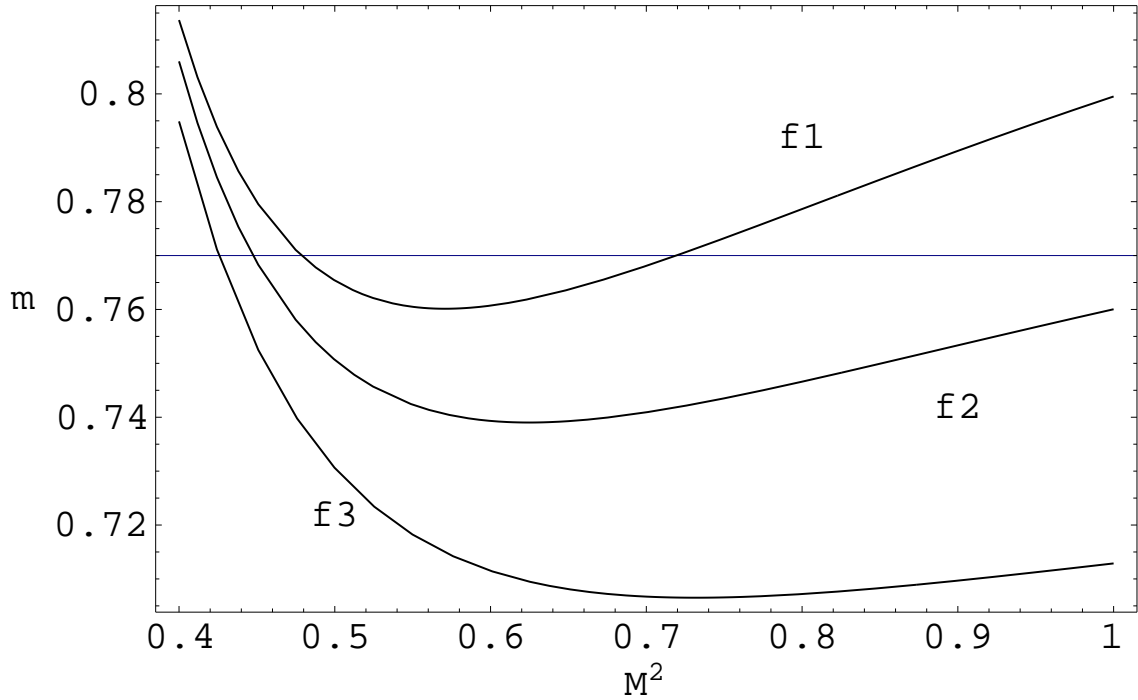


Abb.2.1:  $m \equiv m_\rho$  als Funktion von  $M^2$  skaliert in  $\Lambda^2$  für unterschiedliche Werte der Kontinuumschwelle  $s_0$ :

f1:  $s_0 = 1.75 \text{ GeV}^2$ , f2:  $s_0 = 1.5 \text{ GeV}^2$ , f3:  $s_0 = 1.25 \text{ GeV}^2$ .

Die experimentell bestimmte Masse des  $\rho$ -Mesons  $m_\rho \approx 770 \text{ MeV}$  ist als Vergleichswert eingetragen.

Man erkennt, daß sich  $m_\rho$  für  $s_0 \simeq 1.5 \text{ GeV}^2$  im Bereich  $M^2 \in [0.6, 0.8] \text{ GeV}^2$  als konstant ergibt zu:

$$m_\rho \simeq 745 \text{ MeV} \quad . \quad (2.68)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (2.64) erhält man noch für das  $f_\rho^2$  von (2.11):

$$\frac{f_\rho^2}{4\pi} \simeq 2.2 \quad . \quad (2.69)$$

(2.68) ist eine recht gute Näherung des der Literatur [CAS 98] entnommenen experimentellen Werts:

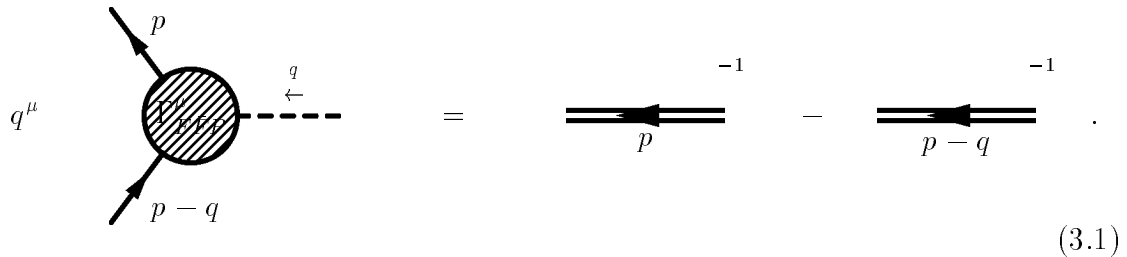
$$m_\rho \approx (770 \pm 0.8) \text{ MeV} \quad . \quad (2.70)$$

Abschließend sei angemerkt, daß man auf ähnliche Art und Weise die  $I = 0$ -Ströme  $j_\omega^\mu = \frac{1}{2} : \bar{u}\gamma^\mu u + \bar{d}\gamma^\mu d :$  und  $j_\Phi^\mu = \frac{1}{3} : \bar{s}\gamma^\mu s :$  behandeln kann, die mit dem  $\omega$ - und  $\Phi$ -Meson korrespondieren. Zur Bestimmung der  $A_1$ -Mesonmasse hat man den Isospin  $I = 1$  Axialstrom  $j_{A_1}^\mu = \frac{1}{2} : \bar{u}\gamma^\mu \gamma_5 u - \bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 d :$  zu betrachten und wird so zu einer Summenregel geführt, die der des  $\rho$ -Mesons sehr ähnlich ist.

# Kapitel 3

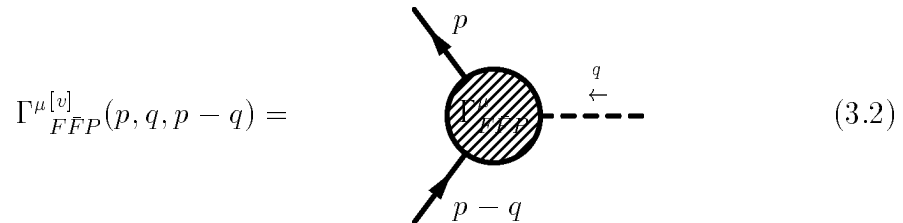
## Der Quark-Photon-Vertex

Die Ward-Takahashi-Identitäten (WTI) der QED sind exakte Beziehungen zwischen (1 PI)-Vertex-Funktionen und Propagatoren, die aus der Eichinvarianz der QED folgen, gültig in allen Ordnungen der perturbativen Entwicklung [RYD 85]. Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung des Quark-Photon-Vertex in der systematisch erweiterten Störungstheorie bis zur ersten Ordnung in der starken Kopplung  $g^2$ , der die Ward-Takahashi-Identität erfüllt:




$$\Gamma_{FFP}^{\mu}(p, q, p - q) = S(p) - S(p - q) \quad (3.1)$$

Mit dem Index  $[v]$  werden die vollen Vertizes gekennzeichnet. Demnach bezeichnen



$$\Gamma_{FFP}^{\mu[v]}(p, q, p - q) = \text{diagram} \quad (3.2)$$

den vollen Quark-Photon-Vertex und



$$S^{[v]}(p) = \text{diagram} \quad (3.3)$$

den vollen Fermion-Propagator.

Die Erhaltung der WTI durch den Quark-Photon-Vertex gewährleistet die Erfüllung dreier Randbedingungen durch die hadronische Vakuumpolarisation des Photons:

$$(e_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \Pi^{\mu\nu[v]}(q) = (e_0 \nu_0^\varepsilon)^2 Q_f^2 \Pi_{(f)}^{\mu\nu[v]}(q)$$



## 3.1 Randbedingungen

### 3.1.1 Perturbative Divergenz der Vakuumpolarisation

Die Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie erfordert, daß die perturbative Divergenz, die nachfolgend bis Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$  berechnet wird, durch  $\Pi^{\mu\nu[1,1]}(q)$  nicht verletzt ist. Die Berechnung des Ein-Loop-Beitrags mit  $m_f's = 0$

$$\Pi_T^{[0]pert}(q^2) = \frac{Q_f^2 N_c}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \text{tr} \left[ \gamma^\mu S^{[0]}(p) \gamma^\mu S^{[0]}(p-q) \right] \right\}$$

$$= \text{Diagram (3.9)}$$

$$(3.9)$$

$$(3.10)$$

liefert im Regularisierungsschema  $MS$  den divergenten Anteil:

$$\Pi_T^{[0]div}(q) = \frac{Q_f^2 N_c}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} q^2 \frac{1}{\varepsilon} . \quad (3.11)$$

Aus dem Zwei-Loop-Beitrag mit  $m_f's = 0$

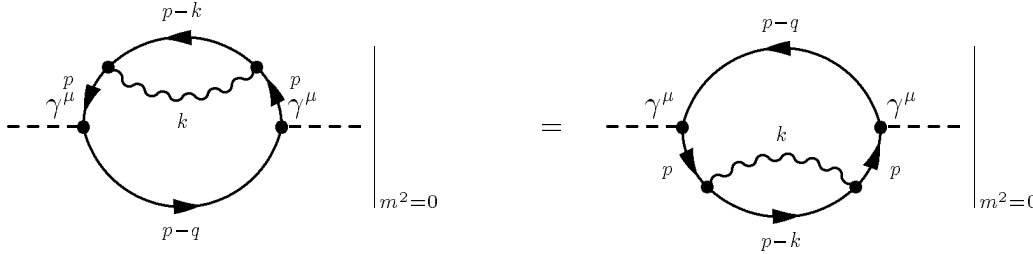
$$\begin{aligned} \Pi_T^{[1]pert} = & \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} D^{[0]\lambda\rho}(k) \\ & \cdot \left\{ \text{tr} \left[ S^{[0]}(p) \gamma^\lambda S^{[0]}(p-k) \gamma^\mu S^{[0]}(p-k+q) \gamma^\rho S^{[0]}(p+q) \gamma^\mu \right] \right. \\ & + \text{tr} \left[ S^{[0]}(p) \gamma^\rho S^{[0]}(p-k) \gamma^\lambda S^{[0]}(p) \gamma^\mu S^{[0]}(p+q) \gamma^\mu \right] \\ & \left. + \text{tr} \left[ S^{[0]}(p-q) \gamma^\mu S^{[0]}(p) \gamma^\rho S^{[0]}(p-k) \gamma^\lambda S^{[0]}(p) \gamma^\mu \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \text{Diagram (3.12)}$$

$$(3.12)$$

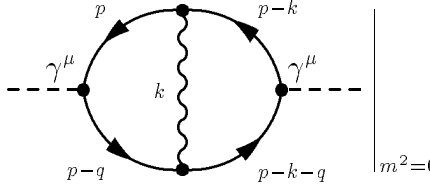
erhält man die Divergenz der Kopplungsordnung  $e_0^2 g_0^2$ . Die Propagator-Insertion ergibt mit endlichen ( $m^2 = 0$ )-Beiträgen in Abhängigkeit vom QCD-Eichparameter  $\xi$ :





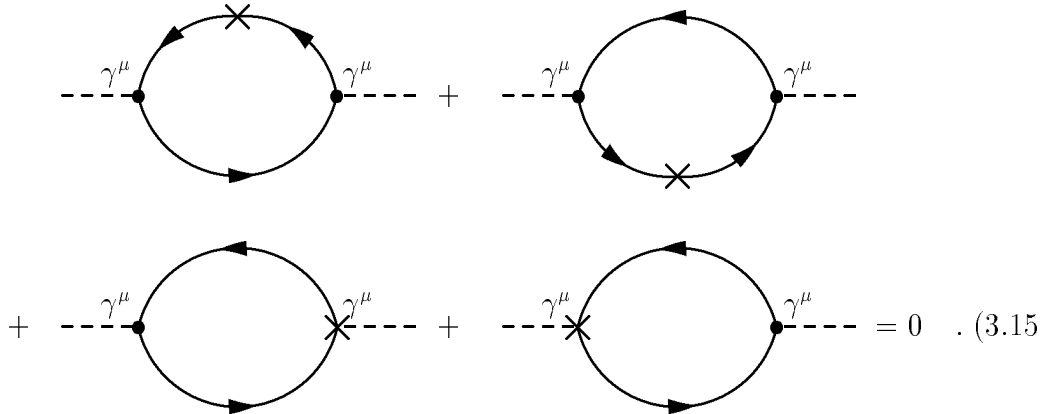
$$\begin{aligned}
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\rho\lambda} - (1-\xi) \frac{k^\rho k^\lambda}{k^2} \right) \frac{\text{tr} \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\lambda (\not{p} - \not{k}) \gamma^\rho \not{p} \gamma^\mu (\not{p} - \not{q}) \}}{[p^2]^2 k^2 (p-q)^2 (p-k)^2} \\
 &= -\frac{Q_f^2}{3-2\varepsilon} \frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{(q^2)^{1-2\varepsilon}}{\xi (4\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{8(-1+\varepsilon)^3 \Gamma(1-\varepsilon)^3 \Gamma(-1+2\varepsilon)}{\varepsilon \Gamma(3-3\varepsilon)} . \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Die Vertex-Insertion liefert den Beitrag:



$$\begin{aligned}
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\rho\lambda} - (1-\xi) \frac{(p-k)^\rho (p-k)^\lambda}{(p-k)^2} \right) \\
 &\quad \frac{\text{tr} \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{k} \gamma^\mu (\not{k} - \not{q}) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{q}) \}}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2 (p-k)^2} \\
 &= \frac{Q_f^2}{3-2\varepsilon} \frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{(q^2)^{1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} 4(-1+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon)^3 \right. \\
 &\quad \left( \frac{\varepsilon(3-2\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)^2}{\Gamma(2-2\varepsilon)^2} - \frac{4(-4+6\varepsilon+\varepsilon^2) \Gamma(-1+2\varepsilon)}{\Gamma(3-3\varepsilon)} \right) - 48\zeta(3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
 &\quad \left. + (1-\xi) \frac{16(-1+\varepsilon)^3 \Gamma(1-\varepsilon)^3 \Gamma(-1+2\varepsilon)}{\varepsilon \Gamma(3-3\varepsilon)} \right\} . \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Graphen mit Countertermen niedrigerer Ordnung ergeben sich aufgrund der Erhaltung der WTI zusammen zu Null:



$$+ \text{---} \gamma^\mu \text{---} + \text{---} \gamma^\mu \text{---} + \text{---} \gamma^\mu \text{---} + \text{---} \gamma^\mu \text{---} = 0 . \quad (3.15)$$

An dieser Stelle ist zu betonen, daß in Landau-Eichung sowohl das DS-Funktional des inversen Quark-Propagators als auch das des Quark-Photon-Vertex bei verschwindenden Fermionmassen keine perturbativen Divergenzen ausbildet, woraus folgt, daß in Landau-Eichung die Counterterm-Graphen für sich genommen verschwinden. Insgesamt erhält man als masseunabhängigen Anteil zur Photon-Selbstenergie einen Beitrag, der, wie für ein abelsches Eichfeld zu erwarten, zum einen eichunabhängig ist und zum anderen keine Divergenz der Form  $\frac{1}{\varepsilon} \ln\left(\frac{q^2}{\nu^2}\right)$  ausbildet, welche nicht durch einen lokalen Counterterm beseitigt werden könnte <sup>1</sup>:

$$\Pi_T^{[1]}(q^2)|_{m^2=0} = \frac{q^2}{(4\pi)^4} Q_f^2 \frac{N_c^2 - 1}{2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} + 4 \left( -\gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{q^2}{\nu^2}\right) \right) + \frac{1}{3} (55 - 48\zeta(3)) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] . \quad (3.16)$$

Zudem ist zu beachten, daß sich in  $\Pi_T^{[1]}(q^2)|_{m^2=0}$  zufälligerweise die  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ -Divergenzen gegenseitig wegheben.

### 3.1.2 Masselosigkeit des Photons

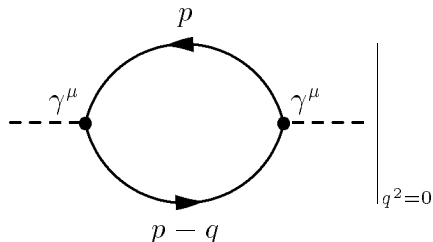
In diesem Abschnitt wird die Erhaltung der Masselosigkeit des Photons durch den perturbativen Beitrag zur hadronischen Vakuumpolarisation bei massiven Fermionpropagatoren bis zur Ordnung  $g_0^2$  nachgerechnet. Der Flavour-Index wird dabei unterdrückt. Aus der Invertierung der Dyson-Schwinger-Gleichung des inversen Photonpropagators gewinnt man als Darstellung des vollen Propagators in Abhängigkeit von seiner Selbstenergie:

$$D^{\mu\nu[v]}(q^2) = \left( \delta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{1}{q^2 + \Pi_T^{[v]}(q^2)} + \frac{1}{q^2} \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} . \quad (3.17)$$

Demnach garantiert

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \Pi_T^{[v]}(q^2) = 0 \quad (3.18)$$

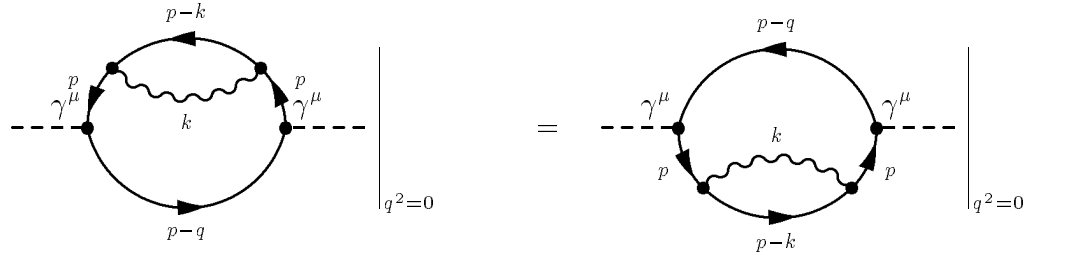
die Masselosigkeit des Photons, deren Erfüllung auf Ein-Loop-Niveau leicht nachzuweisen ist:



$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \hline \end{array} \right|_{q^2=0} = \frac{Q_f^2 N_c}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + m} \right\} = 0 . \quad (3.19)$$

Auf Zwei-Loop-Niveau sind wiederum zwei Beiträge zu berechnen. Als Beitrag zu  $\Pi_T^{[1]}(0)$ , der sich aufgrund der Propagator-Insertion ergibt, ist zu berechnen:

<sup>1</sup>Eine sehr ausführliche Darstellung der Rechnungen für  $\xi = 0$  findet man in [IZ 80].



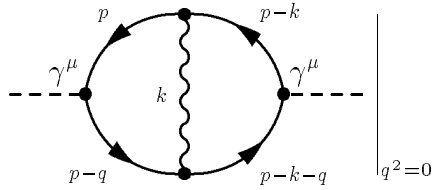
$$\begin{aligned}
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - (1-\xi) \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} \\
 &\quad \cdot \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + m} \right\} \\
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[ \frac{\text{Tr}_{pert}^{P_1}(p, k, q=0)}{[p^2 + m^2]^3 k^2 [(p-k)^2 + m^2]} \right. \\
 &\quad \left. - (1-\xi) \frac{\text{Tr}_{pert}^{P_2}(p, k, q=0)}{[p^2 + m^2]^3 [k^2]^2 [(p-k)^2 + m^2]} \right] \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

mit den Spuren

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{pert}^{P_1}(p, k, q=0) &= 4D^2 m^4 + m^2 \left( 4(2-D)(2+D)(pk) + 8(-2-2D+D^2)p^2 \right) \\
 &\quad + 4(2-D)(-2+D)(pk)p^2 + 4(-2+D)^2(p^2)^2 \quad , \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_{pert}^{P_2}(p, k, q=0) &= 4Dm^4 k^2 - m^2 \left( -4(2+D)(pk)k^2 + 8(2+d)(pk)^2 + 8(1-D)p^2 k^2 \right) \\
 &\quad - 4(2-D)k^2(pk)p^2 - 8(-2+D)(pk)^2 p^2 - 4(2-D)k^2(p^2)^2 \quad . \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Diese und alle weiteren in dieser Arbeit benötigten Spuren sind mit dem unter *Mathematica* implementierten Programm *Tracer.m* überprüft worden, das man als Freeware-Version von der Homepage *Mathematica.com* beziehen kann. Der Zwei-Loop ( $q=0$ )-Beitrag, der sich aus der Vertex-Insertion ergibt, lautet:



$$\begin{aligned}
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - (1-\xi) \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} \\
 &\quad \cdot \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} + m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p} + m} \right\} \\
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[ \frac{\text{Tr}_{pert}^{V_1}(p, k, q=0)}{[p^2 + m^2]^2 k^2 [(p-k)^2 + m^2]^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$-(1 - \xi) \frac{\text{Tr}_{pert}^{V_2}(p, k, q = 0)}{[p^2 + m^2]^2 [k^2]^2 [(p - k)^2 + m^2]^2} \quad (3.23)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{pert}^{V_1}(p, k, q = 0) &= m^4 4D(2 - D) \\ &+ m^2 \left( -4(D - 2)^2 k^2 + 32(pk) - 16D(pk) + 8D^2(pk) - 32p^2 + 8D(2 - D)p^2 \right) \\ &+ 16(D - 2)(pk)^2 - 4(D - 4)(D - 2)p^2 k^2 - 16Dp^2(pk) + 8D^2p^2(pk) + 4D(2 - D)(p^2)^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{pert}^{V_2}(p, k, q = 0) &= -m^4 4(-2 + D)k^2 \\ &- m^2 \left( 4D(k^2)^2 + 8(2 + D)(pk)k^2 + 32(pk)^2 + 8(-2 + D)p^2 k^2 \right) \\ &- 4(-2 + D)(k^2)^2 p^2 - 8(2 - D)k^2(pk)p^2 - 4(-2 + D)k^2(p^2)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mittels der in Anhang B formulierten Rekursionsbeziehungen läßt sich zeigen, daß die Masselosigkeit des Photons durch  $\Pi_{T_{pert}}^{[1,1]}(q^2)$  erhalten bleibt:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A loop with external momenta } p, p-k, p-q \text{ and internal momenta } k. \text{ Vertices are } \gamma^\mu. \end{array} \right|_{q^2=0} = - \left. \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A loop with external momenta } p, p-k, p-k-q \text{ and internal momenta } k. \text{ Vertices are } \gamma^\mu. \end{array} \right|_{q^2=0} \\ &= Q_f^2 (N_c^2 - 1) \frac{(-8 + 14D - 7D^2 + D^3)(-3 + D - \xi)}{(-5 + D)(-3 + D)} \frac{1}{m^2} A_{\{1,m\}}^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Das Basisintegral  $A_{\{1,m\}}$  ist in (A.3) definiert.

## 3.2 Photon-Vertex in $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$

### 3.2.1 Selbstkonsistenz durch WTI

Der allgemeinste Ansatz in erster Stufe der rationalen Approximation für den Quark-Photon-Vertex lautet:

$$\begin{aligned} \Gamma_{FFP}^\mu(p, k, p - q) &= \gamma^\mu + \tilde{z}_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) \\ &+ \tilde{z}_2 \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \\ &+ \left[ \tilde{z}_3 \frac{1}{2} (2p - q)^\mu + \tilde{z}_4 q^\mu \right] \Lambda \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \quad . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aus der WTI (3.1), analytisch in  $[r = 1, p = 0]$  geschrieben als

$$q^\mu \Gamma_{FFP}^\mu(p, k, p - q) = \Gamma_{F\bar{F}}(p - q) - \Gamma_{F\bar{F}}(p) \quad (3.28)$$

mit der Fermion-Selbstenergie in  $r = 1$

$$\Gamma_{F\bar{F}}(p) = - \left[ \not{p} + \kappa_1 + \frac{\kappa_3^2}{\not{p} + \kappa_2} \right] \quad (3.29)$$

gewinnt man den Longitudinalanteil des Quark-Photon-Vertex  $\Gamma_{FFP_\parallel}^\mu$ , der durch die WTI festgelegt ist:

$$\begin{aligned} \Gamma_{FF}(p - q) - \Gamma_{FF}(p) &= \not{q} + \kappa_3^2 \left( \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} - \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) \\ &= \not{q} - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \not{q} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \\ &= q^\mu \left( \gamma^\mu - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) \\ &=: q^\mu \Gamma_{FFP_\parallel}^\mu \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Indem die nichtperturbative Modifikation in (3.27) auf einen Hauptnenner gebracht wird

$$\begin{aligned} &\Gamma_{FFP}^\mu(p, k, p - q) - \gamma^\mu \\ &= \Lambda \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \left\{ \tilde{z}_1 [\gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + \kappa_2) + (\not{p} + \kappa_2) \gamma^\mu] + \tilde{z}_2 \Lambda \gamma^\mu + \tilde{z}_3 \frac{1}{2} (2p - q)^\mu + \tilde{z}_4 q^\mu \right\} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \\ &= \Lambda \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \left\{ p^\mu [-2\tilde{z}_1 + \tilde{z}_3] + q^\mu [-\frac{1}{2}\tilde{z}_3 + \tilde{z}_4] + \gamma^\mu [2\tilde{z}_1 \kappa_2 + \Lambda \tilde{z}_2] - \tilde{z}_1 \gamma^\mu \not{q} \right\} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

kann man durch Vergleich mit dem Longitudinalanteil (3.30) die Koeffizientenbeziehungen finden, die die Erhaltung der WTI ermöglichen:

$$\begin{aligned} -2\tilde{z}_1 + \tilde{z}_3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}\tilde{z}_3 + \tilde{z}_4 &= -\tilde{z}_1 \\ \Lambda(2\tilde{z}_1 \kappa_2 + \Lambda \tilde{z}_2) &= -\kappa_3^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Insbesondere gilt folglich  $\tilde{z}_4 = 0$ . Damit ergibt sich der die WTI-respektierende Quark-Photon-Vertex:

$$\Gamma_{FFP}^\mu(p, k, p - q) = \gamma^\mu - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} - \Lambda \tilde{z}_1 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} [q^\mu + \gamma^\mu \not{q}] \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \quad . \quad (3.33)$$

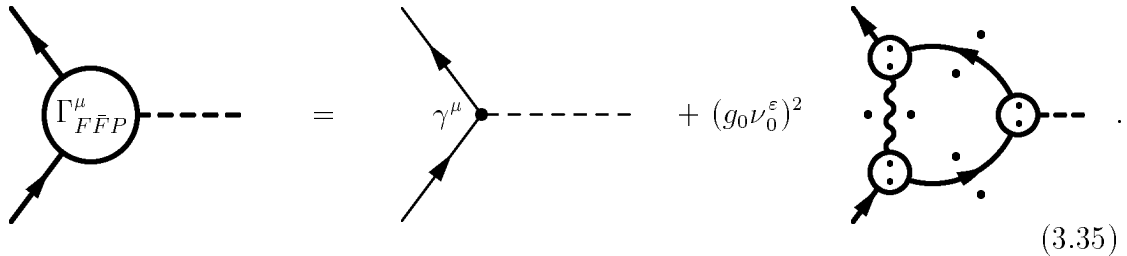
Hierbei bezeichnet

$$\begin{aligned}\Gamma_{F\bar{F}P_\perp}^\mu(p, k, p - q) &= -\Lambda\tilde{z}_1 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} [q^\mu + \gamma^\mu \not{q}] \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \\ &= -\frac{\Lambda\tilde{z}_1}{2} \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} [\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu] \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2}\end{aligned}\quad (3.34)$$

den Transversalanteil des Quark-Photon-Vertex.

### 3.2.2 Selbstkonsistenz durch DS-Gleichung

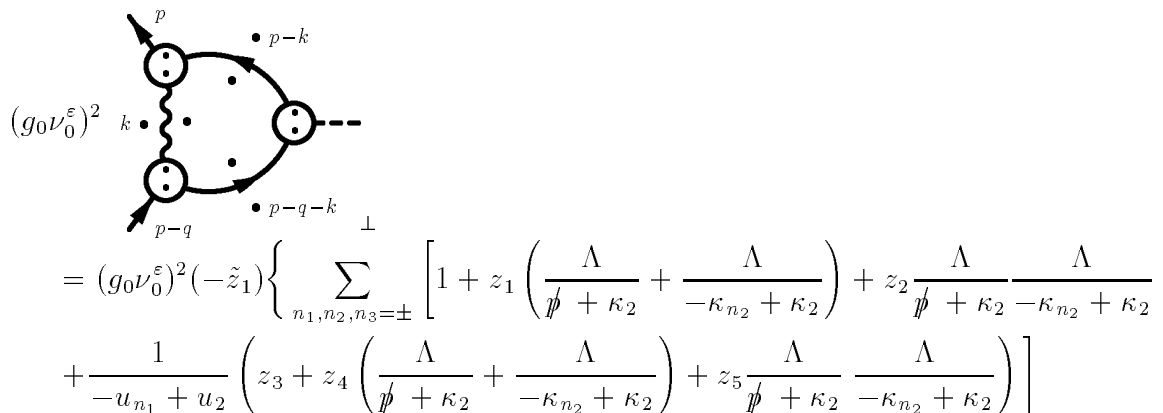
Die Bethe-Salpeter-resummierte DS-Gleichung des Photon-Vertex auf Ein-Loop-Niveau lautet in diagrammatischer Schreibweise mit Berücksichtigung kompensierender Pole:



$$(3.35)$$

Der Longitudinalanteil des Quark-Photon-Vertex  $\Gamma_{F\bar{F}P_\parallel}^\mu$  zieht sich in Landau-Eichung, wie bereits der perturbativen Divergenzstruktur entnommen werden kann, nicht mittels des DS-Selbstkonsistenz-Mechanismus an. Folglich wird auch  $\Gamma_{F\bar{F}P_\parallel}^{(1,1)}$  ausschließlich durch die WTI festgelegt. Eine DS-Selbstkonsistenz kann erst unter Hinzunahme der  $(p + p')^\mu$  Lorentz-Strukturen im Quark-Gluon-Vertex oder durch Mitnahme der Zwei-Loop-Beiträge der DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex (3.35) ermöglicht werden.

Nachfolgend wird gezeigt, daß der DS-Selbstkonsistenzformalismus für den Transversalanteil des Photon-Vertex  $\Gamma_{F\bar{F}P_\perp}^\mu$  in Landau-Eichung auch Terme ausbildet, die für  $\Lambda \rightarrow 0$  nicht verschwinden. Die vor dem Hintergrund der Erhaltung der perturbativen Divergenz auf Zwei-Loop-Niveau notwendige DS-Selbstkonsistenz führt in erster Stufe der rationalen Approximation in die triviale Lösung  $\tilde{z}_1 = 0$ :



$$\begin{aligned}&= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 (-\tilde{z}_1) \left\{ \sum_{n_1, n_2, n_3 = \pm} \left[ 1 + z_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} + \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_2} + \kappa_2} \right) + z_2 \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_2} + \kappa_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{-u_{n_1} + u_2} \left( z_3 + z_4 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} + \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_2} + \kappa_2} \right) + z_5 \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_2} + \kappa_2} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{1}{\Lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[ t^{\lambda\rho}(k) \frac{b_{n_1}}{k^2 + u_{n_1} \Lambda^2} \gamma^\rho \frac{a_{n_2}}{\not{p} - \not{k} + \kappa_{n_2}} \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) \frac{a_{n_3}}{\not{p} - \not{q} - \not{k} + \kappa_{n_3}} \right] \\
 & \left[ 1 + z_1 \left( \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_3} + \kappa_2} + \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) + z_2 \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_3} + \kappa_2} \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{-u_{n_1} + u_2} \left( z_3 + z_4 \left( \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_3} + \kappa_2} + \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) + z_5 \frac{\Lambda}{-\kappa_{n_3} + \kappa_2} \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) \right] \Bigg\} .
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

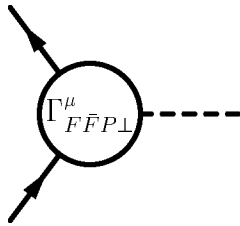
Hierbei bezeichnen

$$\begin{aligned}
 a & := a_+ = -a_- = \frac{\Lambda}{\kappa_- - \kappa_+} \\
 b & := b_+ = -b_- = \frac{1}{u_- - u_+}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

die Residuen von:

$$\frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} S(p) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} D_T(k^2) \quad . \tag{3.38}$$

Die Anwendung des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus auf alle divergenten Beiträge liefert zuzüglich zur nichtperturbativen Modifikation von  $\Gamma_{FFP\perp}^\mu$  Modifikationen, die nicht mit  $\Lambda \rightarrow 0$  gegen Null gehen und daher zum Verschwinden gebracht werden müssen:



$$\begin{aligned}
 & = -\frac{4}{3} \frac{1}{\beta_0} \frac{\tilde{z}_1}{\Lambda} \left\{ \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) \underbrace{\left[ z_1^2 - \frac{1}{u_3^2} z_4^2 \right]}_{\stackrel{!}{=} 0} \right. \\
 & + \left( \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right) \underbrace{\left[ z_1 z_2 - \frac{1}{u_3^2} z_4 z_5 \right]}_{\stackrel{!}{=} 0} \\
 & \left. + \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{q} - \not{q} \gamma^\mu) \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \underbrace{\left[ z_2^2 - \frac{1}{u_3^2} z_5^2 \right]}_{\stackrel{!}{=} \frac{3\beta_0}{4}} \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Diese Art von Termen ist auch in anderen Untersuchungen gefunden worden [DRI 97, KUH 97] und rührt daher, daß der durch Berücksichtigung kompensierender Pole „entschärfte“ (in Gleichung (3.35) gepunktete) Gluonaustausch für niedrige  $r$  nicht den richtigen perturbativen Grenzwert besitzt. Man zeigt nun leicht, daß die ersten beiden Bedingungen auch  $z_2^2 - \frac{1}{u_3^2} z_5^2 = 0$  implizieren und somit die triviale

Lösung  $\tilde{z}_1 = 0$  die einzige Lösung der Selbstkonsistenz-Gleichung ist. Um Störungen der perturbativen Divergenz auf Zwei-Loop-Niveau zu vermeiden, wird der Quark-Photon-Vertex nur in Form seines Longitudinalanteils angesetzt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{F\bar{F}P}^\mu(p, q, p - q) &= \Gamma_{F\bar{F}P_\parallel}^\mu(p, q, p - q) \\ &= \gamma^\mu - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} . \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.3 Photon-Vertex in $\mathcal{O}(\alpha_s)$

Die Erfüllung der WTI in niedrigster Ordnung der perturbativen Entwicklung impliziert im Rahmen der erweiterten Störungstheorie, anders als im Rahmen der gewöhnlichen Störungstheorie, nicht die Erhaltung der WTI in höherer  $g^2$ -Ordnung. Es besteht daher für die hier behandelte Fragestellung die Notwendigkeit, den Quark-Photon-Vertex auch in  $\mathcal{O}(g^2)$  durch die Erhaltung der WTI zu definieren. Strukturen, die durch die WTI nicht festgelegt sind, treten entsprechend der Argumentation im vorangegangenen Abschnitt nicht auf. In der DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex (3.35) ersetzt man den Ein-Loop-Graphen durch denselben ohne kompensierende Pole. Dieser ist als rein formaler Graph zu betrachten, der nicht durch Schleifenberechnungen, sondern über die WTI (3.1) zu definieren ist:

$$\begin{aligned} & \text{[Diagram: Shaded circle vertex]} = \text{[Diagram: Circle vertex } \Gamma_{F\bar{F}P}^\mu \text{]} + \mathcal{O}(g_0^4) \\ & = \text{[Diagram: Tree-level vertex } \gamma^\mu \text{]} + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{[Diagram: Loop diagram]} + \mathcal{O}(g_0^4) \\ & = \text{[Diagram: Circle vertex } \Gamma_{F\bar{F}P}^\mu \text{]} + \left[ (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{[Diagram: Loop diagram]} - \text{[Diagram: Square vertex } \Gamma_{F\bar{F}P}^{\mu[c]} \text{]} \right] + \mathcal{O}(g_0^4) . \end{aligned} \quad (3.41)$$



Hierbei stellt der Ausdruck in den eckigen Klammern [...] den in  $\mathcal{O}(g_0^2)$  endlichen Quark-Photon-Vertex-Beitrag dar. (3.41) beschreibt die Entwicklung in erweiterter Störungstheorie mit dem in Landau-Eichung rein nichtperturbativen Vertex-Subtraktionsgraphen:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}P}^{\mu[e]} &= \Gamma_{F\bar{F}P}^{\mu} - \gamma^{\mu} \\
 &= -\kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^{\mu} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} .
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Der inverse Fermionpropagator in Ordnung  $g^2$  lautet:

$$\begin{aligned}
 \text{---}^{-1} &= \text{---}^{[1,1]^{-1}} + \mathcal{O}(g_0^4) \\
 &= \text{---}^{-1} - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{---} + \mathcal{O}(g_0^4) \\
 &= \text{---}^{-1} - \left[ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{---} - \Gamma_{F\bar{F}}^{[e]} \right] + \mathcal{O}(g_0^4) .
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Hierbei bezeichnet der Ausdruck in eckigen Klammern [...] den in  $\mathcal{O}(g_0^2)$  endlichen Quark-Propagator-Beitrag mit der in Landau-Eichung rein nichtperturbativen Propagatorsubtraktion:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}}^{[e]} &= \text{---}^{-1} - \text{---}^{-1} \\
 &= - \left( \kappa_1 + \frac{\kappa_3^2}{\not{p} + \kappa_2} \right) .
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Einsetzen der Entwicklungen (3.41) und (3.43) in die WTI (3.1) liefert:

$$\begin{aligned}
 q^\mu & \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] \\
 & = \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right) \\
 & \quad + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right) . \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Da für die Approximanten in Stufe  $[r = 1, p = 0]$  und die Subtraktionsgraphen die WTI erfüllt sind, gewinnt man aus (3.45) die Definitionsgleichung für  $\Gamma_{F\bar{F}P}^{\mu [1,1]}(p, q, p - q)$ :

$$\begin{aligned}
 q^\mu & \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \end{array} \right] \stackrel{\text{WTI}}{=} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \end{array} \right) . \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Die Selbstenergie  $\Sigma(p)$  des Quarkpropagators ergibt sich mit den Vertex- und Propagatoransätzen aus Kapitel 1 zu

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) & = \text{Diagram 14} \\
 & = \gamma^\mu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left[ \frac{B_+}{k^2 + u_+ \Lambda^2} + \frac{B_-}{k^2 + u_- \Lambda^2} \right] \left[ \frac{A_+}{\not{p} - \not{k} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{k} + \kappa_-} \right] \\
 & \quad \left\{ \gamma^\nu + z_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{k} + \kappa_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \right) + z_2 \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{k} + \kappa_2} \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_2 \Lambda^2} \left[ z_3 \gamma^\nu + z_4 \left( \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{k} + \kappa_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \right) + z_5 \frac{\Lambda}{\not{p} - \not{k} + \kappa_2} \gamma^\nu \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=\pm} \left\{ C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \right\} I_{ij}^{\Sigma}(\not{p}) \quad (3.47)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(1)} &= B_j (A_i + z_1 a_i) + b_j (z_3 A_i + z_4 a_i) \\ C_{ij}^{(2)} &= B_j (z_1 A_i + z_2 a_i) + b_j (z_4 A_i + z_5 a_i) \end{aligned} \quad (3.48)$$

und dem Fermion-Selbstenergie-Basisintegral:

$$I_{ij}^{\Sigma}(\not{p}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\rho \quad (3.49)$$

Mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} - \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} &= q^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} \quad (3.50) \\ \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} - \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \\ &= q^\mu \left[ \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} + \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

erhält man aus (3.46, 3.47 und 3.49) den  $g_0^2$ -Beitrag des Quark-Photon-Vertex

$$\begin{aligned} \Gamma_{F\bar{F}P}^{\mu [1,1]}(p, q, p - q) &= \text{Diagram} \quad (3.52) \\ &= \sum_{i,j=\pm} C_{ij}^{(1)} I_{ij}^{\Gamma(1)}(p, q, p - q) + C_{ij}^{(2)} I_{ij}^{\Gamma(2)}(p, q, p - q) \end{aligned}$$

mit den Quark-Photon-Vertex-Basisintegralen:

$$I_{ij}^{\Gamma(1)}(p, q, p - q) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} \gamma^\rho \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} I_{ij}^{\Gamma(2)}(p, q, p - q) &= \\ &= \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} \gamma^\rho \\ &+ \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left( \delta^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_i} \gamma^\rho \quad (3.54) \end{aligned}$$

Zu verifizieren bleibt noch, daß die über die WTI definierte Vertex-Subtraktion zugleich die nichtperturbative Modifikation der nullten Ordnung durch den ebenfalls über die WTI definierten Einschleifen-Beitrag des Quark-Photon-Vertex (3.52) darstellt:

$$\Gamma_{FFP}^{[c]} + \mathcal{O}(g_0^2) = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[ \text{loop diagram} \right]_{WTI} \quad (3.55)$$

Mittels der Divergenzen der Vertex-Integrale

$$I_{ij}^{\Gamma^{(1)}}(p, q, p - q) = \mathcal{O}(\varepsilon^0) \quad ,$$

$$I_{ij}^{\Gamma^{(2)}}(p, q, p - q) = \frac{1}{(4\pi)^2} g_0^2 \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} 3\kappa_i \frac{\Lambda}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \quad (3.56)$$

und Ausführung des Grenzwertes

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{1}{(4\pi)^2} g_0^2 \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0} \quad (3.57)$$

wird man zu der Forderung

$$\kappa_3^2 = \frac{4\Lambda}{\beta_0} (\kappa_1 z_1 - z_2 \Lambda) \quad (3.58)$$

geführt. Diese stellt gerade die durch die Parameter erfüllte zweite Selbstkonsistenzgleichung (1.56) des Fermion-Propagators dar.

# Kapitel 4

## Ein-Loop-Selbstenergie

In diesem Kapitel wird der Ein-Loop-Beitrag in Stufe  $r = 1$  der rationalen Approximation zur hadronischen Vakuumpolarisation des Photons  $\Pi_T^{[1,0]}(q^2)$  berechnet<sup>1</sup>. Alle Vertizes und Propagatoren sind, soweit nicht anders gekennzeichnet, die der Stufe  $r = 1$ . Im Sinne einer Vektordominanzargumentation wird im zweiten Abschnitt ein Vergleich mit der SVZ-Entwicklung der Korrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesonstroms angestellt. Hierbei wird untersucht, inwieweit die durch den *QCD*-Summenregel-Mechanismus vermittelte indirekte Verbindung zur Resonanzregion von  $\Pi_T$  einen Rückschluß auf eine  $\rho$ -Mesonresonanz zuläßt.

Selbstverständlich kann eine Störungsrechnung endlicher Ordnung - ebenso wie eine endliche Bornsche Näherung in der Streutheorie - niemals Bindungs- oder Resonanzpole beschreiben; dazu ist stets eine unendliche Partialsummation erforderlich, die einen Fredholmschen Nenner erzeugt. Auch beim *SVZ*-Verfahren wird ja das Resonanzphänomen nicht theoretisch generiert, sondern durch semiempirische Fitformeln wie Gleichung (2.11) hineingesteckt. Es ist aber sinnvoll und von Interesse, zu fragen, ob der dort versuchte Brückenschlag von der Resonanz- zur (OPE-verbesserten) perturbativen Region bei Verwendung von Elementen der erweiterten Störungstheorie besser funktioniert, indem er etwa eine größere Überlappungsregion oder eine verringerte Abhängigkeit von Parametern wie  $s_0$  oder ähnlichem entwickelt.

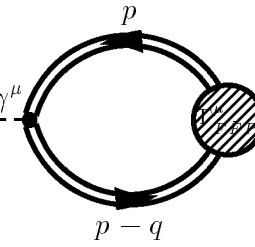
### 4.1 Ein-Loop-Beitrag

Für die Entwicklung des Transversalanteils der hadronischen Vakuumpolarisation bis auf Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(g_0^2)$  erhält man in erster Stufe der rationalen Appro-

---

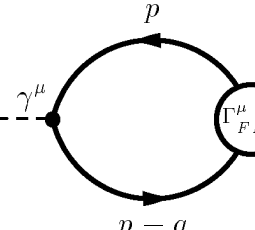
<sup>1</sup>Dieser war bereits in der Arbeit [MEY 94] Gegenstand der Untersuchung als eine der hadronischen Korrekturen in Ordnung  $\alpha_s^2$  des T-Matrix-Elements der Myonpaarbildung  $\langle \mu^- \mu^+ | T | e^- e^+ \rangle$ . Da hier die Wahl des Vertex nach anderen Gesichtspunkten erfolgt, ist die Rechnung jedoch erneut durchzuführen.

imation:

$$\Pi_T^{[v]}(q^2) = \text{---} \gamma^\mu \text{---} \text{---} \text{---} = \Pi_T^{[1,0]}(q^2) + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (4.1)$$


The diagram shows a loop with two external lines. The top line is labeled with momentum  $p$  and the bottom line with  $p - q$ . A shaded circular blob is attached to the right side of the loop.

mit

$$\begin{aligned} \Pi_T(q^2) &\equiv \Pi_T^{[1,0]}(q^2) = \text{---} \gamma^\mu \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= \frac{Q_f^2 N_c}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu S(p) \Gamma_{FFP}^\mu(p, q, p-q) S(p-q) \right\} \\ &= \frac{Q_f^2 N_c}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[ \gamma^\mu - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right] \left( \frac{A_+}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right) \right\} \\ &= Q_f^2 N_c (A_+ I(\kappa_+, \kappa_+) + A_- I(\kappa_-, \kappa_-)) \quad . \end{aligned} \quad (4.2)$$


The diagram shows a loop with two external lines. The top line is labeled with momentum  $p$  and the bottom line with  $p - q$ . A white circular blob labeled  $\Gamma_{FFP}^\mu$  is attached to the right side of the loop.

Als Folge der Erhaltung der WTI (3.1) tritt nur das Ein-Loop-Selbstenergie-Basisintegral

$$I(\kappa, \kappa) := \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa} \right\} \quad (4.3)$$

auf, das nur in der oberen bzw. unteren komplexen minkowskischen  $q_M^2$ -Ebene einen Verzweigungsschnitt besitzt, nicht aber das Integral  $I(\kappa_+, \kappa_-)$ , dessen Verzweigungsschnitt in der gesamten  $q_M^2$ -Ebene mit einer hebbaren Singularität in  $\text{Im}(q^2) = 0$  verläuft [MEY 94]. Mit den Basis-Integralen aus Anhang A findet man als Lösung

$$\Pi_T(q^2) = \Pi_{Tdiv}(q^2) + \Pi_{Treg}(q^2) \quad (4.4)$$

mit der Ein-Loop-Selbstenergie-Divergenz im  $MS$  Regularisierungsschema (3.11)

$$\Pi_{Tdiv}(q^2) = \Pi_{Tdiv}^{[0]}(q) \quad (4.5)$$

und dem regulären Beitrag

$$\begin{aligned}
 \Pi_{Treg}(q^2) = & \frac{Q_f^2 N_c}{(4\pi)^2} q^2 \frac{4}{3} \left\{ + \frac{5}{3} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right. \\
 & - A_+ \left( \ln \left( \frac{\kappa_+^2}{\Lambda^2} \right) + 4 \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} \right) + \left( 1 - 2 \frac{\kappa_+^2}{q^2} \right) \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_+^2}{q^2}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_+^2}{q^2}}}{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_+^2}{q^2}}} \right) \right) \\
 & \left. - A_- \left( \ln \left( \frac{\kappa_-^2}{\Lambda^2} \right) + 4 \left( \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right) + \left( 1 - 2 \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right) \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_-^2}{q^2}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_-^2}{q^2}}}{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_-^2}{q^2}}} \right) \right) \right\} , \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

wobei  $\nu$  schon zur Vereinfachung auf den Wert  $\Lambda$  gesetzt ist. Die Randbedingung der Masselosigkeit des Photons ist aufgrund der Proportionalität zu  $q^2$  erfüllt. Die Divergenz wird im Rahmen der Renormierung der Photon-Selbstenergie beseitigt. Hierbei führt man die renormierte elektromagnetische Kopplung  $e$  ein

$$(\epsilon_0 \nu_0^\epsilon)^2 = (\epsilon \nu^\epsilon)^2 Z_\epsilon \quad (4.7)$$

mit der  $MS$ -Kopplungs-Renormierungskonstanten auf Ein-Loop-Niveau:

$$Z_\epsilon = 1 + N_c \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(e^4). \quad (4.8)$$

Für die renormierte Vakuumpolarisation gilt  $\Pi_{Tren} = \Pi_{Treg}$ , da die endlichen Integralbeiträge in dieser Arbeit bereits in ihrer Form nach Durchführung des Grenzwertes  $\epsilon \rightarrow 0$  angegeben sind. Im Hinblick auf die später folgende numerische Auswertung wird hierbei die Massenskala  $\nu$  auf  $\Lambda$  gesetzt.

Auch im Falle beliebiger Approximationsstufe  $r$  kann der Anteil der hadronischen Vakuumpolarisation  $\Pi_{T\parallel}^{[r,0]}(q^2)$  bestimmt werden, der sich als Konsequenz der Erhaltung der WTI ergibt. Ausgehend von dem Fermion-Propagator in Stufe  $r$  (1.32) wird mittels der WTI der Longitudinalanteil des Quark-Photon-Vertex festgelegt:

$$\Gamma_{FFP}^{[r,0]\mu}(p, q, p - q) = \gamma^\mu - \sum_{s=1}^r \kappa_{2s+1}^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_{2s}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{2s}} . \quad (4.9)$$

Wiederum treten nur die Integrale (4.3) mit zwei gleichen Massenparametern auf und man erhält:

$$\Pi_{T\parallel}^{[r,0]}(q^2) = Q_f^2 N_c \sum_{t=1}^{(r+1)/2} (A_{r,t+} I(\kappa_{r,t+}, \kappa_{r,t+}) + A_{r,t-} I(\kappa_{r,t-}, \kappa_{r,t-})) . \quad (4.10)$$

Aus  $\sum_{t=1}^{(r+1)/2} (A_{r,t+} + A_{r,t-}) = 1$  folgt, daß die  $\Pi_{T\parallel,div}^{[r,0]}(q^2)$  gleich der perturbativen Divergenz ist und an der Proportionalität  $I(\kappa, \kappa) \propto q^2$  erkennt man, daß die Masselosigkeit des Photons gewährleistet bleibt.

Abb.(4.1) zeigt die numerische Auswertung von  $\Pi_{Treg}(q^2)$  für den  $(N_F = 2, \omega_1 < 0)$ -Parametersatz im Vergleich zur perturbativen Lösung

$$\Pi_{Treg}^{pert}(q^2)\Big|_{m_f^2=0} = \frac{Q_f^2 N_c}{(4\pi)^2} q^2 \frac{4}{3} \left\{ + \frac{5}{3} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \right\} \quad , \quad (4.11)$$

die eine Entwicklung von  $\Pi_{Treg}(q^2)$  für große euklidische Impulse darstellt. In Abb. (4.2) erkennt man anhand der in der Literatur zum Teil üblicheren Darstellung  $\Pi'_{Treg}(q^2) := \frac{\Pi_{Treg}(q^2)}{q^2}$  besser, wie das Resultat (4.6) die perturbative Lösung korrigiert. Dies ist natürlich, zumindest der Richtung nach, der Effekt, den man sich generell von der Verwendung einer nichtperturbativ erweiterten Störungsmethode erhofft, nämlich die (quasi)-perturbativen Korrekturen insbesondere im Infrarotbereich zu verringern.

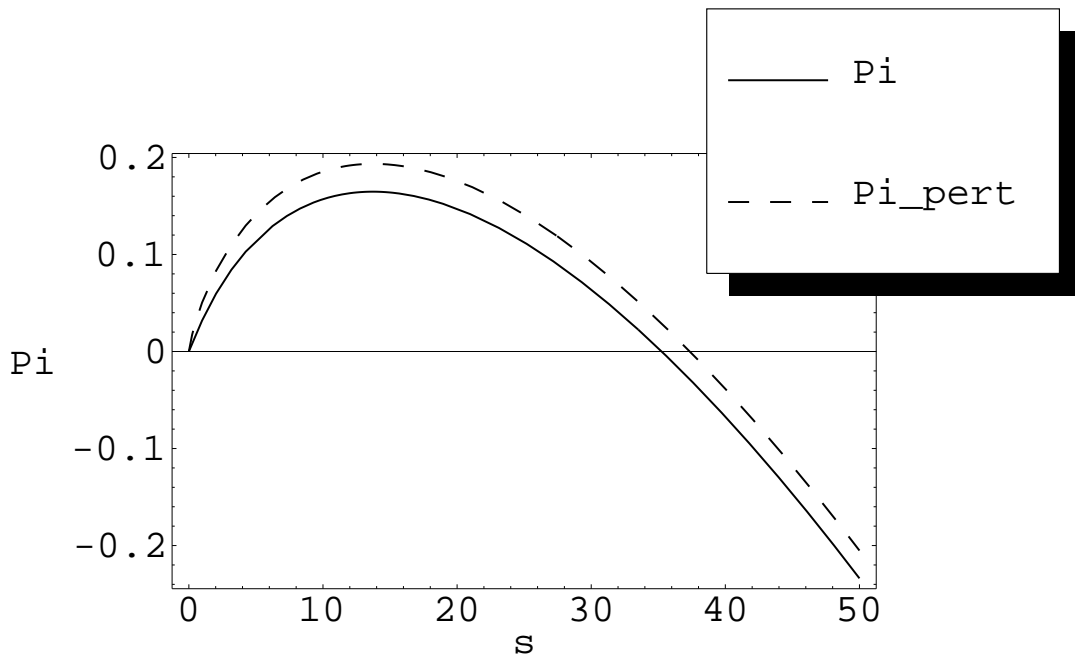


Abb.4.1: Aufgetragen ist  $\frac{\Pi_{Treg}^{[1,0]}(q^2)}{\Lambda^2}$  über  $s := \frac{q^2}{\Lambda^2}$ .



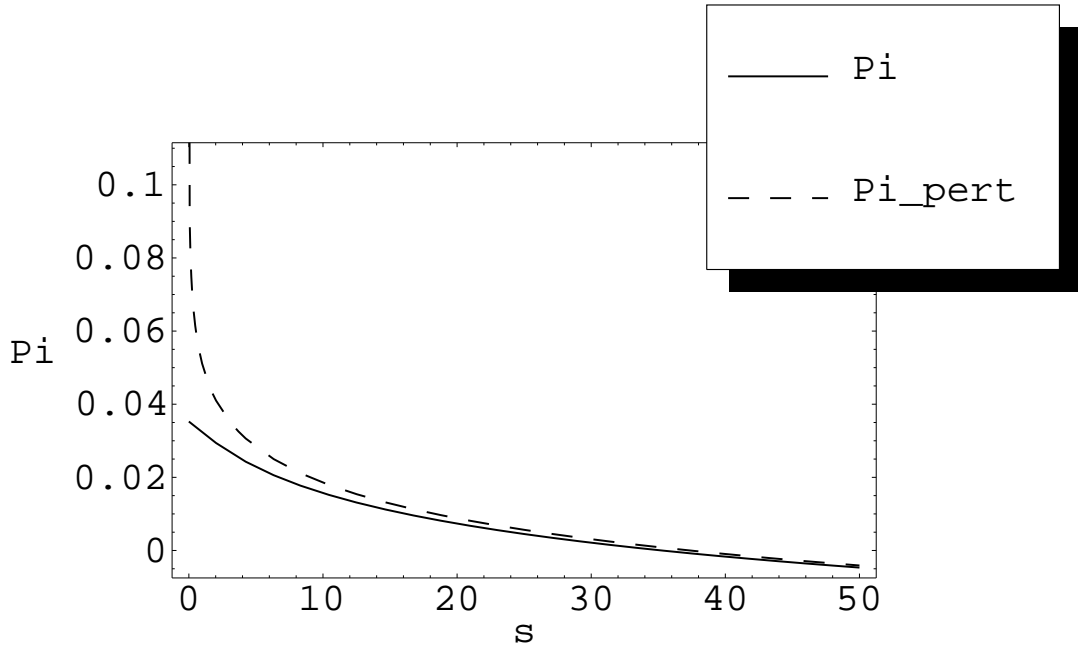


Abb.4.2: Aufgetragen ist  $\frac{\Pi_{Treg}^{[1,0]}(q^2)}{q^2}$  über  $s := \frac{q^2}{\Lambda^2}$ .

## 4.2 Vergleich mit SVZ-Entwicklung

Setzt man in der hadronischen Selbstenergie des Photons  $\Pi^{\mu\nu}(q) = t^{\mu\nu}(q)\Pi_T(q^2)$  (4.1) für den vollen Photon-Vertex die Bewegungsgleichung im Photonkanal ein, die die fermionische  $T$ -Matrix enthält, so stellt sich die Selbstenergie als  $T$ -Matrix dar, deren äußeren Beine paarweise an einem nackten Photon-Vertex mit amputiertem Photonbein geschlossen werden, was im Ortsraum dem paarweisen Zusammenziehen der Raum-Zeit-Punkte entspricht. Die hadronische Selbstenergie des Photons, die demnach identisch mit der Korrelationsfunktion zweier elektromagnetischer Ströme ist, ergibt sich bei Anwesenheit zweier Flavoursorten in Abhängigkeit der Ströme

$$j_f^\mu := : \bar{q}_f \gamma^\mu q_f : , \quad (4.12)$$

$$j_{u,d}^\mu := \sum_{u,d} Q_f j_f^\mu \quad \text{mit} \quad Q_u = \frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3} \quad (4.13)$$

schließlich zu:

$$\begin{aligned} \Pi_T(q^2) &= \frac{1}{D-1} \int d^D x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j_{u,d}^\mu(x) j_{u,d}^\mu(0) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{D-1} \sum_{u,d} Q_f^2 \int d^D x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j_f^\mu(x) j_f^\mu(0) \} | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Zweipunktkorrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesonstroms

$$j_\rho^\mu := \sum_{u,d} C_f j_f^\mu \quad \text{mit} \quad C_u = \frac{1}{2}, C_d = -\frac{1}{2} \quad (4.15)$$

lautet hingegen:

$$\begin{aligned} \Pi_\rho(q^2) &= \frac{1}{D-1} \int d^D x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j_\rho^\mu(x) j_\rho^\mu(0) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{D-1} \sum_{u,d} C_f^2 \int d^D x e^{iqx} \langle \Omega | T \{ j_f^\mu(x) j_f^\mu(0) \} | \Omega \rangle \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da Fermionmassen vernachlässigt werden, ist  $\langle \Omega | T \{ j_f^\mu(x) j_f^\mu(0) \} | \Omega \rangle$  keine Funktion des Flavours. Ausgehend von der hadronischen Vakuumpolarisation erhält man als Beitrag des  $\rho$ -Mesons demnach

$$\Pi_\rho(q^2) = Z_\rho \Pi_T(q^2) \quad (4.17)$$

mit dem Reskalierungsfaktor

$$Z_\rho = \frac{\sum_{u,d} C_f^2}{\sum_{u,d} Q_f^2} = \frac{9}{10} \quad , \quad (4.18)$$

der einen zahlenwertigen Eindruck von der Dominanz des hadronischen Anteils bei zwei Flavoursorten durch das  $\rho$ -Meson vermittelt. Eine Unterscheidung zwischen den Beiträgen des  $\rho$ -Mesonstroms und des  $\omega$ -Mesonstroms

$$j_\omega = \frac{1}{2} : \bar{u} \gamma^\mu u + \bar{d} \gamma^\mu d : \quad (4.19)$$

mit der  $\omega$ -Mesonmasse  $m_\omega = 782 \text{ MeV} \approx m_\rho = 770 \text{ MeV}$  ist auf diese Weise allerdings nicht möglich.

Ziel ist es,  $\Pi_T(q^2)$  in  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$  zu entwickeln und mittels (4.17) einen Koeffizientenvergleich mit der SVZ-Entwicklung (2.56) des  $\rho$ -Mesonstroms, die im folgenden mit

$$\Pi_\rho^{SVZ} = q^2 \sum_j d_j \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^j \quad (4.20)$$

bezeichnet ist, anzustellen.

Die der OPE entsprechende  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ -Entwicklung von  $\Pi_\rho(q^2)$  lautet

$$\Pi_\rho(q^2) = \Pi_{\rho \text{ div}} + \frac{\frac{1}{2} N_c}{(4\pi)^2} q^2 \left\{ c_0 + c_1 \frac{\Lambda^2}{q^2} + c_2 \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^2 + c_3 \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^3 + \dots \right\} \quad (4.21)$$

mit von  $\ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)$  abhängigen Koeffizienten  $c_k$

$$c_0 = +\frac{4}{3} \left( \frac{5}{3} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -8 \left( A_+ \omega_+^2 + A_- \omega_-^2 \right) \\
 c_2 &= +4 \left( 1 - 2 \ln \left( |\omega|^2 \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \right) \left( A_+ \omega_+^4 + A_- \omega_-^4 \right) - 16i\varphi \left( A_+ \omega_+^4 - A_- \omega_-^4 \right) \\
 c_3 &= \frac{32}{3} \left( \frac{2}{3} + \ln \left( |\omega|^2 \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \right) \left( A_+ \omega_+^6 + A_- \omega_-^6 \right) + \frac{64}{3} i\varphi \left( A_+ \omega_+^6 - A_- \omega_-^6 \right)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

und

$$\Pi_{\rho \text{ div}} = Z_{\rho} \Pi_{T \text{ div}} \tag{4.23}$$

unter Verwendung von  $\omega_{\pm} =: |\omega| e^{i\varphi}$  mit:

$$\begin{aligned}
 |\omega| &= \sqrt{\omega_1 \omega_2 + \omega_3} \quad , \\
 \tan(\varphi) &= 2 \frac{\sqrt{\omega_3 - \frac{1}{4}(\omega_1 - \omega_2)^2}}{\omega_1 + \omega_2} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Da es kein eichinvariantes Kondensat der Massendimension zwei gibt, ist der erste nichtperturbative Entwicklungskoeffizient der SVZ-Entwicklung  $d_1 = 0$ . Diese Bedingung ist durch den ersten Entwicklungskoeffizienten  $c_1 = 8(\omega_1^2 - \omega_3)$  der Reihe (4.21) verletzt. Auf Ein-Loop-Niveau kann eine Lösung dieses Problems darin bestehen, auf die selbstkonsistente Bestimmung des Transversalanteils des Photon-Vertex mit  $\tilde{z}_1 = 0$  zu verzichten und stattdessen  $\tilde{z}_1$  aus der Bedingung  $c_1 = 0$  zu gewinnen. Der Beitrag der Photon-Selbstenergie  $\Pi_{T\perp}(q^2)$ , der aus diesem nichtverschwindenden Transversalanteil  $\Gamma_{F\bar{F}P\perp}^{\mu}$  (3.34) folgt, lautet

$$\begin{aligned}
 \Pi_{T\perp}(q^2) &= -\frac{Q_f^2 N_c}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^{\mu} \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left[ \frac{\Lambda \tilde{z}_1}{2} \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} [\gamma^{\mu} \not{q} - \not{q} \gamma^{\mu}] \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right] \left( \frac{A_+}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right) \right\} \\
 &= -Q_f^2 N_c \Lambda \frac{\tilde{z}_1}{2} a^2 \left[ \tilde{I}(\kappa_+, \kappa_+) - \left( \tilde{I}(\kappa_+, \kappa_-) + \tilde{I}(\kappa_-, \kappa_+) \right) + \tilde{I}(\kappa_-, \kappa_-) \right]
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

mit dem Ein-Loop Selbstenergie-Basisintegral:

$$\tilde{I}(\kappa_i, \kappa_j) := \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^{\mu} \frac{1}{\not{p} + \kappa_i} \frac{1}{2} [\gamma^{\mu} \not{q} - \not{q} \gamma^{\mu}] \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_j} \right\} \quad . \tag{4.26}$$

Auch dieses kann in Abhängigkeit von den Basisintegralen aus Anhang A geschlossen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{T\perp}(q^2) &= \Pi_{T\perp}^{reg}(q^2) \\
 &= -Q_f^2 N_c \frac{4\Lambda \tilde{z}_1}{(\kappa_+ - \kappa_-)^2} \left\{ -q^2 \left( \kappa_+ B_{\{1, \kappa_+\}\{1, \kappa_+\}}^{reg} + \kappa_- B_{\{1, \kappa_-\}\{1, \kappa_-\}}^{reg} \right) \right. \\
 &\quad + (\kappa_+ + \kappa_-) \left[ q^2 + (\kappa_+ - \kappa_-)^2 \right] B_{\{1, \kappa_+\}\{1, \kappa_-\}}^{reg} \\
 &\quad \left. + (\kappa_+ - \kappa_-) \left( A_{\{1, \kappa_+\}}^{reg} - A_{\{1, \kappa_-\}}^{reg} \right) \right\} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Da  $\Pi_{T\perp}(q^2)$  endlich ist für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , wird bei der Bildung der Gesamtpolarisation (4.30) die perturbative Divergenz nicht gestört. Durch explizite Auswertung der Basisintegrale für  $q^2 = 0$  erkennt man zudem, daß  $\Pi_{T\perp}(0) = 0$  ist und somit die Masselosigkeit des Photons nicht verletzt wird. Aus  $\Pi_{\rho\perp}(q^2) = Z_\rho \Pi_{T\perp}(q^2)$  gewinnt man die folgende  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ -Entwicklung<sup>2</sup>:

$$\Pi_{\rho\perp}(q^2) = -\frac{\frac{1}{2}N_c}{(4\pi)^2} q^2 \tilde{z}_1 \left\{ c_{\perp,0} + c_{\perp,1} \frac{\Lambda^2}{q^2} + c_{\perp,2} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^2 + c_{\perp,3} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^3 + \dots \right\} \quad (4.28)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{\perp,0} &= 0 \\ c_{\perp,1} &= +8(\omega_+ + \omega_-) \\ c_{\perp,2} &= +4 \ln \left( |\omega|^2 \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \left[ 3\omega_+^3 + 5\omega_+^2\omega_- + 5\omega_+\omega_-^2 + 3\omega_-^3 \right] \\ &\quad + 8i\varphi \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left[ 3\omega_+^4 + 2\omega_+^3\omega_- + 2\omega_+\omega_-^3 + 3\omega_-^4 \right] \\ &\quad - 2 \left[ \omega_+^3 + \omega_+^2\omega_- + \omega_+\omega_-^2 + \omega_-^3 \right] \\ c_{\perp,3} &= -16 \ln \left( |\omega|^2 \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \left[ \omega_+^5 + 2\omega_+^4\omega_- + 3\omega_+^3\omega_-^2 + 3\omega_+^2\omega_-^3 + 2\omega_+\omega_-^4 + \omega_-^5 \right] \\ &\quad - 32i\varphi \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left( \omega_+^6 + \omega_+^5\omega_- + \omega_+^4\omega_-^2 + \omega_+^3\omega_-^3 + \omega_+^2\omega_-^4 + \omega_+\omega_-^5 + \omega_-^6 \right) \\ &\quad - \frac{4}{3}(\omega_+ + \omega_-) \left( 11\omega_+^4 + 9\omega_+^3\omega_- + 14\omega_+^2\omega_-^2 + 9\omega_+\omega_-^3 + 11\omega_-^4 \right) \quad . \quad (4.29) \end{aligned}$$

Damit erhält man als neue Gesamtentwicklung der Korrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesonstroms in erweiterter Störungstheorie:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_\rho(q^2) &:= \Pi_\rho(q^2) + \Pi_{\rho\perp}(q^2) \\ &= q^2 \sum_{j=0} \frac{\tilde{c}_j}{(4\pi)^2} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^j \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit

$$\tilde{c}_j := \frac{N_c}{2} (c_j + \tilde{z}_1 c_{\perp,j}) \quad . \quad (4.31)$$

Aus der Bedingung  $\tilde{c}_1 = 0$  läßt sich nun  $\tilde{z}_1$  bestimmen:

$$\tilde{z}_1 = \frac{\omega_3 - \omega_1^2}{\omega_1 + \omega_2} \quad . \quad (4.32)$$

In Übereinstimmung mit den Vorhersagen der OPE hängen die Koeffizienten  $\tilde{c}_j \equiv \tilde{c}_j(q^2)$  für  $j \in \{2, 3\}$  im Gegensatz zu den zahlenwertigen SVZ-Entwicklungskoeffizienten  $d_j$  der SVZ-Entwicklung explizit vom Impuls über  $\ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right)$  ab.

<sup>2</sup>Diese zusammen mit (4.21) stellt eine leicht korrigierte Form der Entwicklung in [MEY 94] dar.

In der SVZ-Entwicklung besteht zunächst eine implizite Impulsabhängigkeit über die laufende Kopplung  $\alpha_s(q^2)$  der Form  $\ln^{-1}\left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)$ , die allerdings durch Auswertung von  $\alpha_s(q^2)$  an dem festen Impuls  $q^2 = 1\text{GeV}^2$  vor Ausführung der Boreltransformation unterdrückt wird. Dies motiviert dazu, die Koeffizienten  $\tilde{c}_j(q^2)$  an einem festen Impuls  $q_{fit}$  auszuwerten, der die Gleichungen

$$\frac{\tilde{c}_j(q^2)}{(4\pi)^2} = d_j \quad \text{mit } j \in \{2, 3\} \quad (4.33)$$

mit

$$d_2 = 0.067 \quad \text{und} \quad d_3 = -1.138 \quad (4.34)$$

möglichst gut erfüllt. Die nichttriviale Beobachtung ist die, daß der näherungsweise Gültigkeitsbereich der Gleichungen (4.33),  $\frac{\Lambda^2}{q^2} < 0.10$ , eine brauchbare Konvergenz bzw. Semikonvergenz der Entwicklung (4.30) erwarten läßt. Der Auswertepunkt  $q_{fit}$  für die Koeffizienten wird durch die Minimierung des relativen Fehlerquadrates festgelegt

$$\frac{\partial}{\partial(q^2)} \left\{ \left[ \frac{\frac{1}{(4\pi)^2} \tilde{c}_2(q^2)}{d_2} - 1 \right]^2 + \left[ \frac{\frac{1}{(4\pi)^2} \tilde{c}_3(q^2)}{d_3} - 1 \right]^2 \right\} = 0 \quad , \quad (4.35)$$

der sich hierdurch zu  $q_{fit} = 3.28\Lambda \approx 1\text{GeV}$  ergibt. Mit  $\tilde{c}_{j_{fit}} = \tilde{c}_j(q_{fit}^2)$  erhält man als näherungsweise Entwicklung für die Korrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesonstroms in erweiterter Störungstheorie

$$\Pi_\rho(q^2) \approx \frac{q^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \frac{5}{3} - \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{1}{2} \tilde{c}_{2_{fit}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \tilde{c}_{3_{fit}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^3 \right\} \quad , \quad (4.36)$$

aus der im folgenden mittels des Mechanismus der QCD-Summenregeln die  $\rho$ -Mesonmasse bestimmt wird. Aus Gleichung (2.10), die sich hier in der Form

$$\frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+q^2)^2} = -\frac{d\left(\frac{\Pi_\rho(q^2)}{q^2}\right)}{dq^2} \quad (4.37)$$

schreibt, ergibt sich unter Verwendung der Entwicklung (4.36) die (2.19) entsprechende „Master“-Gleichung:

$$\int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+q^2)^2} = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right) + \tilde{c}_{2_{fit}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^3 + \frac{3}{2} \tilde{c}_{3_{fit}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^4 \right\} \quad . \quad (4.38)$$

Mittels Boreltransformation und Ableitung derselben folgen zwei Summenregeln

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds R(s) e^{-s/M^2} &= \frac{3}{2} M^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \tilde{c}_{2_{fit}} \frac{\Lambda^4}{M^4} + \frac{1}{4} \tilde{c}_{3_{fit}} \frac{\Lambda^6}{M^6} \right\} \quad , \\ \int_0^\infty ds s R(s) e^{-s/M^2} &= \frac{3}{2} M^4 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tilde{c}_{2_{fit}} \frac{\Lambda^4}{M^4} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{3_{fit}} \frac{\Lambda^6}{M^6} \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.39)$$

aus denen man unter Verwendung der erweiterten „narrow width“ Approximation (2.11) für  $R(s)$  auf eine Gleichung für die  $\rho$ -Mesonmasse schließt:

$$m_\rho^2 = M^2 \frac{1 - \left(1 + \frac{s_0}{M^2}\right) e^{-\frac{s_0}{M^2}} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{2fit} \frac{\Lambda^4}{M^4} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{3fit} \frac{\Lambda^6}{M^6}}{1 - e^{-\frac{s_0}{M^2}} + \frac{1}{2} \tilde{c}_{2fit} \frac{\Lambda^4}{M^4} + \frac{1}{4} \tilde{c}_{3fit} \frac{\Lambda^6}{M^6}} \quad (4.40)$$

mit

$$\frac{\tilde{c}_{2fit}}{(4\pi)^2} = 0.07 \quad \text{und} \quad \frac{\tilde{c}_{3fit}}{(4\pi)^2} = -0.06 \quad . \quad (4.41)$$

Abb.(4.3) zeigt die Auswertung der Gleichung (4.40) im Bereich  $M^2 \in [7, 10]\Lambda^2 = [0.6, 0.8]GeV^2$ , der im Rahmen der SVZ-Entwicklung als Überlappungsbereich gedeutet wird. Gegenüber Abb. (2.1) ist die Abweichung für kleiner werdende  $M^2$  als Folge des deutlich zu kleinen Wertes für  $\frac{\tilde{c}_{3fit}}{(4\pi)^2}$  auffällig, mit der Konsequenz, daß sich kein ähnlich überzeugendes Plateau in  $M^2$  ausbildet. Als Ursache kommt zum einen die Wahl der niedrigen Approximationsstufe  $r = 1$  in Frage. Eine Untersuchung in dieser Richtung erfordert aber zunächst die Lösung des vollständigen Selbstkonsistenzproblems in einer höheren Stufe  $r$ . Besonders im Vergleich zur SVZ-Entwicklung in Kapitel 2 kommt als weitere Ursache die Beschränkung auf den Ein-Loop-Beitrag zur Vakuumpolarisation in Frage. Es wird Gegenstand der Untersuchungen von Kapitel 5 sein, in welcher Form Zwei-Loop-Korrekturen berücksichtigt werden können und welchen Einfluß diese in Hinblick auf die Interpretation einer  $\rho$ -Meson-Resonanz ausüben.

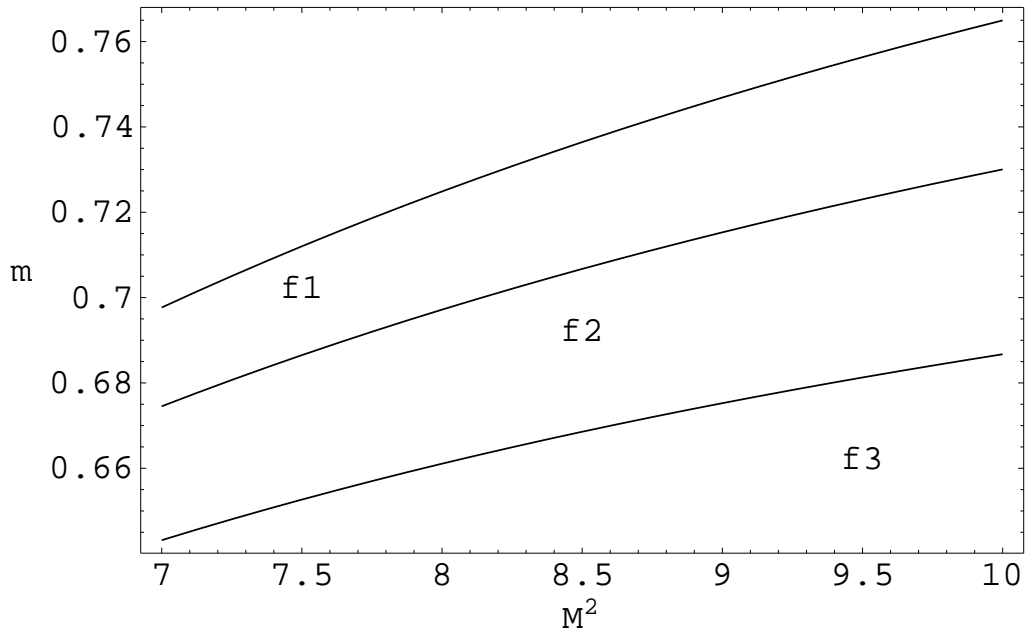


Abb.4.3:  $m \equiv m_\rho$  in  $GeV$  als Funktion von  $M^2$  skaliert in  $\Lambda^2$  für unterschiedliche Werte der Kontinuumschwelle  $s_0$ :

f1:  $s_0 = 1.75 GeV^2$ , f2:  $s_0 = 1.5 GeV^2$ , f3:  $s_0 = 1.25 GeV^2$ .



$$\begin{aligned}
 \Pi_T^{[1,1]}(q^2) = & \text{Diagram 1} \\
 & + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{Diagram 2} \quad \text{WTI} \quad - \text{Diagram 3} \\
 & + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{Diagram 4} \quad + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{Diagram 5} \\
 & - \text{Diagram 6} \quad - \text{Diagram 7}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

### 5.1 Die Counterterm-Graphen

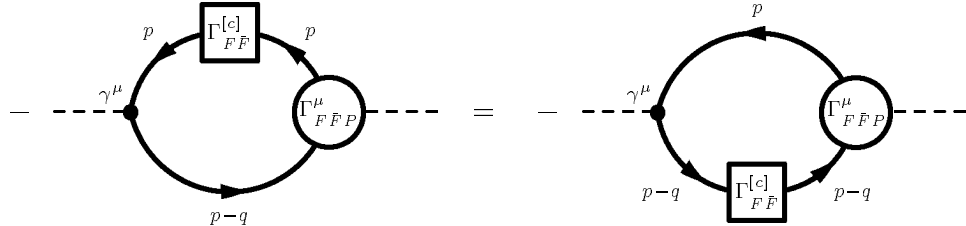
Zunächst erfolgt die Berechnung der Counterterm-Diagramme in (5.3). Aufgrund des Verschwindens der perturbativen Divergenzen der DS-Funktionale auf Ein-Loop-Niveau in Landau-Eichung des inversen Quark-Propagators und des Quark-Photon-Vertex tragen keine perturbativen Counterterme bei. Aus der Fermion-Propagator-Subtraktion

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} \\
 & \quad \quad \quad -1 \\
 & = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3}
 \end{aligned}$$



$$= - \left( A_+ \kappa_+ \frac{1}{\not{p} + \kappa_+} + A_- \kappa_- \frac{1}{\not{p} + \kappa_-} \right) \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) , \quad (5.4)$$

erhält man dessen Anteil an der Vakuumpolarisation zu

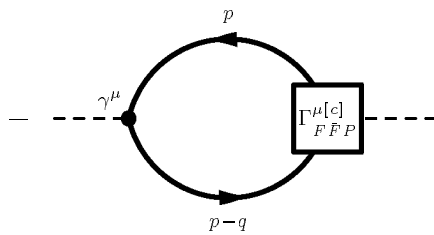


$$= Q_f^2 N_c \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \left( A_+ \kappa_+ \frac{1}{\not{p} + \kappa_+} + A_- \kappa_- \frac{1}{\not{p} + \kappa_-} \right) \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \right. \\ \left. \left[ \gamma^\mu - \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right] \left( \frac{A_+}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right) \right\} \\ = Q_f^2 N_c \left( A_+^2 \kappa_+ \hat{I}(\kappa_+, \kappa_+, \kappa_+) + A_-^2 \kappa_- \hat{I}(\kappa_-, \kappa_-, \kappa_-) \right. \\ \left. + A_+ A_- \kappa_+ \hat{I}(\kappa_+, \kappa_-, \kappa_-) + A_+ A_- \kappa_- \hat{I}(\kappa_-, \kappa_+, \kappa_+) \right) \quad (5.5)$$

mit dem einzigen zusätzlichen Ein-Loop-Basisintegral, das durch Berechnung der Counterterme entsteht:

$$\hat{I}(\kappa_i, \kappa_j, \kappa_k) := \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_i} \frac{1}{\not{p} + \kappa_j} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_k} \right\} . \quad (5.6)$$

Den Beitrag der Vertex-Subtraktion erhält man zu:



$$= Q_f^2 N_c \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \right. \\ \left. \left[ \kappa_3^2 \frac{1}{\not{p} + \kappa_2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_2} \right] \left( \frac{A_+}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right) \right\} \\ = -Q_f^2 N_c A_+ A_- \left\{ I(\kappa_+, \kappa_+) - I(\kappa_+, \kappa_-) - I(\kappa_-, \kappa_+) + I(\kappa_-, \kappa_-) \right\} . \quad (5.7)$$

Mit den Integraldarstellungen aus Anhang 1 erhält man als geschlossene Darstellung für die Summe der Counterterme:

$$\begin{aligned}
 \Pi_T^{[1,0]c}(q^2) &= -2 \text{ --- } \gamma^\mu \text{ --- } \left[ \text{Diagram 1} \right] \text{ --- } \text{Diagram 2} \text{ --- } \gamma^\mu \text{ ---} \\
 &= Q_f^2 N_c \left( 2 \left[ A_+^2 \kappa_+ \hat{I}(\kappa_+, \kappa_+, \kappa_+) + A_-^2 \kappa_- \hat{I}(\kappa_-, \kappa_-, \kappa_-) \right] \right. \\
 &\quad \left. + A_+ A_- \frac{\kappa_- + \kappa_+}{\kappa_- - \kappa_+} \left[ I(\kappa_+, \kappa_+) - I(\kappa_-, \kappa_-) \right] \right) . \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Da  $\hat{I}(\kappa, \kappa, \kappa)$  konvergent ist und  $I(\kappa, \kappa)$  eine masseunabhängige Divergenz ausbildet, verschwindet die Gesamtdivergenz der Counterterm-Diagramme. Die perturbative Divergenz ist demnach nicht verletzt. Da  $I(\kappa, \kappa)$  proportional zu  $q^2$  ist (A.14), bleibt als Nachweis der Erhaltung der Masselosigkeit zu zeigen, daß auch  $\hat{I}(\kappa, \kappa, \kappa)$  für  $q^2 \rightarrow 0$  verschwindet. In der Tat ist nach (A.5):

$$\begin{aligned}
 \hat{I}(\kappa, \kappa, \kappa)(q^2 = 0) &= \frac{8}{3} \kappa \left[ -2\kappa^2 A_{\{3,\kappa\}} + \frac{1}{(4\pi)^2} \right] \\
 &= 0 . \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

## 5.2 Zwei-Loop-Graphen

### 5.2.1 Formulierung der Zwei-Loop-Graphen

Der Zwei-Loop-Graph, der sich aus der Insertion der Propagator-Selbstenergie  $\Sigma(p)$  (3.47) ergibt, lautet:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{T,prop}^{[1,1]}(q^2) &= \text{Diagram} \\
 &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \Sigma(p) \right. \\
 &\quad \left. \left[ A_+ \frac{1}{\not{p} + \kappa_+} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + A_- \frac{1}{\not{p} + \kappa_-} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \sum_{i,j,n_1,n_2=\pm} \left( C_{i,j}^{(1)} A_{n_1} A_{n_2} + C_{i,j}^{(2)} a_{n_1} A_{n_2} \right) I_{i,j,n_1,n_2}^P(q^2) \quad (5.10)$$

mit den Koeffizienten  $C_{i,j}^{(1/2)}$  aus (3.48). Die strukturelle Vereinfachung ist hierbei völlig analog zum Ein-Loop-Beitrag eine Konsequenz der Parameterbeziehungen, die sich aufgrund der Erhaltung der WTI durch  $\Gamma_{FFP}^\mu$  ergeben. Um zu einer einfacheren Darstellung zu gelangen wird die abkürzende Schreibweise

$$\langle\langle \dots \rangle\rangle \quad \text{statt} \quad \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \dots \quad (5.11)$$

eingeführt. Mit dieser schreibt sich das Zwei-Loop-Propagator-Integral:

$$I_{i,j,n_1,n_2}^P(q^2) := I_{i,j,n_1,n_2}^{P_1}(q^2) - I_{i,j,n_1,n_2}^{P_2}(q^2) \quad (5.12)$$

mit

$$\begin{aligned} I_{i,j,n_1,n_2}^{P_1}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_2}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle, \\ I_{i,j,n_1,n_2}^{P_2}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 [k^2 + u_j \Lambda^2]} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_2}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Den zweiten Zwei-Loop-Graphen erhält man durch Insertion von  $\Gamma_{FFP}^{\mu[1,1]}(p, q, p - q)$  (3.52):

$$\begin{aligned} \Pi_{T,vert}^{[1,1]}(q^2) &= \text{Diagramm} \quad \text{WTI} \\ &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \left( \frac{A_+}{\not{p} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} + \kappa_-} \right) \right. \\ &\quad \left. \Gamma_{FFP}^{\mu[1,1]}(p, q, p - q) \left( \frac{A_+}{\not{p} - \not{q} + \kappa_+} + \frac{A_-}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right) \right\} \\ &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \sum_{i,j=\pm} \left\{ C_{i,j}^{(1)} \sum_{n_1,n_2=\pm} A_{n_1} A_{n_2} I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2) \right. \\ &\quad \left. + C_{i,j}^{(2)} \sum_{n_1,n_2=\pm} a_{n_1} A_{n_2} I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2) + a_{n_1} a_{n_2} I_{i,j,n_1,n_2}^{V_b}(q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Zwei-Loop-Vertex-Integrale sind:

$$\begin{aligned} I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2) &= I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,a}}(q^2) - I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,a}}(q^2), \\ I_{i,j,n_1,n_2}^{V_b}(q^2) &= I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,b}}(q^2) - I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,b}}(q^2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit

$$\begin{aligned}
 I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,a}}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle \frac{1}{(p-k)^2 + u_j \Lambda^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{q} + \kappa_i} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle \quad , \\
 I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,a}}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 [k^2 + u_j \Lambda^2]} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{\not{p} - \not{q} - \not{k} + \kappa_i} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle \frac{1}{(p-k)^2 [(p-k)^2 + u_j \Lambda^2]} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} (\not{p} - \not{k}) \frac{1}{\not{k} + \kappa_i} \gamma^\mu \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{\not{k} - \not{q} + \kappa_i} (\not{p} - \not{k}) \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \right\} \rangle\rangle \quad , \\
 I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,b}}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{q} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\lambda \right\} \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle \frac{1}{k^2 + u_j \Lambda^2} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_1}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_2}} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \gamma^\lambda \right\} \rangle\rangle \quad , \\
 I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,b}}(q^2) &= \langle\langle \frac{1}{k^2 [k^2 + u_j \Lambda^2]} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_1}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_2}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{q} - \not{k} + \kappa_i} \not{k} \right\} \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle \frac{1}{k^2 [k^2 + u_j \Lambda^2]} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{n_1}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_{n_2}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k} + \kappa_i} \not{k} \right\} \rangle\rangle \quad .
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

In Abhängigkeit von obigen Integralen kann der gesamte Zwei-Loop-Beitrag der hadronischen Vakuumpolarisation dargestellt werden durch:

$$\begin{aligned}
 \Pi_T^{[1,1]}(q^2) &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \left\{ \sum_{i,j,n_1,n_2=\pm} C_{i,j}^{(1)} A_{n_1} A_{n_2} [2I_{i,j,n_1,n_2}^P(q^2) + I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2)] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i,j,n_1,n_2=\pm} C_{i,j}^{(2)} a_{n_1} [A_{n_2} (2I_{i,j,n_1,n_2}^P(q^2) + I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2)) + a_{n_2} I_{i,j,n_1,n_2}^{V_b}(q^2)] \right\} \quad .
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Nach Ausführung der Spuren ergeben sich die  $I_{i,j,n_1,n_2}^{P/V}$  als Summen über Integrale, die von den Impulsen nur noch über deren Skalarprodukte abhängen.

### Propagator-Integrale

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{P_1}(q^2) = \langle\langle \frac{\text{Tr}_{i,n_1,n_2}^{P_1}(p, k, q)}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2][p^2 + \kappa_{n_2}^2][(p-q)^2 + \kappa_{n_2}^2][k^2 + u_j \Lambda^2][(p-k)^2 + \kappa_i^2]} \rangle\rangle \tag{5.18}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{P_1}(p,k,q) &= tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_1}) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{k} - \kappa_i) \gamma^\lambda (\not{p} - \kappa_{n_2}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_2}) \right\} \\
 &= 4 \left\{ D^2 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2}^2 \kappa_i \right. \\
 &\quad + \left[ (D-2) (2\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + D\kappa_{n_2}^2 + D\kappa_{n_1} \kappa_i) - 2D\kappa_{n_2} \kappa_i \right] p^2 \\
 &\quad - (D-2) (2\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + D\kappa_{n_2}^2) (pk) - (D-2)^2 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} (kq) \\
 &\quad + (D-2) [-D(\kappa_{n_2} \kappa_i + \kappa_{n_1} \kappa_i) + (D-2)\kappa_{n_1} \kappa_{n_2}] (pq) \\
 &\quad + (D-2)^2 [(p^2)^2 - p^2(pq) - p^2(pk) - p^2(kq)] \\
 &\quad \left. + 2(D-2)^2 (pk)(pq) \right\} . \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{P_2}(q^2) = \left\langle \left\langle \frac{Tr_{i,n_1,n_2}^{P_2}(p,k,q)}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2][p^2 + \kappa_{n_2}^2][(p-q)^2 + \kappa_{n_2}^2]k^2[k^2 + u_j \Lambda^2][(p-k)^2 + \kappa_i^2]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.20}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{P_2}(p,k,q) &= tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_1}) \not{k} (\not{p} - \not{k} - \kappa_i) \not{k} (\not{p} - \kappa_{n_2}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_2}) \right\} \\
 &= -4 \left\{ -D\kappa_{n_1} \kappa_{n_2}^2 \kappa_i k^2 + (4\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + 2D\kappa_{n_2}^2) (pk)^2 \right. \\
 &\quad - (2\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + D\kappa_{n_2}^2) (pk)k^2 - (D-2)\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} k^2 (kq) \\
 &\quad - 2(D-2)\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} (pk)(kq) \\
 &\quad + [-2\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} - D\kappa_{n_2}^2 - (D-2)\kappa_{n_1} \kappa_i + 2\kappa_{n_2} \kappa_i] p^2 k^2 \\
 &\quad + (D-2) [-\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + \kappa_{n_1} \kappa_i + \kappa_{n_2} \kappa_i] k^2 (pq) \\
 &\quad + (D-2) [-p^2 k^2 (pk) - 2p^2 (pk)^2 - p^2 k^2 (kq) + 2p^2 (pk)(kq) \\
 &\quad \quad \left. - (p^2)^2 k^2 + 2k^2 (pk)(pq) - 4(pk)^2 (pq) + p^2 k^2 (pq)] \right\} . \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

## Vertex-Integrale

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,a}}(q^2) = \left\langle \left\langle \frac{Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{1,a}}(p,k,q)}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2][(p-q)^2 + \kappa_{n_2}^2][k^2 + \kappa_i^2][(k-q)^2 + \kappa_i^2][(p-k)^2 + u_j \Lambda^2]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.22}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{1,a}}(p,k,q) &= tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_1}) \gamma^\lambda (\not{k} - \kappa_i) \gamma^\mu (\not{k} - \not{q} - \kappa_i) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_2}) \right\} \\
 &= 4 \left\{ -D(D-2)\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} \kappa_i^2 \right. \\
 &\quad \left. - (D-2)^2 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} k^2 - 2(D+1)\kappa_{n_2} \kappa_i (pk) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ (D-2)^2 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + 2D \kappa_{n_1} \kappa_i \right] (kq) \\
 & + \left[ (D-2)^2 \kappa_{n_1} \kappa_i - (D^2 - 6D + 4) \kappa_{n_2} \kappa_i \right] (pq) \\
 & - (D-2)^2 \kappa_i^2 p^2 - (D-2)^2 \kappa_{n_1} \kappa_i q^2 \\
 & + 4(D-2) \left[ -(pk)^2 + (pk)(kq) + (pk)(pq) - 4(pq)(kq) \right] \\
 & + (D-2)(D-4) \left[ -p^2 k^2 + p^2(kq) + k^2(pq) - (pk)q^2 \right] \Big\} .
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,a}}(q^2) = \left\langle \left\langle \frac{Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{2,a}}(p,k,q)}{\left[ p^2 + \kappa_{n_1}^2 \right] \left[ (p-q)^2 + \kappa_{n_2}^2 \right] \left[ k^2 + \kappa_i^2 \right] \left[ (k-q)^2 + \kappa_i^2 \right] (p-k)^2 \left[ (p-k)^2 + u_j \Lambda^2 \right]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.24}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{2,a}}(p,k,q) & = tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_1}) (\not{p} - \not{k}) (\not{k} - \kappa_i) \gamma^\mu (\not{k} - \not{q} - \kappa_i) (\not{p} - \not{k}) (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_2}) \right\} \\
 & = -4 \left\{ (D-2) \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} \kappa_i^2 (k^2 - 2(pk) + p^2) \right. \\
 & \quad D \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} (k^2)^2 - [-2D \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + 2(\kappa_{n_1} + \kappa_{n_2}) \kappa_i] k^2 (pk) \\
 & \quad + 4 \left[ \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} - \kappa_{n_1} \kappa_i - \kappa_{n_2} \kappa_i + \kappa_i^2 \right] (pk)^2 \\
 & \quad - (D \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + 2 \kappa_{n_1} \kappa_i) k^2 (kq) \\
 & \quad + \left[ 2(D-2) \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + 2D \kappa_{n_1} \kappa_i - 2(D-2) \kappa_{n_2} \kappa_i - 4 \kappa_i^2 \right] (pk)(kq) \\
 & \quad - 2(D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i (kq)^2 + (D-4) (\kappa_{n_1} \kappa_{n_2} + \kappa_i^2) p^2 k^2 \\
 & \quad + 2 \left[ (\kappa_{n_1} + \kappa_{n_2}) \kappa_i - D \kappa_i^2 \right] p^2 (pk) \\
 & \quad + \left[ -(D-4) \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} - 2(D-1) \kappa_{n_1} \kappa_i + 2(D-2) \kappa_{n_2} \kappa_i + 4 \kappa_i^2 \right] p^2 (kq) \\
 & \quad + D \kappa_i^2 (p^2)^2 - 2(D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i (pq)^2 + (D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i p^2 q^2 \\
 & \quad - 2(D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i (pk) q^2 + (D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i k^2 q^2 + 4(D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i (pq)(kq) \\
 & \quad + \left[ 4 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} - (D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i + (D-4) \kappa_{n_2} \kappa_i - (D-4)^2 \kappa_i^2 \right] k^2 (pq) \\
 & \quad + \left[ -4 \kappa_{n_1} \kappa_i + 4 \kappa_{n_2} \kappa_i + 2(D-2) \kappa_i^2 \right] (pk)(pq) \\
 & \quad + \left[ (D-2) \kappa_{n_1} \kappa_i - D \kappa_{n_2} \kappa_i - D \kappa_i^2 \right] p^2 (pq) \\
 & \quad + (D-2) \left[ (k^2)^2 p^2 - 2p^2 k^2 (pk) - p^2 k^2 (kq) \right. \\
 & \quad \quad + 2p^2 (pk) kq - 2p^2 (kq)^2 + (p^2)^2 k^2 \\
 & \quad \quad - (p^2)(kq) - (k^2)^2 (pq) + 2k^2 (pk)(pq) \\
 & \quad \quad + 2k^2 (pq)(kq) - k^2 p^2 (pq) + 2p^2 (pq)(kq) \\
 & \quad \quad \left. - 2k^2 (pq)^2 - k^2 (pk) q^2 + 2p^2 k^2 q^2 - p^2 (pk) q^2 \right] \Big\} .
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{1,b}}(q^2) = \left\langle \left\langle \frac{Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{1,b}}(p,k,q)}{\left[ p^2 + \kappa_{n_2}^2 \right] \left[ (p-q)^2 + \kappa_{n_1}^2 \right] \left[ k^2 + u_j \Lambda^2 \right] \left[ (p-k)^2 + \kappa_i^2 \right]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.26}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{1,b}}(p,k,q) &= -tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_1}) \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_2}) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{k} - \kappa_i) \gamma^\lambda \right\} \\
 &= 4 \left\{ D^2 \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} \kappa_i \right. \\
 &\quad + (pk) \left[ -D(D-2)\kappa_{n_1} + (D-2)^2 \kappa_{n_2} \right] \\
 &\quad - (kq)(D-2)^2 \kappa_{n_2} \\
 &\quad + p^2 \left[ D(D-2)\kappa_{n_1} - (D-2)^2 \kappa_{n_2} + D(D-2)\kappa_i \right] \\
 &\quad \left. + (pq) \left[ (D-2)^2 \kappa_{n_2} - D(D-2)\kappa_i \right] \right\} .
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$I_{i,j,n_1,n_2}^{V_{2,b}}(q^2) = \left\langle \left\langle \frac{Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{2,b}}(p,k,q)}{\left[ p^2 + \kappa_{n_2}^2 \right] \left[ (p-q)^2 + \kappa_{n_1}^2 \right] k^2 \left[ k^2 + u_j \Lambda^2 \right] \left[ (p-k)^2 + \kappa_i^2 \right]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.28}$$

mit der Spur:

$$\begin{aligned}
 Tr_{i,n_1,n_2}^{V_{2,b}}(p,k,q) &= -tr \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} - \kappa_{n_1}) \gamma^\mu (\not{p} - \kappa_{n_2}) \not{k} (\not{p} - \not{k} - \kappa_i) \not{k} \right\} \\
 &= -4 \left\{ -k^2 D \kappa_{n_1} \kappa_{n_2} \kappa_i \right. \\
 &\quad + k^2 (pk) \left[ (D-2)\kappa_{n_2} - D\kappa_{n_1} \right] \\
 &\quad + (pk)^2 2 \left[ D\kappa_{n_1} - (D-2)\kappa_{n_2} \right] \\
 &\quad - k^2 (kq)(D-2)\kappa_{n_2} + (pk)(kq) 2(D-2)\kappa_{n_2} \\
 &\quad + p^2 k^2 \left[ D\kappa_{n_1} + (D-2)\kappa_{n_2} - (D-2)\kappa_i \right] \\
 &\quad \left. + k^2 (pq)(D-2)(-\kappa_{n_2} + \kappa_i) \right\} .
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

## 5.2.2 Berechnung der Zwei-Loop-Graphen

Zur Auswertung der Integrale (5.18),(5.20), (5.22) und (5.24) sind nach Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k_r^2 \left[ k_r^2 + u_j \Lambda^2 \right]} = \frac{1}{u_j \Lambda^2} \left( \frac{1}{k_r^2} - \frac{1}{\left[ k_r^2 + u_j \Lambda^2 \right]} \right) ; k_r^2 = k^2, (p-k)^2 \tag{5.30}$$

Zwei-Loop-Integrale mit  $m_i^2 \in \{\kappa_+^2, \kappa_-^2, u_+ \Lambda^2, u_- \Lambda^2\}$  der folgenden Gestalt zu berechnen:

$$\left\langle \left\langle \frac{(p^2)^{\beta_1} (k^2)^{\beta_2} (pq)^{\beta_3} (kq)^{\beta_4} (pk)^{\beta_5}}{\left[ p^2 + m_1^2 \right]^{\alpha_{1,0}} \left[ p^2 + m_3^2 \right]^{\alpha_{1,1}} \left[ k^2 + m_2^2 \right] \left[ (p-q)^2 + m_3^2 \right] \left[ (k-q)^2 + m_2^2 \right]^{\alpha_4} \left[ (p-k)^2 + m_5^2 \right]} \right\rangle \right\rangle \tag{5.31}$$

mit

$$\text{Propagator-Integrale} : \alpha_{1,0} = \alpha_{1,1} = 1 \vee \alpha_{1,0} = 0, \alpha_{1,1} = 2, \quad \alpha_4 = 0 \quad ,$$

$$\text{Vertex-Integrale} : \alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 0, \quad \alpha_4 = 1 \quad ,$$

$$\beta_1 \leq \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} + 1, \quad \beta_4 \leq \alpha_4 + 1 \quad \text{sonst} \quad \beta_i \leq 2 \quad . \quad (5.32)$$

Die Integrale (5.31) werden durch einen Reduktions-Mechanismus, ähnlich dem in Anhang B für Zwei-Loop-Integrale ohne äußeren Impuls, auf einen Satz von Basisintegralen zurückgeführt. Zum einen treten Produkte von Ein-Loop-Integralen auf, die in Anhang A angegeben sind

$$\begin{aligned} A_{\{\alpha, m\}} &= \left\langle \frac{1}{[p^2 + m^2]^\alpha} \right\rangle , \\ B_{\{\alpha, m_1\}, \{1, m_2\}} &= \left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2]^\alpha [(p - q)^2 + m_2^2]} \right\rangle , \end{aligned} \quad (5.33)$$

zum anderen die Zwei-Loop-Basisintegrale, die in Anhang C auf numerisch zu berechnende Feynmanparameterintegrale zurückgeführt werden

$$\begin{aligned} J_{\{\alpha, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}} &:= \left\langle \left\langle \frac{1}{[(p - q)^2 + m_1^2]^\alpha [k^2 + m_2^2] [(p - k)^2 + m_3^2]} \right\rangle \right\rangle , \\ V_{\{1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{1, m_4\}} &:= \left\langle \left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2] [(p - q)^2 + m_2^2] [k^2 + m_3^2] [(p - k)^2 + m_4^2]} \right\rangle \right\rangle , \\ F_{\{1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{1, m_4\}, \{1, m_5\}} &:= \\ &\left\langle \left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2] [k^2 + m_2^2] [(p - q)^2 + m_3^2] [(k - q)^2 + m_4^2] [(p - k)^2 + m_5^2]} \right\rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (5.34)$$

und die ( $q^2 = 0$ )-Zwei-Loop-Basisintegrale, die in Anhang B angegeben sind:

$$\begin{aligned} K_{\{\alpha, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}} &= J_{\{\alpha, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}(q^2 = 0) \\ &= \left\langle \left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2]^\alpha [k^2 + m_2^2] [(p - k)^2 + m_3^2]} \right\rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (5.35)$$

mit  $\alpha \in \{1, 2\}$ .

Im ersten Reduktionsschritt werden die Skalarprodukte unterschiedlicher Impulse  $k_1 k_2 \in \{pq, pk\}$  und im Fall der Vertex-Integrale auch  $k_1 k_2 = kq$  ersetzt:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= \frac{1}{2} \left( k_1^2 + k_2^2 + m^2 - [(k_1 - k_2)^2 + m^2] \right) \\ (k_1 k_2)^2 &= -\frac{1}{2} (k_1 k_2) [(k_1 - k_2)^2 + m^2] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( k_1^2 + k_2^2 + m^2 - [(k_1 - k_2)^2 + m^2] \right) (k_1^2 + k_2^2 + m^2) \end{aligned} \quad (5.36)$$



mit den jeweiligen Massenquadraten  $m^2 \in \{m_3^2, m_4^2, m_5^2\}$ .

Im zweiten Schritt erfolgt die Ersetzung der Impulsquadrate durch die entsprechenden Nennerfaktoren:

$$\begin{aligned} k^2 &= [k^2 + m_2^2] - m_2^2 \\ (k^2)^2 &= k^2[k^2 + m_2^2] - m_2^2[k^2 + m_2^2] + m_2^4 \\ p^2 &= [p^2 + m_1^2] - m_1^2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Im Fall der Propagator-Integrale ist zudem zu ersetzen

$$\begin{aligned} (p^2)^2 &= [p^2 + m_1^2][p^2 + m_3^2] - m_1^2[p^2 + m_3^2] - m_3^2[p^2 + m_1^2] + m_1^2 m_3^2 \quad , \\ (p^2)^3 &= p^2[p^2 + m_1^2][p^2 + m_3^2] - (m_1^2 + m_3^2)[p^2 + m_1^2][p^2 + m_3^2] \\ &\quad + m_1^4[p^2 + m_3^2] + m_3^2(m_3^2 + m_1^2)[p^2 + m_1^2] - m_1^4 m_3^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

und im Fall der Vertex-Integrale:

$$(p^2)^2 = p^2[p^2 + m_1^2] - m_1^2[p^2 + m_1^2] + m_1^4 \quad (5.39)$$

Nach Kürzung der Nennerfaktoren  $[p^2 + m_1^2], \dots, [(p - k)^2 + m_5^2]$  und im Fall der Propagator-Integrale mit  $m_1^2 \neq m_3^2$  auch nach der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{[p^2 + m_1^2][p^2 + m_3^2]} = \frac{1}{m_1^2 - m_3^2} \left( \frac{1}{[p^2 + m_3^2]} - \frac{1}{[p^2 + m_1^2]} \right) \quad (5.40)$$

verbleiben in der Entwicklung der Integrale (5.31) neben den Basisintegralen (5.33), (5.34) und (5.35) Schleifenintegrale mit zunächst nicht weiter reduzierbaren Zähler. Diese werden im dritten Reduktionsschritt auf die Basisintegrale zurückgeführt. Die meisten hiervon lassen sich durch Variablentransformation oder Ausnutzung einfacher Symmetrien wie beispielsweise

$$\begin{aligned} &\langle\langle \frac{p^2}{[(p - q)^2 + m_3^2][(k - q)^2 + m_4^2][(p - k)^2 + m_5^2]} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \frac{p^2 + q^2}{[p^2 + m_3^2][k^2 + m_4^2][(p - k)^2 + m_5^2]} \rangle\rangle \\ &= (q^2 - m_3^2)K_{\{1, m_5\}, \{1, m_4\}, \{1, m_3\}} + A_{\{1, m_4\}} A_{\{1, m_5\}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

umwandeln. Die übrigen teilen sich auf in zwei Typen von Spezialintegralen. Zum einen sind dies die Integrale mit Zählerstrukturen, die mit den bisherigen Standardmethoden nicht weiter reduziert werden können (Typ 1). Die Grundtypen mit

$\alpha_1 = 0, 1, 2$  und  $\alpha_4 = 0, 1$  lauten:

$$\begin{aligned}
F_{\{\alpha_1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, 0, \{1, m_5\}}^{0,0,0,1,0} &= \left\langle\left\langle \frac{kq}{[p^2 + m_1^2]^{\alpha_1} [k^2 + m_2^2] [(p-q)^2 + m_3^2] [(p-k)^2 + m_5^2]} \right\rangle\right\rangle, \\
F_{0, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{\alpha_4, m_4\}, \{1, m_5\}}^{1,0,0,0,0} &= \left\langle\left\langle \frac{p^2}{[k^2 + m_2^2] [(p-q)^2 + m_3^2] [(k-q)^2 + m_4^2]^{\alpha_4} [(p-k)^2 + m_5^2]} \right\rangle\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Die Spezialintegrale von Typ 2 sind Zwei-Schleifenintegrale, deren Zähler bereits vollständig ausreduziert sind, die sich aber dennoch durch die Basisintegrale aus Anhang A und C darstellen lassen:

$$\begin{aligned}
F_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_1\}, 0, \{1, m_5\}}^{0,0,0,0,0} &= \left\langle\left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2]^2 [k^2 + m_2^2] [(p-q)^2 + m_3^2] [(p-k)^2 + m_5^2]} \right\rangle\right\rangle, \\
F_{\{1, 0\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, 0, \{1, m_5\}}^{0,0,0,0,0} &= \left\langle\left\langle \frac{1}{p^2 [k^2 + m_2^2] [(p-q)^2 + m_3^2] [(p-k)^2 + m_5^2]} \right\rangle\right\rangle, \\
F_{\{2, 0\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, 0, \{1, m_5\}}^{0,0,0,0,0} &= \left\langle\left\langle \frac{1}{[p^2]^2 [k^2 + m_2^2] [(p-q)^2 + m_3^2] [(p-k)^2 + m_5^2]} \right\rangle\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Der Algorithmus zur Reduzierung auch solcher Typen von Schleifenintegralen wurde von Tarasov [TAR 96] entwickelt. Die obigen Bezeichnungen der Zwei-Loop-Integrale folgen der dort eingeführten allgemeinen Notation:

$$\begin{aligned}
F_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}, \{\alpha_4, m_4\}, \{\alpha_5, m_5\}}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5} &= \\
&\left\langle\left\langle \frac{(p^2)^{\beta_1} (k^2)^{\beta_2} (pq)^{\beta_3} (kq)^{\beta_4} (pk)^{\beta_5}}{[p^2 + m_1^2]^{\alpha_1} [k^2 + m_2^2]^{\alpha_2} [(p-q)^2 + m_3^2]^{\alpha_3} [(k-q)^2 + m_4^2]^{\alpha_4} [(p-k)^2 + m_5^2]^{\alpha_5}} \right\rangle\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Die Implementierung dieses Algorithmus unter *Mathematica*, allerdings im Minkowskischen, findet man als Freeware-Version *TARCER.nb* auf der Homepage *Mathematica.com*. Die Darstellung dieser Integrale in Abhängigkeit von den Basisintegralen ist im Anhang D angegeben.

Der vollständige Rekursionsmechanismus zur Rückführung aller Zwei-Loop-Integrale (5.31) und somit auch des Zwei-Loop-Beitrags (5.17) zur hadronischen Vakuumpolarisation auf die Basisintegrale (5.33), (5.34) und (5.35) wird in der regelbasierten Computersprache *Mathematica* implementiert und ausgeführt. Man kann den Zwei-Loop-Beitrag schließlich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \Pi_T^{[1,1]}(q^2) &= \frac{Q_f^2}{D-1} \frac{N_c^2 - 1}{2} \\ &\left\{ \sum_{i,j,n_1,n_2} C_{ij}^{(1)} A_{n_1} A_{n_2} \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) \right. \\ &\quad \left. \sum_{i,j,n_1,n_2} C_{ij}^{(2)} a_{n_1} a_{n_2} \left( \Pi_T^{[1,1]b}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) + \kappa_2 \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) \right) \right\} \quad (5.45) \end{aligned}$$

mit den Basisgrößen

$$\begin{aligned} \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) &:= 2I_{i,j,n_1,n_2}^P(q^2) + I_{i,j,n_1,n_2}^{V_a}(q^2) \quad , \\ \Pi_T^{[1,1]b}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) &:= -\kappa_{n_2} \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_1,n_2}(q^2) + I_{i,j,n_1,n_2}^{V_b}(q^2) \quad , \end{aligned} \quad (5.46)$$

die im Anhang E angegeben sind.

Zum Nachweis der Erhaltung der Masselosigkeit des Photons auf Zwei-Loop-Niveau muß gezeigt werden, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} -2I_{i,j,n_1,n_1}^P(0) &= I_{i,j,n_1,n_1}^{V_a}(0) \quad , \\ \kappa_{n_2} \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_1,n_2}(0) &+ \kappa_{n_1} \Pi_T^{[1,1]a}{}_{i,j,n_2,n_1}(0) \\ &= I_{i,j,n_1,n_1}^{V_b}(0) + I_{i,j,n_1,n_2}^{V_b}(0) + I_{i,j,n_2,n_1}^{V_b}(0) + I_{i,j,n_2,n_2}^{V_b}(0) \end{aligned} \quad (5.47)$$

erfüllt sind, aus denen  $\Pi_T^{[1,1]}(0) = 0$  folgt. Der Nachweis gelingt mit dem im Anhang B formulierten zweistufigen Reduktionsverfahren zur Lösung der  $I_{i,j,n_1,n_2}^{P/V}(q^2 = 0)$ -Integrale, das ebenfalls in *Mathematica* implementiert und ausgeführt wird. Die  $(q^2 = 0)$ -Integrale werden hierbei zurückgeführt auf die analytisch bekannten Ein-Loop-Integrale  $A_{\{\alpha,m\}}$  und das  $(q = 0)$ -„Master“-Integral  $K_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_3\}}$ , für das ebenfalls eine analytische Darstellung gefunden werden kann. Die zu (5.47) beitragenden Größen sind in Anhang F angegeben.

Da die  $I$ -Integrale für  $\Lambda \rightarrow 0$  die perturbative Gestalt annehmen, kann man aus der Darstellung des Zwei-Loop-Selbstenergie-Beitrages (5.17) und der Ausführung der Koeffizienten-Summen

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,n_1,n_2=\pm} C_{i,j}^{(1)} A_{n_1} A_{n_2} &= \sum_{i,j=\pm} C_{i,j}^{(1)} = 1 \quad , \\ \sum_{n_1,n_2=\pm} a_{n_1} A_{n_2} &= \sum_{n_1,n_2=\pm} a_{n_1} a_{n_2} = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

allgemein schließen, daß die perturbative Divergenz (3.16) erhalten ist. In der Tat beobachtet man in Abb.(5.1), daß neben dem exakten Verschwinden der  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  Divergenz der Koeffizient des  $\frac{1}{\varepsilon}$  divergenten Beitrags für große  $q^2$  gegen denjenigen der

perturbativen Divergenz konvergiert, der das Grenzverhalten für große euklidische Impulse darstellt:

$$\frac{\Pi_T^{[1,1]}{}_{div}(q^2)}{q^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{\Pi_T^{[1]pert}{}_{div}(q^2)}{q^2} = \frac{1}{(4\pi)^4} Q_f^2 (N_c^2 - 1) \frac{1}{\varepsilon} \quad . \quad (5.49)$$

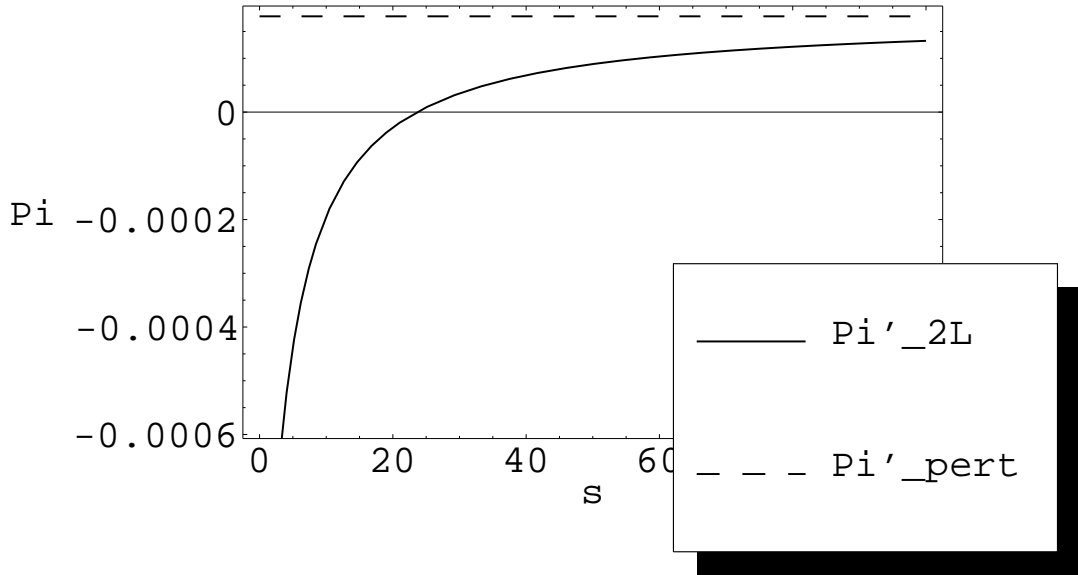


Abb.5.1: Koeffizient der  $\frac{1}{\varepsilon}$  Divergenz im Vergleich zur perturbativen Divergenz

Zum Studium der Modifikation der nichtperturbativen nullten Ordnung durch den divergenten nichtperturbativen Zwei-Loop-Beitrag

$$g_0^2 \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \Pi_T^{[1,1]}{}_{npdiv}(q^2) := g_0^2 \left( \Pi_T^{[1,1]}{}_{div}(q^2) - \Pi_T^{[1]pert}{}_{div}(q^2) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(4\pi)^2}{\beta_0} \Pi_T^{[1,1]}{}_{npdiv}(q^2) \quad (5.50)$$

wird diese in Abb.(5.2) im Vergleich zum Counterterm-Beitrag  $\Pi_T^{[1,0]c}(q^2)$  (5.8) und dem nichtperturbativen Ein-Loop-Beitrag  $\Pi_T^{[1,0]}{}_{reg}(q^2) \equiv \Pi_T^{[1,0]l=1}{}_{reg}(q^2)$  über  $s = \frac{q^2}{\Lambda^2}$  aufgetragen. Abb.(5.3) kann man entnehmen, daß sich die Zwei-Loop-Korrektur fast vollständig mit dem Counterterm-Beitrag weghebt und sich vom numerischen Standpunkt nur eine minimale Korrektur der nichtperturbativen nullten Ordnung

$$\Pi_T^{[1,0]l=2}{}_{reg}(q^2) = \Pi_T^{[1,0]l=1}{}_{reg}(q^2) + \Pi_T^{[1,0]l=2}{}_{reg}(q^2) \quad (5.51)$$

durch

$$\Pi_T^{[1,0]l=2}{}_{reg}(q^2) = \frac{(4\pi)^2}{\beta_0} \Pi_T^{[1,1]}{}_{npdiv}(q^2) + \Pi_T^{[1,0]c}(q^2) \quad (5.52)$$

ergibt.

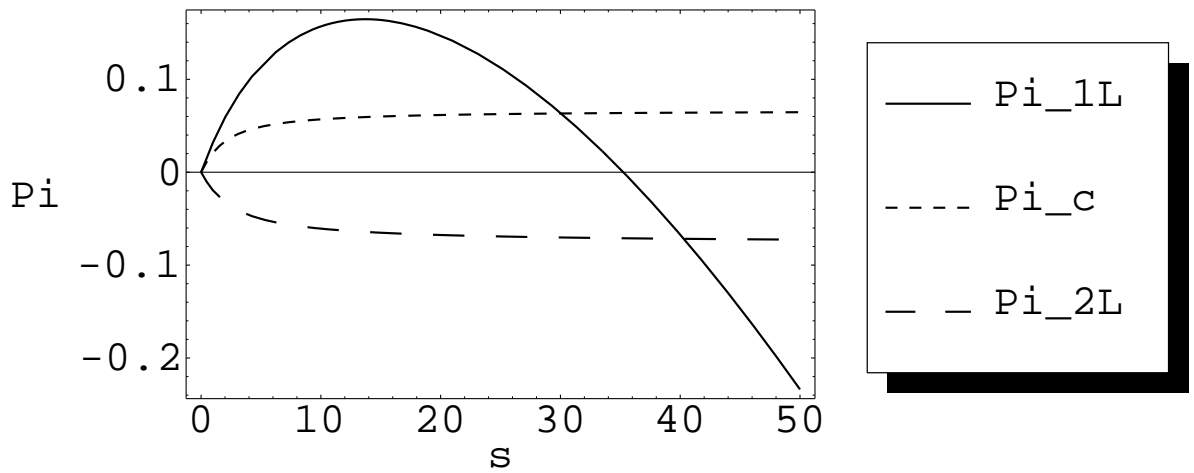


Abb.5.2: Der Ein-Loop-Beitrag  $\Pi_T^{[1,0]l=1}$  im Vergleich zur Zwei-Loop-Korrektur  $\frac{(4\pi)^2}{\beta_0} \Pi_T^{[1,1]}_{npdiv}$  und dem Counterterm-Beitrag  $\Pi_T^{[1,0]c}$

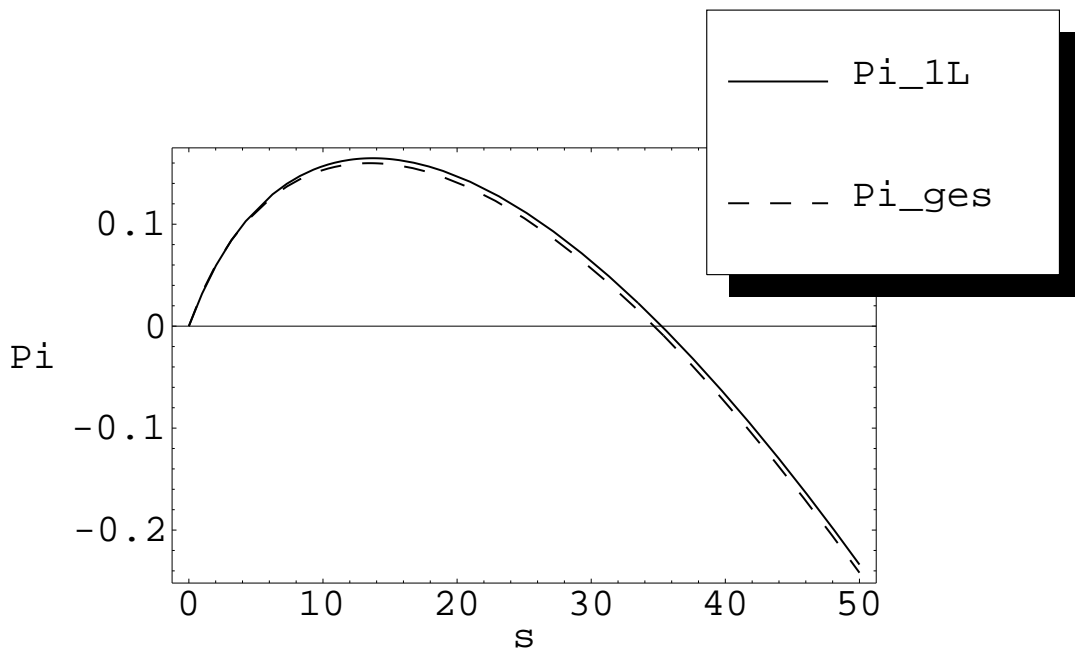


Abb.5.3: Aufgetragen ist  $\Pi_T^{[1,0]l=2}$  im Vergleich zu  $\Pi_T^{[1,0]l=1}$

Abb.(5.4) zeigt die numerische Auswertung des endlichen  $g^2$ -Beitags  $\Pi_{T_{reg}}^{[1,1]}(q^2)$ , der für große euklidische Impulse in die perturbative Lösung  $\Pi_{T_{reg}}^{[1]pert}(q^2)$  (3.16) konvergiert.

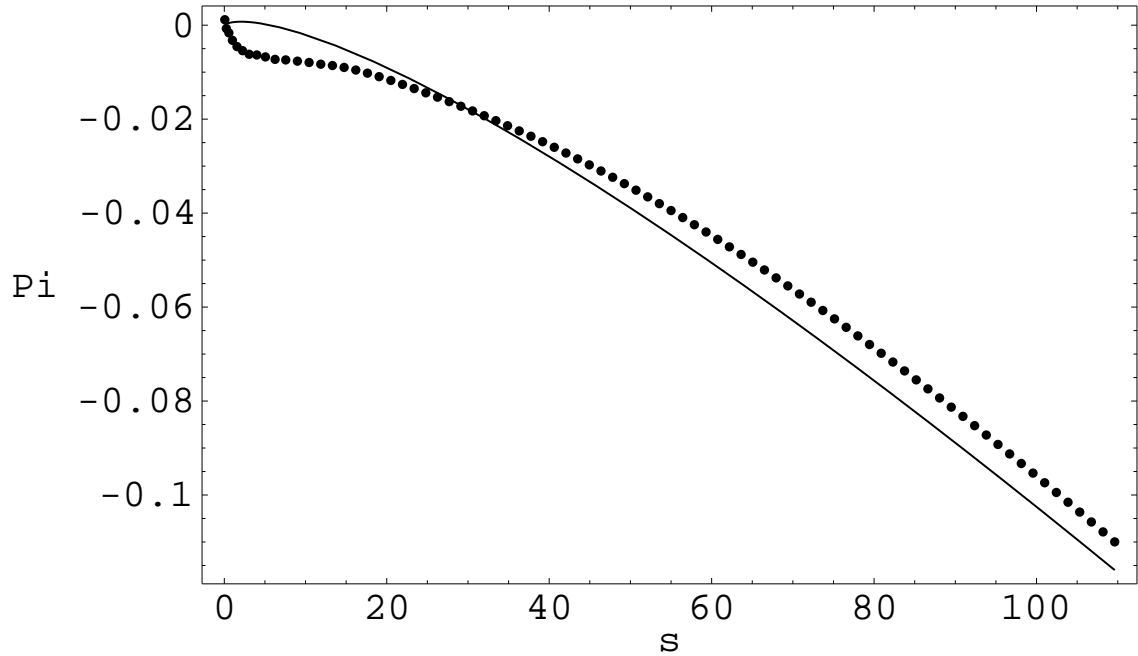


Abb.5.4: Aufgetragen ist  $\frac{\Pi_{T_{reg}}^{[1,1]}(q^2)}{\Lambda^2}$  (gepunktet) über  $s := \frac{q^2}{\Lambda^2}$  gegen die entsprechende perturbative Größe (durchgezogene Linie).

Die Korrektur der perturbativen Lösung im Infrarotbereich erkennt man deutlicher noch in Abb. (5.5), in der  $\Pi'_{T_{reg}}(q^2) := \frac{\Pi_{T_{reg}}(q^2)}{q^2}$  mit der entsprechend definierten perturbativen Lösung aufgetragen ist. Dabei ist zu beachten, daß das perturbative Resultat für  $s \rightarrow 0$  die übliche logarithmische Singularität besitzt, während das nichtperturbativ korrigierte für  $s \rightarrow 0$  einem in der Figur nicht mehr darstellbaren, aber *endlichen* Wert zustrebt.

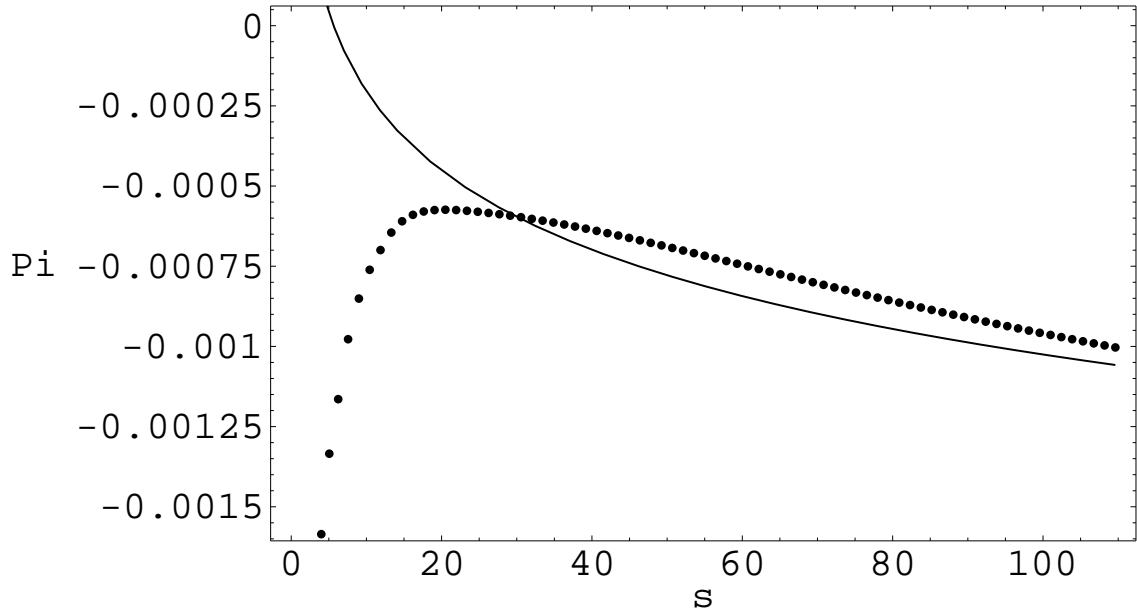


Abb.5.5: Aufgetragen ist  $\frac{\Pi_{Treg}^{(1,1)}(q^2)}{q^2}$  (gepunktet) über  $s := \frac{q^2}{\Lambda^2}$  gegen die entsprechende perturbative Größe (durchgezogene Linie).

### 5.3 Auswertung der Ergebnisse

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist erneut Gleichung (4.17), welche die  $\rho$ -Meson-Korrelationsfunktion zur Vakuumpolarisation in Beziehung setzt:

$$\Pi_\rho(q^2) = Z_\rho \Pi_T(q^2) \quad \text{mit} \quad Z_\rho = \frac{9}{10} \quad . \quad (5.53)$$

Die direkte Beobachtung von Resonanzen im Minkowskischen erfordert, wie schon betont, eine unendliche Teilsummutation von Graphen, wie sie beispielsweise von der Bethe-Salpeter-Gleichung für die  $T_4$ -Amplitude geleistet wird. Eine Alternative stellt die Padéfortsetzung in der laufenden Kopplung  $g^2$  dar. Für die Korrelationsfunktion des  $\rho$ -Mesons erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi_\rho^{[1,1]^{l=2}}(q^2) &= \Pi_\rho^{[1,0]^{l=2}}(q^2) + g^2 \Pi_\rho^{[1,1]^{l=2}}(q^2) \\ &\xrightarrow{\text{Padé}} \frac{(\Pi_\rho^{[1,0]^{l=2}}(q^2))^2}{\Delta(q^2)} \end{aligned} \quad (5.54)$$

mit dem als Fredholmnenner aufzufassenden

$$\Delta(q^2) = \Pi_\rho^{[1,0]^{l=2}}(q^2) - g^2 \Pi_\rho^{[1,1]^{l=2}}(q^2) \quad . \quad (5.55)$$

Da der tatsächliche Kopplungswert für kleine  $q^2$  nicht bekannt ist, wird in Abb. (5.6) der Fredholmnenner  $\Delta(s)$  über  $s_M = -q_E^2$  für unterschiedliche Werte der Kopplung  $g^2$  aufgetragen.

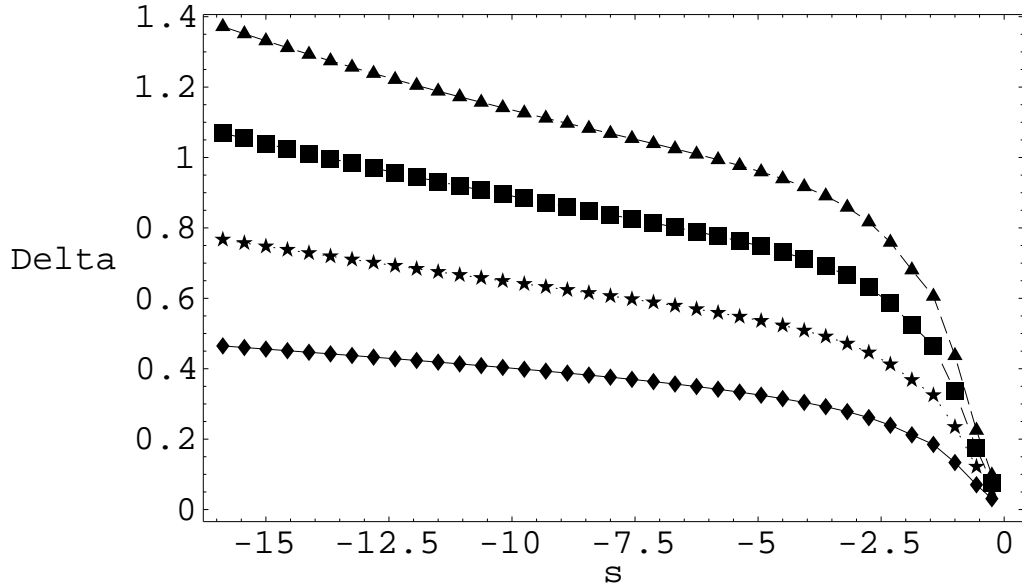


Abb.5.6: Fredholmnenner  $\Delta(s)$  über  $s_M = -q_E^2$  von unten nach oben für aufsteigende Werte der Kopplung  $g^2 = \{2.5, 5, 7.5, 10\}$

In der betreffenden Region der Fredholmdeterminanten bilden sich keine Minima oder gar Nullstellen aus. Es muß demnach die Konsequenz gezogen werden, daß die im Rahmen dieser Arbeit gewonnen Ergebnisse für die Vakuumpolarisation bei kleinen Energien keinen Rückschluß auf eine  $\rho$ -Meson-Resonanz zulassen.

Im folgenden soll untersucht werden, ob sich durch indirekten Vergleich der Resonanzregion mit  $\Pi_{Treg}^{[1,1]l=2}(q^2)$  analog zur *SVZ*-Methode bei höheren Energien eine  $\rho$ -Meson-Resonanz andeutet. Für die Vakuumpolarisation

$$\Pi_{Treg}^{[1,1]l=2}(q^2) = \Pi_{Treg}^{[1,0]l=2}(q^2) + g^2 \Pi_{Treg}^{[1,1]l=2}(q^2) \quad (5.56)$$

wird (4.21) und (4.28) folgend eine für große  $q^2$  gültige  $\frac{\Lambda^2}{q^2}$ -Entwicklung mit  $\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)$ -abhängigen Koeffizienten angesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi_{Tit}^{[1,p]}(q^2) = q^2 \left\{ \right. & c_0^{[1,p]} \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) + c_0^{[1,p]} + c_1^{[1,p]} \frac{\Lambda^2}{q^2} \\ & + c_2^{[1,p]} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^2 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) + c_2^{[1,p]} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^2 \\ & \left. + c_3^{[1,p]} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^3 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) + c_3^{[1,p]} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^3 \right\} . \quad (5.57) \end{aligned}$$

Die Verwendung der *SVZ*-Methode bietet sich an, da sie einen durch die Boreltransformation vermittelten Vergleich der Resonanzregion mit dem tief euklidischen



Sektor ermöglicht, von dem man sich erhofft, daß die nichtperturbativ erweiterte Störungstheorie hier eher als für kleine  $q^2$  bereits in  $r = 1$  eine quantitativ gute Approximation darstellt. Gegenüber einer rein numerischen Behandlung bietet das Verfahren nach Bestimmung der Koeffizienten  $c_i^{[1,p]}$  und  $c_i'^{[1,p]}$  den Vorteil der analytischen Durchführbarkeit und der größeren Transparenz auch im Hinblick auf die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen des ursprünglichen *SVZ*-Mechanismus.

Es sei an dieser Stelle betont, daß daher zwar auch in dieser Arbeit die semiempirische Resonanzkurve mit einer  $\Lambda^2/q_E^2$ -Entwicklung verglichen wird, jetzt allerdings grundsätzlich der Vorteil besteht, keine empirisch anzupassenden Kondensate mehr ausführen zu müssen. Tatsächlich stellt der Ansatz (5.57) gegenüber der *SVZ*-Entwicklung noch eine Erweiterung dar, die außer in den perturbativen Termen keine logarithmischen Abhängigkeiten besitzt, ist aber für  $\Pi_T^{[1,1]}$  vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet auch nicht der allgemeinste mögliche Ansatz, da dieser zusätzlich  $\ln^2\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)$ -Abhängigkeiten besitzen kann. Der Ansatz (5.57) bietet aber gerade neben dem, bei geeigneter Koeffizientenwahl, sehr guten Erfassen des Kurvenverlaufs die Möglichkeit, den *SVZ*-Mechanismus inklusive der Boreltransformation zur indirekten  $\rho$ -Meson-Resonanz-Untersuchung anwenden zu können. (Abhängigkeiten vom Typ  $\ln^p\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)$  mit  $p \geq 2$  lassen sich i.a. nicht analytisch transformieren).

Die Koeffizienten  $c_0^{[1,p]}$  und  $c_0'^{[1,p]}$  sind aus den perturbativen Resultaten bekannt. Man benötigt in diesem Zusammenhang nur die Beziehung

$$-Z_\rho \left( c_0'^{[1,0]} + c_0'^{[1,1]} \right) = \frac{1}{8\pi^2} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) . \quad (5.58)$$

Die nichtperturbativen Koeffizienten  $c_i^{[1,p]}$  und  $c_i'^{[1,p]}$  erhält man durch eine Standardfitroutine in Abhängigkeit vom Intervall, in dem die Funktion approximiert werden soll. Für das Intervall  $\frac{q^2}{\Lambda^2} \in [4, 100]$  erhält man die Werte:

$$\begin{aligned} c_1^{[1,0]} &= -0.03845 & , c_2^{[1,0]} &= +0.03007 & , c_2'^{[1,0]} &= +0.01543 & , \\ c_3^{[1,0]} &= -0.00913 & , c_3'^{[1,0]} &= -0.03845 & , \\ c_1^{[1,1]} &= +0.02446 & , c_2^{[1,1]} &= +3.32721 & , c_2'^{[1,1]} &= -1.00926 & , \\ c_3^{[1,1]} &= -0.42815 & , c_3'^{[1,1]} &= -5.47545 & . \end{aligned} \quad (5.59)$$

Die Entwicklung (5.57) wird wie in Gleichung (4.37) mit einem Ansatz für die Resonanzregion, der die  $\rho$ -Mesonmasse als Parameter enthält, gleichgesetzt. Durch Boreltransformation  $\hat{B}$  (2.58) wird ein Überlappungsbereich in  $\frac{q^2}{\Lambda^2} \xrightarrow{\hat{B}} \frac{M^2}{\Lambda^2}$  der beiden Seiten der Gleichung geschaffen. Wie beim *SVZ*-Mechanismus wird die laufende Kopplung erst nach Ausführung der Boreltransformation ausgewertet.

Die Boreltransformation kann durch die inverse Laplacetransformation  $\mathcal{L}^{-1}$  dargestellt werden:

$$f(q^2) := \mathcal{L} \left\{ F \left( \frac{1}{M^2} \right) \right\} = \int_0^\infty d \left( \frac{1}{M^2} \right) F \left( \frac{1}{M^2} \right) e^{-\frac{q^2}{M^2}} , \quad (5.60)$$

$$\hat{B}f(q^2) = \frac{1}{M^2} F\left(\frac{1}{M^2}\right) \quad . \quad (5.61)$$

Hiermit findet man die zweite neben (2.59) benötigte Beziehung:

$$\hat{B} \frac{\ln(q^2)}{(q^2)^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\beta-1} - \gamma_E + \ln(M^2) \right) \frac{1}{(M^2)^\beta} \quad . \quad (5.62)$$

Dem SVZ-Mechanismus (4.37) ... (4.40) folgend erhält man für die  $\rho$ -Mesonmasse

$$m_\rho^2 = M^2 \frac{\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{s_0}{M^2}\right) e^{-s_0/M^2}\right] + 8\pi^2 Z_\rho f_1(M^2)}{\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \left[1 - e^{-s_0/M^2}\right] + 8\pi^2 Z_\rho f_2(M^2)} \quad (5.63)$$

mit

$$\begin{aligned} f_1(M^2) &= \left[(-1 + \gamma_E)c'_2 - c_2\right] \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^2 + \left[-\frac{3}{2} + \gamma_E\right]c'_3 - c_3 + \frac{1}{3}c'_2 \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^3 \\ &\quad - c'_2 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^3 - c'_3 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^4 + \frac{1}{2}c'_3 \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^4 \quad , \\ f_2(M^2) &= c_1 \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \left[(-1 + \gamma_E)c'_2 - c_2\right] \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2} + \gamma_E\right]c'_3 - c_3 \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^3 \\ &\quad + c'_2 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^2 + c'_3 \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^3 \quad (5.64) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_i &= c_i^{[1,0]} + 4\pi\alpha_s c_i^{[1,1]} \quad , \\ c'_i &= c'_i{}^{[1,0]} + 4\pi\alpha_s c'_i{}^{[1,1]} \quad . \end{aligned} \quad (5.65)$$

Setzt man die Kopplung zunächst auf Null, um die quasi-perturbativen Korrekturen der Ordnung  $g^2$  abzuschalten, so erhält man eine  $m_\rho(M^2)$ -Abhängigkeit, die auch bei Variation des Approximationsintervalls stabil bleibt. In Abb.(5.7), die den durch die Boreltransformation vermittelten Überlappungsbereich der „Master“-Gleichung (4.37) zeigt, ist  $m_\rho$  gegen  $M^2$  speziell für den Koeffizientensatz (5.59) aufgetragen. Interessanterweise ähnelt der Verlauf dem in Abb.(4.3), obwohl hier keinerlei Fit an phänomenologische Daten vorgenommen wurde. Insbesondere stimmt der Größenbereich, in dem die Kurven verlaufen, (man beachte den unterdrückten Nullpunkt) erneut sehr gut mit dem tatsächlichen Bereich in Abb.(2.1) überein. Ein Plateau allerdings, das den Rückschluß auf eine  $\rho$ -Mesonresonanz zulassen würde, bildet sich nicht aus.

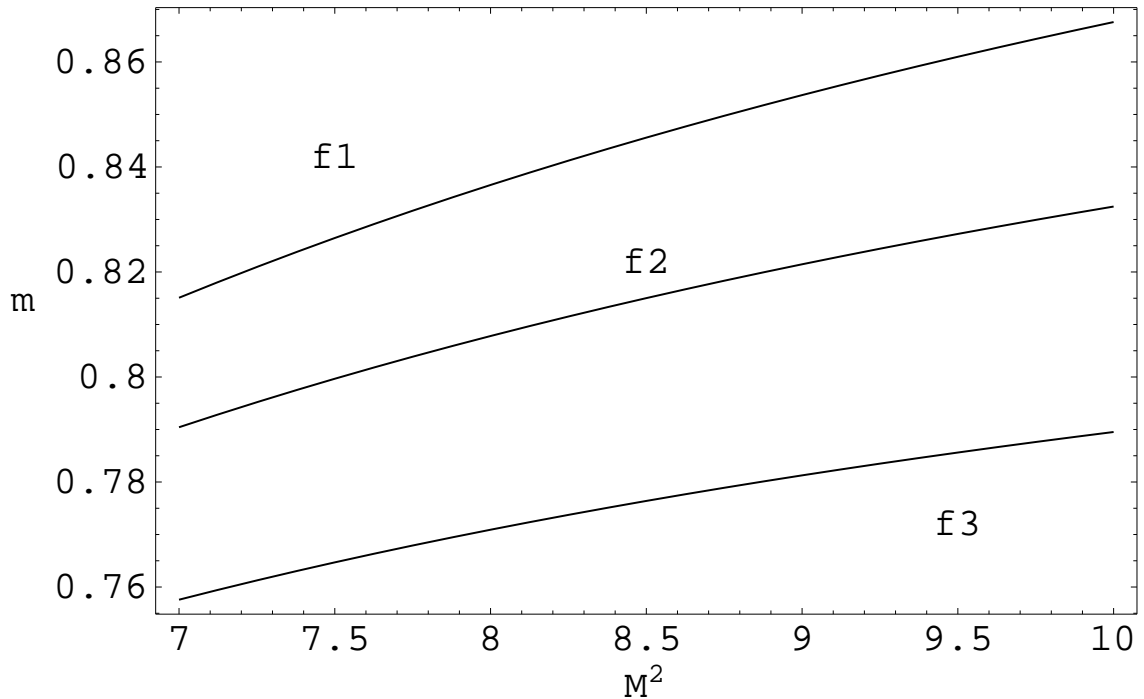


Abb.5.7:  $m \equiv m_\rho$  in  $GeV$  als Funktion von  $M^2$  skaliert in  $\Lambda^2$  für unterschiedliche Werte der Kontinuumschwelle  $s_0$ :

f1:  $s_0 = 1.75 GeV^2$ , f2:  $s_0 = 1.5 GeV^2$ , f3:  $s_0 = 1.25 GeV^2$ .

Die Erwartung, daß die Zwei-Loop-Beiträge die gewünschte Korrektur für kleine  $M^2$  liefern, bestätigt sich nicht. Vielmehr zeigt sich, daß zum einen  $m_\rho(M^2)$  von der Wahl des Approximationsintervalls abhängt und zum anderen die Korrektur des Kurvenverlaufs in Abb.(5.7) durch die Zwei-Loop-Beiträge in keinem Fall klein ist. Da dies aus physikalischer Sicht zu keinem sinnvollen Ergebnis führt, muß auf eine graphische Darstellung verzichtet werden.

Die Vertexfunktionen in erweiterter Störungstheorie kann man auffassen als Fortsetzungen der perturbativen Vertizes aus dem tief euklidischen Sektor in den Bereich kleinerer Energien. Qualitativ sind sie bereits in Stufe  $r = 1$  globale Approximanten der eigentlichen Vertizes, quantitativ ist allerdings zu erwarten, daß sie erst mit steigendem Approximationsgrad  $r$  brauchbare Näherungen hin zu immer kleineren Energien darstellen. Es besteht daher die begründete Hoffnung, daß eine Korrektur des Kurvenverlaufs in Abb. (5.7) durch Erhöhung des Approximationsgrades  $r$  bei Beibehaltung der Ein-Loop-Ordnung erreicht werden kann.

Bei der Behandlung der Zwei-Loop-Terme war der Erfüllung der Ward-Identitäten oberste Priorität eingeräumt worden. Vor dem Hintergrund, daß hiermit die Erhaltung der perturbativen Divergenz und der Masselosigkeit des Photons garantiert ist, erscheint dies als naheliegender und vertretbarer Ansatz. Das Scheitern im Hinblick auf die Untersuchung der  $\rho$ -Meson-Resonanz legt allerdings den Schluß nahe,

daß besonders die Behandlung der Zwei-Loop-Beiträge eine höhere rationale Approximationsstufe erfordert, mit der die Ward-Identitäten sukzessive mit steigendem Approximationsgrad besser erfüllt werden können.

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen, im Rahmen einer nichtperturbativ erweiterten Störungstheorie einen Mechanismus zu etablieren, der die Untersuchung der  $\rho$ -Meson-Resonanz ermöglicht.

Hierbei zeigten die Ein-Loop-Resultate für die Vakuumpolarisation bereits eine vielversprechende Fortsetzung der rein perturbativen Größe aus dem tief euklidischen Sektor hin zu kleineren Impulsüberträgen. Dennoch konnte auf deren Basis durch indirekten Vergleich mit einem phänomenologischen Ansatz für die Resonanzregion im Sinne von Shifman, Vainshtein und Zakharov noch kein Rückschluß auf die Existenz einer  $\rho$ -Meson-Resonanz gezogen werden.

Die Mitnahme der Zwei-Loop-Beiträge hat vor allem die Frage aufgeworfen, in welcher Form die Ward-Takahashi-Identitäten (WTI) zu behandeln sind, deren Erfüllung die Erhaltung der perturbativen Divergenz und der Masselosigkeit des Photons garantiert. In dieser Arbeit wurde anstelle der vollständigen Entwicklung des Zwei-Loop-Beitrages durch Dyson-Schwinger-Iteration die exakte Erfüllung der WTI in erster Stufe der rationalen Approximation umgesetzt. Auffälligstes Resultat ist, daß sich nur eine minimale Modifikation der nichtperturbativen nullten Ordnung aufgrund der Zwei-Loop-Beiträge ergibt. Ebenso wie diese nullte Ordnung zeigt auch die quasi-perturbative Korrektur erster Ordnung die erwartete „weiche“ analytische Fortsetzung der nur im Hochenergiebereich gültigen rein perturbativen Lösung hin zu kleineren Energien. Jedoch war weder der Versuch der direkten „Beobachtung“ der  $\rho$ -Meson-Resonanz mittels Padé-Fortsetzung erfolgreich, noch konnte durch Vergleich mit dem *SVZ*-Ansatz für die Resonanzregion auf die Resonanz geschlossen werden.

Eine Verbesserung der Resultate hinsichtlich der Untersuchung der  $\rho$ -Meson-Resonanz ist nur durch Berücksichtigung einer höheren Stufe  $r$  der rationalen Approximation zu erwarten, was eine entsprechende vollständige Lösung des Selbstkonsistenzproblems verlangt. Da hierbei die Anzahl der Vertexparameter mit  $r^3$  anwächst, während die Anzahl der Selbstkonsistenzgleichungen nur mit  $r^2$  steigt [KUH 97], können und müssen weitere Randbedingungen einbezogen werden. Neben der zu erwartenden quantitativ besseren Fortsetzung hin zu kleineren Energien ermöglicht dieses, die Zwei-Loop-Beiträge durch Dyson-Schwinger-Iteration zu be-

stimmen und dabei mit steigendem Approximationsgrad  $r$  die WTI nicht exakt, aber schrittweise besser zu erfüllen.

# Anhang A

## Ein-Loop-Basisintegrale

Im Rahmen der dimensionellen Regularisierung wird man beim Auswerten der Feynmanintegrale nach Einführung der Feynman-Parametrisierung auf die Standardformel der euklidischen D-dimensionalen Impulsraumintegration geführt:

$$\begin{aligned} I_0^{\alpha,\beta}(m^2) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\beta}{[p^2 + m^2]^\alpha} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \beta - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma(\alpha)} [m^2]^{\frac{D}{2} + \beta - \alpha} . \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Alle endlichen Anteile werden in ihrer Form nach dem Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  angegeben. Die durch den Renormierungsprozess eingeführte Massenskala  $\nu$  wird auf  $\Lambda$  gesetzt. Der divergente Anteil bildet mit der vor die Integrale gezogenen willkürlichen Massenskala  $\nu_0^{2\varepsilon}$  den Faktor  $\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon}$  aus.

Dieser geht im Falle einer perturbativen Divergenz im Rahmen des Renormierungsprozesses über in

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon} \rightarrow \left(\frac{\Lambda}{\nu}\right)^{-2\varepsilon} \rightarrow 1 . \quad (\text{A.2})$$

Im Falle einer nichtperturbativen Divergenz liefert dieser Faktor zusammen mit der starken Kopplung  $g_0^2$  eine Modifikation der nullten Ordnung in  $g^2$ .

In dieser Arbeit werden speziell die Integrale  $A_{\{\alpha,m\}} = I_0^{\alpha,0}(m^2)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  verwendet:

$$A_{\{1,m\}} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \Lambda^{-2\varepsilon} m^2 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \gamma_E - \ln(4\pi) - 1 + \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] m^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) , \quad (\text{A.3})$$

$$A_{\{2,m\}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \Lambda^{-2\varepsilon} + \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ -\gamma_E + \ln(4\pi) + \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) , \quad (\text{A.4})$$

$$A_{\{3,m\}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2m^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) . \quad (\text{A.5})$$

Das zweite und ansonsten einzige Ein-Loop-Basisintegral ist:

$$B_{\{\alpha_1, m_1\}\{\alpha_2, m_2\}} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{[p^2 + m_1^2]^{\alpha_1} [(p-q)^2 + m_2^2]^{\alpha_2}} . \quad (\text{A.6})$$

Es werden folgende Spezialfälle benötigt:

$$\begin{aligned} B_{\{1, m_1\}\{1, m_2\}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \Lambda^{-2\varepsilon} - B_{\{1, m_1\}\{1, m_2\}}^{reg} , \\ B_{\{1, m\}\{2, m\}} &= B_{\{1, m\}\{2, m\}}^{reg} . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die regulären Anteile stellen sich dar als:

$$\begin{aligned} B_{\{1, m_1\}\{1, m_2\}}^{reg} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_E - \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right) \right. \\ &+ \ln\left(\frac{m_1^2}{\Lambda^2}\right) \frac{1 + \frac{m_2^2}{q^2} - \frac{m_1^2}{q^2}}{2} + \ln\left(\frac{m_2^2}{\Lambda^2}\right) \frac{1 + \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}}{2} - 2 \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\left(\frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}\right)^2} \\ &\left. \ln \left[ \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}\right)^2}\right)^2 - \left(\frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}\right)^2}{\left(-1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}\right)^2}\right)^2 - \left(\frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}\right)^2} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Im Fall gleicher Massen vereinfacht sich dies zu:

$$\begin{aligned} B_{\{1, m\}\{1, m\}}^{reg} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) - 2 \right. \\ &+ \left. \sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2}{q^2}\right)} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2}{q^2}\right)}}{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2}{q^2}\right)}} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$B_{\{2, m\}\{1, m\}}^{reg} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{q^2 \sqrt{1 + 4\frac{m^2}{q^2}}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2}{q^2}\right)}}{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{m^2}{q^2}\right)}} \right] \right\} . \quad (\text{A.10})$$

Mit diesem Satz an „eentlichen“ Basisintegralen läßt sich nun eine andere Klasse von Basisintegralen darstellen, aus denen man mittels Linearkombination die Lösung der hadronischen Vakuumpolarisation auf Ein-Loop-Niveau und die Subtraktionsgraphen der Zwei-Loop-Beiträge erhält:

$$I(\kappa_+, \kappa_-) = \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_+} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{D-1} \left[ 2(D-2)(q^2 + \kappa_+^2 + \kappa_-^2) - 4D\kappa_+\kappa_- \right] B_{\{1,\kappa_+\}\{1,\kappa_-\}} - 2(D-2) \left( A_{\{1,\kappa_+\}} + A_{\{1,\kappa_-\}} \right) \\
 &= \frac{4}{3} q^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \Lambda^{-2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + 2 \left( \frac{\kappa_+}{q} - \frac{\kappa_-}{q} \right)^2 \right) + I^{reg}(\kappa_+, \kappa_-) \quad , \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I^{reg}(\kappa_+, \kappa_-) &= \frac{1}{(4\pi)^2} q^2 \frac{4}{3} \left\{ \left( 1 + 2 \left( \frac{\kappa_+}{q} - \frac{\kappa_-}{q} \right)^2 \right) \left( -\gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \left( \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \left( 7 \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} + \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right) - 26 \frac{\kappa_+\kappa_-}{q^2} \right) + \frac{\kappa_-^2}{q^2} \ln \left( \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right) - \frac{\kappa_+^2}{q^2} \ln \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} \right) \\
 &\quad - \left( 1 + \frac{\kappa_-^2}{q^2} + \frac{\kappa_+^2}{q^2} - \frac{\kappa_+\kappa_-}{q^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} \right) \left( \frac{1 - \frac{\kappa_+^2}{q^2} + \frac{\kappa_-^2}{q^2}}{2} \right) + \ln \left( \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right) \left( \frac{1 - \frac{\kappa_-^2}{q^2} + \frac{\kappa_+^2}{q^2}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2 \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} + \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right)} \ln \frac{\left( 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} + \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right)} \right)^2 - \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} - \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right)^2}{\left( -1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} + \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right)} \right)^2 - \left( \frac{\kappa_+^2}{q^2} - \frac{\kappa_-^2}{q^2} \right)^2} \right] \right\} . \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

Man beachte hier besonders, daß sowohl divergenter als auch regulärer Anteil den Gesamtfaktor  $q^2$  ausbilden. Im Fall gleicher Massen vereinfacht sich dieser Ausdruck:

$$I(\kappa, \kappa) = \frac{4}{3} q^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \Lambda^{-2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} + I^{reg}(\kappa, \kappa) \quad , \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned}
 I^{reg}(\kappa, \kappa) &= \frac{4}{3} q^2 \left\{ -\gamma_E + \ln(4\pi) + \frac{5}{3} - \ln \left( \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} \right) - 4 \left( \frac{\kappa^2}{q^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 - 2 \frac{\kappa^2}{q^2} \right) \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa^2}{q^2}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa^2}{q^2}}}{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa^2}{q^2}}} \right) \right\} . \quad (A.14)
 \end{aligned}$$

Das folgende Integral  $\tilde{I}$  tritt bei der Berechnung der Ein-Loop-Selbstenergie nur in Kombinationen auf, in denen sich die Divergenzen wegheben, so daß keine Trennung von konvergenten und divergenten Anteilen vorgenommen werden muß:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(\kappa_+, \kappa_-) &= \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa_+} \frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{p} - \not{p} \gamma^\mu) \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa_-} \right\} \\
 &= -2(\kappa_+ - \kappa_-) \left( A_{\{1,\kappa_+\}} - A_{\{1,\kappa_-\}} \right) - 2(\kappa_+ + \kappa_-) \left[ q^2 + (\kappa_+ - \kappa_-)^2 \right] B_{\{1,\kappa_+\}\{1,\kappa_-\}} . \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

Das Integral  $\hat{I}(\kappa, \kappa, \kappa)$  ist das einzige zusätzliche Ein-Loop-Integral, das bei der Berechnung der Subtraktionen auftritt. Es bildet keine Divergenz aus:

$$\hat{I}(\kappa, \kappa, \kappa) = \frac{1}{D-1} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \kappa} \frac{1}{\not{p} + \kappa} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \kappa} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{D-1} \left\{ 4\kappa \left( (D-2)q^2 - 4\kappa^2 \right) B_{\{2,\kappa\}\{1,\kappa\}} + 8\kappa B_{\{1,\kappa\}\{1,\kappa\}} - 4\kappa(D-2)A_{\{2,\kappa\}} \right\} \\
 &= \frac{8}{3}\kappa \left[ \left( q^2 - 2\kappa^2 \right) B_{\{2,\kappa\}\{1,\kappa\}}^{reg} + B_{\{1,\kappa\}\{1,\kappa\}}^{reg} - A_{\{2,\kappa\}}^{reg} + \frac{1}{(4\pi)^1} \right] . \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

Im Fall unterschiedlicher Massen gilt:

$$\hat{I}(\kappa_i, \kappa_j, \kappa_j) = \frac{1}{\kappa_j - \kappa_i} \left( I(\kappa_j, \kappa_j) - I(\kappa_i, \kappa_j) \right) . \quad (\text{A.17})$$

# Anhang B

## $(q = 0)$ -Rekursionsmechanismus

Dargestellt wird ein Reduktionsmechanismus zur Lösung von Zwei-Loop-Selbstenergie-Integralen ohne äußeren Impuls:

$$\left\langle\left\langle \frac{\{1, p^2, (pk), (p^2)^2, p^2(pk), (pk)^2, p^2k^2, p^2(pk)^2\}}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2]^{\alpha_{1.1}} [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^{\alpha_{1.2}} [k^2]^{\alpha_{2.1}} [k^2 + u_j \Lambda^2]^{\alpha_{2.2}} [(p-k)^2 + \kappa_i^2]^{\alpha_3}} \right\rangle\right\rangle \quad (\text{B.1})$$

mit  $\alpha_{1.1}, \alpha_{2.2} = 1; \alpha_{2.1} \in \{0, 1\}; \alpha_{1.2}, \alpha_3 \in \{1, 2\}$ . Zu beachten ist, daß die Zählerstruktur  $p^2(pk)^2$  nur zusammen mit  $\alpha_{1.2} = 2$  auftritt. Zunächst werden diese in einem mehrschrittigen Reduktionsverfahren auf die Basisintegrale

$$A_{\{\alpha, m\}} = \left\langle \frac{1}{[p^2 + m^2]^\alpha} \right\rangle, \quad (\text{B.2})$$

$$K_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}} = \left\langle\left\langle \frac{1}{[p^2 + m_1^2]^{\alpha_1} [k^2 + m_2^2]^{\alpha_2} [(p-k)^2 + m_3^2]^{\alpha_3}} \right\rangle\right\rangle \quad (\text{B.3})$$

reduziert mit  $\{m, m_1, m_2, m_3\} \in \{\kappa_{n_1}, \kappa_{n_2}, \kappa_i, u_j \Lambda^2\}$  im nichtperturbativen Fall und mit  $m = m_1 = m_3, m_2 = 0$  im perturbativen.

Im ersten Schritt ersetzt man:

$$(pk) = \frac{1}{2} [p^2 + k^2 - (p-k)^2] \quad . \quad (\text{B.4})$$

Im Fall  $\alpha_3 = 1$  ist  $(pk)^2$  allerdings zu ersetzen durch:

$$(pk)^2 \rightarrow \frac{1}{4} [p^2 + k^2 - (p-k)^2] [p^2 + k^2 + \kappa_i^2], \quad (\text{B.5})$$

wobei die Differenz auf ein aus Symmetriegründen verschwindendes Integral führt. Es bleiben folgende Integraltypen zu reduzieren, die von den Impulsen nur noch über deren Quadrate abhängen:

$$\left\langle\left\langle \frac{\{(p^2)^{\gamma_1} (k^2)^{\gamma_2} ((p-k)^2)^{\gamma_3}\}}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2]^{\alpha_{1.1}} [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^{\alpha_{1.2}} [k^2]^{\alpha_{2.1}} [k^2 + u_j \Lambda^2]^{\alpha_{2.2}} [(p-k)^2 + \kappa_i^2]^{\alpha_3}} \right\rangle\right\rangle \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\gamma_1 \leq \alpha_{1.1} + \alpha_{1.2}; \quad \gamma_2 \leq \alpha_{2.1} + \alpha_{2.2} + 1; \quad \gamma_3 \leq \alpha_3 \quad . \quad (\text{B.7})$$

Im Fall  $\gamma_2 = \alpha_{2.1} + \alpha_{2.2} + 1$  ist zu ersetzen:

$$\begin{aligned} (k^2)^2 &= [k^2 + u_j \Lambda^2] k^2 - k^2 u_j \Lambda^2 \\ &\rightarrow [k^2 + u_j \Lambda^2] (p^2 + (p - k)^2) - k^2 u_j \Lambda^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Durch die anschließende Ersetzungen

$$\begin{aligned} k^2 &= [k^2 + u_j \Lambda^2] - u_j \Lambda^2 \\ (p - k)^2 &= [(p - k)^2 + \kappa_i^2] - \kappa_i^2 \\ p^2 &= [p^2 + \kappa_{n_1}^2] - \kappa_{n_1}^2 \\ (p^2)^2 &= [p^2 + \kappa_{n_1}^2] [p^2 + \kappa_{n_2}^2] - \kappa_{n_1}^2 [p^2 + \kappa_{n_2}^2] - \kappa_{n_2}^2 [p^2 + \kappa_{n_1}^2] + \kappa_{n_1}^2 \kappa_{n_2}^2 \\ (p^2)^3 &= [p^2 + \kappa_{n_1}^2] [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^2 - (2\kappa_{n_2}^2 + \kappa_{n_1}^2) [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^2 \\ &\quad + 3\kappa_{n_2}^4 [p^2 + \kappa_{n_1}^2] + 2\kappa_{n_2}^6 \kappa_{n_1}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

werden die Zähler der Integrale vollständig ausreduziert und es verbleiben Integrale der Form:

$$\langle\langle \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2]^{\alpha_{1.1}} [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^{\alpha_{1.2}} [k^2]^{\alpha_{2.1}} [k^2 + u_j \Lambda^2]^{\alpha_{2.2}} [(p - k)^2 + \kappa_i^2]^{\alpha_3}} \rangle\rangle \quad (\text{B.10})$$

mit  $\alpha_{1.1}, \alpha_{2.1}, \alpha_{2.2}, \alpha_3 \in \{0, 1\}$  und  $\alpha_{1.2} \in \{0, 1, 2\}$  .

Im letzten Schritt des ersten Reduktionsabschnittes werden diese Integrale durch Partialbruchzerlegung auf die Basisintegrale  $A_{\{\alpha, m\}}$  und  $K_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}}$  zurückgeführt. Im nichtperturbativen Fall zerlegt man zunächst:

$$\frac{1}{k^2 [k^2 + u_j \Lambda^2]} = \frac{1}{u_j \Lambda^2} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{[k^2 + u_j \Lambda^2]} \right) \quad . \quad (\text{B.11})$$

Für  $\kappa_{n_1} \neq \kappa_{n_2}$  ist zudem zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2] [p^2 + \kappa_{n_2}^2]} &= \frac{1}{\kappa_{n_1}^2 - \kappa_{n_2}^2} \left( \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_2}^2]} - \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2]} \right) \\ \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2] [p^2 + \kappa_{n_2}^2]^2} &= \frac{1}{\kappa_{n_1}^2 - \kappa_{n_2}^2} \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_2}^2]^2} \\ &\quad - \frac{1}{(\kappa_{n_1}^2 - \kappa_{n_2}^2)^2} \left( \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_2}^2]} - \frac{1}{[p^2 + \kappa_{n_1}^2]} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Im zweiten Reduktionsabschnitt werden ihrerseits die  $K_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}}$  reduziert auf die analytisch bekannten  $A_{\{\alpha, m\}}$  und ein ( $q=0$ )-„Master“-Integral  $K_{\{1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}$ , für das ebenfalls eine analytisch geschlossene Form gefunden werden kann. Ausgenutzt wird hierbei

$$K_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{0, m_3\}} = A_{\{\alpha_1, m_1\}} A_{\{\alpha_2, m_2\}} \quad (\text{B.13})$$

und entsprechende Gleichungen für  $\alpha_1 = 0$  bzw.  $\alpha_2 = 0$ . Der Rekursionsalgorithmus lautet [DT 93]:

$$\begin{aligned} K_{\{\alpha_1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}} &= \frac{1}{(\alpha_1 - 1)m_1^2 \lambda} \\ &\left\{ \left[ \alpha_2 (m_1^2 - m_3^2) (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) + \alpha_3 (m_1^2 - m_2^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Dm_1^2 (-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + (\alpha_1 - 1)\lambda \right] K_{\{\alpha_1 - 1, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) \left[ K_{\{\alpha_1 - 1, m_1\}, \{\alpha_2 + 1, m_2\}, \{\alpha_3 - 1, m_3\}} - K_{\{\alpha_1 - 2, m_1\}, \{\alpha_2 + 1, m_2\}, \{\alpha_3, m_3\}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 m_3^2 (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) \left[ K_{\{\alpha_1 - 1, m_1\}, \{\alpha_2 - 1, m_2\}, \{\alpha_3 + 1, m_3\}} - K_{\{\alpha_1 - 2, m_1\}, \{\alpha_2, m_2\}, \{\alpha_3 + 1, m_3\}} \right] \right\} \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda = -2 (m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) + (m_1^4 + m_2^4 + m_3^4) \quad . \quad (\text{B.15})$$

Das am einfachsten zu berechnende Integral dieser Klasse ist allerdings  $K_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}$ . Mittels Feynmanparametrisierung ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}} &= \frac{1}{2(4\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - 2\gamma_E - 2 \ln \left( \frac{m_1^2}{4\pi} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 + \frac{\pi^2}{6} + 2\gamma_E^2 - 2\gamma_E + 2 \ln^2 \left( \frac{m_1^2}{4\pi} \right) + 2(2\gamma_E - 1) \ln \left( \frac{m_1^2}{4\pi} \right) - 2j_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}(q^2 = 0) \right\} \quad , \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

mit dem Feynmanparameterintegral:

$$j_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}(q^2 = 0) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1-y}{y} \ln \left[ 1 + y \left( \frac{m_2^2/m_1^2}{x} + \frac{m_3^2/m_1^2}{1-x} - 1 \right) \right] \quad . \quad (\text{B.17})$$

Für dieses findet man z.B. in [HOO 85] als Lösung:

$$\begin{aligned} j_{\{2, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}}(q^2 = 0) &= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{m_2^2}{m_1^2} \ln \frac{m_3^2}{m_1^2} \\ &\quad + \frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ Li_2 \left( \frac{-2m_2^2}{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - \sqrt{\lambda}} \right) + Li_2 \left( \frac{-2m_3^2}{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \ln^2 \left( \frac{-2m_2^2}{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - \sqrt{\lambda}} \right) + \frac{1}{4} \ln^2 \left( \frac{-2m_3^2}{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - \sqrt{\lambda}} \right) \\
 & + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{m_2^2}{m_3^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + \sqrt{\lambda}}{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - \sqrt{\lambda}} \right) + \ln \left( \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - \sqrt{\lambda}}{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 + \sqrt{\lambda}} \right) \right] + \frac{1}{6} \pi^2 \Big\} .
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Durch Umkehrung von (B.14) erhält man noch:

$$\begin{aligned}
 K_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_3\}} & = \left[ m_1^2 \lambda K_{\{2,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_3\}} \right. \\
 & + m_2^2 (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) (A_{\{1,m_1\}} A_{\{2,m_2\}} - A_{\{1,m_3\}} A_{\{2,m_2\}}) \\
 & \left. + m_3^2 (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) (A_{\{1,m_1\}} A_{\{2,m_3\}} - A_{\{1,m_2\}} A_{\{2,m_3\}}) \right] / \\
 & \left[ \lambda - D m_1^2 (-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \right. \\
 & \left. - (m_1^2 - m_3^2) (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) - (m_1^2 - m_2^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) \right] .
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Im perturbativen Fall vereinfacht sich die Darstellung des ( $q = 0$ )-„Master“-Integrals erheblich:

$$K_{\{1,m\},\{1,0\},\{1,m\}} = -\frac{D-2}{2(D-3)} \frac{1}{m^2} A_{\{1,m\}}^2 . \tag{B.20}$$

# Anhang C

## Zwei-Loop-Basisintegrale

Mit Hilfe der Feynmanparametrisierung werden die Schleifenintegrale in dimensioneller Regularisierung  $D = 4 - 2\varepsilon$  auf mehrdimensionale Feynmanparameterintegrale zurückgeführt:

$$\frac{1}{D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1^{n-2} \int_0^1 dx_2^{n-3} \dots \int_0^1 dx_{n-1} \frac{y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \dots y_n^{\alpha_n-1}}{\{y_1 D_1 + y_2 D_2 + \dots y_n D_n\}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}} \quad (\text{C.1})$$

mit

$$y_1 = 1 - x_1, \quad y_2 = x_1(1 - x_2), \quad \dots, \quad y_{n-1} = x_1 \dots x_{n-2}(1 - x_{n-1}), \quad y_n = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \quad . \quad (\text{C.2})$$

Im Gegensatz zu den Einschleifenintegralen bleibt bei den Zweischleifenintegralen im allgemeinen eine Feynmanparameterintegration  $\frac{1}{\varepsilon}$ -divergent. Die typische Form ist:

$$i_D(a, b) := \int_0^1 dx x^a (1 - x)^{b-D/2} f_D(x) \quad \text{mit} \quad a \geq 0; b = 0, 1 \quad (\text{C.3})$$

mit einer an der oberen Integrationsgrenze  $x = 1$  analytischen Funktion  $f_D$ . Das Integral  $i_D(a, b)$  wird regularisiert, indem das divergente Verhalten des Integranden an der oberen Grenze abgezogen wird:

$$\frac{f_D(x)}{1-x} = \frac{f_D(1)}{1-x} + \underbrace{\frac{f_D(x) - f_D(1)}{1-x}}_{=: F_D(x)} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{f_D(x)}{(1-x)^2} = \frac{f_D(1)}{(1-x)^2} + \frac{f'_D(1)}{1-x} + \frac{F_D(x) - f'_D(1)}{1-x} \quad . \quad (\text{C.5})$$

Unter Ausnutzung der Integraldarstellung der Eulerschen Betafunktion erhält man:

$$i_D(a, 1) = f_D(1) \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(3+a-D/2)} + \int_0^1 dx x^a (1-x)^{2-D/2} F_D(x) \quad , \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned}
 i_D(a, 0) &= f_D(1) \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1-D/2)}{\Gamma(2+a-D/2)} + f'_D(1) \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(3+a-D/2)} \\
 &\quad + \int_0^1 dx x^a (1-x)^{2-D/2} \frac{F_D(x) - f'_D(1)}{1-x} .
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Die  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Beiträge der Zweischleifenintegrale werden in Form numerisch auswertbarer Feynmanparameterintegrale angegeben.

$$\begin{aligned}
 J_{\{1, m_3\}, \{1, m_1\}, \{1, m_2\}} &:= \left\langle \left\langle \frac{1}{[(p-q)^2 + m_3^2][k^2 + m_1^2][(p-k)^2 + m_2^2]} \right\rangle \right\rangle \\
 &= \frac{\Gamma(-1+2\varepsilon)}{(4\pi)^{(4-2\varepsilon)}} [\Lambda^2]^{1-2\varepsilon} \left\{ \frac{q^2}{\Lambda^2} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2 \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(3+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{m_3^2}{\Lambda^2} \right]^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon)} + \left( \left[ \frac{m_1^2}{\Lambda^2} \right]^{1-2\varepsilon} + \left[ \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right]^{1-2\varepsilon} \right) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+2\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)} \\
 &\quad - 2\varepsilon \left( \frac{q^2}{\Lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy (1-y) \ln \left[ y(1-y) \frac{q^2}{\Lambda^2} + (1-y) \frac{m_3^2}{\Lambda^2} + y \left( \frac{1}{1-x} \frac{m_1^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{x} \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{m_3^2}{\Lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{1-y}{y} \ln \left[ y(1-y) \frac{q^2}{m_3^2} + 1-y + y \left( \frac{1}{1-x} \frac{m_1^2}{m_3^2} + \frac{1}{x} \frac{m_2^2}{m_3^2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{m_1^2}{\Lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{1}{1-x} \ln \left[ x(1-x)y(1-y) \frac{q^2}{m_1^2} + x(1-x) \frac{1-y}{y} \frac{m_3^2}{m_1^2} + x + (1-x) \frac{m_2^2}{m_1^2} \right] \\
 &\quad \left. + \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{1}{x} \ln \left[ x(1-x)y(1-y) \frac{q^2}{m_2^2} + x(1-x) \frac{1-y}{y} \frac{m_3^2}{m_2^2} + x \frac{m_1^2}{m_2^2} + 1-x \right] \right\} \\
 &\tag{C.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{\{2, m_3\}, \{1, m_1\}, \{1, m_2\}} &:= \left\langle \left\langle \frac{1}{[(p-q)^2 + m_3^2]^2 [k^2 + m_1^2] [(p-k)^2 + m_2^2]} \right\rangle \right\rangle \\
 &= \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^{(4-2\varepsilon)}} [\Lambda^2]^{-2\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{m_3^2}{\Lambda^2} \right]^{-2\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \left. - 2\varepsilon \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{1-y}{y} \ln \left[ y(1-y) \frac{q^2}{m_3^2} + 1-y + y \left( \frac{1}{1-x} \frac{m_1^2}{m_3^2} + \frac{1}{x} \frac{m_2^2}{m_3^2} \right) \right] \right\} \\
 &\tag{C.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\{1, m_4\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{1, m_1\}} &:= \left\langle \left\langle \frac{1}{[p^2 + m_4^2] [(p-q)^2 + m_2^2] [k^2 + m_3^2] [(p-k)^2 + m_1^2]} \right\rangle \right\rangle \\
 &= \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^{(4-2\varepsilon)}} [\Lambda^2]^{-2\varepsilon} \left\{ \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(2+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \left( 1 - 2\varepsilon \int_0^1 dy \ln \left[ y(1-y) \frac{q^2}{\Lambda^2} + (1-y) \frac{m_4^2}{\Lambda^2} + y \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2\varepsilon^2 \int_0^1 dy \ln^2 \left[ y(1-y) \frac{q^2}{\Lambda^2} + (1-y) \frac{m_4^2}{\Lambda^2} + y \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right] \right) \\
 &\tag{C.10}
 \end{aligned}$$



$$-2\varepsilon \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz \frac{z}{1-z} \ln \left[ z + (1-z) \frac{y^2 z \frac{q^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{1-x} \frac{m_3^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{x} \frac{m_1^2}{\Lambda^2}}{y(1-y) \frac{q^2}{\Lambda^2} + (1-y) \frac{m_4^2}{\Lambda^2} + y \frac{m_2^2}{\Lambda^2}} \right] \Bigg\} \quad (\text{C.10})$$

Der  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Beitrag

$$i_{\{m_1, m_2\}}^v(q^2) = \int_0^1 dy \ln \left[ y(1-y) \frac{q^2}{\Lambda^2} + (1-y) \frac{m_4^2}{\Lambda^2} + y \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right] \quad (\text{C.11})$$

kann auch in analytisch geschlossener Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} i_{\{m_1, m_2\}}^v(q^2) = & -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\ln \left( \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \right. \\ & + \ln \left( \frac{m_1^2}{\Lambda^2} \right) \frac{1 + \frac{m_2^2}{q^2} - \frac{m_1^2}{q^2}}{2} + \ln \left( \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \right) \frac{1 + \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2}}{2} - 2 \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2 \left( \frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2} \right) + \left( \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2} \right)^2} \\ & \left. \ln \left[ \frac{\left( 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2} \right) + \left( \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2} \right)^2} \right)^2 - \left( \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2} \right)^2}{\left( -1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{m_1^2}{q^2} + \frac{m_2^2}{q^2} \right) + \left( \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2} \right)^2} \right)^2 - \left( \frac{m_1^2}{q^2} - \frac{m_2^2}{q^2} \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} F_{\{1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{1, m_4\}, \{1, m_5\}} & := F_{\{1, m_1\}, \{1, m_2\}, \{1, m_3\}, \{1, m_4\}, \{1, m_5\}}^{\{0, 0, 0, 0, 0\}} = \\ & \left\langle \left\langle \frac{1}{\left[ p^2 + m_1^2 \right] \left[ k^2 + m_2^2 \right] \left[ (p-q)^2 + m_3^2 \right] \left[ (k-q)^2 + m_4^2 \right] \left[ (p-k)^2 + m_5^2 \right]} \right\rangle \right\rangle \\ & = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{\Lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 y_1 \\ & \left[ \left( y_1(1-x_2 y_2)[1-y_1(1-x_2 y_2)] + x_1 [y_1 y_2 x_2(1-x_2) - y_1(1-x_2 y_2)[1-y_1(1-x_2 y_2)]] \right) \frac{q^2}{\Lambda^2} \right. \\ & \left. + y_1 y_2 \left( x_2 \frac{m_2^2}{\Lambda^2} + (1-x_2) \frac{m_4^2}{\Lambda^2} + \frac{1-x_1}{x_1} \frac{m_5^2}{\Lambda^2} \right) + (1-x_1) \left( (1-y_1) \frac{m_1^2}{\Lambda^2} y_1(1-y_2) \frac{m_3^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Mechanismen zur Entwicklung der Schleifenintegrale in  $q^2$  oder aber  $\frac{1}{q^2}$  vor Ausführung der Feynmanparametrisierung findet man in [FT 94] bzw. in [DT 93]. Zu berechnen bleiben in diesem Falle Schleifenintegrale ohne äußeren Impuls, für die ein Berechnungsalgorithmus angegeben wird (siehe auch Anhang B). Zudem wird in diesen Arbeiten der Konvergenzbereich der Entwicklungen in Abhängigkeit der reellen Massenquadrate studiert.

# Anhang D

## Zwei-Loop-Spezialintegrale

Aufgelistet werden alle Spezialintegrale, die beim Reduktionsprozeß in Kapitel 5.2 benötigt werden.

$$\begin{aligned}
& F_{\{2,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_1\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,0} = \\
& - \frac{(-2+d)(m_1^2 - m_2^2 - m_5^2) A_{\{1,m_2\}} B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{2m_1^2(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)} \\
& - \frac{(-2+d)(m_1^2 + m_2^2 + m_5^2) A_{\{1,m_5\}} B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{2m_1^2(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)} \\
& + \frac{(-8+3d)(2m_1^2 + q^2) J_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{2m_1^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} + \frac{2(m_1^2 + q^2) J_{\{2,m_1\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
& + m_2^2 \left( 2m_1^6 - 4m_1^4 m_2^2 + 2m_1^2 m_2^4 + 4m_1^4 m_5^2 + 4m_1^2 m_2^2 m_5^2 + \right. \\
& 2m_1^2 m_5^4 - 3m_1^4 q^2 + 2m_1^2 m_2^2 q^2 + m_2^4 q^2 + 6m_1^2 m_5^2 q^2 \\
& \left. + 2m_2^2 m_5^2 q^2 + m_5^4 q^2 - m_1^2 q^4 + m_2^2 q^4 + m_5^2 q^4 \right) \cdot \\
& \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_1\}}}{m_1^2 (m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2) (m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2) q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
& - m_5^2 \left( 2m_1^6 - 4m_1^4 m_2^2 + 2m_1^2 m_2^4 + 4m_1^4 m_5^2 + 4m_1^2 m_2^2 m_5^2 \right. \\
& + 2m_1^2 m_5^4 - 3m_1^4 q^2 - 6m_1^2 m_2^2 q^2 + m_2^4 q^2 - 2m_1^2 m_5^2 q^2 \\
& \left. + 2m_2^2 m_5^2 q^2 + m_5^4 q^2 - m_1^2 q^4 - m_2^2 q^4 - m_5^2 q^4 \right) \cdot \\
& \frac{J_{\{2,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{m_1^2 (m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2) (m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2) q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
& - \frac{(-2+d)(2m_1^2 + q^2) K_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{2m_1^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
& - \left( -22m_1^6 + 6dm_1^6 + 20m_1^4 m_2^2 - 4dm_1^4 m_2^2 + 2m_1^2 m_2^4 - 2dm_1^2 m_2^4 \right. \\
& \left. - 20m_1^4 m_5^2 + 4dm_1^4 m_5^2 + 4m_1^2 m_2^2 m_5^2 - 4dm_1^2 m_2^2 m_5^2 + 2m_1^2 m_5^4 - 2dm_1^2 m_5^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4m_1^4 q^2 + dm_1^4 q^2 + 2m_1^2 m_2^2 q^2 + 2m_2^4 q^2 - dm_2^4 q^2 \\
 & -2m_1^2 m_5^2 q^2 + 4m_2^2 m_5^2 q^2 - 2dm_2^2 m_5^2 q^2 + 2m_5^4 q^2 - dm_5^4 q^2 \Big) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{2m_1^2 (m_5^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2 + m_5^2) (m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2 + m_5^2) (4m_1^2 + q^2)}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\{1,0\},\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,0,0} = & \\
 & - \frac{A_{\{1,m_2\}} B_{\{1,m_3\},\{1,0\}}}{m_2^2 + m_5^2} + \frac{A_{\{1,m_5\}} B_{\{1,m_3\},\{1,0\}}}{m_2^2 + m_5^2} \\
 & + \frac{(-8 + 3d) J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{(-2 + d) (m_3 - q) (m_3 + q)} + \frac{2m_2^2 (m_2^2 - m_3^2 + m_5^2 + q^2) J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{(-2 + d) (m_2^2 + m_5^2) (m_3 - q) (m_3 + q)} \\
 & - \frac{4m_3^2 J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{(-2 + d) (m_3 - q) (m_3 + q)} - \frac{2m_5^2 (m_2^2 + m_3^2 + m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{(-2 + d) (m_2^2 + m_5^2) (m_3 - q) (m_3 + q)} \\
 & - \frac{K_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{(m_3 - q) (m_3 + q)}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\{2,0\},\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,0,0} = & \\
 & - \frac{(-2 + d)^2 A_{\{1,m_2\}} A_{\{1,m_3\}}}{d (m_2^2 + m_5^2) (m_3 - q)^2 (m_3 + q)^2} - \frac{(-2 + d)^2 A_{\{1,m_2\}} A_{\{1,m_5\}}}{d (m_2^2 + m_5^2)^2 (m_3 - q) (m_3 + q)} \\
 & + \frac{(-2 + d)^2 A_{\{1,m_3\}} A_{\{1,m_5\}}}{d (m_2^2 + m_5^2) (m_3 - q)^2 (m_3 + q)^2} \\
 & + \left( -3dm_2^4 m_3^2 + d^2 m_2^4 m_3^2 + 4m_2^2 m_3^4 - dm_2^2 m_3^4 - 6dm_2^2 m_3^2 m_5^2 + 2d^2 m_2^2 m_3^2 m_5^2 \right. \\
 & - dm_3^4 m_5^2 - 3dm_3^2 m_5^4 + d^2 m_3^2 m_5^4 - 3dm_2^4 q^2 + d^2 m_2^4 q^2 \\
 & - 8m_2^2 m_3^2 q^2 + 2dm_2^2 m_3^2 q^2 - 6dm_2^2 m_5^2 q^2 + 2d^2 m_2^2 m_5^2 q^2 + 2dm_3^2 m_5^2 q^2 \\
 & \left. - 3dm_5^4 q^2 + d^2 m_5^4 q^2 + 4m_2^2 q^4 - dm_2^2 q^4 - dm_5^2 q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_2\}} B_{\{1,m_3\},\{1,0\}}}{d (m_2^2 + m_5^2)^3 (m_3 - q)^2 (m_3 + q)^2} \\
 & - \left( -3dm_2^4 m_3^2 + d^2 m_2^4 m_3^2 + dm_2^2 m_3^4 - 6dm_2^2 m_3^2 m_5^2 + 2d^2 m_2^2 m_3^2 m_5^2 \right. \\
 & - 4m_3^4 m_5^2 + dm_3^4 m_5^2 - 3dm_3^2 m_5^4 + d^2 m_3^2 m_5^4 - 3dm_2^4 q^2 + d^2 m_2^4 q^2 \\
 & - 2dm_2^2 m_3^2 q^2 - 6dm_2^2 m_5^2 q^2 + 2d^2 m_2^2 m_5^2 q^2 + 8m_3^2 m_5^2 q^2 - 2dm_3^2 m_5^2 q^2 \\
 & \left. - 3dm_5^4 q^2 + d^2 m_5^4 q^2 + dm_2^2 q^4 - 4m_5^2 q^4 + dm_5^2 q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_5\}} B_{\{1,m_3\},\{1,0\}}}{d (m_2^2 + m_5^2)^3 (m_3 - q)^2 (m_3 + q)^2} \\
 & + (-8 + 3d) \left( dm_2^4 m_3^2 - 6m_2^2 m_3^4 + 2dm_2^2 m_3^4 + 2dm_2^2 m_3^2 m_5^2 \right. \\
 & + 6m_3^4 m_5^2 - 2dm_3^4 m_5^2 + dm_3^2 m_5^4 + 4m_2^4 q^2 - dm_2^4 q^2 \\
 & \left. + 12m_2^2 m_3^2 q^2 - 4dm_2^2 m_3^2 q^2 + 8m_2^2 m_5^2 q^2 - 2dm_2^2 m_5^2 q^2 - 12m_3^2 m_5^2 q^2 + 4dm_3^2 m_5^2 q^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4m_5^4q^2 - dm_5^4q^2 - 6m_2^2q^4 + 2dm_2^2q^4 + 6m_5^2q^4 - 2dm_5^2q^4) \cdot \\
 & \frac{J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{(-2+d)d(m_2^2+m_5^2)^2(m_3-q)^3(m_3+q)^3} \\
 & +2m_2^2(dm_2^6m_3^2 - 12m_2^4m_3^4 + 4dm_2^4m_3^4 + 4m_2^2m_3^6 - dm_2^2m_3^6 \\
 & +3dm_2^4m_3^2m_5^2 - 12m_2^2m_3^4m_5^2 + 4dm_2^2m_3^4m_5^2 - dm_3^6m_5^2 + 3dm_2^2m_3^2m_5^4 \\
 & +dm_3^2m_5^6 + 4m_2^6q^2 - dm_2^6q^2 + 12m_2^4m_3^2q^2 - 4dm_2^4m_3^2q^2 \\
 & -12m_2^2m_3^4q^2 + 3dm_2^2m_3^4q^2 + 12m_2^4m_5^2q^2 - 3dm_2^4m_5^2q^2 + 3dm_3^4m_5^2q^2 \\
 & +12m_2^2m_5^4q^2 - 3dm_2^2m_5^4q^2 - 12m_3^2m_5^4q^2 + 4dm_3^2m_5^4q^2 + 4m_5^6q^2 - dm_5^6q^2 \\
 & +12m_2^2m_3^2q^4 - 3dm_2^2m_3^2q^4 + 12m_2^2m_5^2q^4 - 4dm_2^2m_5^2q^4 - 3dm_3^2m_5^2q^4 \\
 & +12m_5^4q^4 - 4dm_5^4q^4 - 4m_2^2q^6 + dm_2^2q^6 + dm_5^2q^6) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{(-2+d)d(m_2^2+m_5^2)^3(m_3-q)^3(m_3+q)^3} \\
 & -8m_3^2(m_2^4m_3^2 - 3m_2^2m_3^4 + dm_2^2m_3^4 + 2m_2^2m_3^2m_5^2 \\
 & +3m_3^4m_5^2 - dm_3^4m_5^2 + m_3^2m_5^4 + m_2^4q^2 + 6m_2^2m_3^2q^2 - 2dm_2^2m_3^2q^2 \\
 & +2m_2^2m_5^2q^2 - 6m_3^2m_5^2q^2 + 2dm_3^2m_5^2q^2 \\
 & +m_5^4q^2 - 3m_2^2q^4 + dm_2^2q^4 + 3m_5^2q^4 - dm_5^2q^4) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{(-2+d)d(m_2^2+m_5^2)^2(m_3-q)^3(m_3+q)^3}
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
 F_{0,\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,1,0} = & \\
 & -\frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_3\}}}{6} - \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_5\}}}{6} + \frac{A_{\{1,m_3\}}A_{\{1,m_5\}}}{3} \\
 & + \frac{(-6m_2^2 + 2dm_2^2 - 3m_3^2 + dm_3^2 - 3m_5^2 + dm_5^2 - 2q^2 + dq^2) J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)} \\
 & + \frac{2m_2^2(m_2^2 + q^2) J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{3(-2+d)} \\
 & - \frac{m_3^2(3m_2^2 + m_3^2 + 3m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)} \\
 & - \frac{m_5^2(3m_2^2 + 3m_3^2 + m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)}
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,1,0} = & \\
 & -\frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_2\}}}{4m_1^2} + \frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_5\}}}{4m_1^2} \\
 & - \frac{(m_1^2 + m_3^2 - q^2) A_{\{1,m_2\}}B_{\{1,m_3\},\{1,m_1\}}}{4m_1^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(m_1^2 + m_3^2 - q^2) A_{\{1,m_5\}} B_{\{1,m_3\},\{1,m_1\}}}{4m_1^2} \\
 & + \frac{(-2m_1^2 + dm_1^2 - 8m_2^2 + 3dm_2^2 - 8m_5^2 + 3dm_5^2) J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{4(-2+d)m_1^2} \\
 & + \frac{m_2^2(m_2^2 - m_3^2 + m_5^2 + q^2) J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{2(-2+d)m_1^2} \\
 & - \frac{m_3^2(m_2^2 + m_5^2) J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{(-2+d)m_1^2} \\
 & - \frac{m_5^2(m_2^2 + m_3^2 + m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{2(-2+d)m_1^2} \\
 & - \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_5^2) K_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{4m_1^2} \\
 & - \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + m_3^2 - q^2) V_{\{1,m_1\},\{1,m_3\},\{1,m_2\},\{1,m_5\}}}{4m_1^2}
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\{2,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{0,0,0,1,0} = & \\
 & \left( -24m_1^6 + 8dm_1^6 + 32m_1^4m_2^2 - 8dm_1^4m_2^2 - 8m_1^2m_2^4 - 32m_1^4m_5^2 + 8dm_1^4m_5^2 \right. \\
 & - 16m_1^2m_2^2m_5^2 - 8m_1^2m_5^4 - 4m_1^4q^2 + dm_1^4q^2 + 4m_1^2m_2^2q^2 - dm_2^4q^2 \\
 & \left. - 4m_1^2m_5^2q^2 - 2dm_2^2m_5^2q^2 - dm_5^4q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_1\}} A_{\{1,m_2\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + \left( 8m_1^6 - 48m_1^4m_2^2 + 16dm_1^4m_2^2 + 8m_1^2m_2^4 + 16m_1^4m_5^2 + 16m_1^2m_2^2m_5^2 \right. \\
 & + 8m_1^2m_5^4 + dm_1^4q^2 - 8m_1^2m_2^2q^2 + 2dm_1^2m_2^2q^2 + dm_2^4q^2 \\
 & \left. + 2dm_1^2m_5^2q^2 + 2dm_2^2m_5^2q^2 + dm_5^4q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_1\}} A_{\{1,m_5\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & - \frac{(-2+d)(m_1^2 + m_2^2 + m_5^2) A_{\{1,m_2\}} A_{\{1,m_5\}}}{4m_1^2(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)} \\
 & + \left( 8m_1^8 - 16m_1^6m_2^2 + 8m_1^4m_2^4 + 16m_1^6m_5^2 + 16m_1^4m_2^2m_5^2 + 8m_1^4m_5^4 \right. \\
 & + 24m_1^6q^2 - 6dm_1^6q^2 - 32m_1^4m_2^2q^2 + 4dm_1^4m_2^2q^2 + 8m_1^2m_2^4q^2 + 2dm_1^2m_2^4q^2 \\
 & + 32m_1^4m_5^2q^2 - 4dm_1^4m_5^2q^2 + 16m_1^2m_2^2m_5^2q^2 + 4dm_1^2m_2^2m_5^2q^2 \\
 & + 8m_1^2m_5^4q^2 + 2dm_1^2m_5^4q^2 + 4m_1^4q^4 - dm_1^4q^4 - 4m_1^2m_2^2q^4 \\
 & \left. + dm_2^4q^4 + 4m_1^2m_5^2q^4 + 2dm_2^2m_5^2q^4 + dm_5^4q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_2\}} B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & - \left( 8m_1^8 - 16m_1^6m_2^2 + 8m_1^4m_2^4 + 16m_1^6m_5^2 + 16m_1^4m_2^2m_5^2 + 8m_1^4m_5^4 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +8m_1^6q^2 + 2dm_1^6q^2 - 48m_1^4m_2^2q^2 + 12dm_1^4m_2^2q^2 + 8m_1^2m_2^4q^2 + 2dm_1^2m_2^4q^2 \\
 & +16m_1^4m_5^2q^2 + 4dm_1^4m_5^2q^2 + 16m_1^2m_2^2m_5^2q^2 + 4dm_1^2m_2^2m_5^2q^2 \\
 & +8m_1^2m_5^4q^2 + 2dm_1^2m_5^4q^2 + dm_1^4q^4 - 8m_1^2m_2^2q^4 + 2dm_1^2m_2^2q^4 + dm_2^4q^4 \\
 & +2dm_1^2m_5^2q^4 + 2dm_2^2m_5^2q^4 + dm_5^4q^4) \\
 & \frac{A_{\{1,m_5\}}B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + (-8 + 3d) \left( -4m_1^4 + 2dm_1^4 + 4m_1^2m_2^2 + 2dm_1^2m_2^2 + 4m_1^2m_5^2 + 2dm_1^2m_5^2 \right. \\
 & \left. -2m_1^2q^2 + dm_1^2q^2 + dm_2^2q^2 + dm_5^2q^2 \right) \frac{J_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{8(-2+d)m_1^4(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + \left( -2m_1^4 + dm_1^4 + 6m_1^2m_2^2 + dm_1^2m_2^2 + 6m_1^2m_5^2 + dm_1^2m_5^2 \right. \\
 & \left. -2m_1^2q^2 + dm_1^2q^2 + dm_2^2q^2 + dm_5^2q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{2(-2+d)m_1^2(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + m_2^2 \left( 4m_1^8 + 2dm_1^8 - 4m_1^6m_2^2 - 2dm_1^6m_2^2 - 4m_1^4m_2^4 - 2dm_1^4m_2^4 \right. \\
 & + 4m_1^2m_2^6 + 2dm_1^2m_2^6 + 12m_1^6m_5^2 + 6dm_1^6m_5^2 + 8m_1^4m_2^2m_5^2 + 4dm_1^4m_2^2m_5^2 \\
 & + 12m_1^2m_2^4m_5^2 + 6dm_1^2m_2^4m_5^2 + 12m_1^4m_5^4 + 6dm_1^4m_5^4 + 12m_1^2m_2^2m_5^4 + 6dm_1^2m_2^2m_5^4 \\
 & + 4m_1^2m_5^6 + 2dm_1^2m_5^6 + 16m_1^6q^2 - 3dm_1^6q^2 - 16m_1^4m_2^2q^2 - dm_1^4m_2^2q^2 + 3dm_1^2m_2^4q^2 \\
 & + dm_2^6q^2 + 16m_1^4m_5^2q^2 + 3dm_1^4m_5^2q^2 + 10dm_1^2m_2^2m_5^2q^2 + 3dm_2^4m_5^2q^2 \\
 & + 7dm_1^2m_5^4q^2 + 3dm_2^2m_5^4q^2 + dm_5^6q^2 + 4m_1^4q^4 - dm_1^4q^4 - 4m_1^2m_2^2q^4 \\
 & \left. + dm_2^4q^4 + 4m_1^2m_5^2q^4 + 2dm_2^2m_5^2q^4 + dm_5^4q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_1\}}}{4(-2+d)m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & - m_5^2 \left( -12m_1^8 + 2dm_1^8 + 28m_1^6m_2^2 - 2dm_1^6m_2^2 - 20m_1^4m_2^4 - 2dm_1^4m_2^4 \right. \\
 & + 4m_1^2m_2^6 + 2dm_1^2m_2^6 - 20m_1^6m_5^2 + 6dm_1^6m_5^2 - 24m_1^4m_2^2m_5^2 + 4dm_1^4m_2^2m_5^2 \\
 & + 12m_1^2m_2^4m_5^2 + 6dm_1^2m_2^4m_5^2 - 4m_1^4m_5^4 + 6dm_1^4m_5^4 + 12m_1^2m_2^2m_5^4 + 6dm_1^2m_2^2m_5^4 \\
 & + 4m_1^2m_5^6 + 2dm_1^2m_5^6 - 4m_1^6q^2 - 3dm_1^6q^2 + 40m_1^4m_2^2q^2 - 9dm_1^4m_2^2q^2 \\
 & - 4m_1^2m_2^4q^2 - 5dm_1^2m_2^4q^2 + dm_2^6q^2 - 8m_1^4m_5^2q^2 - 5dm_1^4m_5^2q^2 \\
 & - 8m_1^2m_2^2m_5^2q^2 - 6dm_1^2m_2^2m_5^2q^2 + 3dm_2^4m_5^2q^2 \\
 & - 4m_1^2m_5^4q^2 - dm_1^2m_5^4q^2 + 3dm_2^2m_5^4q^2 + dm_5^6q^2 - dm_1^4q^4 \\
 & \left. + 8m_1^2m_2^2q^4 - 2dm_1^2m_2^2q^4 - dm_2^4q^4 - 2dm_1^2m_5^2q^4 - 2dm_2^2m_5^2q^4 - dm_5^4q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{4(-2+d)m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + \left( -20m_1^8 + 6dm_1^8 - 12m_1^6m_2^2 + 2dm_1^6m_2^2 + 36m_1^4m_2^4 - 6dm_1^4m_2^4 \right. \\
 & - 4m_1^2m_2^6 - 2dm_1^2m_2^6 - 44m_1^6m_5^2 + 10dm_1^6m_5^2 + 8m_1^4m_2^2m_5^2 - 4dm_1^4m_2^2m_5^2 \\
 & \left. - 12m_1^2m_2^4m_5^2 - 6dm_1^2m_2^4m_5^2 - 28m_1^4m_5^4 + 2dm_1^4m_5^4 - 12m_1^2m_2^2m_5^4 - 6dm_1^2m_2^2m_5^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4m_1^2m_5^6 - 2dm_1^2m_5^6 - 4m_1^6q^2 + dm_1^6q^2 - 4m_1^4m_2^2q^2 + dm_1^4m_2^2q^2 \\
 & + 8m_1^2m_2^4q^2 - dm_1^2m_2^4q^2 - dm_2^6q^2 - 8m_1^4m_5^2q^2 + dm_1^4m_5^2q^2 \\
 & + 4m_1^2m_2^2m_5^2q^2 - 2dm_1^2m_2^2m_5^2q^2 - 3dm_2^4m_5^2q^2 - 4m_1^2m_5^4q^2 \\
 & - dm_1^2m_5^4q^2 - 3dm_2^2m_5^4q^2 - dm_5^6q^2) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1,m_5\},\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)} \\
 & + \left( 8m_1^{10} - 8m_1^8m_2^2 - 8m_1^6m_2^4 + 8m_1^4m_2^6 + 24m_1^8m_5^2 \right. \\
 & + 16m_1^6m_2^2m_5^2 + 24m_1^4m_2^4m_5^2 + 24m_1^6m_5^4 + 24m_1^4m_2^2m_5^4 + 8m_1^4m_5^6 \\
 & + 24m_1^8q^2 - 6dm_1^8q^2 + 8m_1^6m_2^2q^2 - 2dm_1^6m_2^2q^2 - 40m_1^4m_2^4q^2 + 6dm_1^4m_2^4q^2 \\
 & + 8m_1^2m_2^6q^2 + 2dm_1^2m_2^6q^2 + 56m_1^6m_5^2q^2 - 10dm_1^6m_5^2q^2 + 4dm_1^4m_2^2m_5^2q^2 \\
 & + 24m_1^2m_2^4m_5^2q^2 + 6dm_1^2m_2^4m_5^2q^2 + 40m_1^4m_5^4q^2 - 2dm_1^4m_5^4q^2 \\
 & + 24m_1^2m_2^2m_5^4q^2 + 6dm_1^2m_2^2m_5^4q^2 + 8m_1^2m_5^6q^2 + 2dm_1^2m_5^6q^2 + 4m_1^6q^4 - dm_1^6q^4 \\
 & + 4m_1^4m_2^2q^4 - dm_1^4m_2^2q^4 - 8m_1^2m_2^4q^4 + dm_1^2m_2^4q^4 + dm_2^6q^4 \\
 & + 8m_1^4m_5^2q^4 - dm_1^4m_5^2q^4 - 4m_1^2m_2^2m_5^2q^4 + 2dm_1^2m_2^2m_5^2q^4 \\
 & \left. + 3dm_2^4m_5^2q^4 + 4m_1^2m_5^4q^4 + dm_1^2m_5^4q^4 + 3dm_2^2m_5^4q^4 + dm_5^6q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_5\}}}{8m_1^4(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 + m_5^2)(4m_1^2 + q^2)}
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{0,\{1,m_2\},\{1,m_3\},0,\{1,m_5\}}^{1,0,0,0,0} = \\
 & \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_3\}}}{3} + \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_5\}}}{3} + \frac{A_{\{1,m_3\}}A_{\{1,m_5\}}}{3} \\
 & + \frac{(-6m_2^2 + 2dm_2^2 - 18m_3^2 + 7dm_3^2 + 6m_5^2 - 2dm_5^2 - 2q^2 + dq^2) J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)} \\
 & + \frac{2m_2^2(m_2^2 + 3m_3^2 - 3m_5^2 + q^2) J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{3(-2+d)} \\
 & + \frac{-4m_3^2(m_3 - q)(m_3 + q) J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)} \\
 & + \frac{2m_5^2(-3m_2^2 - 3m_3^2 + m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{3(-2+d)}
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{0,\{1,m_2\},\{1,m_3\},\{1,m_4\},\{1,m_5\}}^{1,0,0,0,0} = \\
 & - \frac{A_{\{1,m_3\}}A_{\{1,m_4\}}}{2m_4^2} + \frac{A_{\{1,m_4\}}A_{\{1,m_5\}}}{2m_4^2} \\
 & + \frac{(m_2^2 + m_4^2 + q^2) A_{\{1,m_3\}}B_{\{1,m_4\},\{1,m_2\}}}{2m_4^2} + \frac{(-m_2^2 + m_4^2 - q^2) A_{\{1,m_5\}}B_{\{1,m_4\},\{1,m_2\}}}{2m_4^2} \\
 & - \frac{(-8m_3^2 + 3dm_3^2 - 2m_4^2 + dm_4^2 + 8m_5^2 - 3dm_5^2) J_{\{1,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{2(-2+d)m_4^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2m_2^2 (m_3 - m_5) (m_3 + m_5) J_{\{2,m_2\},\{1,m_5\},\{1,m_3\}}}{(-2+d)m_4^2} \\
 & + \frac{m_3^2 (-m_2^2 + m_3^2 - m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_3\},\{1,m_5\},\{1,m_2\}}}{(-2+d)m_4^2} \\
 & - \frac{m_5^2 (-m_2^2 - m_3^2 + m_5^2 - q^2) J_{\{2,m_5\},\{1,m_3\},\{1,m_2\}}}{(-2+d)m_4^2} \\
 & + \frac{(m_3^2 + m_4^2 - m_5^2) K_{\{1,m_5\},\{1,m_4\},\{1,m_3\}}}{2m_4^2} \\
 & - \left( m_2^2 m_3^2 + m_2^2 m_4^2 - m_3^2 m_4^2 + m_4^4 - m_2^2 m_5^2 - m_4^2 m_5^2 + m_3^2 q^2 - m_4^2 q^2 - m_5^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_4\},\{1,m_2\},\{1,m_3\},\{1,m_5\}}}{2m_4^2} \tag{D.8}
 \end{aligned}$$



# Anhang E

## Zwei-Loop-Basisgrößen

Angegeben werden die in (5.46) definierten Zwei-Loop-Vakuumpolarisations-Basisgrößen. Zu besserer Übersicht wird eine andere Notation gewählt:

$$\{\kappa_{n_1}^2, \kappa_{n_2}^2, \kappa_{n_i}^2, u_j \Lambda^2\} \rightarrow \{m_1^2, m_2^2, m_i^2, m_j^2\} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Im Falle der Größe  $\Pi_T^{[1,1]^a}(q^2)$  muß unterschieden werden, ob  $m_1 = m_2$  oder  $m_1 \neq m_2$  ist.

$$\Pi_T^{[1,1]^a}_{\{i,j,1,1\}}(q^2) =$$

$$\begin{aligned} & 2(-2+d)^2(-1+d) \left( 8m_1^4 + 8m_1^3 m_i + m_1^2 q^2 - m_i^2 q^2 + m_j^2 q^2 \right) \cdot \\ & \frac{A_{\{1,m_1\}} A_{\{1,m_i\}}}{m_1^2(m_1+m_i-m_j)(m_1+m_i+m_j)(4m_1^2+q^2)} \\ & -2(-2+d) \left( 4m_1^6 - 8dm_1^6 + 12m_1^5 m_i - 16dm_1^5 m_i + 12m_1^4 m_i^2 - 8dm_1^4 m_i^2 + 4m_1^3 m_i^3 - 4m_1^4 m_j^2 \right. \\ & + 8dm_1^4 m_j^2 + 12m_1^3 m_i m_j^2 - 24dm_1^3 m_i m_j^2 + 8d^2 m_1^3 m_i m_j^2 - dm_1^4 q^2 + m_1^3 m_i q^2 - 2dm_1^3 m_i q^2 \\ & + 3m_1^2 m_i^2 q^2 - 2dm_1^2 m_i^2 q^2 + 3m_1 m_i^3 q^2 - 2dm_1 m_i^3 q^2 + m_i^4 q^2 - dm_i^4 q^2 - 2m_1^2 m_j^2 q^2 + 4dm_1^2 m_j^2 q^2 \\ & \left. - d^2 m_1^2 m_j^2 q^2 - m_1 m_i m_j^2 q^2 - 3m_i^2 m_j^2 q^2 + 4dm_i^2 m_j^2 q^2 - d^2 m_i^2 m_j^2 q^2 + 2m_j^4 q^2 - 3dm_j^4 q^2 + d^2 m_j^4 q^2 \right) \cdot \\ & \frac{A_{\{1,m_1\}} A_{\{1,m_j\}}}{m_1^2(m_1+m_i-m_j)m_j^2(m_1+m_i+m_j)(4m_1^2+q^2)} \\ & -2(-2+d) \left( m_1^3 - m_1^2 m_i + 2dm_1^2 m_i - 5m_1 m_i^2 + 4dm_1 m_i^2 - 3m_i^3 + 2dm_i^3 \right. \\ & \left. - m_1 m_j^2 + 7m_i m_j^2 - 8dm_i m_j^2 + 2d^2 m_i m_j^2 \right) \cdot \\ & \frac{A_{\{1,m_i\}} A_{\{1,m_j\}}}{m_i(m_1+m_i-m_j)m_j^2(m_1+m_i+m_j)} \\ & -2(-2+d) \left( 16m_1^6 - 24dm_1^6 - 16dm_1^5 m_i - 16m_1^4 m_i^2 + 8dm_1^4 m_i^2 + 16m_1^4 m_j^2 \right. \\ & - 8dm_1^4 m_j^2 + 18m_1^4 q^2 - 26dm_1^4 q^2 + 6d^2 m_1^4 q^2 + 12m_1^3 m_i q^2 \\ & - 20dm_1^3 m_i q^2 + 4d^2 m_1^3 m_i q^2 - 6m_1^2 m_i^2 q^2 + 6dm_1^2 m_i^2 q^2 - 2d^2 m_1^2 m_i^2 q^2 \\ & \left. + 6m_1^2 m_j^2 q^2 - 6dm_1^2 m_j^2 q^2 + 2d^2 m_1^2 m_j^2 q^2 + 2m_1^2 q^4 - 3dm_1^2 q^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +d^2 m_1^2 q^4 - 2m_i^2 q^4 + 3dm_i^2 q^4 - d^2 m_i^2 q^4 + 2m_j^2 q^4 - 3dm_j^2 q^4 + d^2 m_j^2 q^4 \Big) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_i\}} B_{\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1^2 (m_1 + m_i - m_j) (m_1 + m_i + m_j) (4m_1^2 + q^2)} \\
 & +4(-2+d) A_{\{1,m_1\}} B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & -2\left(-6m_1^2 + 2dm_1^2 + 4m_1 m_i - 4dm_1 m_i - 6m_i^2 + 2dm_i^2 + 4m_j^2 - 2dm_j^2 - 14q^2 + 9dq^2 - d^2 q^2\right) \cdot \\
 & B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}} B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & 2\left(-32m_1^8 + 24dm_1^8 - 64m_1^7 m_i + 48dm_1^7 m_i - 48m_1^6 m_i^2 \right. \\
 & +32dm_1^6 m_i^2 - 32m_1^5 m_i^3 + 16dm_1^5 m_i^3 - 16m_1^4 m_i^4 + 8dm_1^4 m_i^4 + 64m_1^6 m_j^2 - 56dm_1^6 m_j^2 \\
 & +8d^2 m_1^6 m_j^2 + 32dm_1^5 m_i m_j^2 - 16d^2 m_1^5 m_i m_j^2 + 48m_1^4 m_i^2 m_j^2 - 40dm_1^4 m_i^2 m_j^2 \\
 & +8d^2 m_1^4 m_i^2 m_j^2 - 32m_1^4 m_j^4 + 32dm_1^4 m_j^4 - 8d^2 m_1^4 m_j^4 - 22m_1^6 q^2 \\
 & +26dm_1^6 q^2 - 6d^2 m_1^6 q^2 - 52m_1^5 m_i q^2 + 56dm_1^5 m_i q^2 - 12d^2 m_1^5 m_i q^2 - 44m_1^4 m_i^2 q^2 \\
 & +40dm_1^4 m_i^2 q^2 - 8d^2 m_1^4 m_i^2 q^2 - 20m_1^3 m_i^3 q^2 + 16dm_1^3 m_i^3 q^2 - 4d^2 m_1^3 m_i^3 q^2 - 6m_1^2 m_i^4 q^2 \\
 & +6dm_1^2 m_i^4 q^2 - 2d^2 m_1^2 m_i^4 q^2 + 34m_1^4 m_j^2 q^2 - 44dm_1^4 m_j^2 q^2 + 16d^2 m_1^4 m_j^2 q^2 - 2d^3 m_1^4 m_j^2 q^2 \\
 & -16m_1^3 m_i m_j^2 q^2 + 48dm_1^3 m_i m_j^2 q^2 - 28d^2 m_1^3 m_i m_j^2 q^2 \\
 & +4d^3 m_1^3 m_i m_j^2 q^2 + 18m_1^2 m_i^2 m_j^2 q^2 - 24dm_1^2 m_i^2 m_j^2 q^2 + 12d^2 m_1^2 m_i^2 m_j^2 q^2 \\
 & -2d^3 m_1^2 m_i^2 m_j^2 q^2 - 12m_1^2 m_j^4 q^2 + 18dm_1^2 m_j^4 q^2 - 10d^2 m_1^2 m_j^4 q^2 \\
 & +2d^3 m_1^2 m_j^4 q^2 - 2m_1^4 q^4 + 3dm_1^4 q^4 - d^2 m_1^4 q^4 - 6m_1^3 m_i q^4 \\
 & +7dm_1^3 m_i q^4 - 2d^2 m_1^3 m_i q^4 - 8m_1^2 m_i^2 q^4 + 8dm_1^2 m_i^2 q^4 - 2d^2 m_1^2 m_i^2 q^4 - 6m_1 m_i^3 q^4 + 7dm_1 m_i^3 q^4 \\
 & -2d^2 m_1 m_i^3 q^4 - 2m_i^4 q^4 + 3dm_i^4 q^4 - d^2 m_i^4 q^4 + 6m_1^2 m_j^2 q^4 - 11dm_1^2 m_j^2 q^4 \\
 & +6d^2 m_1^2 m_j^2 q^4 - d^3 m_1^2 m_j^2 q^4 + 2m_1 m_i m_j^2 q^4 - dm_1 m_i m_j^2 q^4 + 6m_i^2 m_j^2 q^4 - 11dm_i^2 m_j^2 q^4 \\
 & \left. +6d^2 m_i^2 m_j^2 q^4 - d^3 m_i^2 m_j^2 q^4 - 4m_j^4 q^4 + 8dm_j^4 q^4 - 5d^2 m_j^4 q^4 + d^3 m_j^4 q^4\right) \cdot \\
 & +A_{\{1,m_j\}} \left( \frac{B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{m_1^2 (m_1 + m_i - m_j) m_j^2 (m_1 + m_i + m_j) (4m_1^2 + q^2)} \right. \\
 & \left. -2\left(2m_1^2 m_i + 2m_i^3 - 4m_i m_j^2 + 2dm_i m_j^2 + 2m_1 q^2 - dm_1 q^2\right) \cdot \frac{B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}}}{m_i m_j^2} \right) \\
 & +2(m_1 - m_i)^2 (m_1 + m_i)^2 \left(2m_1^2 + 2m_i^2 + 2q^2 - dq^2\right) \cdot \frac{F_{\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_j^2} \\
 & -2\left(2m_1^6 - 2m_1^4 m_i^2 - 2m_1^2 m_i^4 + 2m_i^6 - 8m_1^4 m_j^2 + 2dm_1^4 m_j^2 + 4m_1^3 m_i m_j^2 \right. \\
 & -4dm_1^3 m_i m_j^2 - 8m_1^2 m_i^2 m_j^2 + 4dm_1^2 m_i^2 m_j^2 + 4m_1 m_i^3 m_j^2 - 4dm_1 m_i^3 m_j^2 \\
 & -8m_i^4 m_j^2 + 2dm_i^4 m_j^2 + 10m_1^2 m_j^4 - 4dm_1^2 m_j^4 - 4m_1 m_i m_j^4 + 4dm_1 m_i m_j^4 \\
 & +10m_i^2 m_j^4 - 4dm_i^2 m_j^4 - 4m_j^6 + 2dm_j^6 + 2m_1^4 q^2 - dm_1^4 q^2 - 4m_1^2 m_i^2 q^2 + 2dm_1^2 m_i^2 q^2 \\
 & +2m_i^4 q^2 - dm_i^4 q^2 - 16m_1^2 m_j^2 q^2 + 9dm_1^2 m_j^2 q^2 - d^2 m_1^2 m_j^2 q^2 + 16m_1 m_i m_j^2 q^2 \\
 & -14dm_1 m_i m_j^2 q^2 + 2d^2 m_1 m_i m_j^2 q^2 - 16m_i^2 m_j^2 q^2 + 9dm_i^2 m_j^2 q^2 - d^2 m_i^2 m_j^2 q^2 + 16m_j^4 q^2 \\
 & \left. -10dm_j^4 q^2 + d^2 m_j^4 q^2 - 4m_j^2 q^4 + 2dm_j^2 q^4\right) \cdot \frac{F_{\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_j^2} \\
 & -2(-2+d)(m_1 - m_i)(m_1 + m_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( 8m_1^6 m_i - 8m_1^4 m_i^3 + 4m_1^5 q^2 - 4m_1^4 m_i q^2 + 6dm_1^4 m_i q^2 - 4m_1^3 m_i^2 q^2 \right. \\
 & \left. - 4m_1^2 m_i^3 q^2 + 2dm_1^2 m_i^3 q^2 + m_1^3 q^4 - m_1^2 m_i q^4 + dm_1^2 m_i q^4 - m_1 m_i^2 q^4 - m_i^3 q^4 + dm_i^3 q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1, m_i\}, \{1, m_1\}, \{1, 0\}}}{m_1^2 m_i m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & + 2(-2 + d) \left( 8m_1^{10} m_i + 16m_1^9 m_i^2 - 8m_1^8 m_i^3 - 32m_1^7 m_i^4 - 8m_1^6 m_i^5 + 16m_1^5 m_i^6 + 8m_1^4 m_i^7 \right. \\
 & - 32m_1^8 m_i m_j^2 + 8dm_1^8 m_i m_j^2 - 32m_1^7 m_i^2 m_j^2 - 16dm_1^6 m_i^3 m_j^2 \\
 & + - 32m_1^5 m_i^4 m_j^2 - 32m_1^4 m_i^5 m_j^2 + 8dm_1^4 m_i^5 m_j^2 + 40m_1^6 m_i m_j^4 \\
 & - 16dm_1^6 m_i m_j^4 + 16m_1^5 m_i^2 m_j^4 + 40m_1^4 m_i^3 m_j^4 - 16dm_1^4 m_i^3 m_j^4 - 16m_1^4 m_i m_j^6 \\
 & + 8dm_1^4 m_i m_j^6 + 4m_1^9 q^2 + 4m_1^8 m_i q^2 + 6dm_1^8 m_i q^2 - 12m_1^7 m_i^2 q^2 + 12dm_1^7 m_i^2 q^2 \\
 & - 20m_1^6 m_i^3 q^2 + 2dm_1^6 m_i^3 q^2 - 4m_1^5 m_i^4 q^2 - 8dm_1^5 m_i^4 q^2 + 12m_1^4 m_i^5 q^2 - 6dm_1^4 m_i^5 q^2 \\
 & + 12m_1^3 m_i^6 q^2 - 4dm_1^3 m_i^6 q^2 + 4m_1^2 m_i^7 q^2 - 2dm_1^2 m_i^7 q^2 - 8m_1^7 m_j^2 q^2 - 28dm_1^6 m_i m_j^2 q^2 \\
 & + 6d^2 m_1^6 m_i m_j^2 q^2 - 24m_1^5 m_i^2 m_j^2 q^2 - 32m_1^4 m_i^3 m_j^2 q^2 + 16dm_1^4 m_i^3 m_j^2 q^2 \\
 & - 4d^2 m_1^4 m_i^3 m_j^2 q^2 - 16m_1^3 m_i^4 m_j^2 q^2 - 16m_1^2 m_i^5 m_j^2 q^2 + 12dm_1^2 m_i^5 m_j^2 q^2 \\
 & - 2d^2 m_1^2 m_i^5 m_j^2 q^2 + 4m_1^5 m_j^4 q^2 + 4m_1^4 m_i m_j^4 q^2 + 14dm_1^4 m_i m_j^4 q^2 - 4d^2 m_1^4 m_i m_j^4 q^2 + \\
 & 4m_1^3 m_i^2 m_j^4 q^2 + 4dm_1^3 m_i^2 m_j^4 q^2 + 20m_1^2 m_i^3 m_j^4 q^2 \\
 & - 18dm_1^2 m_i^3 m_j^4 q^2 + 4d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^4 q^2 - 8m_1^2 m_i m_j^6 q^2 \\
 & + 8dm_1^2 m_i m_j^6 q^2 - 2d^2 m_1^2 m_i m_j^6 q^2 + m_1^7 q^4 + m_1^6 m_i q^4 + dm_1^6 m_i q^4 \\
 & - 3m_1^5 m_i^2 q^4 + 2dm_1^5 m_i^2 q^4 - 5m_1^4 m_i^3 q^4 + dm_1^4 m_i^3 q^4 - m_1^3 m_i^4 q^4 \\
 & + 3m_1^2 m_i^5 q^4 - dm_1^2 m_i^5 q^4 + 3m_1 m_i^6 q^4 - 2dm_1 m_i^6 q^4 + m_i^7 q^4 - dm_i^7 q^4 - 2m_1^5 m_j^2 q^4 \\
 & - 5dm_1^4 m_i m_j^2 q^4 + d^2 m_1^4 m_i m_j^2 q^4 - 6m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^4 \\
 & + 2dm_1^3 m_i^2 m_j^2 q^4 - 8m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^4 + 4dm_1^2 m_i^3 m_j^2 q^4 \\
 & - 4m_1 m_i^4 m_j^2 q^4 + 2dm_1 m_i^4 m_j^2 q^4 - 4m_i^5 m_j^2 q^4 + 5dm_i^5 m_j^2 q^4 \\
 & - d^2 m_i^5 m_j^2 q^4 + m_1^3 m_j^4 q^4 + m_1^2 m_i m_j^4 q^4 + dm_1^2 m_i m_j^4 q^4 + m_1 m_i^2 m_j^4 q^4 \\
 & \left. + 5m_i^3 m_j^4 q^4 - 7dm_i^3 m_j^4 q^4 + 2d^2 m_i^3 m_j^4 q^4 - 2m_i m_j^6 q^4 + 3dm_i m_j^6 q^4 - d^2 m_i m_j^6 q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1, m_j\}, \{1, m_i\}, \{1, m_1\}}}{m_1^2 m_i (m_1 + m_i - m_j) m_j^2 (m_1 + m_i + m_j) q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & + 2(m_1 - m_i) \left( - 64m_1^7 m_i + 24dm_1^7 m_i - 64m_1^6 m_i^2 + 24dm_1^6 m_i^2 + 64m_1^5 m_i^3 - 24dm_1^5 m_i^3 \right. \\
 & + 64m_1^4 m_i^4 - 24dm_1^4 m_i^4 - 32m_1^6 q^2 + 12dm_1^6 q^2 - 48m_1^5 m_i q^2 + 40dm_1^5 m_i q^2 - 6d^2 m_1^5 m_i q^2 \\
 & - 32m_1^4 m_i^2 q^2 + 32dm_1^4 m_i^2 q^2 - 6d^2 m_1^4 m_i^2 q^2 + 64m_1^3 m_i^3 q^2 - 40dm_1^3 m_i^3 q^2 + 6d^2 m_1^3 m_i^3 q^2 \\
 & + 32m_1^2 m_i^4 q^2 - 28dm_1^2 m_i^4 q^2 + 6d^2 m_1^2 m_i^4 q^2 - 8m_1^4 q^4 + 3dm_1^4 q^4 - 12m_1^3 m_i q^4 \\
 & + 14dm_1^3 m_i q^4 - 3d^2 m_1^3 m_i q^4 - 8m_1^2 m_i^2 q^4 + 12dm_1^2 m_i^2 q^4 - 3d^2 m_1^2 m_i^2 q^4 + 16m_1 m_i^3 q^4 \\
 & \left. - 14dm_1 m_i^3 q^4 + 3d^2 m_1 m_i^3 q^4 + 8m_i^4 q^4 - 11dm_i^4 q^4 + 3d^2 m_i^4 q^4 \right) \frac{J_{\{1, m_i\}, \{1, m_1\}, \{1, 0\}}}{m_1^2 m_i m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & - 2 \left( - 64m_1^8 m_i + 24dm_1^8 m_i + 128m_1^6 m_i^3 - 48dm_1^6 m_i^3 - 64m_1^4 m_i^5 + 24dm_1^4 m_i^5 + 192m_1^6 m_i m_j^2 \right. \\
 & - 136dm_1^6 m_i m_j^2 + 24d^2 m_1^6 m_i m_j^2 - 128m_1^5 m_i^2 m_j^2 + 176dm_1^5 m_i^2 m_j^2 - 48d^2 m_1^5 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 192m_1^4 m_i^3 m_j^2 - 136dm_1^4 m_i^3 m_j^2 + 24d^2 m_1^4 m_i^3 m_j^2 - 128m_1^4 m_i m_j^4 + 112dm_1^4 m_i m_j^4 \\
 & - 24d^2 m_1^4 m_i m_j^4 - 32m_1^7 q^2 + 12dm_1^7 q^2 - 16m_1^6 m_i q^2 + 28dm_1^6 m_i q^2 - 6d^2 m_1^6 m_i q^2 \\
 & \left. + 16m_1^5 m_i^2 q^2 - 8dm_1^5 m_i^2 q^2 + 96m_1^4 m_i^3 q^2 - 72dm_1^4 m_i^3 q^2 + 12d^2 m_1^4 m_i^3 q^2 - 32m_1^3 m_i^4 q^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +12dm_1^3 m_i^4 q^2 - 32m_1^2 m_i^5 q^2 + 28dm_1^2 m_i^5 q^2 - 6d^2 m_1^2 m_i^5 q^2 + 32m_1^5 m_j^2 q^2 - 12dm_1^5 m_j^2 q^2 \\
 & +208m_1^4 m_i m_j^2 q^2 - 204dm_1^4 m_i m_j^2 q^2 + 62d^2 m_1^4 m_i m_j^2 q^2 - 6d^3 m_1^4 m_i m_j^2 q^2 \\
 & -96m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 + 196dm_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 - 92d^2 m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 + 12d^3 m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 \\
 & +96m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 - 116dm_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 + 46d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 - 6d^3 m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 \\
 & -64m_1^2 m_i m_j^4 q^2 + 88dm_1^2 m_i m_j^4 q^2 - 40d^2 m_1^2 m_i m_j^4 q^2 + 6d^3 m_1^2 m_i m_j^4 q^2 - 8m_1^5 q^4 + 3dm_1^5 q^4 \\
 & -4m_1^4 m_i q^4 + 11dm_1^4 m_i q^4 - 3d^2 m_1^4 m_i q^4 + 4m_1^3 m_i^2 q^4 - 2dm_1^3 m_i^2 q^4 + 24m_1^2 m_i^3 q^4 \\
 & -26dm_1^2 m_i^3 q^4 + 6d^2 m_1^2 m_i^3 q^4 - 8m_1 m_i^4 q^4 + 3dm_1 m_i^4 q^4 - 8m_i^5 q^4 + 11dm_i^5 q^4 - 3d^2 m_i^5 q^4 \\
 & +8m_1^3 m_j^2 q^4 - 3dm_1^3 m_j^2 q^4 + 52m_1^2 m_i m_j^2 q^4 - 63dm_1^2 m_i m_j^2 q^4 + 24d^2 m_1^2 m_i m_j^2 q^4 \\
 & -3d^3 m_1^2 m_i m_j^2 q^4 - 24m_1 m_i^2 m_j^2 q^4 + 57dm_1 m_i^2 m_j^2 q^4 - 34d^2 m_1 m_i^2 m_j^2 q^4 + 6d^3 m_1 m_i^2 m_j^2 q^4 \\
 & +24m_i^3 m_j^2 q^4 - 41dm_i^3 m_j^2 q^4 + 20d^2 m_i^3 m_j^2 q^4 - 3d^3 m_i^3 m_j^2 q^4 - 16m_i m_j^4 q^4 \\
 & +30dm_i m_j^4 q^4 - 17d^2 m_i m_j^4 q^4 + 3d^3 m_i m_j^4 q^4) \frac{J_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1^2 m_i m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & +4(m_1 - m_i) \left( 8m_1^7 m_i + 8m_1^6 m_i^2 - 8m_1^5 m_i^3 - 8m_1^4 m_i^4 + 4m_1^6 q^2 + 12m_1^5 m_i q^2 - 2dm_1^5 m_i q^2 \right. \\
 & +16m_1^4 m_i^2 q^2 - 2dm_1^4 m_i^2 q^2 - 12m_1^3 m_i^3 q^2 + 2dm_1^3 m_i^3 q^2 - 4m_1^2 m_i^4 q^2 + 2dm_1^2 m_i^4 q^2 \\
 & +5m_1^4 q^4 + 4m_1^3 m_i q^4 - 2dm_1^3 m_i q^4 + 5m_1^2 m_i^2 q^4 - 2dm_1^2 m_i^2 q^4 - 4m_1 m_i^3 q^4 \\
 & \left. +2dm_1 m_i^3 q^4 - 2m_i^4 q^4 + 2dm_i^4 q^4 + m_1^2 q^6 \right) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_i m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & +4 \left( -8m_1^8 m_i + 16m_1^6 m_i^3 - 8m_1^4 m_i^5 + 24m_1^6 m_i m_j^2 - 8dm_1^6 m_i m_j^2 - 16m_1^5 m_i^2 m_j^2 \right. \\
 & +16dm_1^5 m_i^2 m_j^2 + 24m_1^4 m_i^3 m_j^2 - 8dm_1^4 m_i^3 m_j^2 - 16m_1^4 m_i m_j^4 + 8dm_1^4 m_i m_j^4 - 4m_1^7 q^2 \\
 & -8m_1^6 m_i q^2 + 2dm_1^6 m_i q^2 - 4m_1^5 m_i^2 q^2 + 28m_1^4 m_i^3 q^2 - 4dm_1^4 m_i^3 q^2 - 8m_1^3 m_i^4 q^2 \\
 & -4m_1^2 m_i^5 q^2 + 2dm_1^2 m_i^5 q^2 + 4m_1^5 m_j^2 q^2 + 32m_1^4 m_i m_j^2 q^2 \\
 & -18dm_1^4 m_i m_j^2 q^2 + 2d^2 m_1^4 m_i m_j^2 q^2 - 16m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 + 28dm_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 \\
 & -4d^2 m_1^3 m_i^2 m_j^2 q^2 + 12m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 - 10dm_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 + 2d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^2 q^2 - 8m_1^2 m_i m_j^4 q^2 \\
 & +8dm_1^2 m_i m_j^4 q^2 - 2d^2 m_1^2 m_i m_j^4 q^2 - 5m_1^5 q^4 + m_1^4 m_i q^4 + 2dm_1^4 m_i q^4 \\
 & -m_1^3 m_i^2 q^4 + 9m_1^2 m_i^3 q^4 - 4dm_1^2 m_i^3 q^4 - 2m_1 m_i^4 q^4 - 2m_i^5 q^4 + 2dm_i^5 q^4 \\
 & +m_1^3 m_j^2 q^4 + 11m_1^2 m_i m_j^2 q^4 - 10dm_1^2 m_i m_j^2 q^4 + 2d^2 m_1^2 m_i m_j^2 q^4 - 6m_1 m_i^2 m_j^2 q^4 \\
 & +12dm_1 m_i^2 m_j^2 q^4 - 4d^2 m_1 m_i^2 m_j^2 q^4 + 6m_i^3 m_j^2 q^4 - 8dm_i^3 m_j^2 q^4 + 2d^2 m_i^3 m_j^2 q^4 - 4m_i m_j^4 q^4 \\
 & \left. +6dm_i m_j^4 q^4 - 2d^2 m_i m_j^4 q^4 - m_1^3 q^6 + m_1^2 m_i q^6 \right) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_i m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & +4(m_1 - m_i) m_i \left( 8m_1^7 m_i + 8m_1^6 m_i^2 - 8m_1^5 m_i^3 - 8m_1^4 m_i^4 + 8m_1^6 q^2 - 8m_1^5 m_i q^2 - 2dm_1^5 m_i q^2 \right. \\
 & -4m_1^4 m_i^2 q^2 - 2dm_1^4 m_i^2 q^2 - 8m_1^3 m_i^3 q^2 + 2dm_1^3 m_i^3 q^2 - 4m_1^2 m_i^4 q^2 + 2dm_1^2 m_i^4 q^2 \\
 & +2m_1^4 q^4 - 10m_1^3 m_i q^4 + 3dm_1^3 m_i q^4 - 5m_1^2 m_i^2 q^4 + 3dm_1^2 m_i^2 q^4 - 2m_1 m_i^3 q^4 \\
 & \left. +dm_1 m_i^3 q^4 - m_i^4 q^4 + dm_i^4 q^4 - 2m_1 m_i q^6 + dm_1 m_i q^6 - m_i^2 q^6 + dm_i^2 q^6 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1^2 m_j^2 q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & -4m_i \left( 8m_1^{10} m_i + 16m_1^9 m_i^2 - 8m_1^8 m_i^3 - 32m_1^7 m_i^4 - 8m_1^6 m_i^5 + 16m_1^5 m_i^6 + 8m_1^4 m_i^7 \right. \\
 & -32m_1^8 m_i m_j^2 + 8dm_1^8 m_i m_j^2 - 32m_1^7 m_i^2 m_j^2 - 16dm_1^6 m_i^3 m_j^2 - 32m_1^5 m_i^4 m_j^2 \\
 & \left. -32m_1^4 m_i^5 m_j^2 + 8dm_1^4 m_i^5 m_j^2 + 40m_1^6 m_i m_j^4 - 16dm_1^6 m_i m_j^4 + 16m_1^5 m_i^2 m_j^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+40m_1^4m_i^3m_j^4 - 16dm_1^4m_i^3m_j^4 - 16m_1^4m_im_j^6 + 8dm_1^4m_im_j^6 + 8m_1^9q^2 - 2dm_1^8m_iq^2 \\
 &-20m_1^7m_i^2q^2 - 4dm_1^7m_i^2q^2 - 12m_1^6m_i^3q^2 + 2dm_1^6m_i^3q^2 + 8dm_1^5m_i^4q^2 + 8m_1^4m_i^5q^2 \\
 &+2dm_1^4m_i^5q^2 + 12m_1^3m_i^6q^2 - 4dm_1^3m_i^6q^2 + 4m_1^2m_i^7q^2 - 2dm_1^2m_i^7q^2 - 16m_1^7m_j^2q^2 \\
 &-8m_1^6m_im_j^2q^2 - 4dm_1^6m_im_j^2q^2 - 2d^2m_1^6m_im_j^2q^2 - 48m_1^5m_i^2m_j^2q^2 - 24m_1^4m_i^3m_j^2q^2 \\
 &-8dm_1^4m_i^3m_j^2q^2 + 4d^2m_1^4m_i^3m_j^2q^2 - 16m_1^3m_i^4m_j^2q^2 - 16m_1^2m_i^5m_j^2q^2 \\
 &+12dm_1^2m_i^5m_j^2q^2 - 2d^2m_1^2m_i^5m_j^2q^2 + 8m_1^5m_j^4q^2 + 48m_1^4m_im_j^4q^2 - 34dm_1^4m_im_j^4q^2 \\
 &+4d^2m_1^4m_im_j^4q^2 + 4m_1^3m_i^2m_j^4q^2 + 4dm_1^3m_i^2m_j^4q^2 \\
 &+20m_1^2m_i^3m_j^4q^2 - 18dm_1^2m_i^3m_j^4q^2 + 4d^2m_1^2m_i^3m_j^4q^2 \\
 &-8m_1^2m_im_j^6q^2 + 8dm_1^2m_im_j^6q^2 - 2d^2m_1^2m_im_j^6q^2 + 2m_1^7q^4 \\
 &-8m_1^6m_iq^4 + 3dm_1^6m_iq^4 - 17m_1^5m_i^2q^4 + 6dm_1^5m_i^2q^4 + m_1^4m_i^3q^4 \\
 &+dm_1^4m_i^3q^4 + 12m_1^3m_i^4q^4 - 4dm_1^3m_i^4q^4 + 6m_1^2m_i^5q^4 - 3dm_1^2m_i^5q^4 + 3m_1m_i^6q^4 \\
 &-2dm_1m_i^6q^4 + m_i^7q^4 - dm_i^7q^4 - 4m_1^5m_j^2q^4 + 14m_1^4m_im_j^2q^4 - 15dm_1^4m_im_j^2q^4 \\
 &+3d^2m_1^4m_im_j^2q^4 - 16m_1^3m_i^2m_j^2q^4 + 2dm_1^3m_i^2m_j^2q^4 \\
 &-18m_1^2m_i^3m_j^2q^4 + 14dm_1^2m_i^3m_j^2q^4 - 2d^2m_1^2m_i^3m_j^2q^4 - 4m_1m_i^4m_j^2q^4 + 2dm_1m_i^4m_j^2q^4 \\
 &-4m_i^5m_j^2q^4 + 5dm_i^5m_j^2q^4 - d^2m_i^5m_j^2q^4 + 2m_1^3m_j^4q^4 + 20m_1^2m_im_j^4q^4 - 23dm_1^2m_im_j^4q^4 \\
 &+6d^2m_1^2m_im_j^4q^4 + m_1m_i^2m_j^4q^4 + 5m_i^3m_j^4q^4 - 7dm_i^3m_j^4q^4 + 2d^2m_i^3m_j^4q^4 - 2m_im_j^6q^4 \\
 &+3dm_im_j^6q^4 - d^2m_im_j^6q^4 - 2m_1^4m_iq^6 + dm_1^4m_iq^6 - 3m_1^3m_i^2q^6 + 2dm_1^3m_i^2q^6 + m_1^2m_i^3q^6 \\
 &+3m_1m_i^4q^6 - 2dm_1m_i^4q^6 + m_i^5q^6 - dm_i^5q^6 + 4m_1^2m_im_j^2q^6 \\
 &-4dm_1^2m_im_j^2q^6 + d^2m_1^2m_im_j^2q^6 - m_1m_i^2m_j^2q^6 - 3m_i^3m_j^2q^6 \\
 &+4dm_i^3m_j^2q^6 - d^2m_i^3m_j^2q^6 + 2m_im_j^4q^6 - 3dm_im_j^4q^6 + d^2m_im_j^4q^6 \Big).
 \end{aligned}$$

$$\frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_j\},\{1,m_1\}}}{m_1^2(m_1+m_i-m_j)m_j^2(m_1+m_i+m_j)q^2(4m_1^2+q^2)}$$

$$\begin{aligned}
 &-4\left(8m_1^{10}m_i + 16m_1^9m_i^2 - 8m_1^8m_i^3 - 32m_1^7m_i^4 - 8m_1^6m_i^5 + 16m_1^5m_i^6 + 8m_1^4m_i^7\right. \\
 &-32m_1^8m_im_j^2 + 8dm_1^8m_im_j^2 - 32m_1^7m_i^2m_j^2 - 16dm_1^6m_i^3m_j^2 - 32m_1^5m_i^4m_j^2 \\
 &-32m_1^4m_i^5m_j^2 + 8dm_1^4m_i^5m_j^2 + 40m_1^6m_im_j^4 - 16dm_1^6m_im_j^4 + 16m_1^5m_i^2m_j^4 \\
 &+40m_1^4m_i^3m_j^4 - 16dm_1^4m_i^3m_j^4 - 16m_1^4m_im_j^6 + 8dm_1^4m_im_j^6 + 4m_1^9q^2 - 4m_1^8m_iq^2 \\
 &-2dm_1^8m_iq^2 - 28m_1^7m_i^2q^2 - 4dm_1^7m_i^2q^2 - 52m_1^6m_i^3q^2 + 2dm_1^6m_i^3q^2 - 52m_1^5m_i^4q^2 \\
 &+8dm_1^5m_i^4q^2 - 12m_1^4m_i^5q^2 + 2dm_1^4m_i^5q^2 + 12m_1^3m_i^6q^2 - 4dm_1^3m_i^6q^2 + 4m_1^2m_i^7q^2 \\
 &-2dm_1^2m_i^7q^2 - 8m_1^7m_j^2q^2 + 8m_1^6m_im_j^2q^2 + 4dm_1^6m_im_j^2q^2 \\
 &-2d^2m_1^6m_im_j^2q^2 - 8m_1^5m_i^2m_j^2q^2 + 16dm_1^5m_i^2m_j^2q^2 \\
 &+40m_1^4m_i^3m_j^2q^2 - 32dm_1^4m_i^3m_j^2q^2 + 4d^2m_1^4m_i^3m_j^2q^2 - 16m_1^3m_i^4m_j^2q^2 - 16m_1^2m_i^5m_j^2q^2 \\
 &+12dm_1^2m_i^5m_j^2q^2 - 2d^2m_1^2m_i^5m_j^2q^2 + 4m_1^5m_j^4q^2 + 4m_1^4m_im_j^4q^2 - 10dm_1^4m_im_j^4q^2 \\
 &+4d^2m_1^4m_im_j^4q^2 + 4m_1^3m_i^2m_j^4q^2 + 4dm_1^3m_i^2m_j^4q^2 + 20m_1^2m_i^3m_j^4q^2 - 18dm_1^2m_i^3m_j^4q^2 \\
 &+4d^2m_1^2m_i^3m_j^4q^2 - 8m_1^2m_im_j^6q^2 + 8dm_1^2m_im_j^6q^2 - 2d^2m_1^2m_im_j^6q^2 \\
 &-3m_1^7q^4 - 13m_1^6m_iq^4 + 3dm_1^6m_iq^4 - 23m_1^5m_i^2q^4 + 6dm_1^5m_i^2q^4 - 29m_1^4m_i^3q^4 \\
 &+9dm_1^4m_i^3q^4 - 25m_1^3m_i^4q^4 + 12dm_1^3m_i^4q^4 - 7m_1^2m_i^5q^4 + 5dm_1^2m_i^5q^4 + 3m_1m_i^6q^4 \\
 &-2dm_1m_i^6q^4 + m_i^7q^4 - dm_i^7q^4 + 2m_1^5m_j^2q^4 + 14m_1^4m_im_j^2q^4 - 13dm_1^4m_im_j^2q^4 + 3d^2m_1^4m_im_j^2q^4 \\
 &+2m_1^3m_i^2m_j^2q^4 + 6dm_1^3m_i^2m_j^2q^4 + 22m_1^2m_i^3m_j^2q^4 - 24dm_1^2m_i^3m_j^2q^4 \\
 &+6d^2m_1^2m_i^3m_j^2q^4 - 4m_1m_i^4m_j^2q^4 + 2dm_1m_i^4m_j^2q^4 - 4m_i^5m_j^2q^4 + 5dm_i^5m_j^2q^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -d^2 m_i^5 m_j^2 q^4 + m_1^3 m_j^4 q^4 - 7m_1^2 m_i m_j^4 q^4 + 7dm_1^2 m_i m_j^4 q^4 \\
 & -2d^2 m_1^2 m_i m_j^4 q^4 + m_1 m_i^2 m_j^4 q^4 + 5m_i^3 m_j^4 q^4 - 7dm_i^3 m_j^4 q^4 + 2d^2 m_i^3 m_j^4 q^4 - 2m_i m_j^6 q^4 \\
 & + 3dm_i m_j^6 q^4 - d^2 m_i m_j^6 q^4 - m_1^5 q^6 - 3m_1^4 m_i q^6 + dm_1^4 m_i q^6 - 4m_1^3 m_i^2 q^6 \\
 & + 2dm_1^3 m_i^2 q^6 - 4m_1^2 m_i^3 q^6 + 2dm_1^2 m_i^3 q^6 - 3m_1 m_i^4 q^6 + 2dm_1 m_i^4 q^6 - m_i^5 q^6 + dm_i^5 q^6 \\
 & + m_1^3 m_j^2 q^6 + 3m_1^2 m_i m_j^2 q^6 - 4dm_1^2 m_i m_j^2 q^6 + d^2 m_1^2 m_i m_j^2 q^6 + m_1 m_i^2 m_j^2 q^6 \\
 & + 3m_i^3 m_j^2 q^6 - 4dm_i^3 m_j^2 q^6 + d^2 m_i^3 m_j^2 q^6 - 2m_i m_j^4 q^6 + 3dm_i m_j^4 q^6 - d^2 m_i m_j^4 q^6 \Big) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2, m_j\}, \{1, m_i\}, \{1, m_1\}}}{m_1^2 m_i (m_1 + m_i - m_j) (m_1 + m_i + m_j) q^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & + 2(m_1 - m_i) (m_1 + m_i) \left( 4m_1^3 + 4m_1 m_i^2 + 2m_1 q^2 - dm_1 q^2 + 2m_i q^2 - dm_i q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1, m_1\}, \{1, m_1\}, \{1, m_i\}, \{1, 0\}}}{m_1 m_j^2} \\
 & - 2(m_1 - m_i) (m_1 + m_i) \left( 4m_1^2 m_i + 4m_i^3 + 2m_1 q^2 - dm_1 q^2 + 2m_i q^2 - dm_i q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1, m_i\}, \{1, m_i\}, \{1, m_1\}, \{1, 0\}}}{m_i m_j^2} \\
 & + 2(-1 + d) (m_1 - m_i) (m_1 + m_i) \left( -24m_1^6 - 8m_1^4 m_i^2 - 20m_1^4 q^2 + 6dm_1^4 q^2 \right. \\
 & \left. - 4m_1^2 m_i^2 q^2 + 2dm_1^2 m_i^2 q^2 - 2m_1^2 q^4 + dm_1^2 q^4 - 2m_i^2 q^4 + dm_i^2 q^4 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1, m_1\}, \{1, m_1\}, \{1, 0\}, \{1, m_i\}}}{m_1^2 m_j^2 (4m_1^2 + q^2)} \\
 & - 2(-1 + d) \left( -24m_1^{10} - 48m_1^9 m_i - 8m_1^8 m_i^2 + 32m_1^7 m_i^3 + 24m_1^6 m_i^4 + 16m_1^5 m_i^5 \right. \\
 & + 8m_1^4 m_i^6 + 96m_1^8 m_j^2 - 24dm_1^8 m_j^2 - 64m_1^6 m_i^2 m_j^2 + 16dm_1^6 m_i^2 m_j^2 - 32m_1^4 m_i^4 m_j^2 \\
 & + 8dm_1^4 m_i^4 m_j^2 - 56m_1^6 m_j^4 + 16dm_1^6 m_j^4 - 16m_1^5 m_i m_j^4 + 40m_1^4 m_i^2 m_j^4 - 16dm_1^4 m_i^2 m_j^4 \\
 & - 16m_1^4 m_j^6 + 8dm_1^4 m_j^6 - 20m_1^8 q^2 + 6dm_1^8 q^2 - 40m_1^7 m_i q^2 + 12dm_1^7 m_i q^2 - 4m_1^6 m_i^2 q^2 \\
 & + 2dm_1^6 m_i^2 q^2 + 32m_1^5 m_i^3 q^2 - 8dm_1^5 m_i^3 q^2 + 20m_1^4 m_i^4 q^2 - 6dm_1^4 m_i^4 q^2 + 8m_1^3 m_i^5 q^2 \\
 & - 4dm_1^3 m_i^5 q^2 + 4m_1^2 m_i^6 q^2 - 2dm_1^2 m_i^6 q^2 + 80m_1^6 m_j^2 q^2 - 44dm_1^6 m_j^2 q^2 + 6d^2 m_1^6 m_j^2 q^2 \\
 & + 8m_1^5 m_i m_j^2 q^2 - 48m_1^4 m_i^2 m_j^2 q^2 + 32dm_1^4 m_i^2 m_j^2 q^2 - 4d^2 m_1^4 m_i^2 m_j^2 q^2 \\
 & + 8m_1^3 m_i^3 m_j^2 q^2 - 16m_1^2 m_i^4 m_j^2 q^2 + 12dm_1^2 m_i^4 m_j^2 q^2 \\
 & - 2d^2 m_1^2 m_i^4 m_j^2 q^2 - 52m_1^4 m_j^4 q^2 + 30dm_1^4 m_j^4 q^2 - 4d^2 m_1^4 m_j^4 q^2 - 16m_1^3 m_i m_j^4 q^2 \\
 & + 4dm_1^3 m_i m_j^4 q^2 + 20m_1^2 m_i^2 m_j^4 q^2 - 18dm_1^2 m_i^2 m_j^4 q^2 + 4d^2 m_1^2 m_i^2 m_j^4 q^2 \\
 & - 8m_1^2 m_j^6 q^2 + 8dm_1^2 m_j^6 q^2 - 2d^2 m_1^2 m_j^6 q^2 - 2m_1^6 q^4 + dm_1^6 q^4 - 4m_1^5 m_i q^4 + 2dm_1^5 m_i q^4 \\
 & - 2m_1^4 m_i^2 q^4 + dm_1^4 m_i^2 q^4 + 2m_1^2 m_i^4 q^4 - dm_1^2 m_i^4 q^4 + 4m_1 m_i^5 q^4 - 2dm_1 m_i^5 q^4 \\
 & + 2m_i^6 q^4 - dm_i^6 q^4 + 8m_1^4 m_j^2 q^4 - 6dm_1^4 m_j^2 q^4 + d^2 m_1^4 m_j^2 q^4 - 4m_1^3 m_i m_j^2 q^4 \\
 & + 2dm_1^3 m_i m_j^2 q^4 - 8m_1^2 m_i^2 m_j^2 q^4 + 4dm_1^2 m_i^2 m_j^2 q^4 - 4m_1 m_i^3 m_j^2 q^4 + 2dm_1 m_i^3 m_j^2 q^4 - 8m_i^4 m_j^2 q^4 \\
 & + 6dm_i^4 m_j^2 q^4 - d^2 m_i^4 m_j^2 q^4 - 2m_1^2 m_j^4 q^4 + dm_1^2 m_j^4 q^4 + 10m_i^2 m_j^4 q^4 - 9dm_i^2 m_j^4 q^4 \\
 & \left. + 2d^2 m_i^2 m_j^4 q^4 - 4m_j^6 q^4 + 4dm_j^6 q^4 - d^2 m_j^6 q^4 \right) \cdot \frac{V_{\{1, m_1\}, \{1, m_1\}, \{1, m_j\}, \{1, m_i\}}}{m_1^2 (m_1 + m_i - m_j) m_j^2 (m_1 + m_i + m_j) (4m_1^2 + q^2)} \\
 & - 2 \left( 4m_1^5 - 4m_1 m_i^4 - 4m_1^2 m_i m_j^2 + 4dm_1^2 m_i m_j^2 + 12m_1 m_i^2 m_j^2 - 4dm_1 m_i^2 m_j^2 - 8m_1 m_j^4 + 4dm_1 m_j^4 \right. \\
 & \left. + 2m_1^3 q^2 - dm_1^3 q^2 + 2m_1^2 m_i q^2 - dm_1^2 m_i q^2 - 2m_1 m_i^2 q^2 + dm_1 m_i^2 q^2 - 2m_i^3 q^2 + dm_i^3 q^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +6m_1m_j^2q^2 - 3dm_1m_j^2q^2 + 2m_im_j^2q^2 - dm_im_j^2q^2) \cdot \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_1m_j^2} \\
 & -2\left(-4m_1^4m_i + 4m_i^5 + 12m_1^2m_im_j^2 - 4dm_1^2m_im_j^2 - 4m_1m_i^2m_j^2 + 4dm_1m_i^2m_j^2 - 8m_im_j^4 \right. \\
 & +4dm_im_j^4 - 2m_1^3q^2 + dm_1^3q^2 - 2m_1^2m_iq^2 + dm_1^2m_iq^2 + 2m_1m_i^2q^2 \\
 & \left. - dm_1m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 + 2m_1m_j^2q^2 - dm_1m_j^2q^2 + 6m_im_j^2q^2 - 3dm_im_j^2q^2\right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_j\}}}{m_im_j^2}
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
 & \Pi_T^{[1,1]^a}_{i,j,1,2}(q^2) + \Pi_T^{[1,1]^a}_{i,j,2,1}(q^2) = \\
 & 4(-2+d)^2 \frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_i\}}}{m_1(m_1-m_2)} - 4(-2+d)^2 \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_i\}}}{(m_1-m_2)m_2} \\
 & -2(-2+d)(-3m_1^2 + m_1m_2 + m_1m_i - m_2m_i + 2m_i^2 - 4m_j^2 + 2dm_j^2) \frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_j\}}}{m_1(m_1-m_2)m_j^2} \\
 & +2(-2+d)(m_1m_2 - 3m_2^2 - m_1m_i + m_2m_i + 2m_i^2 - 4m_j^2 + 2dm_j^2) \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1-m_2)m_2m_j^2} \\
 & -2(-2+d)(m_1+m_2+2m_i) \frac{A_{\{1,m_i\}}A_{\{1,m_j\}}}{m_im_j^2} \\
 & +A_{\{1,m_i\}}\left(-2(-2+d)(-4m_1^2 - 2q^2 + dq^2) \frac{B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1-m_2)} \right. \\
 & +2(-2+d)^2(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + q^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{m_1m_2} \\
 & \left. -2(-2+d)(-4m_2^2 - 2q^2 + dq^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_2\}}}{m_2(-m_1+m_2)}\right) \\
 & +4(-2+d)A_{\{1,m_1\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & +4(-2+d)A_{\{1,m_2\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & -4\left(-2m_1^2 + dm_1^2 - 2m_1m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 + 2m_1m_i - 2dm_1m_i + 2m_2m_i \right. \\
 & \left. - 2dm_2m_i - 6m_i^2 + 2dm_i^2 + 4m_j^2 - 2dm_j^2 - 14q^2 + 9dq^2 - d^2q^2\right) \cdot \\
 & B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & +A_{\{1,m_j\}}\left(2(m_1^2 - m_i^2 + 2m_j^2 - dm_j^2)(4m_1^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1-m_2)m_j^2} \right. \\
 & -2(-2+d)(m_1m_2 - m_1m_i - m_2m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2)(m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + q^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{m_1m_2m_j^2} \\
 & \left. +2(m_2^2 - m_i^2 + 2m_j^2 - dm_j^2)(4m_2^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_2\}}}{m_2(-m_1+m_2)m_j^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \left( 4m_1 m_2 m_i + 4m_i^3 - 8m_i m_j^2 + 4dm_i m_j^2 + 2m_1 q^2 - dm_1 q^2 + 2m_2 q^2 - dm_2 q^2 \right) \frac{B_{\{1, m_i\}, \{1, m_i\}}}{m_i m_j^2} \\
 & + 2(m_1 - m_i)(-m_2 + m_i) \left( -2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^3 m_i + dm_1^3 m_i - dm_1^2 m_2 m_i - dm_1 m_2^2 m_i - 2m_2^3 m_i \right. \\
 & + dm_2^3 m_i - 4m_1 m_2 m_i^2 - 2m_1 m_i^3 - 2m_2 m_i^3 - 2m_i^4 - 2m_1 m_2 q^2 \\
 & + dm_1 m_2 q^2 - 2m_1 m_i q^2 + dm_1 m_i q^2 - 2m_2 m_i q^2 + dm_2 m_i q^2 \\
 & \left. - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2 \right) \frac{F_{\{1, m_1\}, \{1, m_i\}, \{1, m_2\}, \{1, m_i\}, \{1, 0\}}}{m_j^2} \\
 & - 2 \left( 2m_1^3 m_2^3 + 2m_1^4 m_2 m_i - dm_1^4 m_2 m_i - 2m_1^3 m_2^2 m_i + dm_1^3 m_2^2 m_i \right. \\
 & - 2m_1^2 m_2^3 m_i + dm_1^2 m_2^3 m_i + 2m_1 m_2^4 m_i - dm_1 m_2^4 m_i - 2m_1^4 m_i^2 \\
 & + dm_1^4 m_i^2 - 2m_1^3 m_2 m_i^2 + 6m_1^2 m_2^2 m_i^2 - 2dm_1^2 m_2^2 m_i^2 - 2m_1 m_2^3 m_i^2 \\
 & - 2m_2^4 m_i^2 + dm_2^4 m_i^2 + 2m_1^3 m_i^3 - dm_1^3 m_i^3 - 2m_1^2 m_2 m_i^3 \\
 & + dm_1^2 m_2 m_i^3 - 2m_1 m_2^2 m_i^3 + dm_1 m_2^2 m_i^3 + 2m_2^3 m_i^3 - dm_2^3 m_i^3 \\
 & - 2m_1^2 m_i^4 + 2m_1 m_2 m_i^4 - 2m_2^2 m_i^4 + 2m_i^6 - 2m_1^3 m_2 m_j^2 - 4m_1^2 m_2^2 m_j^2 \\
 & + 2dm_1^2 m_2^2 m_j^2 - 2m_1 m_2^3 m_j^2 + 6m_1^3 m_i m_j^2 - 6dm_1^3 m_i m_j^2 + d^2 m_1^3 m_i m_j^2 \\
 & - 4m_1^2 m_2 m_i m_j^2 + 4dm_1^2 m_2 m_i m_j^2 - d^2 m_1^2 m_2 m_i m_j^2 - 4m_1 m_2^2 m_i m_j^2 + 4dm_1 m_2^2 m_i m_j^2 \\
 & - d^2 m_1 m_2^2 m_i m_j^2 + 6m_2^3 m_i m_j^2 - 6dm_2^3 m_i m_j^2 + d^2 m_2^3 m_i m_j^2 - 8m_1 m_2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 4dm_1 m_2 m_i^2 m_j^2 + 2m_1 m_i^3 m_j^2 - 2dm_1 m_i^3 m_j^2 + 2m_2 m_i^3 m_j^2 - 2dm_2 m_i^3 m_j^2 \\
 & - 8m_i^4 m_j^2 + 2dm_i^4 m_j^2 + 4m_1^2 m_j^4 - 2dm_1^2 m_j^4 + 2m_1 m_2 m_j^4 \\
 & + 4m_2^2 m_j^4 - 2dm_2^2 m_j^4 - 2m_1 m_i m_j^4 + 2dm_1 m_i m_j^4 - 2m_2 m_i m_j^4 \\
 & + 2dm_2 m_i m_j^4 + 10m_i^2 m_j^4 - 4dm_i^2 m_j^4 - 4m_j^6 + 2dm_j^6 + 2m_1^2 m_2^2 q^2 \\
 & - dm_1^2 m_2^2 q^2 - 2m_1^2 m_i^2 q^2 + dm_1^2 m_i^2 q^2 - 2m_2^2 m_i^2 q^2 + dm_2^2 m_i^2 q^2 \\
 & + 2m_i^4 q^2 - dm_i^4 q^2 - 4m_1^2 m_j^2 q^2 + 2dm_1^2 m_j^2 q^2 - 8m_1 m_2 m_j^2 q^2 \\
 & + 5dm_1 m_2 m_j^2 q^2 - d^2 m_1 m_2 m_j^2 q^2 - 4m_2^2 m_j^2 q^2 + 2dm_2^2 m_j^2 q^2 + 8m_1 m_i m_j^2 q^2 \\
 & - 7dm_1 m_i m_j^2 q^2 + d^2 m_1 m_i m_j^2 q^2 + 8m_2 m_i m_j^2 q^2 - 7dm_2 m_i m_j^2 q^2 + d^2 m_2 m_i m_j^2 q^2 \\
 & - 16m_i^2 m_j^2 q^2 + 9dm_i^2 m_j^2 q^2 - d^2 m_i^2 m_j^2 q^2 + 16m_j^4 q^2 - 10dm_j^4 q^2 \\
 & \left. + d^2 m_j^4 q^2 - 4m_j^2 q^4 + 2dm_j^2 q^4 \right) \frac{F_{\{1, m_1\}, \{1, m_i\}, \{1, m_2\}, \{1, m_i\}, \{1, m_j\}}}{m_j^2} \\
 & + 2(m_1 - m_i)(-m_2 + m_i) \left( -2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^3 m_i + dm_1^3 m_i \right. \\
 & - dm_1^2 m_2 m_i - dm_1 m_2^2 m_i - 2m_2^3 m_i + dm_2^3 m_i - 4m_1 m_2 m_i^2 - 2m_1 m_i^3 \\
 & - 2m_2 m_i^3 - 2m_i^4 - 2m_1 m_2 q^2 + dm_1 m_2 q^2 - 2m_1 m_i q^2 + dm_1 m_i q^2 \\
 & \left. - 2m_2 m_i q^2 + dm_2 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2 \right) \frac{F_{\{1, m_2\}, \{1, m_i\}, \{1, m_1\}, \{1, m_i\}, \{1, 0\}}}{m_j^2} \\
 & - 2 \left( 2m_1^3 m_2^3 + 2m_1^4 m_2 m_i - dm_1^4 m_2 m_i - 2m_1^3 m_2^2 m_i \right. \\
 & + dm_1^3 m_2^2 m_i - 2m_1^2 m_2^3 m_i + dm_1^2 m_2^3 m_i + 2m_1 m_2^4 m_i - dm_1 m_2^4 m_i \\
 & - 2m_1^4 m_i^2 + dm_1^4 m_i^2 - 2m_1^3 m_2 m_i^2 + 6m_1^2 m_2^2 m_i^2 - 2dm_1^2 m_2^2 m_i^2 \\
 & - 2m_1 m_2^3 m_i^2 - 2m_2^4 m_i^2 + dm_2^4 m_i^2 + 2m_1^3 m_i^3 - dm_1^3 m_i^3 \\
 & - 2m_1^2 m_2 m_i^3 + dm_1^2 m_2 m_i^3 - 2m_1 m_2^2 m_i^3 + dm_1 m_2^2 m_i^3 + 2m_2^3 m_i^3 \\
 & \left. - dm_2^3 m_i^3 - 2m_1^2 m_i^4 + 2m_1 m_2 m_i^4 - 2m_2^2 m_i^4 + 2m_i^6 - 2m_1^3 m_2 m_j^2 \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -4m_1^2m_2^2m_j^2 + 2dm_1^2m_2^2m_j^2 - 2m_1m_2^3m_j^2 + 6m_1^3m_im_j^2 - 6dm_1^3m_im_j^2 \\
 & + d^2m_1^3m_im_j^2 - 4m_1^2m_2m_im_j^2 + 4dm_1^2m_2m_im_j^2 - d^2m_1^2m_2m_im_j^2 - 4m_1m_2^2m_im_j^2 \\
 & + 4dm_1m_2^2m_im_j^2 - d^2m_1m_2^2m_im_j^2 + 6m_2^3m_im_j^2 - 6dm_2^3m_im_j^2 + d^2m_2^3m_im_j^2 \\
 & - 8m_1m_2m_i^2m_j^2 + 4dm_1m_2m_i^2m_j^2 + 2m_1m_i^3m_j^2 - 2dm_1m_i^3m_j^2 + 2m_2m_i^3m_j^2 \\
 & - 2dm_2m_i^3m_j^2 - 8m_i^4m_j^2 + 2dm_i^4m_j^2 + 4m_1^2m_j^4 - 2dm_1^2m_j^4 \\
 & + 2m_1m_2m_j^4 + 4m_2^2m_j^4 - 2dm_2^2m_j^4 - 2m_1m_im_j^4 + 2dm_1m_im_j^4 - 2m_2m_im_j^4 \\
 & + 2dm_2m_im_j^4 + 10m_i^2m_j^4 - 4dm_i^2m_j^4 - 4m_j^6 + 2dm_j^6 + 2m_1^2m_2^2q^2 \\
 & - dm_1^2m_2^2q^2 - 2m_1^2m_i^2q^2 + dm_1^2m_i^2q^2 - 2m_2^2m_i^2q^2 + dm_2^2m_i^2q^2 \\
 & + 2m_i^4q^2 - dm_i^4q^2 - 4m_1^2m_j^2q^2 + 2dm_1^2m_j^2q^2 - 8m_1m_2m_j^2q^2 \\
 & + 5dm_1m_2m_j^2q^2 - d^2m_1m_2m_j^2q^2 - 4m_2^2m_j^2q^2 + 2dm_2^2m_j^2q^2 + 8m_1m_im_j^2q^2 \\
 & - 7dm_1m_im_j^2q^2 + d^2m_1m_im_j^2q^2 + 8m_2m_im_j^2q^2 - 7dm_2m_im_j^2q^2 + d^2m_2m_im_j^2q^2 \\
 & - 16m_i^2m_j^2q^2 + 9dm_i^2m_j^2q^2 - d^2m_i^2m_j^2q^2 + 16m_j^4q^2 - 10dm_j^4q^2 \\
 & + d^2m_j^4q^2 - 4m_j^2q^4 + 2dm_j^2q^4 \Big) \frac{F_{\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_j^2} \\
 & - 2(-2+d)(m_1-m_i)^2(m_1+m_i)^2(m_1-m_2+2m_i) \frac{K_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1(m_1-m_2)m_im_j^2} \\
 & - 2(-2+d)(m_1-m_2-2m_i)(m_2-m_i)^2(m_2+m_i)^2 \frac{K_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{(m_1-m_2)m_2m_im_j^2} \\
 & 2(-2+d)(m_1-m_i-m_j)(m_1-m_i+m_j) \\
 & \left( m_1^3 - m_1^2m_2 + 4m_1^2m_i - 2m_1m_2m_i + 5m_1m_i^2 - m_2m_i^2 + 2m_i^3 - 4m_im_j^2 + 2dm_im_j^2 \right) \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1-m_2)m_im_j^2} \\
 & - 2(-2+d)(m_2-m_i-m_j)(m_2-m_i+m_j) \\
 & \left( - (m_1m_2^2) + m_2^3 - 2m_1m_2m_i + 4m_2^2m_i - m_1m_i^2 + 5m_2m_i^2 + 2m_i^3 - 4m_im_j^2 + 2dm_im_j^2 \right) \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{(m_1-m_2)m_2m_im_j^2} \\
 & + 2(m_1-m_i) \left( - 8m_1^3m_2 + 3dm_1^3m_2 + 6m_1^2m_2m_i - dm_1^2m_2m_i - 2m_1m_2^2m_i \right. \\
 & \left. + dm_1m_2^2m_i + 8m_1m_2m_i^2 - 2dm_1m_2m_i^2 - 8m_i^4 + 3dm_i^4 \right) \frac{J_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1m_2m_im_j^2} \\
 & + 2(m_2-m_i) \left( - 8m_1m_2^3 + 3dm_1m_2^3 - 2m_1^2m_2m_i + dm_1^2m_2m_i + 6m_1m_2^2m_i - dm_1m_2^2m_i \right. \\
 & \left. + 8m_1m_2m_i^2 - 2dm_1m_2m_i^2 - 8m_i^4 + 3dm_i^4 \right) \frac{J_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_1m_2m_im_j^2} \\
 & - 2 \left( - 8m_1^4m_2 + 3dm_1^4m_2 + 14m_1^3m_2m_i - 4dm_1^3m_2m_i - 2m_1^2m_2^2m_i + dm_1^2m_2^2m_i \right. \\
 & + 2m_1^2m_2m_i^2 - dm_1^2m_2m_i^2 + 2m_1m_2^2m_i^2 - dm_1m_2^2m_i^2 - 8m_1m_2m_i^3 \\
 & + 2dm_1m_2m_i^3 - 8m_1m_i^4 + 3dm_1m_i^4 + 8m_i^5 - 3dm_i^5 + 8m_1^2m_2m_j^2 \\
 & - 3dm_1^2m_2m_j^2 + 4m_1m_2m_im_j^2 - 5dm_1m_2m_im_j^2 + d^2m_1m_2m_im_j^2 + 8m_1m_i^2m_j^2 \\
 & \left. - 3dm_1m_i^2m_j^2 - 24m_i^3m_j^2 + 17dm_i^3m_j^2 - 3d^2m_i^3m_j^2 + 16m_im_j^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -14dm_j m_j^4 + 3d^2 m_i m_j^4) \frac{J_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & -2 \left( -8m_1 m_2^4 + 3dm_1 m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2 m_i + dm_1^2 m_2^2 m_i + 14m_1 m_2^3 m_i \right. \\
 & -4dm_1 m_2^3 m_i + 2m_1^2 m_2 m_i^2 - dm_1^2 m_2 m_i^2 + 2m_1 m_2^2 m_i^2 - dm_1 m_2^2 m_i^2 \\
 & -8m_1 m_2 m_i^3 + 2dm_1 m_2 m_i^3 - 8m_2 m_i^4 + 3dm_2 m_i^4 + 8m_i^5 - 3dm_i^5 \\
 & + 8m_1 m_2^2 m_j^2 - 3dm_1 m_2^2 m_j^2 + 4m_1 m_2 m_i m_j^2 - 5dm_1 m_2 m_i m_j^2 + d^2 m_1 m_2 m_i m_j^2 \\
 & + 8m_2 m_i^2 m_j^2 - 3dm_2 m_i^2 m_j^2 - 24m_i^3 m_j^2 + 17dm_i^3 m_j^2 - 3d^2 m_i^3 m_j^2 \\
 & \left. + 16m_i m_j^4 - 14dm_i m_j^4 + 3d^2 m_i m_j^4 \right) \frac{J_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & + 4m_1 (m_1 - m_i) \left( m_1^3 m_2 + m_1 m_2 m_i^2 + 2m_i^4 + m_1 m_2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_2 m_i m_j^2} \\
 & -4m_1 \left( m_1^4 m_2 - m_1^3 m_2 m_i + m_1^2 m_2 m_i^2 - m_1 m_2 m_i^3 + 2m_1 m_i^4 - 2m_i^5 - m_1^2 m_2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 \right. \\
 & \left. - 2m_1 m_i^2 m_j^2 + 6m_i^3 m_j^2 - 2dm_i^3 m_j^2 - 4m_i m_j^4 + 2dm_i m_j^4 + m_1^2 m_2 q^2 - m_1 m_2 m_i q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_2 m_i m_j^2} \\
 & + 4m_2 (m_2 - m_i) \left( m_1 m_2^3 + m_1 m_2 m_i^2 + 2m_i^4 + m_1 m_2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_1 m_i m_j^2} \\
 & -4m_2 \left( m_1 m_2^4 - m_1 m_2^3 m_i + m_1 m_2^2 m_i^2 - m_1 m_2 m_i^3 + 2m_2 m_i^4 - 2m_i^5 \right. \\
 & - m_1 m_2^2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 - 2m_2 m_i^2 m_j^2 + 6m_i^3 m_j^2 - 2dm_i^3 m_j^2 \\
 & \left. - 4m_i m_j^4 + 2dm_i m_j^4 + m_1 m_2^2 q^2 - m_1 m_2 m_i q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1 m_i m_j^2} \\
 & + 4(m_1 - m_i) m_i (2m_1^3 m_2 + m_1^2 m_i^2 + m_i^4 + m_i^2 q^2) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & + 4(m_2 - m_i) m_i (2m_1 m_2^3 + m_2^2 m_i^2 + m_i^4 + m_i^2 q^2) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & -4m_i \left( 2m_1^4 m_2 - 2m_1^3 m_2 m_i + m_1^3 m_i^2 - m_1^2 m_i^3 + m_1 m_i^4 - m_i^5 \right. \\
 & - 2m_1^2 m_2 m_j^2 + 2m_1^2 m_i m_j^2 - dm_1^2 m_i m_j^2 + 2m_1 m_2 m_i m_j^2 - m_1 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 + m_1 m_i^2 q^2 \\
 & \left. - m_i^3 q^2 + 2m_i m_j^2 q^2 - dm_i m_j^2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_j\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & -4m_i \left( 2m_1 m_2^4 - 2m_1 m_2^3 m_i + m_2^3 m_i^2 - m_2^2 m_i^3 + m_2 m_i^4 - m_i^5 \right. \\
 & - 2m_1 m_2^2 m_j^2 + 2m_1 m_2 m_i m_j^2 + 2m_2^2 m_i m_j^2 - dm_2^2 m_i m_j^2 - m_2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 + m_2 m_i^2 q^2 \\
 & \left. - m_i^3 q^2 + 2m_i m_j^2 q^2 - dm_i m_j^2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_j\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_j^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4\left(m_1^4 m_2 - m_1^3 m_2 m_i - m_1^3 m_i^2 - m_1^2 m_2 m_i^2 + m_1^2 m_i^3 + m_1 m_2 m_i^3 \right. \\
 & + m_1 m_i^4 - m_i^5 - m_1^2 m_2 m_j^2 - 2m_1^2 m_i m_j^2 + dm_1^2 m_i m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 \\
 & - m_1 m_i^2 m_j^2 + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 - m_1^2 m_2 q^2 \\
 & \left. + m_1 m_2 m_i q^2 - m_1 m_i^2 q^2 + m_i^3 q^2 - 2m_i m_j^2 q^2 + dm_i m_j^2 q^2\right) \frac{J_{\{2,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_i} \\
 & -4\left(m_1 m_2^4 - m_1 m_2^3 m_i - m_1 m_2^2 m_i^2 - m_2^3 m_i^2 + m_1 m_2 m_i^3 \right. \\
 & + m_2^2 m_i^3 + m_2 m_i^4 - m_i^5 - m_1 m_2^2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 \\
 & - 2m_2^2 m_i m_j^2 + dm_2^2 m_i m_j^2 - m_2 m_i^2 m_j^2 + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 \\
 & - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 - m_1 m_2^2 q^2 + m_1 m_2 m_i q^2 - m_2 m_i^2 q^2 \\
 & \left. + m_i^3 q^2 - 2m_i m_j^2 q^2 + dm_i m_j^2 q^2\right) \frac{J_{\{2,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_i} \\
 & -2(m_2 - m_i) \left(2m_1^2 m_2^2 - dm_1^2 m_2^2 - 4m_1 m_2^3 - 2m_2^4 + dm_2^4 \right. \\
 & - 4m_1^2 m_2 m_i + 2dm_1^2 m_2 m_i - 2dm_1 m_2^2 m_i - 2m_1^2 m_i^2 + dm_1^2 m_i^2 \\
 & + 4m_1 m_2 m_i^2 - 2dm_1 m_2 m_i^2 - 6m_2^2 m_i^2 + dm_2^2 m_i^2 - 4m_2 m_i^3 \\
 & \left. - 2m_2^2 q^2 + dm_2^2 q^2 - 4m_2 m_i q^2 + 2dm_2 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2\right) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_2 m_j^2} \\
 & -2(m_1 - m_i) \left(-2m_1^4 + dm_1^4 - 4m_1^3 m_2 + 2m_1^2 m_2^2 - dm_1^2 m_2^2 - 2dm_1^2 m_2 m_i \right. \\
 & - 4m_1 m_2^2 m_i + 2dm_1 m_2^2 m_i - 6m_1^2 m_i^2 + dm_1^2 m_i^2 + 4m_1 m_2 m_i^2 \\
 & - 2dm_1 m_2 m_i^2 - 2m_2^2 m_i^2 + dm_2^2 m_i^2 - 4m_1 m_i^3 - 2m_1^2 q^2 + dm_1^2 q^2 \\
 & \left. - 4m_1 m_i q^2 + 2dm_1 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2\right) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_1 m_j^2} \\
 & -2(m_1 - m_i) \left(4m_1^2 m_2 m_i + 2dm_1 m_2 m_i^2 + 4m_2^2 m_i^2 - 2dm_2^2 m_i^2 + 8m_1 m_i^3 \right. \\
 & - 2dm_1 m_i^3 - 4m_2 m_i^3 + 2dm_2 m_i^3 + 4m_i^4 + 2m_1^2 q^2 - dm_1^2 q^2 \\
 & \left. + 4m_1 m_i q^2 - 2dm_1 m_i q^2 + 2m_i^2 q^2 - dm_i^2 q^2\right) \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_i m_j^2} \\
 & -2(m_2 - m_i) \left(4m_1 m_2^2 m_i + 4m_1^2 m_i^2 - 2dm_1^2 m_i^2 + 2dm_1 m_2 m_i^2 - 4m_1 m_i^3 \right. \\
 & + 2dm_1 m_i^3 + 8m_2 m_i^3 - 2dm_2 m_i^3 + 4m_i^4 + 2m_2^2 q^2 - dm_2^2 q^2 \\
 & \left. + 4m_2 m_i q^2 - 2dm_2 m_i q^2 + 2m_i^2 q^2 - dm_i^2 q^2\right) \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_i m_j^2} \\
 & -2(m_1 - m_i)^2 (m_1 + m_i)^2 (4m_1^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2} \\
 & -2(m_2 - m_i)^2 (m_2 + m_i)^2 (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1 m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \\
 & \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2) m_2 m_j^2} \\
 & + 2(m_1 - m_i - m_j) (m_1 - m_i + m_j) (m_1^2 + 2m_1 m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (4m_1^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2(m_2 - m_i - m_j)(m_2 - m_i + m_j)(m_2^2 + 2m_2m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2)m_2m_j^2} \\
 & +2(m_1 - m_i)^2(m_1 + m_i)^2(-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{m_1(m_1 - m_2)m_j^2} \\
 & -2(m_2 - m_i)^2(m_2 + m_i)^2(4m_2^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_2\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{m_2(-m_1 + m_2)m_j^2} \\
 & -2(m_1 - m_i - m_j)(m_1 - m_i + m_j)(m_1^2 + 2m_1m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1(m_1 - m_2)m_j^2} \\
 & +2(m_2 - m_i - m_j)(m_2 - m_i + m_j)(m_2^2 + 2m_2m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2)(4m_2^2 + 2q^2 - dq^2) \\
 & \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_2(-m_1 + m_2)m_j^2} \\
 & +2\left(2m_1^2m_2^3 - dm_1^2m_2^3 - 4m_1m_2^4 - 2m_2^5 + dm_2^5 - 6m_1^2m_2^2m_i \right. \\
 & +3dm_1^2m_2^2m_i + 4m_1m_2^3m_i - 2dm_1m_2^3m_i + 2m_2^4m_i - dm_2^4m_i + 2m_1^2m_2m_i^2 \\
 & -dm_1^2m_2m_i^2 + 4m_1m_2^2m_i^2 - 6m_2^3m_i^2 + dm_2^3m_i^2 + 2m_1^2m_i^3 - dm_1^2m_i^3 \\
 & -4m_1m_2m_i^3 + 2dm_1m_2m_i^3 + 2m_2^2m_i^3 - dm_2^2m_i^3 + 4m_2m_i^4 - 6m_1^2m_2m_j^2 \\
 & +3dm_1^2m_2m_j^2 - 12m_1m_2^2m_j^2 + 10dm_1m_2^2m_j^2 - 2d^2m_1m_2^2m_j^2 + 18m_2^3m_j^2 \\
 & -13dm_2^3m_j^2 + 2d^2m_2^3m_j^2 - 2m_1^2m_im_j^2 + dm_1^2m_im_j^2 + 4m_1m_2m_im_j^2 \\
 & -2dm_1m_2m_im_j^2 + 2m_2^2m_im_j^2 - 3dm_2^2m_im_j^2 - 12m_2m_i^2m_j^2 + 4dm_2m_i^2m_j^2 \\
 & +8m_2m_j^4 - 4dm_2m_j^4 - 2m_2^3q^2 + dm_2^3q^2 - 2m_2^2m_iq^2 + dm_2^2m_iq^2 \\
 & \left. +2m_2m_i^2q^2 - dm_2m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 - 6m_2m_j^2q^2 \right) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_2m_j^2} \\
 & +2\left(-2m_1^5 + dm_1^5 - 4m_1^4m_2 + 2m_1^3m_2^2 - dm_1^3m_2^2 + 2m_1^4m_i \right. \\
 & -dm_1^4m_i + 4m_1^3m_2m_i - 2dm_1^3m_2m_i - 6m_1^2m_2^2m_i + 3dm_1^2m_2^2m_i - 6m_1^3m_i^2 \\
 & +dm_1^3m_i^2 + 4m_1^2m_2m_i^2 + 2m_1m_2^2m_i^2 - dm_1m_2^2m_i^2 + 2m_1^2m_i^3 - dm_1^2m_i^3 \\
 & -4m_1m_2m_i^3 + 2dm_1m_2m_i^3 + 2m_2^2m_i^3 - dm_2^2m_i^3 + 4m_1m_i^4 + 18m_1^3m_j^2 \\
 & -13dm_1^3m_j^2 + 2d^2m_1^3m_j^2 - 12m_1^2m_2m_j^2 + 10dm_1^2m_2m_j^2 - 2d^2m_1^2m_2m_j^2 \\
 & -6m_1m_2^2m_j^2 + 3dm_1m_2^2m_j^2 + 2m_1^2m_im_j^2 - 3dm_1^2m_im_j^2 + 4m_1m_2m_im_j^2 \\
 & -2dm_1m_2m_im_j^2 - 2m_2^2m_im_j^2 + dm_2^2m_im_j^2 - 12m_1m_i^2m_j^2 + 4dm_1m_i^2m_j^2 \\
 & +8m_1m_j^4 - 4dm_1m_j^4 - 2m_1^3q^2 + dm_1^3q^2 - 2m_1^2m_iq^2 \\
 & +dm_1^2m_iq^2 + 2m_1m_i^2q^2 - dm_1m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 \\
 & \left. -6m_1m_j^2q^2 + 3dm_1m_j^2q^2 - 2m_im_j^2q^2 + dm_im_j^2q^2\right) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_1m_j^2} \\
 & -2\left(-4m_1^3m_2m_i + 4m_1^2m_2m_i^2 - 2dm_1^2m_2m_i^2 - 4m_1m_2^2m_i^2 + 2dm_1m_2^2m_i^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8m_1^2m_i^3 + 2dm_1^2m_i^3 + 4m_1m_2m_i^3 + 4m_2^2m_i^3 - 2dm_2^2m_i^3 \\
 & + 4m_1m_i^4 - 2dm_1m_i^4 - 4m_2m_i^4 + 2dm_2m_i^4 + 4m_i^5 + 8m_1^2m_im_j^2 \\
 & - 4dm_1^2m_im_j^2 + 4m_1m_2m_im_j^2 + 8m_1m_i^2m_j^2 - 8dm_1m_i^2m_j^2 + 2d^2m_1m_i^2m_j^2 \\
 & - 12m_2m_i^2m_j^2 + 12dm_2m_i^2m_j^2 - 2d^2m_2m_i^2m_j^2 - 8m_im_j^4 + 4dm_im_j^4 \\
 & - 2m_1^3q^2 + dm_1^3q^2 - 2m_1^2m_iq^2 + dm_1^2m_iq^2 + 2m_1m_i^2q^2 \\
 & - dm_1m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 + 2m_1m_j^2q^2 - dm_1m_j^2q^2 \\
 & + 6m_im_j^2q^2 - 3dm_im_j^2q^2) \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_j\}}}{m_im_j^2} \\
 & - 2 \left( -4m_1m_2^3m_i - 4m_1^2m_2m_i^2 + 2dm_1^2m_2m_i^2 + 4m_1m_2^2m_i^2 - 2dm_1m_2^2m_i^2 \right. \\
 & + 4m_1^2m_i^3 - 2dm_1^2m_i^3 + 4m_1m_2m_i^3 - 8m_2^2m_i^3 + 2dm_2^2m_i^3 \\
 & - 4m_1m_i^4 + 2dm_1m_i^4 + 4m_2m_i^4 - 2dm_2m_i^4 + 4m_i^5 + 4m_1m_2m_im_j^2 \\
 & + 8m_2^2m_im_j^2 - 4dm_2^2m_im_j^2 - 12m_1m_i^2m_j^2 + 12dm_1m_i^2m_j^2 - 2d^2m_1m_i^2m_j^2 \\
 & + 8m_2m_i^2m_j^2 - 8dm_2m_i^2m_j^2 + 2d^2m_2m_i^2m_j^2 - 8m_im_j^4 + 4dm_im_j^4 - 2m_2^3q^2 \\
 & + dm_2^3q^2 - 2m_2^2m_iq^2 + dm_2^2m_iq^2 + 2m_2m_i^2q^2 - dm_2m_i^2q^2 \\
 & \left. + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 + 2m_2m_j^2q^2 - dm_2m_j^2q^2 + 6m_im_j^2q^2 - 3dm_im_j^2q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,m_j\}}}{m_im_j^2}
 \end{aligned}$$

(E.3)

$$\begin{aligned}
 & \Pi_T^{[1,1]b}_{i,j,1,2}(q^2) + \Pi_T^{[1,1]b}_{i,j,2,1}(q^2) = \\
 & -2(-2+d)^2(m_1+m_2) \frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_i\}}}{m_1(m_1-m_2)} + 2(-2+d)^2(m_1+m_2) \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_i\}}}{(m_1-m_2)m_2} \\
 & + (-2+d)(m_1+m_2)(-3m_1^2+m_1m_2+m_1m_i-m_2m_i+2m_i^2-4m_j^2+2dm_j^2) \frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_j\}}}{m_1(m_1-m_2)m_j^2} \\
 & - (-2+d)(m_1+m_2)(m_1m_2-3m_2^2-m_1m_i+m_2m_i+2m_i^2-4m_j^2+2dm_j^2) \frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1-m_2)m_2m_j^2} \\
 & + (-2+d)(m_1+m_2)(m_1+m_2+2m_i) \frac{A_{\{1,m_i\}}A_{\{1,m_j\}}}{m_im_j^2} \\
 & + A_{\{1,m_i\}} \left( -(-2+d)(m_1+m_2)(-4m_1^2-2q^2+dq^2) \frac{B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1-m_2)} \right. \\
 & + (-2+d)^2(m_1+m_2)(m_1^2-2m_1m_2+m_2^2+q^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{m_1m_2} + \\
 & \left. (-2+d)(m_1+m_2)(-4m_2^2-2q^2+dq^2) \frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_2\}}}{(m_1-m_2)m_2} \right) \\
 & - 2(-2+d)(m_1+m_2)A_{\{1,m_1\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2(-2+d)(m_1+m_2)A_{\{1,m_2\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & +2(m_1+m_2)\left(-2m_1^2+dm_1^2-2m_1m_2-2m_2^2+dm_2^2+2m_1m_i-2dm_1m_i+2m_2m_i- \right. \\
 & \left. 2dm_2m_i-6m_i^2+2dm_i^2+4m_j^2-2dm_j^2-14q^2+9dq^2-d^2q^2\right)B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}} \\
 & +A_{\{1,m_j\}}\left((m_1+m_2)(m_1^2-m_i^2+2m_j^2-dm_j^2)(4m_1^2+2q^2-dq^2)\frac{B_{\{1,m_1\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1-m_2)m_j^2} \right. \\
 & -(-2+d)(m_1+m_2)(m_1m_2-m_1m_i-m_2m_i+m_i^2-2m_j^2+dm_j^2)(m_1^2-2m_1m_2+m_2^2+q^2) \\
 & \left.\frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_1\}}}{m_1m_2m_j^2}\right) \\
 & - (m_1+m_2)(m_2^2-m_i^2+2m_j^2-dm_j^2)(4m_2^2+2q^2-dq^2)\frac{B_{\{1,m_2\},\{1,m_2\}}}{(m_1-m_2)m_2m_j^2} \\
 & - (m_1+m_2)(4m_1m_2m_i+4m_i^3-8m_im_j^2+4dm_im_j^2+2m_1q^2-dm_1q^2+2m_2q^2-dm_2q^2) \\
 & \left.\frac{B_{\{1,m_i\},\{1,m_i\}}}{m_im_j^2}\right) \\
 & +2m_2(m_1-m_i)(m_2-m_i)\left(-2m_1^2m_2^2-2m_1^3m_i+dm_1^3m_i-dm_1^2m_2m_i-dm_1m_2^2m_i-2m_2^3m_i \right. \\
 & \left. +dm_2^3m_i-4m_1m_2m_i^2-2m_1m_i^3-2m_2m_i^3-2m_i^4-2m_1m_2q^2+dm_1m_2q^2 \right. \\
 & \left. -2m_1m_iq^2+dm_1m_iq^2-2m_2m_iq^2+dm_2m_iq^2-2m_i^2q^2+dm_i^2q^2\right) \cdot \\
 & \frac{F_{\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_j^2} \\
 & -2m_2\left(-2m_1^3m_2^3-2m_1^4m_2m_i+dm_1^4m_2m_i+2m_1^3m_2^2m_i-dm_1^3m_2^2m_i \right. \\
 & +2m_1^2m_2^3m_i-dm_1^2m_2^3m_i-2m_1m_2^4m_i+dm_1m_2^4m_i+2m_1^4m_i^2 \\
 & -dm_1^4m_i^2+2m_1^3m_2m_i^2-6m_1^2m_2^2m_i^2+2dm_1^2m_2^2m_i^2 \\
 & +2m_1m_2^3m_i^2+2m_2^4m_i^2-dm_2^4m_i^2-2m_1^3m_i^3+dm_1^3m_i^3+2m_1^2m_2m_i^3 \\
 & -dm_1^2m_2m_i^3+2m_1m_2^2m_i^3-dm_1m_2^2m_i^3-2m_2^3m_i^3+dm_2^3m_i^3 \\
 & +2m_1^2m_i^4-2m_1m_2m_i^4+2m_2^2m_i^4-2m_i^6+2m_1^3m_2m_j^2 \\
 & +4m_1^2m_2^2m_j^2-2dm_1^2m_2^2m_j^2+2m_1m_2^3m_j^2-6m_1^3m_im_j^2+6dm_1^3m_im_j^2 \\
 & -d^2m_1^3m_im_j^2+4m_1^2m_2m_im_j^2-4dm_1^2m_2m_im_j^2+d^2m_1^2m_2m_im_j^2 \\
 & +4m_1m_2^2m_im_j^2-4dm_1m_2^2m_im_j^2+d^2m_1m_2^2m_im_j^2 \\
 & -6m_2^3m_im_j^2+6dm_2^3m_im_j^2-d^2m_2^3m_im_j^2+8m_1m_2m_i^2m_j^2-4dm_1m_2m_i^2m_j^2-2m_1m_i^3m_j^2 \\
 & +2dm_1m_i^3m_j^2-2m_2m_i^3m_j^2+2dm_2m_i^3m_j^2+8m_i^4m_j^2-2dm_i^4m_j^2-4m_1^2m_j^4 \\
 & +2dm_1^2m_j^4-2m_1m_2m_j^4-4m_2^2m_j^4+2dm_2^2m_j^4+2m_1m_im_j^4-2dm_1m_im_j^4 \\
 & +2m_2m_im_j^4-2dm_2m_im_j^4-10m_i^2m_j^4+4dm_i^2m_j^4+4m_j^6-2dm_j^6 \\
 & -2m_1^2m_2^2q^2+dm_1^2m_2^2q^2+2m_1^2m_i^2q^2-dm_1^2m_i^2q^2+2m_2^2m_i^2q^2 \\
 & -dm_2^2m_i^2q^2-2m_i^4q^2+dm_i^4q^2+4m_1^2m_j^2q^2-2dm_1^2m_j^2q^2+8m_1m_2m_j^2q^2-5dm_1m_2m_j^2q^2 \\
 & +d^2m_1m_2m_j^2q^2+4m_2^2m_j^2q^2-2dm_2^2m_j^2q^2-8m_1m_im_j^2q^2+7dm_1m_im_j^2q^2 \\
 & -d^2m_1m_im_j^2q^2-8m_2m_im_j^2q^2+7dm_2m_im_j^2q^2-d^2m_2m_im_j^2q^2 \\
 & +16m_i^2m_j^2q^2-9dm_i^2m_j^2q^2+d^2m_i^2m_j^2q^2-16m_j^4q^2+10dm_j^4q^2 \\
 & \left.-d^2m_j^4q^2+4m_j^2q^4-2dm_j^2q^4\right)\frac{F_{\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_j^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2m_1(m_1 - m_i)(-m_2 + m_i) \left( -2m_1^2m_2^2 - 2m_1^3m_i + dm_1^3m_i - dm_1^2m_2m_i - dm_1m_2^2m_i \right. \\
 & -2m_2^3m_i + dm_2^3m_i - 4m_1m_2m_i^2 - 2m_1m_i^3 - 2m_2m_i^3 - 2m_i^4 \\
 & -2m_1m_2q^2 + dm_1m_2q^2 - 2m_1m_iq^2 + dm_1m_iq^2 \\
 & \left. -2m_2m_iq^2 + dm_2m_iq^2 - 2m_i^2q^2 + dm_i^2q^2 \right) \frac{F_{\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_j^2} \\
 & -2m_1 \left( -2m_1^3m_2^3 - 2m_1^4m_2m_i + dm_1^4m_2m_i + 2m_1^3m_2^2m_i - dm_1^3m_2^2m_i \right. \\
 & +2m_1^2m_2^3m_i - dm_1^2m_2^3m_i - 2m_1m_2^4m_i + dm_1m_2^4m_i + 2m_1^4m_i^2 - dm_1^4m_i^2 \\
 & +2m_1^3m_2m_i^2 - 6m_1^2m_2^2m_i^2 + 2dm_1^2m_2^2m_i^2 + 2m_1m_2^3m_i^2 + 2m_2^4m_i^2 - dm_2^4m_i^2 \\
 & -2m_1^3m_i^3 + dm_1^3m_i^3 + 2m_1^2m_2m_i^3 - dm_1^2m_2m_i^3 + 2m_1m_2^2m_i^3 - dm_1m_2^2m_i^3 \\
 & -2m_2^3m_i^3 + dm_2^3m_i^3 + 2m_1^2m_i^4 - 2m_1m_2m_i^4 + 2m_2^2m_i^4 - 2m_i^6 \\
 & +2m_1^3m_2m_j^2 + 4m_1^2m_2^2m_j^2 - 2dm_1^2m_2^2m_j^2 + 2m_1m_2^3m_j^2 - 6m_1^3m_im_j^2 \\
 & +6dm_1^3m_im_j^2 - d^2m_1^3m_im_j^2 + 4m_1^2m_2m_im_j^2 - 4dm_1^2m_2m_im_j^2 + d^2m_1^2m_2m_im_j^2 \\
 & +4m_1m_2^2m_im_j^2 - 4dm_1m_2^2m_im_j^2 + d^2m_1m_2^2m_im_j^2 - 6m_2^3m_im_j^2 + 6dm_2^3m_im_j^2 \\
 & -d^2m_2^3m_im_j^2 + 8m_1m_2m_i^2m_j^2 - 4dm_1m_2m_i^2m_j^2 - 2m_1m_i^3m_j^2 + 2dm_1m_i^3m_j^2 \\
 & -2m_2m_i^3m_j^2 + 2dm_2m_i^3m_j^2 + 8m_i^4m_j^2 - 2dm_i^4m_j^2 - 4m_1^2m_j^4 + 2dm_1^2m_j^4 \\
 & -2m_1m_2m_j^4 - 4m_2^2m_j^4 + 2dm_2^2m_j^4 + 2m_1m_im_j^4 - 2dm_1m_im_j^4 + 2m_2m_im_j^4 \\
 & -2dm_2m_im_j^4 - 10m_i^2m_j^4 + 4dm_i^2m_j^4 + 4m_j^6 - 2dm_j^6 - 2m_1^2m_2^2q^2 \\
 & +dm_1^2m_2^2q^2 + 2m_1^2m_i^2q^2 - dm_1^2m_i^2q^2 + 2m_2^2m_i^2q^2 - dm_2^2m_i^2q^2 \\
 & -2m_i^4q^2 + dm_i^4q^2 + 4m_1^2m_j^2q^2 - 2dm_1^2m_j^2q^2 + 8m_1m_2m_j^2q^2 \\
 & -5dm_1m_2m_j^2q^2 + d^2m_1m_2m_j^2q^2 + 4m_2^2m_j^2q^2 - 2dm_2^2m_j^2q^2 - 8m_1m_im_j^2q^2 \\
 & +7dm_1m_im_j^2q^2 - d^2m_1m_im_j^2q^2 - 8m_2m_im_j^2q^2 + 7dm_2m_im_j^2q^2 \\
 & \left. -d^2m_2m_im_j^2q^2 + 16m_i^2m_j^2q^2 - 9dm_i^2m_j^2q^2 + d^2m_i^2m_j^2q^2 - 16m_j^4q^2 \right) \frac{F_{\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_j^2} \\
 & (-2 + d)(m_1 + m_2)(m_1 - m_i)^2(m_1 + m_i)^2(m_1 - m_2 + 2m_i) \frac{K_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1(m_1 - m_2)m_im_j^2} \\
 & (-2 + d)(m_1 + m_2)(m_1 - m_2 - 2m_i)(m_2 - m_i)^2(m_2 + m_i) \frac{K_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{(m_1 - m_2)m_2m_im_j^2} \\
 & -(-2 + d)(m_1 + m_2)(m_1 - m_i - m_j)(m_1 - m_i + m_j) \\
 & \left( m_1^3 - m_1^2m_2 + 4m_1^2m_i - 2m_1m_2m_i + 5m_1m_i^2 - m_2m_i^2 + 2m_i^3 - 4m_im_j^2 + 2dm_im_j^2 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1(m_1 - m_2)m_im_j^2} \\
 & +(-2 + d)(m_1 + m_2)(m_2 - m_i - m_j)(m_2 - m_i + m_j) \\
 & \left( -(m_1m_2^2) + m_2^3 - 2m_1m_2m_i + 4m_2^2m_i - m_1m_i^2 + 5m_2m_i^2 + 2m_i^3 - 4m_im_j^2 + 2dm_im_j^2 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{(m_1 - m_2)m_2m_im_j^2} \\
 & -(m_1 + m_2)(m_1 - m_i) \\
 & \left( -8m_1^3m_2 + 3dm_1^3m_2 + 6m_1^2m_2m_i - dm_1^2m_2m_i - 2m_1m_2^2m_i + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & dm_1 m_2^2 m_i + 8m_1 m_2 m_i^2 - 2dm_1 m_2 m_i^2 - 8m_i^4 + 3dm_i^4 \Big) \frac{J_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) (m_2 - m_i) \left( -8m_1 m_2^3 + 3dm_1 m_2^3 - 2m_1^2 m_2 m_i + dm_1^2 m_2 m_i + 6m_1 m_2^2 m_i \right. \\
 & \left. - dm_1 m_2^2 m_i + 8m_1 m_2 m_i^2 - 2dm_1 m_2 m_i^2 - 8m_i^4 + 3dm_i^4 \right) \frac{J_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) \left( -8m_1^4 m_2 + 3dm_1^4 m_2 + 14m_1^3 m_2 m_i - 4dm_1^3 m_2 m_i - 2m_1^2 m_2^2 m_i \right. \\
 & + dm_1^2 m_2^2 m_i + 2m_1^2 m_2 m_i^2 - dm_1^2 m_2 m_i^2 + 2m_1 m_2^2 m_i^2 - dm_1 m_2^2 m_i^2 - 8m_1 m_2 m_i^3 \\
 & + 2dm_1 m_2 m_i^3 - 8m_1 m_i^4 + 3dm_1 m_i^4 + 8m_i^5 - 3dm_i^5 + 8m_1^2 m_2 m_j^2 \\
 & - 3dm_1^2 m_2 m_j^2 + 4m_1 m_2 m_i m_j^2 - 5dm_1 m_2 m_i m_j^2 + d^2 m_1 m_2 m_i m_j^2 \\
 & + 8m_1 m_i^2 m_j^2 - 3dm_1 m_i^2 m_j^2 - 24m_i^3 m_j^2 + 17dm_i^3 m_j^2 - 3d^2 m_i^3 m_j^2 \\
 & \left. + 16m_i m_j^4 - 14dm_i m_j^4 + 3d^2 m_i m_j^4 \right) \cdot \frac{J_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) \left( -8m_1 m_2^4 + 3dm_1 m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2 m_i + dm_1^2 m_2^2 m_i + 14m_1 m_2^3 m_i \right. \\
 & - 4dm_1 m_2^3 m_i + 2m_1^2 m_2 m_i^2 - dm_1^2 m_2 m_i^2 + 2m_1 m_2^2 m_i^2 - dm_1 m_2^2 m_i^2 \\
 & - 8m_1 m_2 m_i^3 + 2dm_1 m_2 m_i^3 - 8m_2 m_i^4 + 3dm_2 m_i^4 + 8m_i^5 - 3dm_i^5 \\
 & + 8m_1 m_2^2 m_j^2 - 3dm_1 m_2^2 m_j^2 + 4m_1 m_2 m_i m_j^2 - 5dm_1 m_2 m_i m_j^2 + d^2 m_1 m_2 m_i m_j^2 \\
 & + 8m_2 m_i^2 m_j^2 - 3dm_2 m_i^2 m_j^2 - 24m_i^3 m_j^2 + 17dm_i^3 m_j^2 - 3d^2 m_i^3 m_j^2 \\
 & \left. + 16m_i m_j^4 - 14dm_i m_j^4 + 3d^2 m_i m_j^4 \right) \cdot \frac{J_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_i m_j^2} \\
 & - 2m_1 (m_1 + m_2) (m_1 - m_i) (m_1^3 m_2 + m_1 m_2 m_i^2 + 2m_i^4 + m_1 m_2 q^2) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_2 m_i m_j^2} \\
 & + 2m_1 (m_1 + m_2) \left( m_1^4 m_2 - m_1^3 m_2 m_i + m_1^2 m_2 m_i^2 - m_1 m_2 m_i^3 + 2m_1 m_i^4 - 2m_i^5 \right. \\
 & - m_1^2 m_2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 - 2m_1 m_i^2 m_j^2 + 6m_i^3 m_j^2 - 2dm_i^3 m_j^2 \\
 & \left. - 4m_i m_j^4 + 2dm_i m_j^4 + m_1^2 m_2 q^2 - m_1 m_2 m_i q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_2 m_i m_j^2} \\
 & - 2m_2 (m_1 + m_2) (m_2 - m_i) (m_1 m_2^3 + m_1 m_2 m_i^2 + 2m_i^4 + m_1 m_2 q^2) \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_1 m_i m_j^2} \\
 & + 2m_2 (m_1 + m_2) \left( m_1 m_2^4 - m_1 m_2^3 m_i + m_1 m_2^2 m_i^2 - m_1 m_2 m_i^3 + 2m_2 m_i^4 - 2m_i^5 \right. \\
 & - m_1 m_2^2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 - 2m_2 m_i^2 m_j^2 + 6m_i^3 m_j^2 - 2dm_i^3 m_j^2 \\
 & \left. - 4m_i m_j^4 + 2dm_i m_j^4 + m_1 m_2^2 q^2 - m_1 m_2 m_i q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1 m_i m_j^2} \\
 & - 2(m_1 + m_2) (m_1 - m_i) m_i (2m_1^3 m_2 + m_1^2 m_i^2 + m_i^4 + m_i^2 q^2) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & - 2(m_1 + m_2) (m_2 - m_i) m_i (2m_1 m_2^3 + m_2^2 m_i^2 + m_i^4 + m_i^2 q^2) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & + 2(m_1 + m_2) m_i \left( 2m_1^4 m_2 - 2m_1^3 m_2 m_i + m_1^3 m_i^2 - m_1^2 m_i^3 + m_1 m_i^4 - m_i^5 \right. \\
 & \left. - 2m_1^2 m_2 m_j^2 + 2m_1^2 m_i m_j^2 - dm_1^2 m_i m_j^2 + 2m_1 m_2 m_i m_j^2 - m_1 m_i^2 m_j^2 \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 + m_1 m_i^2 q^2 \\
 & - m_i^3 q^2 + 2m_i m_j^2 q^2 - dm_i m_j^2 q^2) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_j\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & +2(m_1 + m_2) m_i \left( 2m_1 m_2^4 - 2m_1 m_2^3 m_i + m_2^3 m_i^2 - m_2^2 m_i^3 + m_2 m_i^4 - m_i^5 \right. \\
 & - 2m_1 m_2^2 m_j^2 + 2m_1 m_2 m_i m_j^2 + 2m_2^2 m_i m_j^2 - dm_2^2 m_i m_j^2 - m_2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 + m_2 m_i^2 q^2 \\
 & \left. - m_i^3 q^2 + 2m_i m_j^2 q^2 - dm_i m_j^2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_i\},\{1,m_j\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_j^2} \\
 & +2(m_1 + m_2) \left( m_1^4 m_2 - m_1^3 m_2 m_i - m_1^3 m_i^2 - m_1^2 m_2 m_i^2 + m_1^2 m_i^3 \right. \\
 & + m_1 m_2 m_i^3 + m_1 m_i^4 - m_i^5 - m_1^2 m_2 m_j^2 - 2m_1^2 m_i m_j^2 + dm_1^2 m_i m_j^2 \\
 & + m_1 m_2 m_i m_j^2 - m_1 m_i^2 m_j^2 + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 \\
 & + dm_i m_j^4 - m_1^2 m_2 q^2 + m_1 m_2 m_i q^2 - m_1 m_i^2 q^2 \\
 & \left. + m_i^3 q^2 - 2m_i m_j^2 q^2 + dm_i m_j^2 q^2 \right) \frac{J_{\{2,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{m_1 m_2 m_i} \\
 & +2(m_1 + m_2) \left( m_1 m_2^4 - m_1 m_2^3 m_i - m_1 m_2^2 m_i^2 - m_2^3 m_i^2 + m_1 m_2 m_i^3 \right. \\
 & + m_2^2 m_i^3 + m_2 m_i^4 - m_i^5 - m_1 m_2^2 m_j^2 + m_1 m_2 m_i m_j^2 - 2m_2^2 m_i m_j^2 \\
 & + dm_2^2 m_i m_j^2 - m_2 m_i^2 m_j^2 + 3m_i^3 m_j^2 - dm_i^3 m_j^2 - 2m_i m_j^4 + dm_i m_j^4 \\
 & \left. - m_1 m_2^2 q^2 + m_1 m_2 m_i q^2 - m_2 m_i^2 q^2 + m_i^3 q^2 - 2m_i m_j^2 q^2 + dm_i m_j^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{J_{\{2,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{m_1 m_2 m_i} \\
 & (m_1 + m_2) (m_2 - m_i) \left( 2m_1^2 m_2^2 - dm_1^2 m_2^2 - 4m_1 m_2^3 - 2m_2^4 + dm_2^4 - 4m_1^2 m_2 m_i \right. \\
 & + 2dm_1^2 m_2 m_i - 2dm_1 m_2^2 m_i - 2m_1^2 m_i^2 + dm_1^2 m_i^2 + 4m_1 m_2 m_i^2 - 2dm_1 m_2 m_i^2 \\
 & - 6m_2^2 m_i^2 + dm_2^2 m_i^2 - 4m_2 m_i^3 - 2m_2^2 q^2 + dm_2^2 q^2 - 4m_2 m_i q^2 \\
 & \left. + 2dm_2 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_2 m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_1 - m_i) \left( -2m_1^4 + dm_1^4 - 4m_1^3 m_2 + 2m_1^2 m_2^2 - dm_1^2 m_2^2 \right. \\
 & - 2dm_1^2 m_2 m_i - 4m_1 m_2^2 m_i + 2dm_1 m_2^2 m_i - 6m_1^2 m_i^2 + dm_1^2 m_i^2 \\
 & + 4m_1 m_2 m_i^2 - 2dm_1 m_2 m_i^2 - 2m_2^2 m_i^2 + dm_2^2 m_i^2 - 4m_1 m_i^3 \\
 & \left. - 2m_1^2 q^2 + dm_1^2 q^2 - 4m_1 m_i q^2 + 2dm_1 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,0\}}}{m_1 m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_1 - m_i) \left( 4m_1^2 m_2 m_i + 2dm_1 m_2 m_i^2 + 4m_2^2 m_i^2 \right. \\
 & - 2dm_2^2 m_i^2 + 8m_1 m_i^3 - 2dm_1 m_i^3 - 4m_2 m_i^3 + 2dm_2 m_i^3 \\
 & \left. + 4m_i^4 + 2m_1^2 q^2 - dm_1^2 q^2 + 4m_1 m_i q^2 - 2dm_1 m_i q^2 + 2m_i^2 q^2 - dm_i^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_i m_j^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (m_1 + m_2) (m_2 - m_i) \left( -4m_1 m_2^2 m_i - 4m_1^2 m_i^2 + 2dm_1^2 m_i^2 \right. \\
 & - 2dm_1 m_2 m_i^2 + 4m_1 m_i^3 - 2dm_1 m_i^3 - 8m_2 m_i^3 + 2dm_2 m_i^3 \\
 & \left. - 4m_i^4 - 2m_2^2 q^2 + dm_2^2 q^2 - 4m_2 m_i q^2 + 2dm_2 m_i q^2 - 2m_i^2 q^2 + dm_i^2 q^2 \right) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{m_i m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_1 - m_i)^2 (m_1 + m_i)^2 (4m_1^2 + 2q^2 - dq^2) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_2 - m_i)^2 (m_2 + m_i)^2 (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1 m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2) m_2 m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) (m_1 - m_i - m_j) (m_1 - m_i + m_j) (m_1^2 + 2m_1 m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) (4m_1^2 + 2q^2 - dq^2) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) (m_2 - m_i - m_j) (m_2 - m_i + m_j) (m_2^2 + 2m_2 m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1 m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2) m_2 m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) (m_1 - m_i)^2 (m_1 + m_i)^2 (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1 m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \cdot \\
 & \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) (m_2 - m_i)^2 (m_2 + m_i)^2 (4m_2^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_2\},\{1,0\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2) m_2 m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_1 - m_i - m_j) (m_1 - m_i + m_j) (m_1^2 + 2m_1 m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (-2m_1^2 + dm_1^2 - 2dm_1 m_2 - 2m_2^2 + dm_2^2 - 2q^2 + dq^2) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{m_1 (m_1 - m_2) m_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) (m_2 - m_i - m_j) (m_2 - m_i + m_j) (m_2^2 + 2m_2 m_i + m_i^2 - 2m_j^2 + dm_j^2) \\
 & (4m_2^2 + 2q^2 - dq^2) \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_2\},\{1,m_j\},\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2) m_2 m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) \left( 2m_1^2 m_2^3 - dm_1^2 m_2^3 - 4m_1 m_2^4 - 2m_2^5 + dm_2^5 \right. \\
 & - 6m_1^2 m_2^2 m_i + 3dm_1^2 m_2^2 m_i + 4m_1 m_2^3 m_i - 2dm_1 m_2^3 m_i + 2m_2^4 m_i \\
 & - dm_2^4 m_i + 2m_1^2 m_2 m_i^2 - dm_1^2 m_2 m_i^2 + 4m_1 m_2^2 m_i^2 - 6m_2^3 m_i^2 + dm_2^3 m_i^2 \\
 & + 2m_1^2 m_i^3 - dm_1^2 m_i^3 - 4m_1 m_2 m_i^3 + 2dm_1 m_2 m_i^3 + 2m_2^2 m_i^3 - dm_2^2 m_i^3 \\
 & + 4m_2 m_i^4 - 6m_1^2 m_2 m_j^2 + 3dm_1^2 m_2 m_j^2 - 12m_1 m_2^2 m_j^2 + 10dm_1 m_2^2 m_j^2 - 2d^2 m_1 m_2^2 m_j^2 \\
 & + 18m_2^3 m_j^2 - 13dm_2^3 m_j^2 + 2d^2 m_2^3 m_j^2 - 2m_1^2 m_i m_j^2 + dm_1^2 m_i m_j^2 \\
 & \left. + 4m_1 m_2 m_i m_j^2 - 2dm_1 m_2 m_i m_j^2 + 2m_2^2 m_i m_j^2 - 3dm_2^2 m_i m_j^2 - 12m_2 m_i^2 m_j^2 + 4dm_2 m_i^2 m_j^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +8m_2m_j^4 - 4dm_2m_j^4 - 2m_2^3q^2 + dm_2^3q^2 - 2m_2^2m_iq^2 \\
 & +dm_2^2m_iq^2 + 2m_2m_i^2q^2 - dm_2m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 - 6m_2m_j^2q^2 \\
 & +3dm_2m_j^2q^2 - 2m_im_j^2q^2 + dm_im_j^2q^2) \cdot \frac{V_{\{1,m_2\},\{1,m_1\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_2m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) \left( -2m_1^5 + dm_1^5 - 4m_1^4m_2 + 2m_1^3m_2^2 - dm_1^3m_2^2 + 2m_1^4m_i \right. \\
 & - dm_1^4m_i + 4m_1^3m_2m_i - 2dm_1^3m_2m_i - 6m_1^2m_2^2m_i + 3dm_1^2m_2^2m_i - 6m_1^3m_i^2 \\
 & + dm_1^3m_i^2 + 4m_1^2m_2m_i^2 + 2m_1m_2^2m_i^2 - dm_1m_2^2m_i^2 + 2m_1^2m_i^3 - dm_1^2m_i^3 \\
 & - 4m_1m_2m_i^3 + 2dm_1m_2m_i^3 + 2m_2^2m_i^3 - dm_2^2m_i^3 + 4m_1m_i^4 + 18m_1^3m_j^2 \\
 & - 13dm_1^3m_j^2 + 2d^2m_1^3m_j^2 - 12m_1^2m_2m_j^2 + 10dm_1^2m_2m_j^2 - 2d^2m_1^2m_2m_j^2 \\
 & - 6m_1m_2^2m_j^2 + 3dm_1m_2^2m_j^2 + 2m_1^2m_im_j^2 - 3dm_1^2m_im_j^2 + 4m_1m_2m_im_j^2 \\
 & - 2dm_1m_2m_im_j^2 - 2m_2^2m_im_j^2 + dm_2^2m_im_j^2 - 12m_1m_i^2m_j^2 + 4dm_1m_i^2m_j^2 + 8m_1m_j^4 \\
 & - 4dm_1m_j^4 - 2m_1^3q^2 + dm_1^3q^2 - 2m_1^2m_iq^2 + dm_1^2m_iq^2 + 2m_1m_i^2q^2 \\
 & - dm_1m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 - 6m_1m_j^2q^2 + 3dm_1m_j^2q^2 \\
 & \left. - 2m_im_j^2q^2 + dm_im_j^2q^2 \right) \frac{V_{\{1,m_1\},\{1,m_2\},\{1,m_i\},\{1,m_j\}}}{m_1m_j^2} \\
 & - (m_1 + m_2) \left( 4m_1^3m_2m_i - 4m_1^2m_2m_i^2 + 2dm_1^2m_2m_i^2 + 4m_1m_2^2m_i^2 - 2dm_1m_2^2m_i^2 \right. \\
 & + 8m_1^2m_i^3 - 2dm_1^2m_i^3 - 4m_1m_2m_i^3 - 4m_2^2m_i^3 + 2dm_2^2m_i^3 \\
 & - 4m_1m_i^4 + 2dm_1m_i^4 + 4m_2m_i^4 - 2dm_2m_i^4 - 4m_i^5 - 8m_1^2m_im_j^2 \\
 & + 4dm_1^2m_im_j^2 - 4m_1m_2m_im_j^2 - 8m_1m_i^2m_j^2 + 8dm_1m_i^2m_j^2 - 2d^2m_1m_i^2m_j^2 \\
 & + 12m_2m_i^2m_j^2 - 12dm_2m_i^2m_j^2 + 2d^2m_2m_i^2m_j^2 + 8m_im_j^4 - 4dm_im_j^4 \\
 & + 2m_1^3q^2 - dm_1^3q^2 + 2m_1^2m_iq^2 - dm_1^2m_iq^2 - 2m_1m_i^2q^2 \\
 & + dm_1m_i^2q^2 - 2m_i^3q^2 + dm_i^3q^2 - 2m_1m_j^2q^2 + dm_1m_j^2q^2 \\
 & \left. - 6m_im_j^2q^2 + 3dm_im_j^2q^2 \right) \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,m_j\}}}{m_im_j^2} \\
 & + (m_1 + m_2) \left( -4m_1m_2^3m_i - 4m_1^2m_2m_i^2 + 2dm_1^2m_2m_i^2 + 4m_1m_2^2m_i^2 - 2dm_1m_2^2m_i^2 \right. \\
 & + 4m_1^2m_i^3 - 2dm_1^2m_i^3 + 4m_1m_2m_i^3 - 8m_2^2m_i^3 + 2dm_2^2m_i^3 \\
 & - 4m_1m_i^4 + 2dm_1m_i^4 + 4m_2m_i^4 - 2dm_2m_i^4 + 4m_i^5 + 4m_1m_2m_im_j^2 \\
 & + 8m_2^2m_im_j^2 - 4dm_2^2m_im_j^2 - 12m_1m_i^2m_j^2 + 12dm_1m_i^2m_j^2 - 2d^2m_1m_i^2m_j^2 \\
 & + 8m_2m_i^2m_j^2 - 8dm_2m_i^2m_j^2 + 2d^2m_2m_i^2m_j^2 - 8m_im_j^4 + 4dm_im_j^4 \\
 & - 2m_2^3q^2 + dm_2^3q^2 - 2m_2^2m_iq^2 + dm_2^2m_iq^2 + 2m_2m_i^2q^2 \\
 & - dm_2m_i^2q^2 + 2m_i^3q^2 - dm_i^3q^2 + 2m_2m_j^2q^2 - dm_2m_j^2q^2 \\
 & \left. + 6m_im_j^2q^2 - 3dm_im_j^2q^2 \right) \frac{V_{\{1,m_i\},\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,m_j\}}}{m_im_j^2}
 \end{aligned}
 \tag{E.4}$$

# Anhang F

## Zwei-Loop- $(q^2 = 0)$ -Basisgrößen

Angegeben werden die Propagator- und Vertexbeiträge für  $q^2 = 0$ , aus denen sich die Zwei-Loop-Vakuumpolarisations-Basisgrößen (5.46) zusammensetzen. Es wird die Notation aus Anhang E gewählt. Im Falle des Nachweises  $\Pi_T^{[1,1]a}_{i,j,n_1,n_2}(0) = 0$  muß unterschieden werden, ob die Massenparameter  $m_1$  und  $m_2$  gleich oder ungleich sind.

$$\begin{aligned}
-2I_{i,j,1,1}^P(0) &= I_{i,j,1,1}^{V_a}(0) = \\
&4(-2+d)(-1+d) \\
&\left(-2m_1^4 + dm_1^4 + 4m_1^3m_i + 12m_1^2m_i^2 - 2dm_1^2m_i^2 + 4m_1m_i^3 - 2m_i^4 + dm_i^4 \right. \\
&\left. - 2m_1^2m_j^2 + 4m_1m_im_j^2 - 2m_i^2m_j^2 + 4m_j^4 - dm_j^4\right) \\
&\frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)^2} \\
&+ 4(-2+d)(-1+d) \\
&\left(m_1^6 + 2m_1^5m_i + m_1^4m_i^2 - m_1^2m_i^4 - 2m_1m_i^5 - m_i^6 \right. \\
&\left. - 5m_1^4m_j^2 + dm_1^4m_j^2 - 4m_1^2m_i^2m_j^2 - 4m_1m_i^3m_j^2 + 5m_i^4m_j^2 - dm_i^4m_j^2 \right. \\
&\left. + 7m_1^2m_j^4 - 2dm_1^2m_j^4 - 2m_1m_im_j^4 - m_i^2m_j^4 - 3m_j^6 + dm_j^6\right) \\
&\frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)^2m_j^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)^2} \\
&- 4(-2+d)(-1+d) \\
&\left(m_1^6 + 2m_1^5m_i + m_1^4m_i^2 - m_1^2m_i^4 - 2m_1m_i^5 - m_i^6 - 5m_1^4m_j^2 + dm_1^4m_j^2 \right. \\
&\left. + 4m_1^3m_im_j^2 + 4m_1^2m_i^2m_j^2 + 5m_i^4m_j^2 - dm_i^4m_j^2 + m_1^2m_j^4 \right. \\
&\left. + 2m_1m_im_j^4 - 7m_i^2m_j^4 + 2dm_i^2m_j^4 + 3m_j^6 - dm_j^6\right) \\
&\frac{A_{\{1,m_i\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)^2m_j^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4(-2+d)(-1+d)(m_1^2+m_i^2)\frac{K_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{m_j^2} \\
 & 4(-1+d)\left(-2m_1^8+dm_1^8-4m_1^7m_i+2dm_1^7m_i+4m_1^5m_i^3-2dm_1^5m_i^3\right. \\
 & +4m_1^4m_i^4-2dm_1^4m_i^4+4m_1^3m_i^5-2dm_1^3m_i^5-4m_1m_i^7+2dm_1m_i^7 \\
 & -2m_i^8+dm_i^8+12m_1^6m_j^2-8dm_1^6m_j^2+d^2m_1^6m_j^2-4m_1^5m_im_j^2-20m_1^4m_i^2m_j^2 \\
 & +8dm_1^4m_i^2m_j^2-d^2m_1^4m_i^2m_j^2-8m_1^3m_i^3m_j^2-20m_1^2m_i^4m_j^2 \\
 & +8dm_1^2m_i^4m_j^2-d^2m_1^2m_i^4m_j^2-4m_1m_i^5m_j^2+12m_i^6m_j^2-8dm_i^6m_j^2 \\
 & +d^2m_i^6m_j^2-12m_1^4m_j^4+8dm_1^4m_j^4-d^2m_1^4m_j^4-4m_1^3m_im_j^4+2dm_1^3m_im_j^4 \\
 & +48m_1^2m_i^2m_j^4-20dm_1^2m_i^2m_j^4+2d^2m_1^2m_i^2m_j^4-4m_1m_i^3m_j^4+2dm_1m_i^3m_j^4 \\
 & -12m_i^4m_j^4+8dm_i^4m_j^4-d^2m_i^4m_j^4-4m_1^2m_j^6+4dm_1^2m_j^6-d^2m_1^2m_j^6+12m_1m_im_j^6 \\
 & \left.-4dm_1m_im_j^6-4m_i^2m_j^6+4dm_i^2m_j^6-d^2m_i^2m_j^6+6m_j^8-5dm_j^8+d^2m_j^8\right) \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{(m_1-m_i-m_j)(m_1+m_i-m_j)^2m_j^2(m_1-m_i+m_j)(m_1+m_i+m_j)^2}
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\left(I_{i,j,1,2}^P(0)+I_{i,j,2,1}^P(0)\right)=I_{i,j,1,2}^{V_a}(0)+I_{i,j,2,1}^{V_a}(0)= \\
 & +\frac{4(-2+d)(-1+d)(m_1m_2-m_1m_i+m_2m_i-m_i^2+m_j^2)A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_i\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)(m_1+m_i-m_j)(m_1+m_i+m_j)} \\
 & -\frac{4(-2+d)(-1+d)(m_1m_2+m_1m_i-m_2m_i-m_i^2+m_j^2)A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_i\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)(m_2+m_i-m_j)(m_2+m_i+m_j)} \\
 & +4(-1+d)\left(m_1^3m_2+2m_1^2m_2m_i+m_1^2m_i^2+m_1m_2m_i^2+2m_1m_i^3+m_i^4-2m_1^2m_j^2\right. \\
 & +dm_1^2m_j^2-m_1m_2m_j^2-2m_1m_im_j^2+dm_1m_im_j^2+2m_2m_im_j^2-dm_2m_im_j^2- \\
 & \left.3m_i^2m_j^2+dm_i^2m_j^2+2m_j^4-dm_j^4\right)\frac{A_{\{1,m_1\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)(m_1+m_i-m_j)m_j^2(m_1+m_i+m_j)} \\
 & +4(-1+d)\left(-m_1m_2^3-2m_1m_2^2m_i-m_1m_2m_i^2-m_2^2m_i^2-2m_2m_i^3-m_i^4+m_1m_2m_j^2\right. \\
 & +2m_2^2m_j^2-dm_2^2m_j^2-2m_1m_im_j^2+dm_1m_im_j^2+2m_2m_im_j^2-dm_2m_im_j^2+3m_i^2m_j^2 \\
 & \left.-dm_i^2m_j^2-2m_j^4+dm_j^4\right)\frac{A_{\{1,m_2\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)(m_2+m_i-m_j)m_j^2(m_2+m_i+m_j)} \\
 & +\frac{4(-2+d)(-1+d)(m_1m_2-m_i^2+m_j^2)A_{\{1,m_i\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1+m_i-m_j)(m_2+m_i-m_j)(m_1+m_i+m_j)(m_2+m_i+m_j)} \\
 & -\frac{4(-1+d)(m_1-m_i)(m_1+m_i)(m_1m_2+m_i^2)K_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)m_j^2} \\
 & +\frac{4(-1+d)(m_2-m_i)(m_2+m_i)(m_1m_2+m_i^2)K_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)m_j^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4(-1+d) \left( m_1^5 m_2 + 2m_1^4 m_2 m_i + m_1^4 m_i^2 + 2m_1^3 m_i^3 - 2m_1^2 m_2 m_i^3 \right. \\
 & - m_1 m_2 m_i^4 - 2m_1 m_i^5 - m_i^6 - 4m_1^3 m_2 m_j^2 + dm_1^3 m_2 m_j^2 + 4m_1^3 m_i m_j^2 \\
 & - dm_1^3 m_i m_j^2 - 2m_1^2 m_2 m_i m_j^2 + dm_1^2 m_2 m_i m_j^2 + 4m_1^2 m_i^2 m_j^2 - dm_1^2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + dm_1 m_2 m_i^2 m_j^2 + 4m_1 m_i^3 m_j^2 - dm_1 m_i^3 m_j^2 - 2m_2 m_i^3 m_j^2 + dm_2 m_i^3 m_j^2 + 4m_i^4 m_j^2 \\
 & - dm_i^4 m_j^2 - 2m_1^2 m_j^4 + dm_1^2 m_j^4 + 3m_1 m_2 m_j^4 - dm_1 m_2 m_j^4 - 2m_1 m_i m_j^4 \\
 & \left. + dm_1 m_i m_j^4 + 2m_2 m_i m_j^4 - dm_2 m_i m_j^4 - 5m_i^2 m_j^4 + 2dm_i^2 m_j^4 + 2m_j^6 - dm_j^6 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_1 + m_i - m_j)m_j^2(m_1 + m_i + m_j)} \\
 & -4(-1+d) \left( m_1 m_2^5 + 2m_1 m_2^4 m_i + m_2^4 m_i^2 - 2m_1 m_2^2 m_i^3 + 2m_2^3 m_i^3 \right. \\
 & - m_1 m_2 m_i^4 - 2m_2 m_i^5 - m_i^6 - 4m_1 m_2^3 m_j^2 + dm_1 m_2^3 m_j^2 - 2m_1 m_2^2 m_i m_j^2 \\
 & + dm_1 m_2^2 m_i m_j^2 + 4m_2^3 m_i m_j^2 - dm_2^3 m_i m_j^2 + dm_1 m_2 m_i^2 m_j^2 + 4m_2^2 m_i^2 m_j^2 \\
 & - dm_2^2 m_i^2 m_j^2 - 2m_1 m_i^3 m_j^2 + dm_1 m_i^3 m_j^2 + 4m_2 m_i^3 m_j^2 - dm_2 m_i^3 m_j^2 \\
 & + 4m_i^4 m_j^2 - dm_i^4 m_j^2 + 3m_1 m_2 m_j^4 - dm_1 m_2 m_j^4 - 2m_2^2 m_j^4 + dm_2^2 m_j^4 + 2m_1 m_i m_j^4 \\
 & \left. - dm_1 m_i m_j^4 - 2m_2 m_i m_j^4 + dm_2 m_i m_j^4 - 5m_i^2 m_j^4 + 2dm_i^2 m_j^4 + 2m_j^6 - dm_j^6 \right) \cdot \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_2 + m_i - m_j)m_j^2(m_2 + m_i + m_j)}
 \end{aligned}$$

(F.2)

$$\begin{aligned}
 & m_2 \left( 2I_{i,j,1,2}^P(0) + I_{i,j,1,2}^{V_a}(0) \right) + m_1 \left( 2I_{i,j,2,1}^P(0) + I_{i,j,2,1}^{V_a}(0) \right) \\
 & = I_{i,j,1,1}^{V_b}(0) + I_{i,j,1,2}^{V_b}(0) + I_{i,j,2,1}^{V_b}(0) + I_{i,j,2,2}^{V_b}(0) = \\
 & -4(-2+d) \left( -4m_1^4 + dm_1^4 + 3m_1^3 m_2 - dm_1^3 m_2 - m_1^3 m_i - dm_1^3 m_i + m_1^2 m_2 m_i \right. \\
 & + dm_1^2 m_2 m_i + 5m_1^2 m_i^2 - dm_1^2 m_i^2 - 3m_1 m_2 m_i^2 + dm_1 m_2 m_i^2 + m_1 m_i^3 + dm_1 m_i^3 \\
 & - m_2 m_i^3 - dm_2 m_i^3 - m_i^4 + 5m_1^2 m_j^2 - dm_1^2 m_j^2 - 3m_1 m_2 m_j^2 + dm_1 m_2 m_j^2 \\
 & \left. - m_1 m_i m_j^2 - dm_1 m_i m_j^2 + m_2 m_i m_j^2 + dm_2 m_i m_j^2 + 2m_i^2 m_j^2 - m_j^4 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_1\}} A_{\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)} \\
 & -4(-2+d) \left( -3m_1 m_2^3 + dm_1 m_2^3 + 4m_2^4 - dm_2^4 - m_1 m_2^2 m_i - dm_1 m_2^2 m_i + m_2^3 m_i \right. \\
 & + dm_2^3 m_i + 3m_1 m_2 m_i^2 - dm_1 m_2 m_i^2 - 5m_2^2 m_i^2 + dm_2^2 m_i^2 + m_1 m_i^3 + dm_1 m_i^3 \\
 & - m_2 m_i^3 - dm_2 m_i^3 + m_i^4 + 3m_1 m_2 m_j^2 - dm_1 m_2 m_j^2 - 5m_2^2 m_j^2 + dm_2^2 m_j^2 \\
 & \left. - m_1 m_i m_j^2 - dm_1 m_i m_j^2 + m_2 m_i m_j^2 + dm_2 m_i m_j^2 - 2m_i^2 m_j^2 + m_j^4 \right) \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_2\}} A_{\{1,m_i\}}}{(m_1 - m_2)(m_2 - m_i - m_j)(m_2 + m_i - m_j)(m_2 - m_i + m_j)(m_2 + m_i + m_j)} \\
 & +4 \left( -m_1^6 m_2 + dm_1^6 m_2 + m_1^5 m_2^2 - dm_1^5 m_2^2 - m_1^5 m_i^2 + dm_1^5 m_i^2 \right. \\
 & \left. + 3m_1^4 m_2 m_i^2 - 3dm_1^4 m_2 m_i^2 - 2m_1^3 m_2^2 m_i^2 + 2dm_1^3 m_2^2 m_i^2 + 2m_1^3 m_i^4 - 2dm_1^3 m_i^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3m_1^2 m_2 m_i^4 + 3dm_1^2 m_2 m_i^4 + m_1 m_2^2 m_i^4 - dm_1 m_2^2 m_i^4 - m_1 m_i^6 + dm_1 m_i^6 \\
 & + m_2 m_i^6 - dm_2 m_i^6 + 2m_1^5 m_j^2 - dm_1^5 m_j^2 + 4m_1^4 m_2 m_j^2 - 3dm_1^4 m_2 m_j^2 \\
 & - 2m_1^3 m_2^2 m_j^2 + 2dm_1^3 m_2^2 m_j^2 - 2m_1^4 m_i m_j^2 - dm_1^4 m_i m_j^2 + d^2 m_1^4 m_i m_j^2 \\
 & + 2m_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 + dm_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 - d^2 m_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 - 14m_1^3 m_i^2 m_j^2 + 10dm_1^3 m_i^2 m_j^2 \\
 & - 2d^2 m_1^3 m_i^2 m_j^2 - 4m_1^2 m_2 m_i^2 m_j^2 + 2dm_1^2 m_2 m_i^2 m_j^2 + 10m_1 m_2^2 m_i^2 m_j^2 - 8dm_1 m_2^2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 2d^2 m_1 m_2^2 m_i^2 m_j^2 - 2m_1^2 m_i^3 m_j^2 - dm_1^2 m_i^3 m_j^2 + d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^2 + 2m_2^2 m_i^3 m_j^2 \\
 & + dm_2^2 m_i^3 m_j^2 - d^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 + 4m_1 m_i^4 m_j^2 - 3dm_1 m_i^4 m_j^2 + dm_2 m_i^4 m_j^2 \\
 & - 4m_1^3 m_j^4 + 2dm_1^3 m_j^4 - 5m_1^2 m_2 m_j^4 + 3dm_1^2 m_2 m_j^4 + m_1 m_2^2 m_j^4 \\
 & - dm_1 m_2^2 m_j^4 + 2m_1^2 m_i m_j^4 + dm_1^2 m_i m_j^4 - d^2 m_1^2 m_i m_j^4 - 2m_2^2 m_i m_j^4 \\
 & - dm_2^2 m_i m_j^4 + d^2 m_2^2 m_i m_j^4 - 5m_1 m_i^2 m_j^4 + 3dm_1 m_i^2 m_j^4 - 3m_2 m_i^2 m_j^4 \\
 & + dm_2 m_i^2 m_j^4 + 2m_1 m_j^6 - dm_1 m_j^6 + 2m_2 m_j^6 - dm_2 m_j^6 \Big)
 \end{aligned}$$

$$A_{\{1, m_1\}} A_{\{1, m_j\}}$$

$$\frac{A_{\{1, m_1\}} A_{\{1, m_j\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)m_j^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \Big( -m_1^2 m_2^5 + dm_1^2 m_2^5 - m_1 m_2^6 + dm_1 m_2^6 + 2m_2^7 - 2dm_2^7 + 2m_1^2 m_2^3 m_i^2 - 2dm_1^2 m_2^3 m_i^2 \\
 & + 3m_1 m_2^4 m_i^2 - 3dm_1 m_2^4 m_i^2 - 5m_2^5 m_i^2 + 5dm_2^5 m_i^2 - m_1^2 m_2 m_i^4 + dm_1^2 m_2 m_i^4 \\
 & - 3m_1 m_2^2 m_i^4 + 3dm_1 m_2^2 m_i^4 + 4m_2^3 m_i^4 - 4dm_2^3 m_i^4 + m_1 m_i^6 - dm_1 m_i^6 - m_2 m_i^6 \\
 & + dm_2 m_i^6 + 2m_1^2 m_2^3 m_j^2 - 2dm_1^2 m_2^3 m_j^2 - dm_1 m_2^4 m_j^2 - 6m_2^5 m_j^2 + 5dm_2^5 m_j^2 \\
 & - 2m_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 - dm_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 + d^2 m_1^2 m_2^2 m_i m_j^2 \\
 & + 2m_2^4 m_i m_j^2 + dm_2^4 m_i m_j^2 - d^2 m_2^4 m_i m_j^2 - 10m_1^2 m_2 m_i^2 m_j^2 + 8dm_1^2 m_2 m_i^2 m_j^2 \\
 & - 2d^2 m_1^2 m_2 m_i^2 m_j^2 + 4m_1 m_2^2 m_i^2 m_j^2 - 2dm_1 m_2^2 m_i^2 m_j^2 + 14m_2^3 m_i^2 m_j^2 - 10dm_2^3 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 2d^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 - 2m_1^2 m_i^3 m_j^2 - dm_1^2 m_i^3 m_j^2 + d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^2 \\
 & + 2m_2^2 m_i^3 m_j^2 + dm_2^2 m_i^3 m_j^2 - d^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 - 4m_1 m_i^4 m_j^2 + 3dm_1 m_i^4 m_j^2 \\
 & - dm_2 m_i^4 m_j^2 - m_1^2 m_2 m_j^4 + dm_1^2 m_2 m_j^4 + 3m_1 m_2^2 m_j^4 - dm_1 m_2^2 m_j^4 + 6m_2^3 m_j^4 - 4dm_2^3 m_j^4 \\
 & + 2m_1^2 m_i m_j^4 + dm_1^2 m_i m_j^4 - d^2 m_1^2 m_i m_j^4 - 2m_2^2 m_i m_j^4 - dm_2^2 m_i m_j^4 + d^2 m_2^2 m_i m_j^4 + 5m_1 m_i^2 m_j^4 \\
 & - 3dm_1 m_i^2 m_j^4 + 3m_2 m_i^2 m_j^4 - dm_2 m_i^2 m_j^4 - 2m_1 m_j^6 + dm_1 m_j^6 - 2m_2 m_j^6 + dm_2 m_j^6 \Big) .
 \end{aligned}$$

$$A_{\{1, m_2\}} A_{\{1, m_j\}}$$

$$\frac{A_{\{1, m_2\}} A_{\{1, m_j\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_2 - m_i - m_j)(m_2 + m_i - m_j)m_j^2(m_2 - m_i + m_j)(m_2 + m_i + m_j)}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 \Big( -2m_1^4 m_2^5 + 2dm_1^4 m_2^5 + 4m_1^4 m_2^3 m_i^2 - 4dm_1^4 m_2^3 m_i^2 + 4m_1^2 m_2^5 m_i^2 \\
 & - 4dm_1^2 m_2^5 m_i^2 - 2m_1^4 m_2 m_i^4 + 2dm_1^4 m_2 m_i^4 - 8m_1^2 m_2^3 m_i^4 + 8dm_1^2 m_2^3 m_i^4 \\
 & - 2m_2^5 m_i^4 + 2dm_2^5 m_i^4 + 4m_1^2 m_2 m_i^6 - 4dm_1^2 m_2 m_i^6 + 4m_2^3 m_i^6 \\
 & - 4dm_2^3 m_i^6 - 2m_2 m_i^8 + 2dm_2 m_i^8 - 2m_1^4 m_2^3 m_j^2 + dm_1^4 m_2^3 m_j^2 \\
 & - d^2 m_1^4 m_2^3 m_j^2 - 6m_1^3 m_2^4 m_j^2 + 5dm_1^3 m_2^4 m_j^2 - d^2 m_1^3 m_2^4 m_j^2 + 4m_1^2 m_2^5 m_j^2 \\
 & - 4dm_1^2 m_2^5 m_j^2 - 4m_1^4 m_2^2 m_i m_j^2 - 2dm_1^4 m_2^2 m_i m_j^2 + 2d^2 m_1^4 m_2^2 m_i m_j^2 - 4m_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 \\
 & - 2dm_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 + 2d^2 m_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 - 2m_1^4 m_2 m_i^2 m_j^2 + dm_1^4 m_2 m_i^2 m_j^2 - d^2 m_1^4 m_2 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 12m_1^3 m_2^2 m_i^2 m_j^2 - 10dm_1^3 m_2^2 m_i^2 m_j^2 + 2d^2 m_1^3 m_2^2 m_i^2 m_j^2 - 4m_1^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 + 6dm_1^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 \\
 & + 2d^2 m_1^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 - 6m_1 m_2^4 m_i^2 m_j^2 + 5dm_1 m_2^4 m_i^2 m_j^2 - d^2 m_1 m_2^4 m_i^2 m_j^2 + 4m_2^5 m_i^2 m_j^2 \\
 & - 4dm_2^5 m_i^2 m_j^2 + 16m_1^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 + 8dm_1^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 - 8d^2 m_1^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 - 6m_1^3 m_i^4 m_j^2 \\
 & + 5dm_1^3 m_i^4 m_j^2 - d^2 m_1^3 m_i^4 m_j^2 + 8m_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2 - 6dm_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2 + 2d^2 m_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +12m_1m_2^2m_i^4m_j^2 - 10dm_1m_2^2m_i^4m_j^2 + 2d^2m_1m_2^2m_i^4m_j^2 - 10m_2^3m_i^4m_j^2 + 9dm_2^3m_i^4m_j^2 \\
 & - d^2m_2^3m_i^4m_j^2 - 4m_1^2m_i^5m_j^2 - 2dm_1^2m_i^5m_j^2 + 2d^2m_1^2m_i^5m_j^2 - 4m_2^2m_i^5m_j^2 - 2dm_2^2m_i^5m_j^2 \\
 & + 2d^2m_2^2m_i^5m_j^2 - 6m_1m_i^6m_j^2 + 5dm_1m_i^6m_j^2 - d^2m_1m_i^6m_j^2 + 2m_2m_i^6m_j^2 \\
 & - 3dm_2m_i^6m_j^2 - d^2m_2m_i^6m_j^2 + 4m_1^4m_2m_j^4 - 3dm_1^4m_2m_j^4 + d^2m_1^4m_2m_j^4 \\
 & + 12m_1^3m_2^2m_j^4 - 10dm_1^3m_2^2m_j^4 + 2d^2m_1^3m_2^2m_j^4 + 4m_1^2m_2^3m_j^4 - 2dm_1^2m_2^3m_j^4 \\
 & + 2d^2m_1^2m_2^3m_j^4 + 6m_1m_2^4m_j^4 - 5dm_1m_2^4m_j^4 + d^2m_1m_2^4m_j^4 - 2m_2^5m_j^4 \\
 & + 2dm_2^5m_j^4 + 16m_1^2m_2^2m_im_j^4 + 8dm_1^2m_2^2m_im_j^4 - 8d^2m_1^2m_2^2m_im_j^4 \\
 & + 12m_1^3m_i^2m_j^4 - 10dm_1^3m_i^2m_j^4 + 2d^2m_1^3m_i^2m_j^4 - 4m_1^2m_2m_i^2m_j^4 + 4dm_1^2m_2m_i^2m_j^4 \\
 & + 8m_2^3m_i^2m_j^4 - 6dm_2^3m_i^2m_j^4 + 2d^2m_2^3m_i^2m_j^4 + 8m_1^2m_i^3m_j^4 + 4dm_1^2m_i^3m_j^4 \\
 & - 4d^2m_1^2m_i^3m_j^4 + 8m_2^2m_i^3m_j^4 + 4dm_2^2m_i^3m_j^4 - 4d^2m_2^2m_i^3m_j^4 + 18m_1m_i^4m_j^4 \\
 & - 15dm_1m_i^4m_j^4 + 3d^2m_1m_i^4m_j^4 + 6m_2m_i^4m_j^4 - 3dm_2m_i^4m_j^4 + 3d^2m_2m_i^4m_j^4 \\
 & - 6m_1^3m_j^6 + 5dm_1^3m_j^6 - d^2m_1^3m_j^6 - 8m_1^2m_2m_j^6 + 6dm_1^2m_2m_j^6 - 2d^2m_1^2m_2m_j^6 \\
 & - 12m_1m_2^2m_j^6 + 10dm_1m_2^2m_j^6 - 2d^2m_1m_2^2m_j^6 - 2m_2^3m_j^6 + dm_2^3m_j^6 \\
 & - d^2m_2^3m_j^6 - 4m_1^2m_im_j^6 - 2dm_1^2m_im_j^6 + 2d^2m_1^2m_im_j^6 - 4m_2^2m_im_j^6 \\
 & - 2dm_2^2m_im_j^6 + 2d^2m_2^2m_im_j^6 - 18m_1m_i^2m_j^6 + 15dm_1m_i^2m_j^6 - 3d^2m_1m_i^2m_j^6 \\
 & - 10m_2m_i^2m_j^6 + 7dm_2m_i^2m_j^6 - 3d^2m_2m_i^2m_j^6 + 6m_1m_j^8 - 5dm_1m_j^8 \\
 & + d^2m_1m_j^8 + 4m_2m_j^8 - 3dm_2m_j^8 + d^2m_2m_j^8) \frac{1}{(m_1 + m_i - m_j)(-m_2 + m_i - m_j)} \cdot \\
 & \frac{A_{\{1,m_i\}}A_{\{1,m_j\}}}{(m_1 - m_i - m_j)(m_2 + m_i - m_j)m_j^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)(-m_2 + m_i + m_j)(m_2 + m_i + m_j)} \\
 & \frac{4(-1+d)(m_1 - m_i)(m_1 + m_i)(m_1m_2 + m_i^2)K_{\{1,m_i\},\{1,m_1\},\{1,0\}}}{(m_1 + m_2)m_j^2} \\
 & \frac{4(-1+d)(m_2 - m_i)(m_2 + m_i)(m_1m_2 + 2m_2^2 - m_i^2)K_{\{1,m_i\},\{1,m_2\},\{1,0\}}}{(m_1 + m_2)m_j^2} \\
 & + 4 \left( - (m_1^8m_2) + dm_1^8m_2 + m_1^7m_2^2 - dm_1^7m_2^2 - m_1^7m_i^2 + dm_1^7m_i^2 \right. \\
 & + 4m_1^6m_2m_i^2 - 4dm_1^6m_2m_i^2 - 3m_1^5m_2^2m_i^2 + 3dm_1^5m_2^2m_i^2 + 3m_1^5m_i^4 - 3dm_1^5m_i^4 \\
 & - 6m_1^4m_2m_i^4 + 6dm_1^4m_2m_i^4 + 3m_1^3m_2^2m_i^4 - 3dm_1^3m_2^2m_i^4 - 3m_1^3m_i^6 + 3dm_1^3m_i^6 \\
 & + 4m_1^2m_2m_i^6 - 4dm_1^2m_2m_i^6 - m_1m_2^2m_i^6 + dm_1m_2^2m_i^6 + m_1m_i^8 - dm_1m_i^8 \\
 & - m_2m_i^8 + dm_2m_i^8 - 8m_1^7m_j^2 + 6dm_1^7m_j^2 - d^2m_1^7m_j^2 + m_1^6m_2m_j^2 \\
 & - 2dm_1^6m_2m_j^2 + 3m_1^5m_2^2m_j^2 - 2dm_1^5m_2^2m_j^2 + d^2m_1^5m_2^2m_j^2 - 4m_1^6m_im_j^2 - 7dm_1^6m_im_j^2 \\
 & + 3d^2m_1^6m_im_j^2 - 2d^2m_1^5m_2m_im_j^2 + 4m_1^4m_2^2m_im_j^2 + 3dm_1^4m_2^2m_im_j^2 - d^2m_1^4m_2^2m_im_j^2 \\
 & - 3m_1^5m_i^2m_j^2 - m_1^4m_2m_i^2m_j^2 + 2dm_1^4m_2m_i^2m_j^2 + 8m_1^3m_2^2m_i^2m_j^2 - 4dm_1^3m_2^2m_i^2m_j^2 \\
 & + 2m_1^4m_i^3m_j^2 + 10dm_1^4m_i^3m_j^2 - 4d^2m_1^4m_i^3m_j^2 + 4d^2m_1^3m_2m_i^3m_j^2 - 2m_1^2m_2^2m_i^3m_j^2 \\
 & - 2dm_1^2m_2^2m_i^3m_j^2 + 16m_1^3m_i^4m_j^2 - 10dm_1^3m_i^4m_j^2 + d^2m_1^3m_i^4m_j^2 - m_1^2m_2m_i^4m_j^2 \\
 & + 2dm_1^2m_2m_i^4m_j^2 - 11m_1m_2^2m_i^4m_j^2 + 6dm_1m_2^2m_i^4m_j^2 - d^2m_1m_2^2m_i^4m_j^2 + 2m_1^2m_i^5m_j^2 \\
 & - 3dm_1^2m_i^5m_j^2 + d^2m_1^2m_i^5m_j^2 - 2d^2m_1m_2m_i^5m_j^2 - 2m_2^2m_i^5m_j^2 - dm_2^2m_i^5m_j^2 \\
 & + d^2m_2^2m_i^5m_j^2 - 5m_1m_i^6m_j^2 + 4dm_1m_i^6m_j^2 + m_2m_i^6m_j^2 - 2dm_2m_i^6m_j^2 \\
 & + 18m_1^5m_j^4 - 13dm_1^5m_j^4 + 2d^2m_1^5m_j^4 + 3m_1^4m_2m_j^4 - 9m_1^3m_2^2m_j^4 \\
 & + 7dm_1^3m_2^2m_j^4 - 2d^2m_1^3m_2^2m_j^4 + 2m_1^4m_im_j^4 + 10dm_1^4m_im_j^4 - 4d^2m_1^4m_im_j^4 \\
 & + 4d^2m_1^3m_2m_im_j^4 - 2m_1^2m_2^2m_im_j^4 - 2dm_1^2m_2^2m_im_j^4 - m_1^3m_i^2m_j^4 - dm_1^3m_i^2m_j^4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +2m_1^2 m_2 m_i^2 m_j^4 + 7m_1 m_2^2 m_i^2 m_j^4 - 3dm_1 m_2^2 m_i^2 m_j^4 - 4m_1^2 m_i^3 m_j^4 + 6dm_1^2 m_i^3 m_j^4 \\
 & -2d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^4 + 4d^2 m_1 m_2 m_i^3 m_j^4 + 4m_2^2 m_i^3 m_j^4 + 2dm_2^2 m_i^3 m_j^4 - 2d^2 m_2^2 m_i^3 m_j^4 \\
 & +9m_1 m_i^4 m_j^4 - 6dm_1 m_i^4 m_j^4 + 3m_2 m_i^4 m_j^4 - 12m_1^3 m_j^6 + 8dm_1^3 m_j^6 - d^2 m_1^3 m_j^6 \\
 & -5m_1^2 m_2 m_j^6 + 2dm_1^2 m_2 m_j^6 + 5m_1 m_2^2 m_j^6 - 4dm_1 m_2^2 m_j^6 + d^2 m_1 m_2^2 m_j^6 \\
 & +2m_1^2 m_i m_j^6 - 3dm_1^2 m_i m_j^6 + d^2 m_1^2 m_i m_j^6 - 2d^2 m_1 m_2 m_i m_j^6 - 2m_2^2 m_i m_j^6 \\
 & -dm_2^2 m_i m_j^6 + d^2 m_2^2 m_i m_j^6 - 7m_1 m_i^2 m_j^6 + 4dm_1 m_i^2 m_j^6 - 5m_2 m_i^2 m_j^6 \\
 & +2dm_2 m_i^2 m_j^6 + 2m_1 m_j^8 - dm_1 m_j^8 + 2m_2 m_j^8 - dm_2 m_j^8 \Big). \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_1\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_1 - m_i - m_j)(m_1 + m_i - m_j)m_j^2(m_1 - m_i + m_j)(m_1 + m_i + m_j)} \\
 & +4\left(-m_1^2 m_2^7 + dm_1^2 m_2^7 - m_1 m_2^8 + dm_1 m_2^8 + 2m_2^9 - 2dm_2^9 + 3m_1^2 m_2^5 m_i^2 \right. \\
 & -3dm_1^2 m_2^5 m_i^2 + 4m_1 m_2^6 m_i^2 - 4dm_1 m_2^6 m_i^2 - 7m_2^7 m_i^2 + 7dm_2^7 m_i^2 - 3m_1^2 m_2^3 m_i^4 \\
 & +3dm_1^2 m_2^3 m_i^4 - 6m_1 m_2^4 m_i^4 + 6dm_1 m_2^4 m_i^4 + 9m_2^5 m_i^4 - 9dm_2^5 m_i^4 + m_1^2 m_2 m_i^6 \\
 & -dm_1^2 m_2 m_i^6 + 4m_1 m_2^2 m_i^6 - 4dm_1 m_2^2 m_i^6 - 5m_2^3 m_i^6 + 5dm_2^3 m_i^6 - m_1 m_i^8 \\
 & +dm_1 m_i^8 + m_2 m_i^8 - dm_2 m_i^8 - 3m_1^2 m_2^5 m_j^2 + 2dm_1^2 m_2^5 m_j^2 - d^2 m_1^2 m_2^5 m_j^2 \\
 & +5m_1 m_2^6 m_j^2 - 4dm_1 m_2^6 m_j^2 + 2m_2^7 m_j^2 + d^2 m_2^7 m_j^2 - 4m_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 - 3dm_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 \\
 & +d^2 m_1^2 m_2^4 m_i m_j^2 + 2d^2 m_1 m_2^5 m_i m_j^2 + 4m_2^6 m_i m_j^2 + 7dm_2^6 m_i m_j^2 - 3d^2 m_2^6 m_i m_j^2 \\
 & -8m_1^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 + 4dm_1^2 m_2^3 m_i^2 m_j^2 - 5m_1 m_2^4 m_i^2 m_j^2 + 4dm_1 m_2^4 m_i^2 m_j^2 + 9m_2^5 m_i^2 m_j^2 \\
 & -6dm_2^5 m_i^2 m_j^2 + 2m_1^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 + 2dm_1^2 m_2^2 m_i^3 m_j^2 - 4d^2 m_1 m_2^3 m_i^3 m_j^2 \\
 & -2m_2^4 m_i^3 m_j^2 - 10dm_2^4 m_i^3 m_j^2 + 4d^2 m_2^4 m_i^3 m_j^2 + 11m_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2 - 6dm_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2 \\
 & +d^2 m_1^2 m_2 m_i^4 m_j^2 - 5m_1 m_2^2 m_i^4 m_j^2 + 4dm_1 m_2^2 m_i^4 m_j^2 - 10m_2^3 m_i^4 m_j^2 + 4dm_2^3 m_i^4 m_j^2 \\
 & -d^2 m_2^3 m_i^4 m_j^2 + 2m_1^2 m_i^5 m_j^2 + dm_1^2 m_i^5 m_j^2 - d^2 m_1^2 m_i^5 m_j^2 + 2d^2 m_1 m_2 m_i^5 m_j^2 \\
 & -2m_2^2 m_i^5 m_j^2 + 3dm_2^2 m_i^5 m_j^2 - d^2 m_2^2 m_i^5 m_j^2 + 5m_1 m_i^6 m_j^2 - 4dm_1 m_i^6 m_j^2 \\
 & -m_2 m_i^6 m_j^2 + 2dm_2 m_i^6 m_j^2 + 9m_1^2 m_2^3 m_j^4 - 7dm_1^2 m_2^3 m_j^4 + 2d^2 m_1^2 m_2^3 m_j^4 \\
 & -9m_1 m_2^4 m_j^4 + 6dm_1 m_2^4 m_j^4 - 12m_2^5 m_j^4 + 7dm_2^5 m_j^4 - 2d^2 m_2^5 m_j^4 + 2m_1^2 m_2^2 m_i m_j^4 \\
 & +2dm_1^2 m_2^2 m_i m_j^4 - 4d^2 m_1 m_2^3 m_i m_j^4 - 2m_2^4 m_i m_j^4 - 10dm_2^4 m_i m_j^4 + 4d^2 m_2^4 m_i m_j^4 \\
 & -7m_1^2 m_2 m_i^2 m_j^4 + 3dm_1^2 m_2 m_i^2 m_j^4 - 6m_1 m_2^2 m_i^2 m_j^4 + 4dm_1 m_2^2 m_i^2 m_j^4 + 5m_2^3 m_i^2 m_j^4 \\
 & -3dm_2^3 m_i^2 m_j^4 - 4m_1^2 m_i^3 m_j^4 - 2dm_1^2 m_i^3 m_j^4 + 2d^2 m_1^2 m_i^3 m_j^4 - 4d^2 m_1 m_2 m_i^3 m_j^4 \\
 & +4m_2^2 m_i^3 m_j^4 - 6dm_2^2 m_i^3 m_j^4 + 2d^2 m_2^2 m_i^3 m_j^4 - 9m_1 m_i^4 m_j^4 + 6dm_1 m_i^4 m_j^4 \\
 & -3m_2 m_i^4 m_j^4 - 5m_1^2 m_2 m_j^6 + 4dm_1^2 m_2 m_j^6 - d^2 m_1^2 m_2 m_j^6 + 7m_1 m_2^2 m_j^6 - 4dm_1 m_2^2 m_j^6 \\
 & +10m_2^3 m_j^6 - 6dm_2^3 m_j^6 + d^2 m_2^3 m_j^6 + 2m_1^2 m_i m_j^6 + dm_1^2 m_i m_j^6 \\
 & -d^2 m_1^2 m_i m_j^6 + 2d^2 m_1 m_2 m_i m_j^6 + 2m_2^2 m_i m_j^6 + 3dm_2^2 m_i m_j^6 - d^2 m_2^2 m_i m_j^6 \\
 & +7m_1 m_i^2 m_j^6 - 4dm_1 m_i^2 m_j^6 + 5m_2 m_i^2 m_j^6 - 2dm_2 m_i^2 m_j^6 \\
 & \left. -2m_1 m_j^8 + dm_1 m_j^8 - 2m_2 m_j^8 + dm_2 m_j^8 \right). \\
 & \frac{K_{\{1,m_j\},\{1,m_i\},\{1,m_2\}}}{(m_1 - m_2)(m_1 + m_2)(m_2 - m_i - m_j)(m_2 + m_i - m_j)m_j^2(m_2 - m_i + m_j)(m_2 + m_i + m_j)}
 \end{aligned}$$

(F.3)

# Literaturverzeichnis

- [BC 80] J.S. Ball, T.-W. Chiu, Phys. Rev. **D22** (1980) 2542, 2550
- [BEL 91] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford (1991)
- [BER 68] J. Bernstein, *Elementary Particles and Their Currents*, Freeman (1968)
- [CAS 98] C.Caso et al., *Review of Particle Physics*, The European Physical Journal **C3** (1998) 1
- [COL 84] J.Collins, *Renormalization; Cambridge University Press*, Cambridge (1984)
- [DRI 97] L. Driesen, *Die Basisvertizes der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (1997)
- [DRI 98] L. Driesen, M. Stingl, *Extended iterative scheme for QCD: the four-gluon vertex*, Eur. Phys. J. **A4**, 401-419 (1999); MS-TPI-98-19, hep-th/9808155
- [DS 49] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** (1949) 1736; Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951) 452, 455
- [DT 93] A.I. Davydychev, J.B. Tausk, *Two-loop self-energy diagrams with different masses and the momentum expansion*, Nuclear Physics **B397** (1993) 123-142
- [FRO 96] J.Fromm, *Dyson-Schwinger-Gleichung des Dreigliuonvertex und Bestimmung des effektiven Gluonpropagators einer erweiterten Störungstheorie der Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit WWU Münster (1996)
- [FT 94] J. Fleischer, O.V. Tarasov, *Calculation of Feynman diagrams from their small momentum expansion*; Z.Physik, **C64**, 413-425 (1994)
- [GUT 96] F.Gutbrod, *A Study of the Gluon Propagator in SU(2) Lattice Gauge Theory*, DESY-96-252
- [GRI 78] V.N. Gribov, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1

- [HÄB 90] U.Häbel, R.Könning, H.-G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard, *Z.Physik* **A336** (1990) 423, 435
- [HOO 85] F. Hoogeveen, The influence of a heavy fermion doublet on higgs-boson production via the gluon fusion mechanism; *Nuclear Physics* **B259** (1985) 19-32
- [IZ 80] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)
- [KUH 97] J. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsrechnung für die Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1997)
- [KOE 90] R. Könning, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Quark-Quark-Gluon-Vertex der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [LUE 94] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff, *Nucl.Phys.* **B413** (1994) 481
- [MAR 94] P.Marenzoni, G.Martinelli, N.Stella, M.Testa, *A Lattice Study of the Gluon Propagator in the Landau Gauge*, in: Como: Quark Confinement 1994, e-print archive: hep-ph/9410355
- [MEY 94] A. Meyer, *Hadronische Zwischenzustände in der  $e^- + e^+$ -Annihilation*, Diplomarbeit WWU Münster (1994)
- [MUT 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*; Singapore, World Scientific (1987)
- [NAR 89] S. Narison, *QCD: Spectral Sum Rules*; World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 26
- [PT 82] P. Pascual, R. Tarrach, *Renormalization for the Practitioner*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984)
- [REI 83] L. J. Reinders, *QCD Sum Rules: An Introduction and some Applications*; Acta Physica Polonica Vol. **B15** (1984)
- [REI 85] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: *Hadron Properties from QCD Sum Rules*; *Phys. Rep.* **A 127**, (1985) 1
- [REU 89] H.-G. Reusch, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [RYD 85] L. Ryder, *Quantum Field Theory*; Cambridge University Press, Cambridge (1985)

- [SCH 96] M.Schmelling, *Status of the Strong Coupling Constant*; Plenary talk given at XXVIII International Conference on High Energie Physics; Warsaw 1996, e-print archive: hep-ex/9701002
- [SS 96] D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov, *Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  value*, e-print archive: hep-ph/9604363
- [ST 71] AA. Slavnov, Sov. J. Particles and Nuclei **5** (1975) 303; J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33** (1971) 436
- [STI 96] M. Stingl: *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*; Z. Physik **A 353**, (1996) 423
- [STI 97] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, *Extended iterative scheme for QCD: three-point vertices*, Eur. Phys. J. **A4**, 381-400 (1999); MS-TPI-97-4, hep-th/9808152
- [STR 96] A. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1996)
- [SYM 97] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. **23** (1971) 49
- [SVZ 79] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *QCD and Resonance Physics* Nucl. Phys. **B147** (1979) 385, 448
- [TAR 96] O.V. Tarasov *Generalized recurrence relations for two-loop propagator integrals with arbitrary masses*; hep-ph/9703319 (1996)
- [THO 73] G. 't Hooft, M.Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189
- [WIC 50] G.C. Wick, Phys. Rev. **80** (1950) 268
- [WIG 89] S.Wigard *Eine nicht-störungstheoretische Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Fermionpropagator der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [WIL 69] K.G. Wilson *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. **179**, (1969) 1499
- [YND 93] F.J. Yndurain: *The Theory of Quarks and Gluon Interactions*; Springer (1993)
- [ZIM 73] W. Zimmermann, Ann.Phys. **77**, (1973) 570

# Schlußwort

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt und beraten haben.

Mein erster Dank gilt namentlich Herrn Prof. Dr. M. Stingl sowohl für die Anregung zu diesem interessanten Thema als auch für seine ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen und für seine zahlreichen wertvollen Hinweise.

Weiterhin danke ich allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, insbesondere André Ewering und Felix Zantow für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Ganz besonders bedanken jedoch möchte ich mich bei meiner Freundin Claudia Tockloth sowie meinen Eltern für ihre Unterstützung und ihr Verständnis über den gesamten Zeitraum der Erstellung dieser Arbeit.

# Lebenslauf

Name	Jörn Frederik Voigt
geboren	am 1.9.1969 in Elmshorn
Eltern	Dr. Jürgen-Peter Voigt Meta Voigt, geb. Kübler
Familienstand	ledig
1975 - 1979	Besuch der Schubert- und Olpketal-Grundschule in Dortmund
1979 - 1988	Besuch des Max-Planck-Gymnasiums in Dortmund
6.6.1988	Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife
1988 - 1989	Militärischer Grundwehrdienst
WS 1989/90	Aufnahme des Grundstudiums der Mathematik und Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
17.12.1991	Vordiplom in Mathematik und Physik an der WWU Münster
WS 1991/92	Aufnahme des Hauptstudiums der Physik an der WWU Münster
Oktober 1993	Beginn der Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl über das Thema: <i>Berechnung von Zwei-Teilchen-Bindungszuständen in der <math>\Phi^4</math>-Theorie unter Berücksichtigung der Mikrokausalität</i>
1.9.1994 - 30.9.1995	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
28.9.1995	Diplom der Physik an der WWU Münster

Oktober 1995	Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.10.1995 - 31.7.1996	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.8.1996 - 31.3.1999	Wissenschaftliche Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
seit 1.4.1999	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster

