

ANDRÉ EWERING

**Dynamische Massenerzeugung und
Symmetriebrechung im Rahmen einer
systematisch erweiterten Störungstheorie
im elektroschwachen Sektor**

2004

THEORETISCHE PHYSIK

**Dynamische Massenerzeugung und
Symmetriebrechung im Rahmen einer
systematisch erweiterten Störungstheorie
im elektroschwachen Sektor**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
André Ewering
aus Lüneburg

2004

Dekan:	Prof. Dr. H. Zacharias
Erster Gutachter:	Prof. Dr. M. Stingl
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Tag der mündlichen Prüfungen:	30.01.04 und 03.02.04
Tag der Promotion:	03.02.04

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Feldtheoretische Grundlagen	5
1.1 Die Wirkung der Theorie	5
1.2 Störungstheorie und Renormierung	8
1.3 Die Renormierungsgruppe	10
1.3.1 Die RG-Funktion $\beta(g)$	11
1.3.2 Asymptotische Freiheit und Integraldarstellung von Z_α	11
1.3.3 Renormierung der Felder	13
1.3.4 Die spontane Massenskala	13
1.4 Bethe-Salpeter-Resummationen	15
2 Die systematisch erweiterte Störungstheorie	19
2.1 Operatorproduktentwicklung und Vertexfunktionen	19
2.2 Die Systematik des erweiterten Schemas	21
2.3 Die modifizierten Basisvertizes	23
2.3.1 Konstruktion der erweiterten Propagatoren	23
2.3.2 Tripel-Vertizes	25
2.3.3 Die 4-Punkt-Funktionen	29
2.4 Formulierung des Selbstkonsistenzproblems	32
2.5 Der Mechanismus der kompensierenden Pole	35
3 Der Fermion-Sektor	39
3.1 Der inverse Fermion-Propagator	39
3.1.1 Schleifenberechnungen	39
3.1.2 Formulierung der SK-Bedingungen	44
3.1.3 Selbstkonsistenz für $r/r + 1 = 0/1$	47
3.2 Der Fermion- W^0 -Vertex	48
3.2.1 Schleifenresultate	49
3.2.2 Renormierung des Vertex	52
3.2.3 Die SK-Bedingungen	54
3.2.4 Selbstkonsistenz für $r/r + 1 = 0/1$	57

3.3	Selbstkonsistenz der Fermion- W^\pm -Vertizes	58
3.4	Zwischenergebnis	63
4	Boson-Vertizes	65
4.1	Geister	65
4.2	Selbstkonsistenz der Boson-Propagatoren	68
4.3	Der Boson-Vertex	73
4.3.1	Bestimmungsgleichung	73
4.3.2	Schleifenberechnungen	75
4.3.3	Die SK-Gleichungen	76
4.4	Bemerkungen zu den 4-Boson-Vertizes	78
4.5	Zwischenergebnis	82
5	Vakuumkondensate	85
5.1	Bemerkung zu 2-Schleifen-Diagrammen	85
5.2	Definition der Vakuumkondensate	86
5.3	Kondensat des Fermion-Propagators	87
5.4	Kondensate der Boson-Propagatoren	95
5.5	Zwischenergebnis	96
6	Analyse der SK-Gleichungen	97
6.1	Eigenschaften der Lösungen	98
6.2	Lösung des SK-Problems für $r/r + 1 = 0/1$	99
6.3	Der Photon-Vertex	102
6.4	Bemerkungen	105
6.5	Generationenbildung	106
	Zusammenfassung und Ausblick	109
A	Funktionalintegralmethoden	113
A.1	Die störungstheoretischen Basisvertizes	113
A.1.1	Ortsraumversion der Wirkung	113
A.1.2	Feynman-Regeln	114
A.2	Euklidische Green- und Vertexfunktionen	117
A.2.1	Erzeugende Funktionale	117
A.2.2	Feynman-Regeln	120
A.3	Dyson-Schwinger-Gleichungen	122
A.3.1	Fermion-Sektor	122
A.3.2	Boson-Sektor	125
A.3.3	Geist-Sektor	128
A.3.4	Kondensate	129

B Wichtige Ergänzungen	131
B.1 Algebra der euklidischen γ -Matrizen	131
B.2 Partialbruchzerlegungen	133
B.3 Feynman-Parametrisierungen	135
B.4 Euklidische Impulsintegration	135
C Schleifen-Galerie	139
C.1 Fermion-Sektor	139
C.2 Beiträge zum Kondensat der Fermion-Propagator-Gleichung	147
C.3 Boson-Sektor	153
C.3.1 Propagatoren	153
C.3.2 Boson-Vertex	157
C.3.3 Bosonische 4-Punkt-Vertizes	166
C.4 Bosonkondensate	168
D SKG des Boson-Vertex	175
E SK-Gleichungssysteme für 0/1	181
E.1 Das vollständige Selbstkonsistenzproblem	181
E.2 Das SK-System mit $C_{000}^4 = 0$	185
Literaturverzeichnis	189

Einleitung

Quantisierte Feldtheorien sind nach derzeitigem Kenntnisstand die richtigen Modelle zur Beschreibung von Elementarteilchen und ihrer fundamentalen Wechselwirkungen. In einer Feldtheorie werden die Teilchen mit Feldfunktionen assoziiert, aus denen sich in einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation Wirkungsquerschnitte für Streuprozesse bestimmen lassen. Wird eine Feldtheorie zusätzlich als Eichtheorie formuliert, so beschreiben die Eichfelder die Austauscheteilchen der Kräfte zwischen den Materiefeldern der Theorie. Die Behandlung nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung erleichtert aufgrund des Noetherschen Theorems die Suche nach Erhaltungsgrößen.

Das Standardmodell der Elementarteilchen mit der Eichgruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ erfasst mit Ausnahme der Gravitation alle in der Natur bekannten Wechselwirkungen und setzt sich aus der Theorie über elektroschwache Prozesse von Glashow, Salam und Weinberg und der Quantenchromodynamik zusammen. Weit über hundert gefundene Teilchen werden mit dem Standardmodell auf wenige elementare Teilchen zurückgeführt, die entweder der Fermi- oder der Bose-Statistik genügen. Durch die Art ihrer elementaren Wechselwirkungen zerfallen die Fermionen in die Klasse der elektroschwach wechselwirkenden Leptonen und in die sowohl elektroschwach als auch stark interagierenden Quarks. Die Austauscheteilchen der elektroschwachen Kraft sind das masselose Photon sowie die massiven W^\pm - und Z^0 -Bosonen. Die starken Kräfte werden durch die Gluonen vermittelt.

Obwohl die theoretischen Vorhersagen aus dem Standardmodell hervorragend durch experimentelle Daten bestätigt werden, stellt dieses Modell keineswegs eine endgültige Theorie dar. Grundsätzliche Fragen sind noch offen. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz verbietet Terme mit Strommassen für die Felder in der Lagrange-Dichte, da dies die Eichsymmetrie verletzen würde. Dieser Widerspruch zum experimentellen Befund wird auf die Wechselwirkung mit einem Hintergrundfeld zurückgeführt. Dazu werden zusätzlich skalare Felder mit nichtverschwindendem Vakuumerwartungswert in die Theorie eingeführt. Die Massen der Eichfelder und Fermionen werden durch die Brechung der Eichsymmetrie spontan erzeugt. Das physikalische Teilchenspektrum beinhaltet damit neben den in der Natur beobachteten Bosonen und Fermionen das bisher experimentell nicht nachgewiesene Higgs-Boson. Der Higgs-Mechanismus erklärt zudem nicht, wie die Massen wirklich erzeugt werden, denn die Kopplungsparameter der Fermionen werden so justiert, dass die Massen mit den experimentellen Werten übereinstimmen.

In der vorliegenden Arbeit wird anhand einer paritätserhaltenden $SU(2)$ -Eichtheorie untersucht, inwieweit sich Teilchenmassen im Rahmen elektroschwacher Wechselwirkungen dynamisch aus den Bewegungsgleichungen für die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen erzeugen lassen. Die Ausbildung der Teilchenmassen wird als nichtperturbativer Effekt verstanden, so dass auf die Verwendung von Skalarfeldern völlig verzichtet werden kann. Es ist

dabei zu klären, ob das neutral geladene Eichfeld zwei stabile Teilchen modellieren kann, von denen eines massiv und das andere masselos ist, denn ein $U(1)$ -Eichfeld wird nicht eingeführt. Die Möglichkeit der Ausbildung von Fermionmassen wird untersucht, kann aber nicht erwartet werden, da die experimentell bestimmten Massen von Leptonen und der leichten Quarks vom Standpunkt elektroschwacher Prozesse nahezu verschwindende Werte besitzen. Von besonderem Interesse sind dabei Lösungen, die die Eichsymmetrie der Theorie dynamisch brechen. Zusätzlich wird der Versuch unternommen, Paritäts- und \mathcal{CP} -Verletzung sowie die Hyperladung als nichtperturbativen Effekt zu etablieren.

Im 1. Kapitel werden die wesentlichen feldtheoretischen Grundlagen dargestellt. Die Lagrange-Dichte ist hierbei die definierende Größe der Theorie. Aus ihr ergeben sich mittels funktionaler Methoden die Bewegungsgleichungen für die Korrelationsfunktionen. Für deren Behandlung wird ein D -dimensionales Regularisierungs- und Renormierungsschema verwendet. Den Arbeiten [Sti 96, Sti 02] folgend, wird im 2. Kapitel ein analytisches nichtperturbatives Approximationsschema für die Vertexfunktionen vorgestellt, welches im Folgenden als systematisch erweiterte Störungstheorie bezeichnet wird. Das Schema orientiert sich an der strukturellen Darstellung der Vertexfunktionen in einer Operatorproduktentwicklung. Dort kommt neben der Entwicklung im Quadrat des Kopplungsparameters, wie es aus der Störungstheorie bekannt ist, eine zweite Entwicklungsrichtung in Form der renormierungsgruppeninvarianten Massenskala Λ zum Vorschein, die aufgrund ihrer nichtanalytischen Kopplungsabhängigkeit als formal unabhängiger Parameter aufgefasst werden kann. Mathematisch ordnen sich derartige Doppelreihen in die Theorie der resurgenten Funktionen ein, die die Berücksichtigung exponentiell unterdrückter Terme in semikonvergenten Reihen ermöglicht. Insgesamt erhält man so eine quasiperturbative Approximationsrichtung, um deren nullte Ordnung iterativ entwickelt wird, und eine nichtperturbative Approximationsrichtung, deren Parameter durch die dynamischen Gleichungen der Theorie selbstkonsistent bestimmt werden. Als nichtperturbative Approximanten der Vertexfunktionen werden gebrochenrationale Funktionen mit beliebig aber festem Approximationsgrad r gewählt, die die asymptotische Freiheit des hier untersuchten $SU(2)$ -Modells berücksichtigen. Die Theorie bleibt damit perturbativ renormierbar. Gegenüber früheren Arbeiten [Dri 97, Kuh 97, Grü 02] ist neu, dass die hier gewählten rationalen Approximanten im perturbativen Limes ($\Lambda \rightarrow 0$) ihre störungstheoretischen Pendanten nur bis auf eine multiplikative Konstante rekonstruieren müssen und somit die quasiperturbative nicht direkt in die perturbative Reihe übergeht, sondern in eine unendliche Umordnung davon. Die Stärke des systematischen Approximationsverfahrens besteht neben der Möglichkeit der Anwendung von Standardtechniken aus der Störungstheorie darin, dass das Selbstkonsistenzproblem ohne Entkopplungsnäherungen auf die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen der Theorie beschränkt ist. Nur sie sind in der Lage, die für den $1/g^2$ -Mechanismus notwendigen divergenten Ausdrücke zu liefern.

In den Kapiteln 3 und 4, die den Hauptteil dieser Arbeit ausmachen, werden die Bewegungsgleichungen für die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen der Theorie im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie analytisch ausgewertet. Für die Diskussion der 2-Punkt-Funktionen werden ihre Dyson-Schwinger-Gleichungen herangezogen. Die Dyson-Schwinger-Gleichungen der 3-Punkt-Funktionen werden zuvor durch eine Bethe-Salpeter-Resummation auf eine Crossing-symmetrische Gestalt gebracht. Zur Behandlung der bosonischen 4-Punkt-Funktionen wird ein möglicher Zugang in Form der Bethe-Salpeter-Gleichungen aufgezeigt. Dies ergibt insgesamt einen Satz von Selbstkonsistenzbedingungen für die Para-

meter der nichtperturbativen Approximanten, die für die allgemeine Approximationsstufe r formuliert werden. Für den 3-Boson-Vertex geschieht dies erstmalig. Da die Anzahl der zur Verfügung stehenden Selbstkonsistenzgleichungen im Vergleich zu den nichtperturbativen Parametern der erweiterten Ansätze für höhere Approximationsgrade auseinanderläuft, werden zusätzliche Bedingungen benötigt. Diese gewinnt man aus den Bewegungsgleichungskondensaten, die als Gegenstand des 5. Kapitels behandelt werden.

Im abschließenden 6. Kapitel wird das Selbstkonsistenzsystem der 2- und 3-Punkt-Funktionen für den einfachsten Approximationsgrad $r/r + 1 = 0/1$ analysiert. Nach der Erörterung prinzipieller Probleme bei der numerischen Behandlung von nichtlinearen Gleichungssystemen, werden Lösungen vorgestellt. Hierbei wird auf die Einordnung der Kondensatbedingungen in das Selbstkonsistenzproblem eingegangen. Der Fall höherer Approximationsstufen, der bei Generationenbildung im fermionischen Sektor von besonderem Interesse ist, wird abschließend allgemein diskutiert.

Kapitel 1

Feldtheoretische Grundlagen

1.1 Die Wirkung der Theorie

Die Grundlage der in dieser Arbeit betrachteten Quantenfeldtheorie (QFT) bildet die *klassische, euklidische Wirkung* der nicht-abelschen Eichfeldtheorie mit der Eichgruppe $SU(N)$

$$S_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_F(x) + \mathcal{L}_V(x) + \mathcal{L}_{GF}(x) + \mathcal{L}_G(x) \right\}. \quad (1.1)$$

Die Parametrisierung der minimal an die Bosonen gekoppelten spinorartigen Materiefelder, die hier zunächst masselos auftreten, erfolgt durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_F(x) := \sum_f \left\{ \bar{\psi}_f^i(x) (i\delta^{ij}\gamma_\mu\partial_\mu + g_0(T_a)^{ij}\gamma_\mu A_\mu^a(x))\psi_f^j(x) \right\}. \quad (1.2)$$

Der Summationsindex f läuft über die verschiedenen Fermionen oder Fermionengenerationen der Theorie. Die euklidischen γ -Matrizen genügen den Antikommutator-Beziehungen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}. \quad (1.3)$$

Die ebenfalls masselosen Bosonfelder, die die Träger der Wechselwirkung sind und in der Literatur oft auch als Yang-Mills-Felder [YM 54] bezeichnet werden, können durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_V(x) := \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \quad (1.4)$$

beschrieben werden. Dabei ist der verallgemeinerte Maxwell'sche Feldstärketensor durch

$$F_{\mu\nu}^a(x) := \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (1.5)$$

gegeben. Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der Eichgruppe und g_0 ist eine dimensionslose Kopplungskonstante.

Gemäß dem Eichprinzip sind $\mathcal{L}_V(x)$ und $\mathcal{L}_F(x)$ invariant unter lokalen Eichtransformationen der Fermionfelder

$$\psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x) \quad \text{mit} \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{und} \quad U(x) = e^{-iT^a\theta^a(x)} \quad (1.6)$$

und der simultanen Transformation der Eichfelder

$$T^a A_\mu^a(x) = U(x) T^a A_\mu^a(x) U^{-1}(x) - \frac{i}{g_0} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \quad \text{für} \quad a = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (1.7)$$

mit frei wählbaren Phasenfunktionen $\theta^a(x)$, worin sich die Eichfreiheit der Theorie ausdrückt. Die T^a -Matrizen sind hermitesch und erfüllen die Normierungsbedingung $\text{tr } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. Sie sind die Generatoren der Eichgruppe und bilden eine Lie-Algebra. Für die Eichgruppe $SU(2)$ sind diese bis auf einen Faktor $1/2$ nichts anderes als die Paulischen-Spin-Matrizen.

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen wird jedem Punkt der euklidischen Raumzeit $x \in \mathbb{R}^4$ eine Faser zugeordnet, auf der die Elemente der Eichgruppe $U(x) \in SU(N)$ definiert sind. Ein Paralleltransporter, dessen infinitesimale Form als kovariante Ableitung in (1.2) offensichtlich wird, ermöglicht es, die auf verschiedenen Fasern definierten Elemente miteinander in Beziehung zu setzen.

Eine konsistente Quantisierung der Felder, wie beispielsweise im Pfadintegralformalismus, erfordert einen Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{GF}(x) := \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a(x))^2 \quad (1.8)$$

mit dem Eichfixierungsparameter ξ . Die bei dem Quantisierungsverfahren auftretende Faddeev-Popov-Determinante fermionisiert in der Form von unphysikalischen Feldern, den sogenannten Faddeev-Popov-Geistern

$$\mathcal{L}_G(x) := \bar{c}^a(x) \left\{ [-\delta^{ab} \partial_\mu + \tilde{g}_0 f^{abc} A_\mu^c(x)] \partial_\mu \right\} c^b(x), \quad (1.9)$$

die im Gegensatz zu den fundamentalen Fermionen in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe leben.

Da in dieser Arbeit eine Modelltheorie ausgearbeitet wird, mit der Eigenschaften der elektroschwachen Wechselwirkung als nichtperturbative Effekte einer quantisierten Eichtheorie verstanden werden sollen, lässt sich mit der oben konstruierten Lagrange-Dichte noch nicht konkret arbeiten. Die Feldfunktionen sind an das Teilchenspektrum anzupassen.

Die theoretische Beschreibung des Spektrums kann, wenn auch mit einigen Modifikationen, im Rahmen einer $SU(2)$ -Eichtheorie erfolgen. Die f -Summation in (1.2) ist als Summation über Fermion-Dubletts zu verstehen. Dabei ist es, wie später deutlich wird, vollkommen ausreichend *auf dem Niveau der Felder* lediglich eine Fermion-Generation zu betrachten. Die weiteren Generationen ergeben sich im Rahmen der erweiterten Störungstheorie dynamisch. Die Lepton-Isodubletts setzen sich damit aus einem ungeladenen, leptonneutrinoartigen Fermion und einem geladenen leptonartigen Fermion

$$l(x) = \begin{pmatrix} \nu_l(x) \\ l(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{l}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_l(x) & \bar{l}(x) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

zusammen, deren elektrische Ladung sich (als Vielfaches der Elementarladung e) aus dem schwachen Isospin $(T_3)_f$ und der Hyperladung Y_f über die Ladungsformel

$$\frac{Q}{e} = (T_3)_f + Y_f \quad \text{mit} \quad Y_f = -\frac{1}{2} \quad (1.11)$$

bestimmen lässt. Die Quark-Dubletts bestehen aus einem up-artigen und einem down-artigen Quark

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{q}(x) = \begin{pmatrix} \bar{u}(x) & \bar{d}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

für deren elektrische Ladung

$$\frac{Q}{e} = (T_3)_f + Y_f \quad \text{mit} \quad Y_f = \frac{1}{6} \quad (1.13)$$

gilt. Die Quarks tragen eine Farbquantenzahl, die ihren Ursprung in der starken Wechselwirkung hat. Weil Farben für die Dynamik dieser Theorie keine Rolle spielen, führen sie lediglich zu einem Faktor drei in einigen Amplituden.

Die Eigenräume der elektrischen Ladung eines Teilchens korrespondieren zu den als Superauswahlsektoren bezeichneten äquivalenten Klassen der irreduziblen Darstellungen einer kompakten Gruppe [Haa 92]. Für den vorliegenden Fall der *globalen* Eichgruppe $U(1)$ verbietet die Ladungsuperauswahlregel eine kohärente Überlagerung von Zuständen verschiedener Ladung. Die mathematische Beschreibung der *geladenen Bosonen* kann damit durch die Linearkombinationen aus den Eichfeldern gemäß

$$W_\mu^\pm(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} [A_\mu^1(x) \mp i A_\mu^2(x)] \quad (1.14)$$

erfolgen. Die Modellierung der ungeladenen Bosonen erfolgt simultan mit dem verbleibenden Eichfeld

$$W_\mu^0(x) := A_\mu^3(x), \quad (1.15)$$

wobei die Unterscheidung zwischen Photon und Z^0 -Boson in der erweiterten Theorie wieder dynamisch zustandekommt und durch eine Zerlegung des zugehörigen W^0 -Propagators nach Polen erfolgt. Das wird in Kapitel 2 klar. Wesentlich ist, dass wie in [Mer 96] für das Photon *kein* eigenes $U(1)$ -Eichfeld eingeführt wird.

Die Generatoren der Eichfelder erhält man über die Relationen

$$\begin{aligned} T_+ &:= \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 + iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_- &:= \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 - iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{und} & & T_0 &:= T_3 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

aus den Pauli-Matrizen.

Damit ist die Wirkung der in dieser Arbeit untersuchten Theorie komplett. Die Feldfunktionen in (1.1) lassen sich nach obigen Vorschriften transformieren. Man erhält für die Lagrange-Dichte des fermionischen Anteils

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= i \sum_f \bar{\psi}_f(x) \not{\partial} \psi_f(x) \\ &+ g_0 \bar{q}(x) T_+ \gamma_\mu q(x) W_\mu^+(x) + g_0 \bar{l}(x) T_+ \gamma_\mu l(x) W_\mu^+(x) \\ &+ g_0 \bar{q}(x) T_- \gamma_\mu q(x) W_\mu^-(x) + g_0 \bar{l}(x) T_- \gamma_\mu l(x) W_\mu^-(x) \\ &+ g_0 \bar{q}(x) T_0 \gamma_\mu q(x) W_\mu^0(x) + g_0 \bar{l}(x) T_0 \gamma_\mu l(x) W_\mu^0(x). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Für die Lagrange-Dichte der Vektorbosonen findet sich nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= W_\mu^+(x) [-\delta_{\mu\nu} \square + \partial_\mu \partial_\nu] W_\nu^-(x) + \frac{1}{2} W_\mu^0(x) [-\delta_{\mu\nu} \square + \partial_\mu \partial_\nu] W_\nu^0(x) \\ &- i g_0 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \left[(\partial_\mu W_\nu^+(x)) W_\rho^-(x) W_\sigma^0(x) + (\partial_\mu W_\nu^-(x)) W_\rho^0(x) W_\sigma^+(x) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\mu W_\nu^0(x)) W_\rho^+(x) W_\sigma^-(x) \right] \\ &- \frac{1}{2} g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_\mu^+(x) W_\nu^+(x) W_\rho^-(x) W_\sigma^-(x) \\ &+ g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_\mu^+(x) W_\nu^-(x) W_\rho^0(x) W_\sigma^0(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Die komplizierte Selbstwechselwirkung der Bosonen wird an dieser Stelle offensichtlich. Desweiteren berechnet man für die Ausdrücke der Eichfixierung

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{\xi} (\partial_\mu W_\mu^+(x)) (\partial_\mu W_\mu^-(x)) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu W_\mu^0(x))^2 \quad (1.19)$$

und die Faddeev-Popov-Geisterfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\bar{c}^+(x) \square c^-(x) - \bar{c}^-(x) \square c^+(x) - \bar{c}^0(x) \square c^0(x) \\ & + i g_0 W_\mu^+(x) [(\partial_\mu \bar{c}^-(x)) c^0(x) - (\partial_\mu \bar{c}^0(x)) c^-(x)] \\ & + i g_0 W_\mu^-(x) [(\partial_\mu \bar{c}^0(x)) c^+(x) - (\partial_\mu \bar{c}^+(x)) c^0(x)] \\ & + i g_0 W_\mu^0(x) [(\partial_\mu \bar{c}^+(x)) c^-(x) - (\partial_\mu \bar{c}^-(x)) c^+(x)]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dabei bezeichnet $\square = \partial_\mu \partial_\mu$ die euklidische Version des d'Alembertschen Differential-Operators. Die Strukturkonstanten der Eichgruppe entsprechen in einer $SU(2)$ -Eichtheorie dem total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe ε_{abc} , wobei deren Werte in (1.17) bis (1.20) bereits eingesetzt worden sind. Diese Ausdrücke zeigen die der Erhaltung der elektrischen Ladung entsprechende globale $U(1)$ -Symmetrie.

1.2 Störungstheorie und Renormierung

Die Quantisierung der Wirkung (1.1) kann auf unterschiedliche Art und Weise geschehen. Im kanonischen Operatorformalismus werden die Feldfunktionen zusammen mit ihren kanonisch konjugierten Feldimpulsen einer Born-Jordanschen Kommutatorrelation unterworfen. Das Nichtverschwinden des Kommutators kann dabei nur mit operatorwertigen Feldern bzw. Feldimpulsen erreicht werden. Die Greenschen Funktionen der quantisierten Theorie erhält man dann mit Hilfe der so konstruierten Feldoperatoren, die auf das Vakuum wirken und Zustände erzeugen oder vernichten.

Eine äquivalente Vorgehensweise ist die Quantisierung im Pfadintegralformalismus. Über die Definition erzeugender Funktionale, wie sie in Anhang A.2 angegeben sind, lassen sich die zusammenhängenden, amputierten, 1-Teilchen-irreduziblen (1-PI) Greenschen Funktionen für den Impulsraum gewinnen. Sie enthalten die gesamten Informationen der betreffenden QFT, also insbesondere die Störungsreihe, d. h. Strahlungskorrekturen bis zu beliebiger Ordnung, und werden darum auch *volle Vertexfunktionen* genannt. Symbolisch werden sie mit Γ_N bezeichnet, wobei durch N die Anzahl der äußeren Beine gegeben ist. Eine kurze Darstellung der funktionalen Zusammenhänge ist in Anhang A.2 zu finden. Ausführlicher ist jedoch [Riv 87]. Die störungstheoretischen Vertexfunktionen nullter Ordnung $\Gamma_N^{(0)\text{pert}}$, die auch als *nackte Vertexfunktionen* bezeichnet werden, können direkt an der Wirkung abgelesen werden. Als Feynman-Regeln sind sie, wie in Anhang A.1 geschehen, diagrammatisch formulierbar.

Die Dynamik der durch eine Lagrange-Dichte definierten Theorie kann durch die *Dyson-Schwinger-Gleichungen* (DSG) erfasst werden [Dys 49, Sch 51]. Sie stellen ein System von unendlich hierarchisch gekoppelten Integro-Differentialgleichungen dar, die sich formal durch

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)\text{pert}} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N [\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+2}] \quad (1.21)$$

ausdrücken lassen. Diese exakten Beziehungen zwischen den Vertexfunktionen beinhalten stets Schleifenintegrale über alle Impulsgrößenordnungen, was durch die Größe Φ_N in (1.21)

angedeutet werden soll. Dabei bildet ein Schleifenintegral immer einen Faktor g_0^2 aus. Mathematisch beruhen die DSG auf dem Verschwinden eines Pfadintegrals über eine funktionale Ableitung nach einem Feld. Das ergibt sich aus der Invarianz des erzeugenden Funktionals und des Pfadintegralmaßes unter einer infinitesimalen Translation der Felder. Für Details siehe wiederum [Riv 87]. Die in dieser Arbeit benutzten DSG sind in Anhang A.3 diagrammatisch angegeben.

Die hierarchische Kopplung der DSG kann genutzt werden, um die *Störungsreihe*, die man als Potenzreihe im Quadrat des Kopplungsparameters erhält, für eine Vertexfunktion zu generieren. In der störungstheoretischen Entwicklung werden Lösungen Γ_N^{pert} der DSG gesucht, wobei um die nullte perturbative Ordnung $\Gamma_N^{(0)\text{pert}}$ iteriert wird,

$$\Gamma_N^{\text{pert}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[p]\text{pert}} \quad \text{mit} \quad \Gamma_N^{[p]\text{pert}} = \Gamma_N^{(0)\text{pert}} + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^{2p'} \Gamma_N^{(p')\text{pert}}. \quad (1.22)$$

Man erhält eine Darstellung der Koeffizienten $\Gamma_N^{(p')\text{pert}}$ durch Schleifenintegrale mit perturbativen Feynman-Regeln. Da Störungsreihen im Allgemeinen nur semikonvergent sind, werden die Vertexfunktionen in der Praxis nur bis zu einer festen Entwicklungsordnung p als Taylor-Reihe in g_0^2 approximiert. Mit diesen in g_0^2 polynomialen Approximanten lassen sich S -Matrixelemente und daraus Wirkungsquerschnitte für Streuprozesse berechnen.

Das Konzept der Störungstheorie funktioniert für kleine Kopplungsparameter sehr gut, da Beiträge höherer Ordnung kaum ins Gewicht fallen. Bei großen Kopplungen, wie es in der QCD bei hadronischen Bindungszuständen der Fall ist, funktioniert diese Vorgehensweise nicht oder liefert schlechte Ergebnisse. Man befindet sich dann im sogenannten nichtperturbativen Regime der Theorie.

Bei der Berechnung von Korrekturtermen zu den Vertexfunktionen sind, wie an (1.21) deutlich wird, Schleifenintegrale zu berechnen, die in $D = 4$ Raumzeitdimensionen divergente Ausdrücke entwickeln. Die Divergenzen treten im Fall großer Impulse auf und werden darum *Ultraviolett-Divergenzen* oder auch kurz UV-Divergenzen genannt. Um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, sind die Divergenzen in einem konsistenten Schema zu subtrahieren. Dies geschieht in dieser Arbeit durch eine *dimensionelle Regularisierung*, die im Gegensatz zu „Cutoff-Regularisierungsschemata“ die Eichinvarianz und die Poincaré-Invarianz der Theorie respektiert, und eine daran anschließende Renormierung [TV 72].

In der dimensionellen Regularisierung werden die vier euklidischen Raumdimensionen auf $D = 4 - 2\epsilon$ herabgesetzt. Die Divergenz eines Schleifenintegrals zeigt sich nach seiner Berechnung in einem nichtverschwindenden Hauptteil einer Laurent-Entwicklung nach dem Regularisierungsparameter ϵ . Man ist so in der Lage, die divergenten Ausdrücke zu separieren und im Rahmen eines Renormierungsprozesses abzuziehen. Schließlich wird der Regulator ϵ entfernt.

Ein Manko der Regularisierung besteht darin, dass in der Fortsetzung zu gebrochenen Dimensionen die Dimensionslosigkeit der Lagrange-Dichte und damit auch die Dimensionslosigkeit der Kopplungskonstanten g_0 verloren geht. Um die Kopplung dimensionslos zu halten, ist es zweckmäßig, eine willkürliche aber feste Massenskala ν_0 über

$$g_0 \longrightarrow g_0 \nu_0^\epsilon \quad (1.23)$$

in die Theorie mit einzuführen. Die Kopplungskonstante g_0 bleibt damit dimensionslos. Das Abziehen der Pole in ϵ aus den Schleifenresultaten kann ohne weiteres nicht konsistent

erfolgen, denn die Divergenzen sind nur bis auf endliche Summanden eindeutig bestimmt. Mit der Wahl eines Renormierungsschemas lässt sich das Entfernen der Singularitäten, die *Renormierung*, allerdings systematisieren. Die Parameter der Theorie werden hier im Rahmen eines *multiplikativen Renormierungsschemas* durch renormierte Größen, die nun endlich sind, ersetzt. Beispielsweise wird die nackte Kopplung zu Gunsten einer renormierten Kopplung

$$(g_0\nu_0^\epsilon)^2 = Z_\alpha(\nu, \epsilon) (g(\nu)\nu^\epsilon)^2 \quad \text{mit} \quad \alpha := g(\nu)^2/(4\pi) \quad (1.24)$$

eliminiert, wobei Z_α als Renormierungskonstante der Kopplung bezeichnet wird. Die Renormierungsmassenskala ν ist im Gegensatz zu ν_0 eine frei variierbare laufende Massenskala, womit die Kopplung g automatisch von ν abhängt und somit zur skalenabhängigen Größe wird. Als Renormierungsschema sind die MS- oder $\overline{\text{MS}}$ -Schemata (minimal subtraction bzw. modified minimal subtraction) üblich, in denen von den Schleifenresultaten die reinen Polterme bzw. zusätzlich ein endlicher Summand abgezogen werden [Kug 97, Mut 87, Ryd 96]. Feldtheoretisch berechnete Größen, wie z. B. Strahlungskorrekturen zu Greenschen Funktionen, sind vom gewählten Renormierungsschema abhängig. Sie sind aber unter Berücksichtigung geeigneter Renormierungsbedingungen, siehe [Col 85], ineinander überführbar, so dass insgesamt die physikalischen Messgrößen bei *Berechnung in allen Ordnungen* vom Renormierungsschema unabhängig sind.

Um die Kopplungsrenormierung mit den Renormierungskonstanten der Felder oder der Eichfixierung in Beziehung zu setzen, verwendet man die *Slavnov-Taylor-Identitäten* (STI), auch kurz Ward-Identitäten¹ genannt [Sla 72, Tay 71, tHo 71]. Wie die DSG stellen die STI Beziehungen zwischen den Vertexfunktionen

$$\Gamma_N = \Psi_N \left[\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{N-2}, \Gamma_{N-1}, \Gamma_N \right] \quad (1.25)$$

her, jedoch auf rein algebraischer Ebene. Das Funktional Ψ_N bildet keine Schleifenintegrale aus. Die STI sind in jeder Ordnung der Störungstheorie exakt. Dagegen muss (1.25) im nichtperturbativen Regime nicht zwingend erfüllt sein [Wei 96]. Die Eichsymmetrie kann *dynamisch gebrochen* sein.

Ableiten lassen sich die STI aus der *Becchi-Rouet-Stora-Transformation* (BRST) der Wirkung [BRS 74]. Sie ist eine globale Transformation und lässt die Lagrange-Dichte von nicht-abelschen Eichtheorien invariant. Die BRST resultiert aus topologischen Betrachtungen der Wirkung und schafft neben den STI die Basis für eine konsistente Formulierung des bereits angesprochenen kanonischen Operatorformalismus [Wei 96].

1.3 Die Renormierungsgruppe

Die Renormierungsgruppe (RG) hat sich in der Physik in vielerlei Hinsicht als ein mächtiges Konzept erwiesen. Ein großes Anwendungsgebiet ist die Statistische Physik. Sie ist ein nützliches Hilfsmittel beim Studium kritischer oder fast-kritischer Systeme. In der Behandlung partieller Differentialgleichungen ermöglicht die RG aufgrund ihrer Skalierungseigenschaft die Konstruktion asymptotischer Lösungen.

In der Feldtheorie hat die RG ebenfalls einen festen Platz. Sie ist auch jenseits der Störungstheorie gültig und macht deshalb strukturelle Aussagen. Das asymptotische Verhalten von

¹Für den Fall der QED garantieren die Ward-Identitäten die Masselosigkeit des Photons in jeder Ordnung der Störungstheorie.

Vertexfunktionen lässt sich ermitteln. Darüber hinaus liefert die RG einen intrinsischen Massenmaßstab der Theorie, die sogenannte spontane Massenskala.

1.3.1 Die RG-Funktion $\beta(g)$

In der multiplikativen Renormierung besteht zwischen den unrenormierten Vertexfunktionen $\Gamma_N^{(0)}$ und den renormierten Γ_N vor Entfernung des Regulators der Zusammenhang

$$\Gamma_N(\{k\}, g(\nu), \nu) = Z_\Gamma(\nu, \epsilon) \Gamma_N^{(0)}(\{k\}, g_0, \epsilon). \quad (1.26)$$

Hier symbolisiert $\{k\}$ alle Impulsabhängigkeiten einer Vertexfunktion und Z_Γ ist eine Renormierungskonstante, die im Allgemeinen von den Renormierungskonstanten der Felder abhängt. Die weiteren Abhängigkeiten sind so beschaffen, dass die Masselosigkeit der Wirkung (1.1) und die Wahl der Landau-Eichung ($\xi = 0$), auf die die vorliegende Arbeit festgelegt ist, berücksichtigt werden.

Da die unrenormierten Größen von der Renormierung nichts wissen, hat eine Variation der Renormierungsmassenskala bei ihnen keinen Effekt. Es gilt

$$\left. \frac{d}{d\nu} \Gamma_N^{(0)}(\{k\}, g_0, \epsilon) \right|_{g_0} = 0. \quad (1.27)$$

Einsetzen von (1.26) in diese Beziehung liefert zunächst

$$\left. \frac{d}{d\nu} \left(Z_\Gamma(\nu, \epsilon)^{-1} \Gamma_N(\{k\}, g(\nu), \nu) \right) \right|_{g_0} = 0 \quad (1.28)$$

und führt nach kurzer Rechnung auf die RG-Gleichung

$$\left(\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta(g(\nu), \epsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{\nu}{Z_\Gamma(\nu, \epsilon)} \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial \nu} \right) \Gamma_N(\{k\}, g(\nu), \nu) = 0. \quad (1.29)$$

Ist Z_Γ (im MS-Schema) bekannt, so ergibt (1.29) nach Berechnung der partiellen Ableitung nach ν die t' Hooft-Weinberg-RG-Gleichung [tHo 73, Wei 73]. Z_Γ enthält unter anderem die anomale Dimension, die die Abweichung der Vertexfunktionen von ihrer naiven Impulsasymptotik angibt.

Die in der RG-Gleichung auftretende RG-Funktion ist die sogenannte β -Funktion

$$\beta(g(\nu), \epsilon) := \nu \frac{d}{d\nu} g(\nu), \quad (1.30)$$

die Ausgangspunkt zweier folgender Abschnitte sein wird.

1.3.2 Asymptotische Freiheit und Integraldarstellung von Z_α

Die Renormierungskonstante der Kopplung ist störungstheoretisch berechenbar. In 1-Schleifen-Ordnung findet man im MS-Schema für eine $SU(N)$ -Eichtheorie

$$Z_\alpha(\nu, \epsilon) = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \beta_0 \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.31)$$

mit der RG-Invarianten

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f, \quad (1.32)$$

wobei N_f die Anzahl der nach der Fundamentaldarstellung der Symmetriegruppe transformierten Fermionfelder ist. Die Invariante β_0 ist der führende Koeffizient der β -Funktion, für die mit (1.31) eine störungstheoretische Entwicklung in der Form

$$\beta(g(\nu), \epsilon) = -g(\nu)\epsilon - \frac{g(\nu)\nu}{2Z_\alpha(\nu, \epsilon)} \frac{d}{d\nu} Z_\alpha(\nu, \epsilon) \quad (1.33)$$

$$= -g(\nu) \left(\epsilon + \beta_0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right) \quad (1.34)$$

angebbbar ist.

Die β -Funktion bestimmt über ihr Vorzeichen das asymptotische Verhalten einer Theorie. Für $\beta_0 > 0$, d. h. $N_f < 11N/2$, ist das Vorzeichen der führenden Ordnung in (1.34) mit $\epsilon = 0$ negativ. Man kann dann mit Hilfe der RG-Gleichung (1.29) zeigen, dass die laufende Kopplung einen UV-Fixpunkt ($\nu \rightarrow \infty$) mit verschwindendem Kopplungswert besitzt [Mut 87]. Bei großen Impulsen nimmt die Kopplungsstärke ab, so dass Störungsreihen immer bessere Resultate liefern. Man nennt dieses Verhalten *asymptotische Freiheit*, was aus der QCD wohl bekannt ist. Die Feststellung, dass eine Theorie asymptotisch frei ist oder nicht, ist unabhängig vom Renormierungsschema, da β_0 schemaunabhängig ist.

Die asymptotische Freiheit einer $SU(N)$ -Eichtheorie wird bei der Konstruktion der nichtperturbativ erweiterten Vertexfunktionen eine große Rolle spielen. Es ist wichtig, dass in der vorliegenden Arbeit kein zusätzliches $U(1)$ -Eichfeld verwendet wird, denn für dessen Kopplungen würde die asymptotische Freiheit nicht gelten.

Nach [tHo 73] lässt sich die angegebene Entwicklung der Renormierungskonstanten für die Kopplung (1.31) in Form einer Integraldarstellung aufsummieren. Mit der Definition der quadratischen Kopplung in (1.24) kann (1.34) zunächst als

$$\frac{\beta(g(\nu), \epsilon)}{g(\nu)} = - \left(\epsilon + \frac{\alpha}{4\pi\chi(\alpha)} \right) \quad \text{mit} \quad \chi(\alpha)^{-1} := \left(\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \quad (1.35)$$

geschrieben werden. Dies liefert mit (1.33) nach Separation der Variablen und mit der Definition der β -Funktion in (1.30) das Zwischenresultat

$$\frac{dZ_\alpha(\alpha, \epsilon)}{Z_\alpha} = - \frac{d\alpha}{4\pi\epsilon\chi(\alpha) + \alpha}, \quad (1.36)$$

wobei in der Renormierungskonstanten die Abhängigkeit von der Renormierungsmassenskala ν durch die explizite Kopplungsabhängigkeit ersetzt wurde. Da eine verschwindende Kopplung keine Renormierung erfordert, d. h. $Z_\alpha(0, \epsilon) = 1$ gilt, ergibt die Integration nach α die gesuchte Integraldarstellung

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \exp \left(- \int_0^\alpha \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon\chi(\alpha') + \alpha'} \right). \quad (1.37)$$

Dieser geschlossene Ausdruck ist für die Erläuterung des $1/g^2$ -Mechanismus in Kapitel 2 nützlich. Den in $\epsilon = 0$ regulären Teil des Integranden kann man gemäß

$$\frac{1}{4\pi\epsilon\chi(\alpha') + \alpha'} = \frac{1}{4\pi\epsilon\chi(0) + \alpha'} + \epsilon\rho_\alpha(\alpha', \epsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_\alpha(0, \epsilon) = 0 \quad (1.38)$$

durch einen Trick abspalten, so dass sich die Konstante (1.37) exakt als

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \frac{4\pi\epsilon}{4\pi\epsilon + \alpha\beta_0} \exp \left(- \epsilon \int_0^\alpha d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \epsilon) \right) \quad (1.39)$$

schreiben lässt und damit für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet. *Es wird deutlich, dass die bei der endlichen Störungsreihe auftretenden Divergenzen nicht die Divergenzen der exakten Theorie sein können* [Col 85]. Die Differenz zwischen dem in erster Ordnung divergenten perturbativen Ausdruck (1.31) und der für $\epsilon = 0$ verschwindenden exakten Integraldarstellung ist von der Ordnung α^2 , wie man an

$$\frac{4\pi\epsilon}{4\pi\epsilon + \alpha\beta_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \beta_0 + \mathcal{O}(\alpha^2, \epsilon) \quad (1.40)$$

sieht. Die perturbative Reihe wird durch die nächsthöhere Ordnung in α korrigiert, bis bei unendlicher Aufsummation der Störungsreihe die Differenz schließlich verschwindet.

1.3.3 Renormierung der Felder

Neben der Kopplungsrenormierungskonstanten werden in dieser Arbeit die Renormierungskonstanten der Felder bei den praktischen Rechnungen in Kapitel 3 und 4 benötigt. Für die hier betrachtete $SU(N)$ -Eichtheorie stehen die renormierten Felder mit den unrenormierten Größen in folgendem Zusammenhang:

$$\psi_f^i(x) = \bar{Z}_2^{1/2}(\nu, \epsilon) (\psi_f^i(x))_R, \quad (1.41)$$

$$\bar{\psi}_f^i(x) = \bar{Z}_2^{1/2}(\nu, \epsilon) (\bar{\psi}_f^i(x))_R, \quad (1.42)$$

$$A_\mu^a(x) = Z_3^{1/2}(\nu, \epsilon) (A_\mu^a(x))_R, \quad (1.43)$$

$$c^a(x) = \tilde{Z}_3^{1/2}(\nu, \epsilon) (c^a(x))_R, \quad (1.44)$$

$$\bar{c}^a(x) = \tilde{Z}_3^{1/2}(\nu, \epsilon) (\bar{c}^a(x))_R. \quad (1.45)$$

Dabei sind die Renormierungskonstanten störungstheoretisch berechenbar. Im MS-Schema und für $\xi = 0$ gilt

$$\bar{Z}_2(\nu, \epsilon) = 1, \quad (1.46)$$

$$Z_3(\nu, \epsilon) = 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{13}{6}N - \frac{2}{3}N_f\right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4), \quad (1.47)$$

$$\tilde{Z}_3(\nu, \epsilon) = 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{3}{4}N\right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4). \quad (1.48)$$

Durch die Wahl der Landau-Eichung entfällt die Renormierung des Eichfixierungsparameters ξ . Zu renormierende Massen treten in dieser Arbeit nicht auf. Damit lassen sich die Renormierungskonstanten der Vertexfunktionen durch die übrigen Renormierungskonstanten gemäß

$$Z_\Gamma(\nu, \epsilon) = \bar{Z}_2^{n_f/2}(\nu, \epsilon) Z_3^{n_{YM}/2}(\nu, \epsilon) \tilde{Z}_3^{\tilde{n}/2}(\nu, \epsilon) \quad (1.49)$$

ausdrücken. Dabei bezeichnen n_f , n_{YM} und \tilde{n} in (1.49) die Anzahl die äußeren Fermion-, Boson- und Geist-Linien von $\Gamma_N(\{k\}, g(\nu), \nu)$.

1.3.4 Die spontane Massenskala

Obwohl in der Wirkung keine Massen vorhanden sind, kann es zur spontanen Ausbildung von Termen mit der Dimension einer Masse kommen. Dies zeigt sich ja bereits an der Massenskala

ν . Sie kann allerdings nicht zur Beschreibung von Teilchenmassen dienen, da sie eine laufende Skala ist und daher als Observable nicht in Frage kommt. Die gesuchte Skala, die *spontane* Λ -Skala, muss also neben ν auch von der renormierten Kopplung $g(\nu)$ abhängen, so dass Variationen der RG-Skala ohne Effekt bleiben. Der Ansatz

$$\nu \frac{d}{d\nu} \Lambda(g(\nu), \nu) \Big|_{g_0} = \left(\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \nu \frac{\partial g(\nu)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Lambda(g(\nu), \nu) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.50)$$

führt, zusammen mit der β -Funktion, auf

$$\left(\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta(g(\nu), \epsilon) \frac{\partial}{\partial g} \right) \Lambda(g(\nu), \nu) = 0. \quad (1.51)$$

Die Λ -Skala muss sich in der Form $\Lambda(g(\nu), \nu) = \nu \cdot \mathcal{G}(g(\nu))$ ausdrücken lassen, da sie die Dimension einer Masse tragen soll. In Kombination mit (1.51) liefert dies

$$\left(1 + \beta(g(\nu), \epsilon) \frac{\partial}{\partial g} \right) \mathcal{G}(g(\nu)) = 0, \quad (1.52)$$

womit sich nach Trennung der Variablen sofort die Lösung

$$\Lambda(g(\nu), \nu) = \nu \cdot \mathcal{G}(g(\nu)) = \nu \cdot \exp \left\{ - \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g', \epsilon)} \right\} \quad (1.53)$$

angeben lässt. Die untere Integrationsgrenze g_1 ist eine triviale RG-Invariante mit $g_1 = g(\nu = \Lambda)$. Das Integral selbst ist mit der störungstheoretischen Entwicklung der inversen β -Funktion, die man aus (1.33) durch einen Koeffizientenvergleich erhält, mit $\epsilon = 0$

$$\frac{1}{\beta(g(\nu), 0)} = - \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 g(\nu)^3} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 - \frac{\beta_2 \beta_0 - \beta_1^2}{\beta_0^2} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right) \quad (1.54)$$

näherungsweise lösbar. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} - \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g', 0)} &= - \int_{g_1}^{g(\nu)} \left(- \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 g'^3} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2 g'} + \frac{\beta_2 \beta_0 - \beta_1^2}{\beta_0^3} \frac{g'}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g^3) \right) dg' \\ &= - \left[\frac{(4\pi)^2}{2\beta_0 g'^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln g' + \frac{\beta_2 \beta_0 - \beta_1^2}{2\beta_0^3} \frac{g'^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g'^4) \right]_{g_1}^{g(\nu)} \end{aligned} \quad (1.55)$$

als Stammfunktion. An der unteren Grenze kann (1.55) wegen der Wahlfreiheit von g_1 so bestimmt werden, dass

$$\Psi(g_1, 0) = - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \ln \left[\frac{\beta_0}{(4\pi)^2} \right] \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial g} \Psi(g, 0) = \frac{1}{\beta(g, 0)} \quad (1.56)$$

erfüllt ist. Damit berechnet sich das Quadrat von (1.53) zu

$$\begin{aligned} \Lambda(g(\nu), \nu)^2 &= \nu^2 \exp \left\{ -2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g', 0)} \right\} \\ &= \nu^2 e^{-\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2} \left[\beta_0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{\beta_1^2 - \beta_0 \beta_2}{\beta_0^3} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g^4) \right\} \\ &= \nu^2 e^{-\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2} \left[\beta_0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\beta_1^2 - \beta_0 \beta_2}{\beta_0^3} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g^4) \right\}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

wobei β_0 , wie oben definiert ist, und β_1 und β_2 RG-Invarianten höherer Ordnung sind. An diesem Ergebnis wird die nichtperturbative Natur der Λ -Skala offensichtlich. In einer störungstheoretischen Entwicklung in g^2 um 0 verschwindet die rechte Seite von (1.57), was auf die wesentliche Singularität der Exponentialfunktion zurückzuführen ist. *Die Störungstheorie ist also prinzipiell nicht in der Lage, etwaige Λ -Abhängigkeiten zu erfassen.* Physikalische Effekte, die von der spontanen Massenskala nicht nur invers-logarithmisch, sondern polynomial oder rational abhängen, werden unterdrückt. Damit ist Λ der nichtperturbative Parameter der Theorie.

Der Wert der Λ -Skala ist aus dem Experiment zu bestimmen. Die Massen der W^\pm -Bosonen, des Z^0 -Bosons und des top-Quarks sind von der Größenordnung der elektroschwachen Skala. Sie liegt im Bereich von mehreren 10 GeV bis einigen 100 GeV und ist vom verwendeten Renormierungsschema abhängig.

Da die Massenunterschiede der Fermionen sehr groß sind, können sie nicht nur mit dieser Größe skalieren. Für die Masse des bottom-Quarks kommt zusätzlich die QCD-Massenskala als Skalierungsmaßstab in Frage. Nach [Sch 97] ist

$$\Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}} \approx 287 \text{ MeV}. \quad (1.58)$$

Die Massen der restlichen vier Quarks sind vollständig im starken Sektor zu suchen. Jedoch sind aus der Sicht der elektroschwachen Skala die beiden ersten Quark-Generationen sowie die Leptonen als masselos zu betrachten.

1.4 Bethe-Salpeter-Resummationen

Die Vertexfunktionen enthalten die gesamte Information einer Theorie. Wie schon angedeutet, stellen die DSG den Bezug zwischen den Vertexfunktionen her², weisen aber den Nachteil auf, dass das von links in die Diagramme einlaufende Bein ausgezeichnet ist, siehe Anhang A.3. Es trifft im Unterschied zu den von rechts einlaufenden Linien auf einen nackten Vertex. Diese Asymmetrie wird durch die funktionale Ableitung nach einem Feld, über die das Pfadintegral verschwindet, automatisch erzeugt. Aus diesem Grund werden die DSG in dieser Arbeit, wie sie in Anhang A.3 angegeben sind, nur mit Modifikationen verwendet.

In den Kapiteln 3 und 4 wird deutlich werden, dass die DSG der Propagator-Funktionen für die praktischen Rechnungen sehr gut geeignet sind. Sie sind mit dem noch einzuführenden Selbstkonsistenzmechanismus verträglich. Da aber die DSG mit drei oder mehr Beinen weder Bose- noch Crossing-symmetrisch sind, produzieren sie Defektterme, die gesondert zu betrachten sind. Um diesem Problem aus dem Wege zu gehen, wird hier eine ausgefeiltere Strategie verfolgt.

Die DSG der 3-Punkt-Amplituden werden einer sogenannten Bethe-Salpeter-Resummation (BSR) [BS 51, IZ 80, Nak 69] unterzogen. Die Grundlage dieser Resummation bildet eine Bethe-Salpeter-Gleichung. Sie enthält ein Objekt, den BS-Kern, der bezüglich eines Kanals

²Dies leisten die STI ebenfalls, aber ihre Herleitung ist an mehr Voraussetzungen gebunden. Die STI legen dabei nur die longitudinalen Eichfeldfreiheitsgrade weitgehend fest, während sie für die physikalisch wichtigen transversalen nur geringe Einschränkungen liefern.

1-PI und 2-PI Diagramme enthält. Der Kanal wird durch eine der drei Mandelstam-Variablen

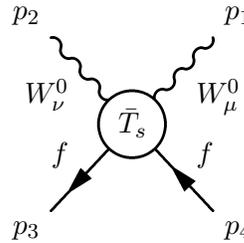
$$s := (p_1 + p_4)^2 = (-p_2 - p_3)^2 \quad (1.59)$$

$$t := (p_1 + p_2)^2 = (-p_3 - p_4)^2 \quad (1.60)$$

$$u := (p_1 + p_3)^2 = (-p_2 - p_4)^2 \quad (1.61)$$

festgelegt.

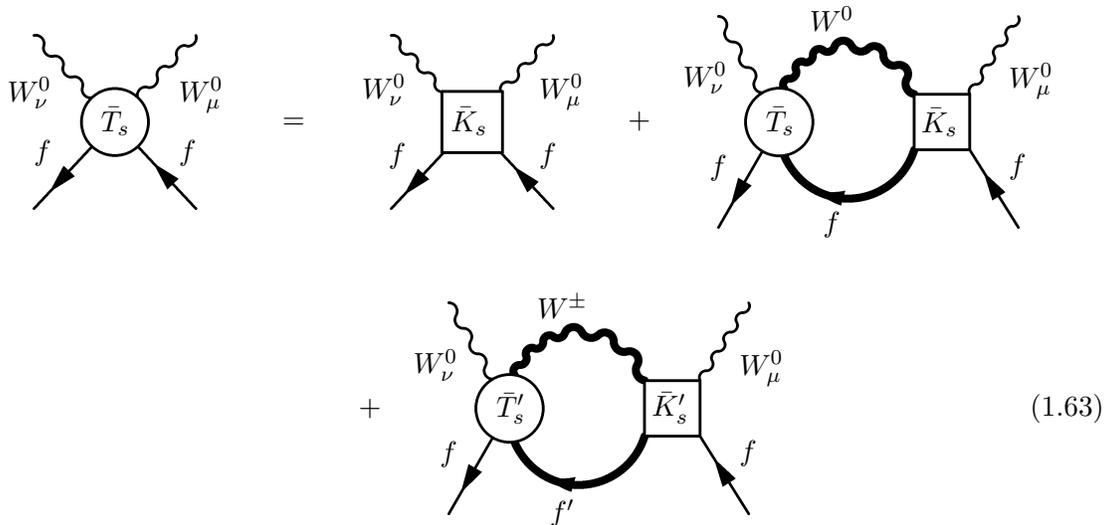
Der Mechanismus der BSR wird nun an einem Beispiel deutlich gemacht. Dazu wird eine 4-Punkt-Funktion mit zwei bosonischen und zwei fermionischen Beinen betrachtet. Der Index „s“ in der Amplitude



$$(1.62)$$

deutet an, dass sie 1-PI bezüglich der Mandelstam-Variable s ist. In den verbleibenden Kanälen sind die Beiträge des Diagramms i. A. reduzibel. Die Amplitude \bar{T}_s setzt sich neben dem vollen 4-Punkt-Vertex aus Austauschgraphen zusammen, die nicht 1-Teilchen-reduzibel (1-PR) im s -Kanal sind.

Die 2-PI BS-Kerne werden graphisch durch ein Quadrat dargestellt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die 2-PI Anteile von (1.62) herausfiltern. Auf diesem Wege gelangt man zur Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG) der Form:



$$(1.63)$$

Sie erklärt sich wie folgt: Alle in \bar{T}_s enthaltenen Diagramme zerfallen bezüglich der Reduzibilität in zwei Klassen. Die Beiträge setzen sich einerseits aus 1- und 2-PI Anteilen bezüglich des s -Kanals zusammen. Diese Ausdrücke werden durch die BS-Kerne aufgenommen. Andererseits besteht \bar{T}_s auch aus 1-PI aber 2-PR Graphen bezüglich des s -Kanals. Diese Terme werden durch die Schleifen in (1.63) erfasst, vgl. [Sti 90].

Die so formulierte BSG (1.63) kann nun benutzt werden, um die DSG des neutralen Fermion-

Vertex

$$\begin{aligned}
 & \text{Vertex} = \text{Tree-level vertex} + \text{Loop diagram } (W^0, \bar{T}_s) + \text{Loop diagram } (W^\pm, \bar{T}'_s) \quad (1.64)
 \end{aligned}$$

zu resumieren. Dazu wird für \bar{T}_s die Gleichung (1.63) eingesetzt. Für die Amplitude \bar{T}'_s lässt sich nach obigem Muster ebenfalls eine BSG herleiten. Auch sie wird in (1.64) eingesetzt. Dann werden die nackten Vertizes der so abgeleiteten Beziehung mit Hilfe ihrer umgestellten DSG durch die vollen ersetzt. Die so erhaltenen 2-Schleifenterme fallen unter erneuter Verwendung der BSG heraus. Als Resultat bleibt die BS-resummierte DSG

$$\begin{aligned}
 & \text{Resummed Vertex} = \text{Tree-level vertex} + \text{Loop diagram } (W^0, \bar{K}_s) + \text{Loop diagram } (W^\pm, \bar{K}'_s) \quad (1.65)
 \end{aligned}$$

zu notieren.

Im Vergleich zur DSG enthalten die Schleifen in der nach BS resummierten Gleichung keine perturbativen Vertizes mehr. Um sich aber davon überzeugen zu können, dass sich gegenüber der ursprünglichen DSG die Symmetrie verbessert hat, sind die BS-Kerne genauer zu analysieren.

Wie bei den Skelettgraphenentwicklungen der vollen 4-Punkt-Amplituden, siehe Anhang A.3, lassen sich auch die BS-Kerne systematisch zerlegen. Der funktionale Zugang erfolgt über die Definition eines erzeugenden Funktionals, welches bilineare Quellterme enthält. Siehe dazu [VK 72].

Da sich die Berechnung dynamischer Gleichungen in dieser Arbeit auf 1-Schleifen-Terme beschränkt, können die BS-Kerne in (1.65) durch Austauschgraphen und den vollen 4-Punkt-Vertex ersetzt werden. Für \bar{K}'_s gilt als Näherung bis auf Beiträge, die 2-Schleifen-Terme

erzeugen würden:

$$\begin{array}{c}
 W_\nu^\pm \\
 \diagup \\
 \square \bar{K}'_s \\
 \diagdown \\
 W_\mu^0 \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 W_\nu^\pm \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 W_\nu^\pm \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 W^\mp \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 W_\nu^\pm \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 W^\pm \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array}
 \end{array}
 \quad (1.66)$$

Mit dieser Entwicklung für \bar{K}'_s und einer analogen für den BS-Kern \bar{K}_s lässt sich die BS-resummierte DSG in der Form

$$\begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \bullet \\
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \diagup \\
 W^0 \\
 \diagdown \\
 \circ \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \diagup \\
 W^\pm \\
 \diagdown \\
 \circ \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \diagup \\
 W^\pm \\
 \diagdown \\
 \circ \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \diagup \\
 W^0 \\
 \diagdown \\
 \circ \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 f \\
 \leftarrow \\
 \circ \\
 \diagup \\
 W^\pm \\
 \diagdown \\
 \circ \\
 \diagup \\
 \circ \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow \\ \searrow \\ f \end{array} \\
 W_\mu^0
 \end{array}
 \quad (1.67)$$

plus Graphen höherer Schleifenzahl angeben.

Es ist zu sehen, dass in den Dreiecksgraphen von (1.67) kein Bein ausgezeichnet ist. Dennoch besitzt die Gleichung keine vollständige Crossing-Symmetrie. Diese wird durch die Diagramme, die die 4er Vertizes enthalten, gebrochen.

Dieses Problem ließe sich im Prinzip mit einer sogenannten Trivialsymmetrisierung, wie sie in Kapitel 4 bei der Diskussion des Boson-Vertex verwendet wird, beheben. Aber schon in Kapitel 2 wird deutlich, dass die die Crossing-Symmetrie brechenden Diagramme in (1.67) im Rahmen der erweiterten Störungstheorie keinen Beitrag zur nullten Ordnung leisten. Die BS-resummierte DSG ist damit auf 1-Schleifen-Niveau effektiv symmetrisch.

Bei den 4-Punkt-Vertizes wird auf die Verwendung der DSG völlig verzichtet. Es ist hier schwieriger Bose- und Crossing-Symmetrien zu restaurieren. Der Schlüssel ihrer Behandlung liegt in der direkten Verwendung der BSG. Ein Prototyp ist Gleichung (1.63). Es sei aber schon jetzt darauf hingewiesen, dass die BSG ebenfalls durch den ausgezeichneten Mandelstam-Kanal keine vollständige Symmetrie aufweisen. Bevor jedoch weitere Details geklärt werden, ist es sinnvoll, weitere Grundlagen zu schaffen.

Bewegungsgleichungen mit fünf oder mehr Beinen werden in dieser Arbeit nicht analysiert. Wie noch zu sehen sein wird, tragen sie nicht zum Selbstkonsistenzmechanismus der nullten Ordnung des erweiterten Schemas bei.

Kapitel 2

Die systematisch erweiterte Störungstheorie

Störungstheoretische Entwicklungen sind strukturell nicht in der Lage, Abhängigkeiten von der Λ -Skala zu erfassen, wie im vorherigen Kapitel dargelegt wurde. Physikalische Massen oder chirale Strukturen, die von der spontanen Massenskala abhängen, gehen auf mathematischem Wege verloren.

Ziel dieses Kapitels ist es, den Hintergrund der systematisch erweiterten Störungstheorie auf Basis der Operatorproduktentwicklung und der Theorie der resurgenten Funktionen vorzustellen. Im Anschluss werden die in dieser Arbeit benötigten rationalen Approximanten, die zur Beschreibung elektroschwacher Prozesse geeignet sind, zusammengestellt. Die für die praktischen Rechnungen notwendigen Mechanismen der Selbstkonsistenz und der kompensierenden Pole werden eingeführt.

2.1 Operatorproduktentwicklung und Vertexfunktionen

Da die Störungstheorie keine vollständige Beschreibung der Vertexfunktionen liefern kann, stellt sich die Frage nach ihrer wahren Natur. Die ursprünglich von Wilson [Wil 69] postulierte Operatorproduktentwicklung (OPE) macht hierüber, obwohl sie nicht für dynamische Berechnungen verwendet werden kann, eine strukturelle Aussage.

Wie in [Wei 96] dargestellt, wird das Operatorprodukt zweier Feldfunktionen mit Massendimension eins bei kleinem Abstand x betrachtet. Die OPE ermöglicht eine Entwicklung der zugehörigen 2-Punkt-Funktion gemäß

$$D(x) = \langle 0 | \phi(x) \phi(-x) | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(n)} W_{n,i}(x) \langle 0 | \mathcal{O}_{2n,i}(0) | 0 \rangle. \quad (2.1)$$

Die $\mathcal{O}_{2n,i}(x)$ fassen sämtliche elementaren oder zusammengesetzten lokalen Operatoren der Massendimension $2n$ zusammen, wobei für festes n insgesamt $l(n)$ verschiedene Operatortypen existieren. Dabei ist per Konvention $\mathcal{O}_{0,1} = \mathbf{1}$ und $l(0) = 1$. Die Matrixelemente $\langle 0 | \mathcal{O}_{2n,i}(0) | 0 \rangle$ entsprechen den Vakuumkondensaten und sind nicht mit Mitteln der OPE berechenbar. Um die zunehmende Massendimension der lokalen Operatoren auszugleichen, bestehen die Wilson-Koeffizienten $W_{n,i}(x)$ neben einer störungstheoretisch berechenbaren Reihe, die i. A. noch Logarithmen von $\nu^2 x^2$ enthält, aus Potenzen $(x^2)^{n-1}$.

Nach einer Fourier-Transformation von (2.1) in D Dimensionen findet man für die Impulsstruktur der Wilson-Koeffizienten

$$W_{n,i}(k^2, \alpha, \nu, \epsilon) = \left(\frac{1}{k^2}\right)^{n+1} \times \{\text{störungstheoretisch berechenbare Reihe in } \alpha\}, \quad (2.2)$$

wobei die Entwicklung Pole im Regularisierungsparameter ϵ und logarithmische Modifikationen der Form $\ln(k^2/\nu^2)$ besitzen kann. Geht man von bereits normierten Größen aus, so gilt für die 2-Punkt-Vertexfunktion die OPE

$$-\Gamma_2(k^2, \alpha, \nu) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(n)} V_{n,i} \frac{1}{(k^2)^n} \langle 0 | \mathcal{O}_{2n,i}(0) | 0 \rangle \quad (2.3)$$

mit den Koeffizienten

$$V_{n,i} = \sum_{q=0}^{\infty} V_{n,i,q} \alpha^q. \quad (2.4)$$

Wie in Kapitel 5, welches näher auf die Vakuumkondensate und ihre Berechnung eingeht, deutlich wird, kann nur die Λ -Skala in einer ansonsten masselosen Theorie die zur Skalierung nötigen Massendimensionen liefern. Es ist also

$$\langle 0 | \mathcal{O}_{2n,i}(0) | 0 \rangle = (\Lambda^2)^n \sum_{t=0}^{\infty} c_{n,i}^{(t)} \alpha^t \quad (2.5)$$

anzusetzen. Die so definierten Koeffizienten $V_{n,i,q}$ und $c_{n,i}^{(t)}$ sind störungstheoretisch zu berechnen und ihre Beiträge sind als

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_n^{(p)} \alpha^p = \sum_{i=1}^{l(n)} \left\{ \left(\sum_{q=0}^{\infty} V_{n,i,q} \alpha^q \right) \sum_{t=0}^{\infty} c_{n,i}^{(t)} \alpha^t \right\} \quad (2.6)$$

zusammenfassbar. Verwendet man (2.4) bis (2.6) in der OPE (2.3), so offenbart sich die Struktur der 2-Punkt-Vertexfunktion

$$-\Gamma_2(k^2, \alpha) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_n^{(p)} \alpha^p \left(\frac{\Lambda^2}{k^2}\right)^n. \quad (2.7)$$

Sie besitzt eine *Doppelnatur*: Zum einen stellt sie sich als eine Funktion dar, die störungstheoretisch als Potenzreihe im Kopplungsparameter α erfassbar ist. Zum anderen besitzt sie einen nichtperturbativen Charakter als Reihe in ganzzahligen Potenzen der spontanen Massenskala. Die Form (2.7) der Vertexfunktion legt den Grundstein für das systematisch erweiterte Schema.

Geht man einen Schritt weiter, so ist zu sehen, dass sich feldtheoretische Amplituden in die Klasse der „resurgent Funktionen“ einordnen lassen. Verwendet man dazu die in (1.57) für Λ gefundene Darstellung und versteckt den Taylor-Anteil mit Hilfe von

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{u}_{n,p} \alpha^p = \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_n^{(q)} \alpha^q \right) \cdot \left\{ 1 - \frac{\beta_1^2 - \beta_0 \beta_2}{2\beta_0^3} \frac{\alpha}{4\pi} + \mathcal{O}(g^4) \right\}, \quad (2.8)$$

so kann die Vertexfunktion (2.7) in ein resurgent Symbol

$$-\Gamma_2(k^2, \alpha) = k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\nu^2}{k^2} \right)^n \left(e^{-\frac{1}{\beta_0} \frac{4\pi}{\alpha}} \right)^n \left\{ \left(\beta_0 \frac{\alpha}{4\pi} \right)^{-n \frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{u}_{n,p} \alpha^p \right\} \quad (2.9)$$

überführt werden, welches ausdrücklich eine nicht rein perturbative Gestalt besitzt. Der mathematische Rahmen dieser formalen Reihe ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

2.2 Die Systematik des erweiterten Schemas

Die störungstheoretische Approximation einer Vertexfunktion entspricht mathematisch gesehen einer semikonvergenten Reihe. Eine solche Reihe liefert als Näherung einer „wahren Vertexfunktion“ in der Entwicklung immer bessere Resultate, bis sie ab einer festen Ordnung ein immer schlechteres Konvergenzverhalten aufweist. Für genügend kleine z , z soll hier als Kopplung aufgefasst werden, entspricht

$$f(z) \sim \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \quad (2.10)$$

der asymptotischen (oder semikonvergenten) Entwicklung der Funktion $f(z)$. Der Fehler, den man mit der Entwicklung (2.10) produziert, ist polynomialer Art, so dass exponentielle Beträge der Gestalt $\exp\{-1/z\}$, die *escaping functions* einer semikonvergenten Entwicklung, nicht erfasst werden können.

Die Mitnahme exponentiell unterdrückter Terme, wie sie bei der Λ -Skala (1.57) vorliegen, gelingt mit Hilfe einer formalen Doppelreihe

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{s_n}{z}} \left\{ z^{-B_n} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} z^p \right\}, \quad (2.11)$$

dem *resurgent Symbol* [Éca 81, Sti 02], welches auf der Theorie einer erweiterten Borel-Laplace-Transformation basiert. Der Parametersatz $\{s\}$ mit $0 = \text{Re } s_0 < \text{Re } s_1 \leq \text{Re } s_2 \leq \text{Re } s_3 \dots$ wird als *Support* oder Träger des resurgenten Symbols bezeichnet und bildet eine Halbgruppe bezüglich der Addition, wobei konventionsgemäß $B_0 = s_0 = 0$ gesetzt wird. Nimmt man Gültigkeit und Vollständigkeit der OPE aus dem vorangegangenen Abschnitt an, so wird bei der Wahl $s_n = n4\pi/\beta_0$ und $B_n = n\beta_1/\beta_0^2$ deutlich, dass die Vertexfunktionen bezüglich ihrer Kopplungsabhängigkeit nichts anderes als resurgente Funktionen sind und mit der Doppelentwicklung (2.11) für kleine z bzw. g^2 beschrieben werden können.

Startpunkt der im Folgenden vorgestellten erweiterten Störungstheorie ist der in (2.7) herausgestellte Doppelcharakter der Vertexfunktion als Entwicklung in Kopplung und Λ -Skala

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,p} \alpha^p \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)^n. \quad (2.12)$$

Da die vollständige nichtperturbative Summe für realistische Vertexfunktionen nicht bekannt ist, ist es zweckmäßig, diese systematisch für festes p gemäß

$$\Gamma^{[r,p]}(\Lambda^2) = r\text{-te Approximante zu } \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,p} \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)^n \quad (2.13)$$

zu nähern. Diese Rekonstruktion der Λ -Abhängigkeit ist zugleich als Fortsetzung der Wilson-Approximation bis hin zu kleinen k zu verstehen. Die direkte Verwendung der Wilson-Darstellung ist unmöglich, da sie nur eine asymptotische Entwicklung um $k^2 = \infty$ darstellt. Dynamische Gleichungen enthalten stets Schleifenintegrale, die sich über den gesamten Impulsbereich inklusive $k^2 = 0$ erstrecken.

Mit den formal unabhängigen Parametern Λ und $\{k\}$ wird die systematisch erweiterte Störungstheorie als Doppelsequenz durch

$$\Gamma_N(\{k\}, \Lambda, \alpha, \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p_{\max} \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r, p_{\max}]}(\{k\}, \Lambda, \alpha, \nu), \quad (2.14)$$

$$\Gamma_N^{[r, p_{\max}]}(\{k\}, \Lambda, \alpha, \nu) = \Gamma_N^{[r, 0]}(\{k\}, \Lambda) + \sum_{p=1}^{p_{\max}} \alpha^p \Gamma_N^{[r, p]}(\{k\}, \Lambda, \nu) \quad (2.15)$$

definiert. Die nichtperturbativen Approximanten sollen so beschaffen sein, dass sie bei fester quasi-perturbativer Ordnung p mit $r = 0, 1, 2, \dots$ numeriert werden. Dabei ist $\Gamma_N^{[r, p_{\max}]}$ als Näherung der exakten Vertexfunktion Γ_N zu verstehen.

Es ist günstig, die Approximanten $\Gamma_N^{[r, 0]}$ als gebrochen-rationale Funktionen¹ in Λ und $\{k\}$ anzusetzen; sie realisieren damit eine Vorsummation in r -Richtung. Sie reproduzieren für endliche Ordnungen r zwar niemals die von der OPE vorgegebene Form, haben aber den Vorteil, dass sie bis hin zu $k^2 = 0$ nur endliche Fehler produzieren und daher in DSG bzw. in den BS resummierten DSG anwendbar sind.

Um zu verhindern, dass man in eine unphysikalische Theorie abdriftet, werden zwei Randbedingungen für das asymptotische Verhalten der Vertexfunktionen gefordert: Die nichtperturbativ erweiterten Vertexfunktionen sollen in jeder Ordnung p bis auf einen Faktor c_Γ in ihre störungstheoretischen Partner übergehen, sobald die Λ -Skala abgeschaltet wird. Die Randbedingung

$$\Gamma_N^{[r, p]}(\{k\}, \Lambda \rightarrow 0, \alpha, \nu) \longrightarrow c_\Gamma \Gamma_N^{(p)\text{pert}}(\{k\}, \alpha, \nu) \quad (2.16)$$

wird als „perturbativer Limes“ bezeichnet. Wie bereits erwähnt, ist die hier betrachtete $SU(2)$ -Eichtheorie für $\beta_0 > 0$ asymptotisch frei. Die Vertexfunktionen sollen für $p = 0$ beim Hochskalieren aller äußeren Impulse bis auf einen Faktor c_Γ in die perturbativen nackten Größen,

$$\Gamma_N^{[r, 0]}(\{\lambda k\}; \Lambda) \longrightarrow c_\Gamma \Gamma_N^{(0)\text{pert}}(\{\lambda k\}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

übergehen. Die Bestimmung des Divergenzgrades eines Schleifenintegrals ist damit, wie in der Störungstheorie, durch Abzählen der Impulspotenzen (Power-Counting) möglich. Darüber

¹Die Wahl der gebrochen-rationale Funktion als Approximante stellt selbstverständlich nicht die einzige Möglichkeit dar. Alternative Ansätze werden in [AS 00] oder [Wie 00] verwendet und diskutiert. Sie hat jedoch den enormen praktischen Vorteil, dass alle bekannten Techniken der kovarianten Schleifenberechnung anwendbar bleiben.

hinaus bleibt die Theorie weiterhin (bis auf eine multiplikative Konstante) störungstheoretisch renormierbar.

Im Vergleich mit [Sti 96] fällt sofort auf, dass die Restriktionen (2.16) und (2.17) an dieser Stelle etwas abgeschwächt worden sind. Das in dieser Arbeit verwendete Schema zur Berechnung der nichtperturbativ erweiterten Vertexfunktionen kann, wie bei der Untersuchung einer resurgenten Modellamplitude in [Sti 00] gezeigt wird, die störungstheoretischenendants nach Abschalten der nichtperturbativen Modifikationen lediglich bis auf eine multiplikative Konstante rekonstruieren. Man befindet sich dann in einer Variante der „quasiperturbativen Reihe“ (2.15), die für $\Lambda \rightarrow 0$ nicht direkt in die perturbative übergeht, sondern in eine unendliche Umordnung davon. Dabei kann man sich die Umordnung der Reihe als Umrechnung der Logarithmen $\ln(k^2/\nu^2)$ auf $\ln(k^2/\Lambda^2)$ vorstellen. Letztere Form der quasiperturbativen Reihe wird im weiteren Verlauf der Arbeit als *Variante II* bezeichnet.

Es ist also sinnvoll, den Vertexfunktionen zu gestatten, einen von eins verschiedenen Wert für c_Γ auszubilden. Hingegen soll $c_\Gamma = 1$ als Forderung nach *strenger perturbativer Limesbildung* bezeichnet werden.

In der expliziten Konstruktion einer Vertexapproximante ist die folgende Vorgehensweise zu beachten: Die Vertexfunktionen werden nach ihren Lorentz- und Matrixstrukturen in elementare Strukturen zerlegt und jeweils mit einer rationalen Padé-Approximante für die zugehörige invariante Funktion versehen. Diese bestehen wiederum aus einer Kombination der äußeren Impulse und der nichtperturbativen Λ -Skala. Insgesamt sollen die Approximanten so beschaffen sein, dass die Randbedingungen (2.16) und (2.17) respektiert werden. Für invariante Funktionen mit mehr als einer Impulsvariable legt die Annahme einer Erweiterung der Lehmann-Källénschen Spektraldarstellung, wie sie z. B. in [BD 65] näher erläutert ist, die Verwendung einer faktorisierenden Nennerstruktur („Cauchy-Struktur“) der Approximanten für die Vertizes nahe.

2.3 Die modifizierten Basisvertizes

Die Propagatoren und Vertexfunktionen werden nun mit Hilfe der oben formulierten Randbedingungen für das erweiterte Schema zusammengestellt. Es ist, wie noch deutlich wird, ausreichend, die Approximanten der oberflächlich divergenten Basisvertizes zu formulieren [Sti 96]. Modifikationen für den Geist-Sektor werden an dieser Stelle nicht erarbeitet. Der Grund hierfür wird zu Beginn von Kapitel 4 detailliert geschildert.

Das Herausarbeiten der Tensor- und Matrixstrukturen der Approximanten sowie die Notation der nichtperturbativen Parameter orientiert sich an [BC 80, Mer 96] und wird für die Zwecke dieser Arbeit systematisiert. Die Verallgemeinerung der für die Approximationsgrade $r = 0$ bzw. $r = 1$ in [Mer 96] notierten Vertexfunktionen verläuft natürlich und ist [Sti 96] angelehnt. Mögliche Vereinfachungen, wie sie z. B. aus Symmetrieüberlegungen oder der Analyse von Spektraldarstellungen resultieren, sind [Mer 96, Sch 91, Sti 00] entnommen.

2.3.1 Konstruktion der erweiterten Propagatoren

Der Fermion-Propagator

Der Fermion-Propagator trägt keine Lorentzindizes, besitzt aber eine Dirac-Matrixstruktur. Da er von einem Impuls p abhängt, besteht eine mögliche Basis aus $\not{p}, \not{p}\gamma_5, \gamma_5$ und der Ein-

heitsmatrix $\mathbf{1}$. Die Forderung nach \mathcal{CP} -Invarianz des Propagators wirft den Kandidaten γ_5 heraus. Der Mechanismus der kompensierenden Pole, auf den am Ende dieses Kapitels eingegangen wird, ist mit Matrixstrukturen proportional zu $\not{p}\gamma_5$ nicht verträglich [Sti 00]. Damit bleibt als Propagatorbasis \not{p} und die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$, die mit der Λ -Skala (in der hier masselosen Theorie) passend skaliert wird. Etwaige Paritätsverletzungen äußern sich also, wie im Standardmodell, noch nicht in den Propagatoren nullter Ordnung.

Die Approximante für den Fermion-Propagator lässt sich so in beliebiger Approximationsstufe durch

$$S_f^{[r,0]}(p) = \frac{1}{\bar{c}_f} \frac{\prod_{s=1}^r \left(\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda \right)}{\prod_{s=1}^{r+1} \left(\not{p} + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda \right)} \quad (2.18)$$

ansetzen. Es ist leicht zu sehen, dass beim Hochskalieren der Impulse bzw. beim Abschalten von Λ die Approximante bis auf eine Konstante in den störungstheoretischen Propagator übergeht. Die Randbedingungen (2.16) und (2.17) sind also erfüllt.

Anhand dynamischer Gleichungen wird untersucht, ob der Ansatz (2.18) zur Beschreibung stabiler Teilchen geeignet ist. Während in [Dri 98, DS 98] zur Modellierung des Confinements in der QCD nach komplexen Polpaaren in den Ansätzen für die Fermion- und Quark-Propagatoren gesucht wird, sind hier in Anlehnung an die Störungstheorie positive reelle Werte der nichtperturbativen Parameter $\omega_{f,s}^{(1)}$ interessant.

Pro Fermion, durch den Index $f = \nu_l, l, u, d$ differenziert, sind in (2.18) insgesamt $2(r+1)$ unbekannte Parameter zu bestimmen. Ergeben sich durch die dynamischen Rechnungen für ein Fermion-Dublett unterschiedliche Massen, so ist die Eichsymmetrie spontan gebrochen.

Die Boson-Propagatoren

Der W^\pm -Propagator ist ein Lorentz-Tensor zweiter Stufe, der von einem Impuls abhängt. Die Zerlegung der Tensorbasis kann nach transversalen und longitudinalen Anteilen

$$\left(D_{\mu\nu}^\pm(k) \right)^{[r,0]} = t_{\mu\nu}(k) D_T^{\pm[r,0]}(k^2) + l_{\mu\nu}(k) D_L^{\pm[r,0]}(k^2) \quad (2.19)$$

mit den Projektoren

$$t_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{k^2} k_\mu k_\nu = \delta_{\mu\nu} - l_{\mu\nu}(k) \quad (2.20)$$

erfolgen, so dass die Approximanten skalare Funktionen sind und von einem Impuls und der Λ -Skala abhängen. Eine mit den Randbedingungen verträgliche Form ist der Ansatz

$$D_T^{\pm[r,0]}(k^2) = \frac{1}{c_\pm} \frac{\prod_{s=1}^r \left(k^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2 \right)}{\prod_{s=1}^{r+1} \left(k^2 + u_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2 \right)} \quad (2.21)$$

für den Transversalteil, der die physikalischen Freiheitsgrade der Felder enthält. Die \mathcal{CP} -Invarianz ist durch die Approximante gewährleistet, denn für das W^+ - und das W^- -Boson

wird derselbe Propagator mit derselben Masse gewählt. In der Funktion (2.21) sind genau wie beim Fermion-Propagator $2(r+1)$ Parameter zu bestimmen. Die Pole sollen (dynamisch) so herauskommen, dass die $u_{\pm,s}^{(1)}$ ebenfalls reell und positiv sind.

In [Ewe 00] wird für die QCD gezeigt, dass die STI des longitudinal projizierten Gluon-Propagators im Rahmen der erweiterten Störungstheorie [Sti 96] in niedrigster Approximationsstufe spontan gebrochen ist. Dieses Ergebnis wird durch Rechnungen in [Zan 00] gestützt und ist auf die vorliegende Arbeit ohne weiteres übertragbar. Der Longitudinalanteil in (2.19) verhält sich auch in der nichtperturbativen Erweiterung proportional zum Eichfixierungsparameter, so dass die Wahl der Landau-Eichung ($\xi = 0$) hier genutzt wird, um die Komplexität der Theorie zu reduzieren. Innere Boson-Linien werden damit auf eine transversale Struktur, d. h. $D_L^{[r,0]}(k^2) = 0$, eingeschränkt. Äußere Boson-Linien werden transversal projiziert. Die tensorielle Zerlegung des W^0 -Propagators verläuft analog zu (2.19). Da der Ansatz zwei Teilchen, das Photon mit masselosem Pol und das Z^0 -Boson mit massivem Pol, beschreiben soll, ist die Approximationsstufe im Vergleich zu (2.21) um eins erhöht. Als Approximante wird

$$\left(D_{\mu\nu}^0(k)\right)^{[r+1,0]} = t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{c_0} \frac{\prod_{s=1}^{r+1} \left(k^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2\right)}{k^2 \prod_{s=1}^{r+1} \left(k^2 + u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2\right)} = t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{c_0} \frac{\prod_{s=1}^{r+1} \left(k^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2\right)}{\prod_{s=1}^{r+2} \left(k^2 + u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2\right)}. \quad (2.22)$$

gewählt. Die Darstellung hinter dem letzten Gleichheitszeichen in (2.22) ist mit $u_{0,r+2}^{(1)} = 0$ zu verstehen und vereinfacht Rechnungen im weiteren Verlauf. Es sind hier $2r+3$ nichtperturbative Parameter zu bestimmen. Die Partialbruchzerlegung

$$D_T^{0[r+1,0]}(k^2) = \frac{1}{c_0} \left(\prod_{s=1}^{r+1} \frac{u_{0,s}^{(2)}}{u_{0,s}^{(1)}} \frac{1}{k^2} + \sum_{s=1}^{r+1} \left\{ 1 - \frac{u_{0,s}^{(2)}}{u_{0,s}^{(1)}} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{r+1} \frac{u_{0,t}^{(2)} - u_{0,s}^{(1)}}{u_{0,t}^{(1)} - u_{0,s}^{(1)}} \right\} \frac{1}{k^2 + u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2} \right) \quad (2.23)$$

macht die Polstruktur besonders deutlich. Das Photon und das Z^0 -Boson besitzen, bis auf die Massen, dieselben erhaltenen Quantenzahlen. Die Vorfaktoren können im Sinne eines Mischungswinkels zwischen Photon und Z^0 -Boson innerhalb des W^0 -Feldes interpretiert werden.

2.3.2 Tripel-Vertizes

Die Fermion-Vertizes

Die drei fermionischen Vertizes besitzen zwei linear unabhängige Impulse, womit die Approximante bezüglich ihrer Impulsabhängigkeit in drei invarianten Impulsquadraten anzusetzen ist. Auch hier sollen die Nenner in den Impulsen faktorisieren. Die Matrixstruktur ist im Vergleich zum Propagator wesentlich komplizierter. Eine unabhängige Basis ist aus den Dirac-Matrizen $\gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \mathbf{1}, \gamma_5$ und $\sigma_{\mu\nu}$ sowie aus zwei linear unabhängigen Kombinationen der äußeren Impulse, wie beispielsweise $r_\mu = (p_1 + p_2)_\mu$ und $k_\mu = (p_1 - p_2)_\mu$, zu konstruieren. Daraus lassen sich in der Summe 24 verschiedene Matrizen bilden.

Eine wesentliche Vereinfachung liefert wiederum der Mechanismus der kompensierenden Pole. In [Kuh 97] wird gezeigt, dass fermionische Approximanten, die Terme der Art r_μ oder k_μ enthalten, die Divergenz in Schleifenintegralen erhöhen können und daher die geforderten

Randbedingungen verletzen. Es verbleiben 8 mögliche Strukturen, $\gamma_\mu, \not{p}_1 \gamma_\mu, \gamma_\mu \not{p}_2, \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2$ und das Ganze nochmal mit γ_5 multipliziert.

Die Überlegungen lassen sich übersichtlich in der transversalen Approximante für den positiv geladenen Fermion-Vertex

$$\bar{\Gamma}_{3 f' f \mu}^{[r,0]+}(-p_1, p_2, k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega'_{f',s} \Lambda)} \frac{N_{f' f \nu}^{[r]+}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{\pm,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega'_{f,s} \Lambda)} \quad (2.24)$$

verarbeiten, wobei der Nenner bereits die faktorisierte Cauchy-Struktur besitzt. Für das Zählerpolynom gilt hier

$$N_{f' f \nu}^{[r]+}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{m,n,n'=0}^r (k^2)^m \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \times (\not{p}_1)^n \left[V_{f' f W^+}^{[r] m n n'} \gamma_\nu + A_{f' f W^+}^{[r] m n n'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'}. \quad (2.25)$$

Der so konstruierte Fermion-Vertex ist, wie auch die Folgenden, invariant unter \mathcal{CP} -Transformationen. Nichtperturbative Modifikationen, die die \mathcal{CP} -Invarianz im Prinzip verletzen können, wie $k_\nu \mathbf{1}$ oder $\sigma_{\nu\rho} k_\rho \gamma_5$, werden durch die Transversalprojektion eliminiert oder sind durch den Mechanismus der kompensierenden Pole ausgeschlossen.

Da der Fermion- und der W^+ -Propagator auf Approximationsstufe r behandelt werden, ist auch das faktorisierte Nennerpolynom vom Grade r angesetzt. Zur Erinnerung: Der Index f steht für ein auslaufendes Fermion-Feld in der oberen Komponente des Isospinors. Bei dem Index f' verhält es sich dementsprechend umgekehrt, so dass $(f, f') = (\nu_l, l), (u, d)$ gilt.

Denselben Konstruktionsprinzipien gehorcht der negativ geladene Fermion-Vertex, und er wird daher analog in der Form

$$\bar{\Gamma}_{3 f f' \mu}^{[r,0]-}(-p_1, p_2, k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega'_{f,s} \Lambda)} \frac{N_{f f' \nu}^{[r]-}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{\pm,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega'_{f',s} \Lambda)} \quad (2.26)$$

mit der matrixwertigen Funktion

$$N_{f f' \nu}^{[r]-}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{m,n,n'=0}^r (k^2)^m \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \times (\not{p}_1)^n \left[V_{f f' W^-}^{[r] m n n'} \gamma_\nu + A_{f f' W^-}^{[r] m n n'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'} \quad (2.27)$$

angesetzt. Die Approximanten (2.24) und (2.26) erfüllen die Forderung des perturbativen Limes und der naiven asymptotischen Freiheit für

$$A_{f' f W^+}^{[r] r r r} = A_{f f' W^-}^{[r] r r r} = 0. \quad (2.28)$$

Mit der \mathcal{CP} -Invarianzbedingung für den positiv geladenen Fermion-Vertex

$$\bar{\Gamma}_{3 f' f \mu}^{[r,0]+}(-p_1, p_2, k) = -\gamma_0 C \left[\bar{\Gamma}_{3 f f' \mu}^{[r,0]-}(\tilde{p}_2, -\tilde{p}_1, \tilde{k}) \right]^T C^{-1} \gamma_0 \quad (2.29)$$

und entsprechend für den negativ geladenen

$$\bar{\Gamma}_3^{[r,0] -}(-p_1, p_2, k) = -\gamma_0 C \left[\bar{\Gamma}_3^{[r,0] +}(\tilde{p}_2, -\tilde{p}_1, \tilde{k}) \right]^T C^{-1} \gamma_0, \quad (2.30)$$

wobei $C = \gamma^2 \gamma^4 = -C^{-1} = -C^T$ die euklidische Version der Diracschen Ladungskonjugationsmatrix ist und die raumartigen Komponenten der „geslaschten“ Impulse ein negatives Vorzeichen besitzen, lässt sich die Zahl der nichtperturbativen Parameter weiter reduzieren. Mit der Forderung nach \mathcal{CP} -Erhaltung gilt

$$V_{ff'W^+}^{[r]mnn'} = V_{ff'W^-}^{[r]mn'n} \quad \text{und} \quad A_{ff'W^+}^{[r]mnn'} = A_{ff'W^-}^{[r]mn'n}. \quad (2.31)$$

Dabei muss ein einzelner Parametersatz nicht notwendig in n und n' symmetrisch sein. Für die Zählerfunktionen (2.25) und (2.27) ergeben sich mit der Forderung (2.28) und den Symmetriebeziehungen insgesamt $2(r+1)^3 - 1$ zu ermittelnde nichtperturbative Konstanten. Man hat so für $r = 0$ nur einen und für die Approximationsstufe $r = 1$ bereits 15 Parameter.

Der Unterschied zwischen dem ungeladenen Fermion-Vertex und den anderen beiden besteht zum einen in dem einlaufenden W^0 -Boson, welches oben in der Approximationsstufe $r + 1$ angesetzt wurde. Die Approximante hier ist dementsprechend zu wählen. Andererseits ist der Vertex bezüglich der Eichgruppe matrixwertig. Neben der bereits im perturbativen Partner auftretenden T_3 -Matrix kann sich auch die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_2$ etablieren². Der neutrale Fermion-Vertex wird mit gemischtem Approximationsgrad r und $r + 1$ durch

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0] 0}{}_{ff\mu}(-p_1, p_2, k) \\ &= -(T_3)_f t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega'_{f,s}\Lambda)} \frac{N_{ff\nu}^{[r/r+1] 0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^{r+1} (k^2 + \bar{u}'_{0,s}\Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega'_{f,s}\Lambda)} \\ & \quad - \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2)_f t_{\mu\nu}(k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega'_{f,s}\Lambda)} \frac{M_{ff\nu}^{[r/r+1] 0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^{r+1} (k^2 + \bar{u}'_{0,s}\Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega'_{f,s}\Lambda)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

mit den Polynomen

$$\begin{aligned} N_{ff\nu}^{[r/r+1] 0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) &= \sum_{m=0}^{r+1} \sum_{n,n'=0}^r (k^2)^m \Lambda^{4r+2-(2m+n+n')} \\ & \quad \times (\not{p}_1)^n \left[V_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} \gamma_\nu + A_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'} \end{aligned} \quad (2.33)$$

und

$$\begin{aligned} M_{ff\nu}^{[r/r+1] 0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) &= \sum_{m=0}^{r+1} \sum_{n,n'=0}^r (k^2)^m \Lambda^{4r+2-(2m+n+n')} \\ & \quad \times (\not{p}_1)^n \left[W_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} \gamma_\nu + B_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'} \end{aligned} \quad (2.34)$$

nichtperturbativ erweitert, wobei $f = \nu, l, u$ und d gilt. Die Restriktionen

$$A_{ffW^0}^{[r/r+1]r+1rr} = B_{ffW^0}^{[r/r+1]r+1rr} = W_{ffW^0}^{[r/r+1]r+1rr} = 0 \quad (2.35)$$

²Derartige Terme treten in der elektroschwachen Theorie in störungstheoretischen Rechnungen erster Ordnung auf.

und die Symmetriebeziehungen (\mathcal{CP} -Invarianz),

$$V_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} = V_{ffW^0}^{[r/r+1]mn'n} \quad \text{und} \quad A_{ffW^0}^{[r/r+1]mnn'} = A_{ffW^0}^{[r/r+1]mn'n} \quad (2.36)$$

bzw. für W und B in (2.34) analog, schränken den Parametersatz weiter ein. Durch kombinatorische Überlegungen findet man, dass die Zählerpolynome (2.33) und (2.34) zusammen durch $2r^3 + 10r^2 + 16r + 5$, i. A. verschiedene, Konstanten bestimmt werden.

Der Boson-Vertex

Bei dem Drei-Boson-Vertex handelt es sich um einen Lorentztensor dritter Stufe, der von zwei unabhängigen Impulsen abhängt. Eine Basis für die Lorentzstruktur besteht zunächst aus 14 Kombinationen der euklidischen Metrik und der äußeren Impulse. Hinzu kommen 8 Tensoren, die den total antisymmetrischen Tensor vierter Stufe enthalten. Von den so erhaltenen 22 verschiedenen Tensoren haben 8 die Massendimension eins und 14 die Massendimension drei. Wie beim neutralen Fermion-Vertex liegt hier ein gemischter Approximationsgrad vor, denn neben den Linien W^+ und W^- läuft ein W^0 -Feld in den Vertex hinein. Nach Entfernen der divergenzüberhöhenden Terme und vollständiger transversaler Projektion verbleibt

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{[r/r+1,0]+ - 0}_{\mu_1 \nu_1 \rho_1}(k, p, q) &= t_{\mu_1 \mu}(k) t_{\nu_1 \nu}(p) t_{\rho_1 \rho}(q) \left\{ \right. \\ &\quad \delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho F_1^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) \\ &\quad + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu F_2^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) \\ &\quad + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu F_3^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) \\ &\quad + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p-k)_\sigma F_4^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) \\ &\quad \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma F_5^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) \right\} \quad (2.37) \end{aligned}$$

mit den invarianten Funktionen

$$F_k^{[r/r+1,0]}(k^2, p^2, q^2) = \frac{N_{+-0}^{k[r/r+1]}(k^2, p^2, q^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u'_{\pm,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p^2 + u'_{\pm,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + u'_{0,s} \Lambda^2)} \quad (2.38)$$

und den Zählerpolynomen

$$N_{+-0}^{k[r/r+1]}(k^2, p^2, q^2) = \sum_{l,m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} C_{lmn}^{k[r/r+1]} (k^2)^l (p^2)^m (q^2)^n (\Lambda^2)^{3r+1-(l+m+n)} \quad (2.39)$$

als nichtperturbative Approximante. Mit der \mathcal{CP} -Invarianzbedingung für den Boson-Vertex im Impulsraum

$$\Gamma_3^{[r/r+1,0]+ - 0}_{\mu \nu \rho}(k, p, q) = -\Gamma_3^{[r/r+1,0]+ - 0}_{\nu \mu \rho}(p, k, q) \quad (2.40)$$

ist zu sehen, dass die Terme in (2.37) bis auf $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p-k)_\sigma$ invariant unter \mathcal{CP} -Transformationen sind. Die Symmetrien der nichtperturbativen Parameter $C_{lmn}^{4[r/r+1]}$ bezüglich ihrer Indizes können bei genügend hohem Approximationsgrad $r/r + 1$ aber dennoch so eingestellt werden, dass \mathcal{CP} -Invarianz erreicht wird. Für den Approximationsgrad 0/1 gelingt dies jedoch

nicht. Sollte $C_{000}^{4[0/1]}$ durch den Selbstkonsistenzmechanismus nicht verschwinden, so liegt eine \mathcal{CP} -Verletzung vor. Für die übrigen gilt

$$C_{lmn}^{1[r/r+1]} = C_{mln}^{1[r/r+1]}, \quad C_{lmn}^{2[r/r+1]} = C_{mln}^{3[r/r+1]} \quad \text{und} \quad C_{lmn}^{5[r/r+1]} = C_{mln}^{5[r/r+1]} \quad (2.41)$$

aufgrund der Forderung nach \mathcal{CP} -Invarianz in den zugehörigen Tensorstrukturen. Da die ε -Tensoren kein Bestandteil der Lagrange-Dichte (1.18) sind, ist

$$C_{rrr+1}^{4[r/r+1]} = C_{rrr+1}^{5[r/r+1]} = 0 \quad (2.42)$$

zu fordern. Sieht man von den $C_{lmn}^{4[r/r+1]}$ ab, so liegen für das Zählerpolynom $(r+2)(2r^2+5r+3) - 1$ zu bestimmende Parameter vor. Für den Approximationsgrad 0/1 sind dies inklusive $C_{000}^{4[0/1]}$ sechs zu bestimmende Größen.

2.3.3 Die 4-Punkt-Funktionen

Die allgemeine Lorentzstruktur der 4-Punkt-Funktionen ist mit ihren drei linear unabhängigen Impulsen sehr kompliziert. Neben den drei störungstheoretischen Tensoren, die sich aus Kombinationen der euklidischen Metrik zusammensetzen, lassen sich, sieht man von dem total antisymmetrischen Tensor vierter Stufe einmal ab, 54 Tensoren mit der Massendimension zwei und 81 Tensoren mit der Massendimension vier kombinieren.

Auch hier hilft der Mechanismus der kompensierenden Pole. Einerseits dürfen die Tensorstrukturen höchstens die Massendimension der perturbativen Vertizes besitzen. Darüber hinaus würde ein Ansatz mit höherer Massendimension in Schleifenrechnungen Objekte hervorbringen, die nicht selbstkonsistenzfähig sind. Zum anderen reduziert der Mechanismus die Anzahl der invarianten Impulsquadrate. Ein unabhängiger Variablensatz bestünde aus den vier äußeren Impulsen p_1^2, \dots, p_4^2 und aus zwei der drei Mandelstam-Variablen s, t und u . Da auch die 4-Punkt-Funktionen eine vollständig faktorisierende Nennerstruktur besitzen sollen, kann eine Partialbruchzerlegung bezüglich der Mandelstam-Variablen durchgeführt werden. Für den vollständig transversal projizierten Vertex $\Gamma_4^{++--}_{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt die Zerlegung

$$\Gamma_4^{[r,0]++--}_{\mu\nu\rho\sigma}(\{p\}) = V_4^{[r,0]++--}_{\mu\nu\rho\sigma}(\{p\}) + \frac{R_s^{[r,0]++--}(\{p\})}{r \prod_{l=1} (s + u''_{\pm,l} \Lambda^2)} + \frac{R_u^{[r,0]++--}(\{p\})}{r \prod_{l=1} (u + u''_{\pm,l} \Lambda^2)}, \quad (2.43)$$

wobei die Zählerstrukturen R_s und R_u in jeweils zwei Seiten des entsprechenden Kanals faktorisieren. Aus Gründen der Ladungserhaltung existiert die Zerlegung bezüglich des t -Kanals hier nicht.

In [Dri 98] wird gezeigt, dass die Anteile mit den Mandelstam-Polen im Selbstkonsistenzmechanismus abkoppeln und gerade die kompensierenden Pole liefern. Es ist darum zweckmäßig, nicht Γ_4 selbst, sondern die V -Funktion in (2.43) mit ihren vier invarianten Impulsquadraten nicht-störungstheoretisch zu modifizieren und auf Selbstkonsistenz zu untersuchen.

Der maximale Ansatz unter Beachtung der Randbedingungen enthält mit dem ε -Tensor insgesamt vier Lorentztensoren. Als transversal projizierte Approximante der Funktion $V_4^{++--}_{\mu\nu\rho\sigma}$

zum Approximationsgrad r ist

$$\begin{aligned}
V_4^{[r,0]++--}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} U_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} U_2^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} U_3^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} U_4^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

geeignet, wobei die Transversalprojektoren nicht explizit aufgeschrieben sind. Die gebrochenrationalen Funktionen haben die Form

$$U_i^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \frac{L_i^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)}{\prod_{i=1}^4 \prod_{s_i=1}^r (p_i^2 + u''_{\pm, s_i} \Lambda^2)} \tag{2.45}$$

mit den Polynomen

$$L_i^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \sum_{k,l,m,n=0}^r U_{klmn}^{i[r]} (p_1^2)^k (p_2^2)^l (p_3^2)^m (p_4^2)^n (\Lambda^2)^{4r-(k+l+m+n)} \tag{2.46}$$

als Zählerfunktionen. Die Randbedingungen verlangen zusätzlich

$$U_{rrrr}^{4[r]} = 0. \tag{2.47}$$

Die Forderung nach \mathcal{CP} -Invarianz wird durch die Invarianz des Vertex unter Vertauschung der Impulse und Lorentzindizes gemäß

$$(p_1, \mu) \leftrightarrow (p_3, \rho), \quad (p_2, \nu) \leftrightarrow (p_4, \sigma) \quad \text{und} \quad (p_2, \nu) \leftrightarrow (p_3, \rho), \quad (p_1, \mu) \leftrightarrow (p_4, \sigma) \tag{2.48}$$

realisiert. Entsprechend erfordert die Bose-Symmetrie Vertauschungsinvarianz unter

$$(p_1, \mu) \leftrightarrow (p_2, \nu) \quad \text{und} \quad (p_3, \rho) \leftrightarrow (p_4, \sigma), \tag{2.49}$$

so dass sich für die Koeffizienten $U_{klmn}^{1[r]}$ bis $U_{klmn}^{3[r]}$ die folgenden Symmetriebeziehungen

$$U_{klmn}^{1[r]} = U_{lkmn}^{1[r]} = U_{klnm}^{1[r]} = U_{mnkl}^{1[r]} = U_{nmlk}^{1[r]}, \tag{2.50}$$

$$U_{klmn}^{2[r]} = U_{mnkl}^{2[r]} = U_{nmlk}^{2[r]}, \tag{2.51}$$

$$U_{klmn}^{3[r]} = U_{mnkl}^{3[r]} = U_{nmlk}^{3[r]}, \tag{2.52}$$

$$U_{klmn}^{2[r]} = U_{klnm}^{3[r]} = U_{lkmn}^{3[r]}, \tag{2.53}$$

ergeben. Der ε -Tensor in (2.44) erhält zwar die \mathcal{CP} -Invarianz, zeigt aber unter Vertauschung des ersten bzw. zweiten Beinpaars mit den zugehörigen Lorentzindizes keine Bose-Symmetrie. Sie lässt sich aber mit der Forderung

$$U_{klmn}^{4[r]} = -U_{lkmn}^{4[r]} = -U_{klnm}^{4[r]} \tag{2.54}$$

wieder herstellen. Es gelten darüber hinaus die Beziehungen

$$U_{klmn}^{4[r]} = U_{mnkl}^{4[r]} \quad \text{und} \quad U_{klmn}^{4[r]} = U_{nmlk}^{4[r]}. \tag{2.55}$$

Auf dem Niveau $r = 0$ kommt ein $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ aufgrund von (2.47) nicht vor. Unter Verwendung der Symmetriebedingungen sind damit insgesamt nur zwei Parameter für die Zählerfunktionen zu ermitteln.

Die Tensorstruktur von $V_4^{+-00}_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist mit der von (2.44) äquivalent. Da aber neben einem W^+ - und einem W^- -Boson zwei W^0 -Felder in den Vertex einlaufen, ist die Approximante mit gemischtem Approximationsgrad anzusetzen. Der als bereits transversal projiziert zu verstehende Ansatz

$$\begin{aligned} V_4^{[r/r+1,0]+00}_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\sigma\rho} V_1^{[r/r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\ &+ \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} V_2^{[r/r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\ &+ \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} V_3^{[r/r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\ &+ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V_4^{[r/r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit

$$V_i^{[r/r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \frac{M_i^{[r/r+1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)}{\prod_{i=1}^2 \prod_{s_i=1}^r (p_i^2 + u''_{\pm, s_i} \Lambda^2) \prod_{k=3}^4 \prod_{s_k=1}^{r+1} (p_k^2 + u''_{0, s_k} \Lambda^2)} \quad (2.57)$$

und

$$M_i^{[r/r+1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \sum_{k,l=0}^r \sum_{m,n=0}^{r+1} V_{klmn}^{i[r/r+1]} (p_1^2)^k (p_2^2)^l (p_3^2)^m (p_4^2)^n (\Lambda^2)^{4r+2-(k+l+m+n)} \quad (2.58)$$

ist zweckmäßig. Nach obigem Schema lassen sich die Randbedingungen und Symmetriebeziehungen zusammenstellen. Man findet

$$V_{klmn}^{1[r/r+1]} = V_{lkmn}^{1[r/r+1]} = V_{klnm}^{1[r/r+1]}, \quad (2.59)$$

$$V_{klmn}^{2[r/r+1]} = V_{lkmn}^{3[r/r+1]} = V_{klnm}^{3[r/r+1]}, \quad (2.60)$$

$$V_{klmn}^{4[r/r+1]} = -V_{klnm}^{4[r/r+1]}, \quad (2.61)$$

womit die perturbative Randbedingung

$$V_{rrr+1r+1}^{4[r/r+1]} = 0 \quad (2.62)$$

schon automatisch erfüllt ist.

In der Approximationsstufe 0/1 bilden sieben nichtperturbative Parameter das Zählerpolynom (2.58). Darunter befindet sich auch $V_{0010}^{4[0/1]}$. Er erhält die Bose-Symmetrie unter Vertauschung der W^0 -Linien. Verschwindet er aber nach Durchlaufen des Selbstkonsistenzmechanismus nicht, so bricht er die \mathcal{CP} -Invarianz.

Der Vertex $V_4^{0000}_{\mu\nu\rho\sigma}$ besitzt zwar kein störungstheoretisches Pendant, ist aber oberflächlich divergent und wird aus Gründen der Vollständigkeit systematisch erweitert, da er zum Selbstkonsistenzmechanismus beiträgt³. Die Konstruktion der Lorentzstruktur und der invarianten

³Der Vertex $\Gamma_3^{000}_{\mu\nu\rho}$ ist zwar ebenfalls oberflächlich divergent, führt aber (außer bei sehr künstlichen Zusatzbedingungen) zu einem die \mathcal{C} -Invarianz brechenden, nichtverschwindenden 3-Photon-Vertex, der nach heutiger Kenntnis ausgeschlossen werden kann.

Impulsfunktionen orientiert sich an obigem Muster. Gewählt wird der Ansatz

$$\begin{aligned}
V_4^{[r+1,0]0000}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} W_1^{[r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} W_2^{[r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} W_3^{[r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) \\
&+ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W_4^{[r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

mit den Funktionen

$$W_i^{[r+1,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \frac{N_i^{[r+1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2)}{\prod_{i=1}^4 \prod_{s_i=1}^{r+1} (p_i^2 + u_{0,s_i}'' \Lambda^2)} \tag{2.64}$$

und

$$N_i^{[r+1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2) = \sum_{k,l,m,n=0}^{r+1} W_{klmn}^{i[r+1]}(p_1^2)^k (p_2^2)^l (p_3^2)^m (p_4^2)^n (\Lambda^2)^{4r+4-(k+l+m+n)}. \tag{2.65}$$

Die Bose-Symmetrie des Vertex ist sehr hoch. Unter Vertauschung eines Beinpaars ist jeweils eines der $W_{klmn}^{i[r+1]}$ für $i = 1, 2, 3$ invariant und die anderen beiden gehen ineinander über. Für die Vertauschung des ersten Beinpaars bzw. letzten Beinpaars gilt beispielsweise

$$W_{klmn}^{1[r+1]} = W_{lkmn}^{1[r+1]} = W_{klnm}^{1[r+1]} \quad \text{und} \quad W_{klmn}^{2[r+1]} = W_{lkmn}^{3[r+1]} = W_{klnm}^{3[r+1]}, \tag{2.66}$$

für die Vertauschung eines anderen Beinpaars gilt entsprechendes. Der ε -Tensor ist nicht manifest symmetrisch unter Bose-Transformationen. Der nichtperturbative Parameter mit maximalen Impulspotenzen soll gemäß

$$W_{r+1r+1r+1r+1}^{4[r+1]} = 0 \tag{2.67}$$

verschwinden. Weiterhin muss die Approximante bei Vertauschung eines beliebigen Beinpaars ein Minuszeichen hervorbringen. Die Verarbeitung der Symmetriebeziehungen ist schon für den Approximationsgrad $r = 1$ langwierig. Die maximale Anzahl von möglichen $W_{klmn}^{i[1]}$ für $i = 1, 2, 3$ beträgt bereits 48. Sie lassen sich aber auf einen Satz von nur sechs Parametern reduzieren. Die $W_{klmn}^{4[1]}$ kommen aufgrund der niedrigen Approximationsstufe noch nicht vor.

2.4 Formulierung des Selbstkonsistenzproblems

Zur Berechnung physikalischer Größen im Rahmen der erweiterten Störungstheorie ist es notwendig, dass die nichtperturbativen Parameter, die mit der Λ -Skala in den Approximanten skalieren, bekannt sind. Ihre Bestimmung erfolgt mit den dynamischen Gleichungen der Theorie. In dieser Arbeit sind das die DSG (1.21), die BS-resummierten DSG und die BSG. Mit der Definition des erweiterten Schemas in (2.14) und (2.15) wird man direkt auf ein Selbstkonsistenzproblem geführt, dessen erster Iterationsschritt formal durch

$$\left\{ \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N \left[\Gamma_N^{[r,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)pert} + \mathcal{O}(g(\nu)^2, e(r+1)) \quad (2.68)$$

darstellbar ist. Gleichung (2.68) ist bis auf Fehler in der perturbativen Ordnung $g(\nu)^2$ und in der nächsthöheren nichtperturbativen Approximationsordnung, angedeutet durch $e(r+1)$, erfüllt. Hier wird deutlich, warum die Approximanten im vorherigen Abschnitt lediglich für $p = 0$ angesetzt wurden. Die dynamischen Gleichungen erzeugen aus den Vertexfunktionen $\Gamma_N^{[r,0]}$ *automatisch* die höheren quasi-perturbativen Korrekturen $\Gamma_N^{[r,p]}$ mit $p > 0$. Dies geschieht durch Iteration um $\Gamma_N^{[r,0]}$. Damit lassen sich die Vertexfunktionen nullter quasi-perturbativer Ordnung als die „neuen Feynman-Regeln“ der Theorie auffassen.

Nach Einsetzen der erweiterten Ansätze und Bestimmung der Schleifenintegrale Φ_N in (2.68) faktorisieren Pole in den Impulsen äußerer Beine als Folge der „Cauchy-Eigenschaft“ ab. Durch die sich ergebenden Selbstkonsistenzbedingungen werden die Nullstellen der Propagatoren auf die Polpositionen der 3-Punkt-Funktionen bzw. im Boson-Sektor auch auf Pole der 4-Punkt-Funktionen gesetzt, so dass sie gekürzt werden können. Damit gilt

$$\omega_{f,s}^{(2)} = \omega'_{f,s}, \quad (2.69)$$

$$u_{\pm,s}^{(2)} = \bar{u}'_{\pm,s} = u'_{\pm,s} = u''_{\pm,s}, \quad (2.70)$$

$$u_{0,s}^{(2)} = \bar{u}'_{0,s} = u'_{0,s} = u''_{0,s}. \quad (2.71)$$

Das Selbstkonsistenzproblem der nullten Ordnungen ist nur dann lösbar, wenn die Schleifenintegrale Φ_N , die hier in einem dimensionellen Regularisierungsschema berechnet werden, in (2.68) den g_0^2 -Faktor absorbieren und den nichtperturbativen Anteil von $\Gamma_N^{[r,0]}$ reproduzieren. Nach [Sti 96] existiert ein sogenannter $1/g^2$ -Mechanismus, durch den der divergente Anteil eines Schleifenintegrals mit ausschließlich nichtperturbativem Charakter, multipliziert mit der Kopplungskonstanten, eine divergenzfreie Größe der Form

$$\Pi(\epsilon) = \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0} \quad (2.72)$$

ausbildet. Wie ist das einzusehen? Die Integraldarstellung für die Λ -Skala (1.53) führt mit der Definition der χ -Funktion in (1.35) zunächst auf

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \exp \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon \chi(\alpha') + \alpha'} \right). \quad (2.73)$$

Im Produkt mit der exakten Kopplungsrenormierungskonstanten (1.37) fällt die Abhängigkeit von α vollständig heraus, was nach etwas Rechnung an

$$\Pi(\epsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \exp \left(- \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon \chi(\alpha') + \alpha'} \right) \quad (2.74)$$

abgelesen werden kann. Die Konstante α_1 ist eine triviale RG-Invariante. Damit ist $\Pi(\epsilon)$ exakt kopplungsunabhängig. Wie schon einmal praktiziert, ist es möglich, den in dem Regulator

endlichen Teil des Integrales abzuspalten. Es gilt

$$\begin{aligned} \Pi(\epsilon) &= \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \frac{4\pi\epsilon}{4\pi\epsilon + \alpha_1\beta_0} \exp\left(-\epsilon \int_0^{\alpha_1} d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \epsilon)\right) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0}, \quad \text{da } \rho_\alpha(0, \epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Durch den $1/g^2$ -Mechanismus produzieren die Schleifenintegrale Φ_N nicht nur Terme der Ordnung g^2 , sondern auch der Ordnung g^0 . Prinzipiell können Graphen beliebig hoher Ordnung die nullte störungstheoretische Ordnung modifizieren. Der Begriff der Schleifenordnung kann also nicht mehr, wie in der Störungstheorie, mit der g^2 -Ordnung identifiziert werden. Von nun an soll nur noch zwischen verschiedenen *Schleifenordnungen* unterschieden werden. Falls diejenige Form der quasiperturbativen Reihe generiert werden soll, die den exakten perturbativen Limes Term für Term ($c_\Gamma = 1$) aufweist, darf der $1/g^2$ -Mechanismus nicht auf jede beliebige Divergenz eines Schleifenintegrals angewendet werden. Hier wird eine Klassifizierung notwendig. Man trifft auf zwei verschiedene Typen:

Die Divergenzen mit rein nichtperturbativem Charakter sind dadurch gekennzeichnet, dass sie im perturbativen Limes ($\Lambda \rightarrow 0$) verschwinden. Die Divergenzen modifizieren die $\Gamma_N^{[r,0]}$, indem sie durch (2.68) Bedingungen stellen.

Auf die perturbativen Divergenzen, die im perturbativen Limes erhalten bleiben, darf der $1/g^2$ -Mechanismus wegen der Randbedingung (2.17) mit $c_\Gamma = 1$ nicht angewendet werden. Sie sind mit den Divergenzen der betreffenden Renormierungskonstanten zu vergleichen und werden störungstheoretisch renormiert.

Die endlichen Anteile der Schleifenintegrale liefern Beiträge in erster Ordnung der Kopplung g^2 . Folglich stellen sie „quasi-perturbative“ Korrekturen für $p = 1$ dar. Im perturbativen Limes gehen die dort auftretenden gemischten Logarithmen in die üblichen perturbativen Logarithmen über. Es sei darauf hingewiesen, dass endliche Anteile in dieser Arbeit nicht bestimmt werden.

Damit ist das Selbstkonsistenzproblem vollständig formuliert: Das Iterationsverfahren (2.68) wird zusammen mit dem $1/g^2$ -Mechanismus auf die dynamischen Gleichungen der Theorie angewendet. Beim Blick auf (2.72) wird deutlich, dass der Selbstkonsistenzmechanismus (SKM) mit der Divergenz der Schleifenintegrale verbunden ist. Das Selbstkonsistenzproblem beschränkt sich dadurch in Strenge auf die *oberflächlich divergenten* Basisvertizes der Theorie. Damit hat man zumindest für das Selbstkonsistenzproblem der nullten Ordnungen ein natürliches Abbruchkriterium für die unendliche Hierarchie der Bewegungsgleichungen.

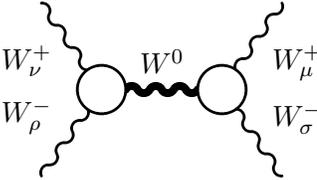
Der SKM entkoppelt die dynamischen Gleichungen der Theorie auf elegante Art und führt auf ein rein algebraisches Gleichungssystem, welches sich aus den sogenannten Selbstkonsistenzgleichungen (SKG) zusammensetzt. Ist die Theorie renormierbar, so ist der Satz der Selbstkonsistenzbedingungen endlich. Hieraus werden die nichtperturbativen Parameter bestimmt. Wegen der hohen Nichtlinearität und der großen Anzahl von Variablen ist ein solches System im Allgemeinen nur numerisch zugänglich.

Bevor jedoch die SKG herausgearbeitet und gelöst werden, wird der bereits viel zitierte Mechanismus der kompensierenden Pole eingeführt.

2.5 Der Mechanismus der kompensierenden Pole

Bei der Verwendung der erweiterten Ansätze in den dynamischen Gleichungen tritt das Problem auf, dass innere Linien, welche zwischen *zwei angezogenen* Vertizes verlaufen, unphysikalische Pole ausbilden können und dadurch mehr propagierende Teilchen beschrieben werden, als in den Propagatoren der Theorie vorhanden sind [CN 73, JJ 73]. Bei den DSG der 2-Punkt-Vertexfunktionen tritt dieser Fall noch nicht auf, denn hier können die überflüssigen Polfaktoren mit den Linearfaktoren der Propagatoren gekürzt werden. Da dies aber bei DSG mit drei oder mehr Beinen so nicht möglich ist, muss ein Mechanismus existieren, der die unphysikalischen Pole der Diagramme kompensiert. Die Systematik und Wirkungsweise des Mechanismus kompensierender Pole (MKP) wird [Dri 98, DS 98] folgend in diesem Abschnitt vorgestellt.

Betrachtet wird der Austausch eines W^0 -Bosons im s-Kanal als Teil der T_4^{++--} -Amplitude. Er wird durch


(2.76)

$$= \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\nu \rho \tau_1}(p_2, p_3, s) t_{\tau_1 \tau_2}(s) D_T^{0[r+1,0]}(s) \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\mu \sigma \tau_2}(p_1, p_4, s) \quad (2.77)$$

dargestellt. Nach Einsetzen der erweiterten Ansätze ist zu sehen, dass unzulässige Polfaktoren der Form $(s + u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2)$ für $t = 1, \dots, r+1$ auftreten. Es muss einen Beitrag zu (2.76) geben, der diese Faktoren eliminiert.

Um sich ein Bild von der Art der unphysikalischen Terme machen zu können, ist es sinnvoll, die Funktionen in (2.77) bezüglich der inneren Boson-Linie in Partialbrüche zu zerlegen. Das liefert zum einen Terme mit den physikalischen Polfaktoren des Propagators

$$\sum_{t=1}^{r+2} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (s + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\nu \rho \tau_1}(p_2, p_3, s) \right]_{s=-u_{0,t}^{(1)} \Lambda^2} \frac{t_{\tau_1 \tau_2}(s)}{s + u_{0,t}^{(1)} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2 - u_{0,t}^{(1)} \Lambda^2)} \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2 - u_{0,t}^{(1)} \Lambda^2)} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (s + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\mu \sigma \tau_2}(p_1, p_4, s) \right]_{s=-u_{0,t}^{(1)} \Lambda^2} \quad (2.78)$$

und zum anderen Ausdrücke mit den „falschen“ Poltermen

$$\sum_{t=1}^{r+1} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (s + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\nu \rho \tau_1}(p_2, p_3, s) \right]_{s=-u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2} \frac{t_{\tau_1 \tau_2}(s)}{s + u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2 - u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2)} \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2 - u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2)} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (s + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \Gamma_3^{[r/r+1,0]+-0}_{\mu \sigma \tau_2}(p_1, p_4, s) \right]_{s=-u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2} \quad (2.79)$$

an den bereits genannten Stellen. Die Residuenbildungen an den Vertexfunktionen beziehen sich dabei ausschließlich auf die Impulsquadrate; Lorentztensoren sollen in sie nicht einbezogen werden.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, ein neues Diagramm zu definieren. Mit dem Residuum

$$\begin{array}{c} s \\ \text{---} \\ W_{\tau_2}^0 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} := \left[(s + u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2) \begin{array}{c} \text{---} \\ W_{\tau_2}^0 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} \right]_{s = -u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2}, \quad (2.80)$$

wobei die von links in das Diagramm einlaufende Doppellinie nicht als Propagator sondern als Bein des Vertex zu verstehen ist, und etwas Rechnung lässt sich (2.79) in übersichtlicher Form angeben:

$$\begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} := \sum_{t=1}^{r+1} \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} \frac{\left(\text{Res } \Gamma_T^{[r+1,0]0}(-u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2) \right)^{-1}}{s + u_{0,t}^{(2)} \Lambda^2} \quad (2.81)$$

Der Austauschgraph enthält genau dann keine unphysikalischen Pole mehr, wenn ein „Gegenterm“ zu (2.81) existiert. Die Verwendung der Doppellinie soll kennzeichnen, dass in dem Diagramm *kein* Austausch eines physikalischen Bosons stattfindet. Das *Schattenpol-Diagramm* kann daher nicht als Teilchen-reduzibel gelten.

Die Analyse von (2.80) mit Hilfe der DSG für den Boson-Vertex (A.74) zeigt, dass in diesem Fall nur die bosonische T_s -Amplitude die zur *Absorption notwendigen* Terme hervorbringt. Nach dem in [Zim 59, Zim 60] formulierten Theorem ist die volle T_4 -Amplitude an den Mandelstam-Polen faktorisiert. Diese Tatsache hatten wir uns bei der Zerlegung der 4-Punkt-Vertexfunktion ja schon zu Nutze gemacht. In [Dri 98, DS 98] wird gezeigt, dass die in Mandelstam-Variablen faktorisierten Anteile von (2.43) mit Schattenpol-Diagrammen zu identifizieren sind. Damit gilt für die Zerlegung (2.43) in graphischer Notation

$$\begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} = \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} V_4 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} - \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} - \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} \quad (2.82)$$

Das bezüglich des t -Kanals reduzierbare Austauschdiagramm existiert aufgrund der Ladungserhaltung nicht.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig ein weiteres Diagramm zu definieren. Das *entschärfte* oder *punktierte Diagramm*

$$\begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} = \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W^0 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} - \begin{array}{c} W_\nu^+ \\ W_\rho^- \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^+ \\ W_\sigma^- \end{array} \quad (2.83)$$

ist durch das Schattenpol-Diagramm von unphysikalischen Polen auf der inneren Linie befreit. Mit dem so eingeführten MKP wird insgesamt die Systematik erkennbar, dass zwei nichtperturbative Vertexfunktionen stets durch eine *entschärfte Linie* verbunden sind.

Der MKP ist ohne Weiteres auf die BSG aus Abschnitt 1.4 übertragbar. Dazu ist zusätzlich zur üblichen Definition zu fordern, dass die BS-Kerne bezüglich eines Kanals nicht nur 1- und 2-PI sind, sondern auch Schatten-irreduzibel sind. Damit sind z. B. die inneren Linien der Schleifen in der Definitionsgleichung (1.63) des BS-Kerns als punktiert zu verstehen.

Als weiteres Beispiel wird die BSG einer bosonischen 4-Punkt-Amplitude angegeben, die bezüglich des s -Kanals 1-Teilchen- und Schatten-irreduzibel ist. Die Gleichung ist bis auf Terme mit Geister-Schleifen von der Gestalt

$$\begin{aligned}
 & W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad T_s \\
 & = \quad W_\nu^0 \quad W_\mu^0 \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad K_s \\
 & + \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad T_s \quad K_s \\
 & \quad W^+ \quad W^- \\
 & + \quad \frac{1}{2} \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad T_s \quad K'_s \\
 & \quad W^0 \quad W^0 \\
 & - \quad \sum_f \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad \bar{T}_s \quad \bar{K}_s \\
 & \quad f \quad f
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

und wird in Kapitel 4 erneut auftreten. Hier schreiben wir die K nun, ohne eine neue Bezeichnung einzuführen, für die im *erweiterten* Sinne irreduziblen BS-Kerne. Dabei gilt für die Amplitude die Skelettgraphenentwicklung

$$\begin{aligned}
 & W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad T_4 \\
 & = \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad V_4 \\
 & + \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad W^0 \\
 & + \quad W_\nu^+ \quad W_\mu^+ \\
 & W_\rho^- \quad W_\sigma^- \quad W^0
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

In [Kuh 97] wird betont, dass die kompensierenden Pole als nichtperturbative Modifikationen für $\Lambda \rightarrow 0$ gemäß (2.16) verschwinden sollen. Das gelingt nicht automatisch, denn die Diagramme mit Schattenlinien entfernen auch Terme, die im perturbativen Limes von Null verschieden sind. Es treten Defektterme auf, die zum Verschwinden zu bringen sind.

Die in dieser Arbeit verwendete Methode zur Berechnung der perturbativen Divergenzen umgeht diese Problematik. Die störungstheoretischen Divergenzen werden aus den unpunkteten Diagrammen ermittelt. Der Limes $\Lambda \rightarrow 0$ wird erst am Ende der Rechnungen vollzogen. Die gesamten nichtperturbativen Erweiterungen, insbesondere der MKP, fallen heraus. Es gibt keine Defektterme.

Kapitel 3

Der Fermion-Sektor

In diesem Kapitel werden SKG der dynamischen Gleichungen des Fermion-Sektors formuliert. Dies betrifft die DSG der Fermion-Propagatoren und die BS-resummierten DSG der Fermion-Vertizes. Dabei werden folgende Arbeitsschritte durchgeführt: Die in Abschnitt 2.3 definierten rationalen Approximanten werden in die Bewegungsgleichungen eingesetzt. Die physikalischen Polfaktoren der Integranden werden in ihre Partialbrüche zerlegt, wodurch die Schleifenintegrale eine ähnliche Gestalt wie in der Störungstheorie annehmen, aber nichtperturbative Modifikationen besitzen, die mit der Λ -Skala auftreten. Mit Standardtechniken wie Feynman-Parametrisierungen und sphärisch symmetrischer Integration werden die Impulsintegrale gelöst, wobei die auftretenden Divergenzen herauspräpariert werden. Anschließend wird der $1/g^2$ -Mechanismus angewendet, wodurch der divergente Anteil der Schleifen zur Reproduktion der nullten quasi-perturbativen Ordnung beiträgt. Die so ausgewerteten und renormierten Bewegungsgleichungen werden nach Matrix- und Lorentzstrukturen sortiert. Die SKG ergeben sich schließlich durch Koeffizientenvergleich in den äußeren Impulsen und der Λ -Skala.

3.1 Der inverse Fermion-Propagator

3.1.1 Schleifenberechnungen

Um die SK-Bedingungen der Fermionselbstenergie aufzustellen, sind zunächst die drei Diagramme der zugehörigen DSG, siehe (A.67), zu behandeln. Da die Integranden der Schleifenintegrale sehr ähnlich sind, wird die Berechnung der Divergenzen exemplarisch an dem Diagramm

$$\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) = \begin{array}{c} \text{---} f \text{---} \\ \text{---} W^- \text{---} \\ \text{---} f' \text{---} \\ \text{---} f \text{---} \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
= & (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0)}{}_{ff'\mu}{}^-(-p, q, p - q) t_{\mu\nu}(q - p) D_T^{+[r,0]}(q - p) \right. \\
& \left. \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{f'f\nu}{}^+(-q, p, q - p) \right\} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

vorgeführt. Der Index f steht dabei für die Fermionen aus der unteren Komponente der Isospinoren für Lepton und Quark. Dies können beispielsweise Elektron und down-Quark sein. Die Linie, die mit f' bezeichnet ist, symbolisiert die mit dem von rechts einlaufenden Fermion f erlaubten Reaktionen. Das Lepton wechselwirkt in dem W^+ -Vertex mit dem zugehörigen Lepton-Neutrino und entsprechend das down- mit dem up-Quark.

Die erweiterten Feynman-Regeln aus Kapitel 2 für die vollen Propagatoren und Vertizes werden in die Schleife eingesetzt. Dies führt unter Vorwegnahme jenes Teils der SK-Bedingungen, wonach die Nullstellen der Propagatoren gegen die Pole der Vertizes gekürzt werden dürfen, zunächst auf

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) &= \frac{1}{2 c_\pm \bar{c}_f} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma_\mu \\
&\cdot \frac{(\not{q})^n}{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{q} + \omega_{f',s}^{(1)} \Lambda)} \left[V_{f'fW^+}^{[r]mnn'} \gamma_\nu + A_{f'fW^+}^{[r]mnn'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] \frac{(\not{p})^{n'}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} \left(\delta_{\mu\nu}(q - p)^2 \right. \\
&\left. - (q - p)_\mu (q - p)_\nu \right) \frac{1}{(q - p)^2} \frac{((q - p)^2)^m}{\prod_{s=1}^{r+1} \left((q - p)^2 + u_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2 \right)}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Um die Indizierung der Größen nicht zu überfrachten, wird auf die Angabe des Approximationsgrades r der nichtperturbativen Parameter ab jetzt verzichtet.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Impulsintegral zu lösen. Nachdem man die Nenner durch geschicktes Erweitern in skalare Größen überführt hat, kann man sie durch mehrmalige Feynman-Parametrisierung zusammenfassen und schließlich den gesamten Ausdruck integrieren. Da diese Vorgehensweise das Herausarbeiten der divergenten Anteile erschwert, soll zunächst eine Partialbruchzerlegung der Nenner des Integranden durchgeführt werden. Eine Hilfsformel dazu findet sich in Anhang B.2. Für (3.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) &= \frac{1}{2 c_\pm \bar{c}_f} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \\
&\cdot \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \Lambda - \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)} \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2 - u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} + \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda} \\
&\left[V_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu + A_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] \frac{1}{(q - p)^2 + u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2} \left(\delta_{\mu\nu}(q - p)^2 \right. \\
&\left. - (q - p)_\mu (q - p)_\nu \right) \frac{1}{(q - p)^2} \frac{(\not{p})^{n'}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)}. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass der Integrand bereits in der Störungstheorie auftritt, wenn man vom nichtperturbativen Charakter der Massenskala absieht. Die Massen der Polterme, die hier durch die Λ -Skala erzeugt werden, können mit den Massen in der elektroschwachen Theorie, die durch den Higgs-Mechanismus bzw. durch die spontane Symmetriebrechung erzeugt werden, verglichen werden [DGH 94]. Die nichtperturbativen Modifikationen stecken in den Partialbrüchen von (3.4). Das Resultat der Integralberechnung ist in Anhang C angegeben. Der Rechenweg soll - wiederum exemplarisch - an dieser Stelle kurz geschildert werden: Nachdem der matrixwertige Nenner in einen rationalen Ausdruck umgewandelt worden ist, lässt sich die Feynman-Parametrisierung, wie sie in Anhang B.3 angegeben ist, anwenden, und man erhält

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) = & -\frac{1}{2c_{\pm}\bar{c}_f} (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \\
& \cdot \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \Lambda - \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)} \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2 - u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma_\mu \\
& \left(\not{q} - \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda \right) \left[V_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu + A_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu \gamma_5 \right] \left(\delta_{\mu\nu} (q-p)^2 - (q-p)_\mu (q-p)_\nu \right) \\
& \frac{1}{[(q-yp)^2 + R^2]^3} \frac{(\not{p})^{n'}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

mit der vom Integrationsimpuls q unabhängigen Funktion

$$R^2 = p^2(y-y^2) + (\omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)^2(1-y) + u_{\pm,t_2}^{(2)} \Lambda^2 xy. \tag{3.6}$$

Nach der Variablensubstitution $q_\mu \rightarrow q_\mu + yp_\mu$ und Ausmultiplizieren des Zählers lassen sich die resultierenden Integrale mit Hilfe der üblichen Manipulationsvorschriften und der Standardformel der sphärisch symmetrischen Integration (siehe Anhang B) lösen. Da nur die divergenten Anteile der Fermion-Schleife, die sich durch Abzählen der Impulspotenzen leicht bestimmen lassen, für den SKM interessant sind, werden die konvergenten Teile an dieser Stelle nicht weiter berücksichtigt. Damit ist bis hierher

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) = & -\frac{1}{2c_{\pm}\bar{c}_f} (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-(2m+n+n')} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \\
& \cdot \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \Lambda - \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)} \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2 - u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \\
& \gamma_\mu \left[\left(\frac{1}{D}(y-2)\not{p} + y\not{p} + \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda \right) [V_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\mu + A_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\mu \gamma_5] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{D}(y-1)(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) [V_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu + A_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_\nu \gamma_5] \right] \\
& \cdot \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon) (R^2)^{-\epsilon} \frac{(\not{p})^{n'}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} + \text{endl. Anteile.} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Der aus der Impulsintegration stammende Ausdruck $(R^2)^{-\epsilon}$ liefert den Faktor $\Lambda^{-2\epsilon}$, denn die reduzierte Funktion $(R/\Lambda)^{-2\epsilon}$ unter dem Feynman-Integral ist um $\epsilon = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelbar und liefert zusammen mit der Eulerschen Gammafunktion, die ebenfalls um Null entwickelt wird, die für den SKM nötige Divergenz¹. In ϵ reguläre Terme sind zur Formulierung der SKG nicht interessant und werden zu den endlichen Teilen gerechnet. Nun lassen sich die Feynman-Parameterintegrale ausführen. Beim Zusammenfassen der Terme bedient man sich der Kontraktionsformeln der euklidischen γ -Matrizen. Sie sind im Anhang B.1 zusammengestellt. Kürzen der Λ liefert

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) &= -\frac{3}{2\bar{c}_f c_{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \\
&\quad \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_2}^{(1)})} \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda \left[V_{f'fW^+}^{mnn'} + A_{f'fW^+}^{mnn'} \gamma_5 \right] \\
&\quad \cdot \frac{(\not{p})^{n'}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} + \text{endl. Anteile} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

als Zwischenergebnis. Es ist eine spezielle Eigenschaft der Landau-Eichung, dass keine Terme proportional zu \not{p} in (3.8) *auftreten*. Man sieht, dass der für den SKM notwendige Faktor $\Pi(\epsilon)$ automatisch ausgebildet wird. Er ist, wie bereits erwähnt, im Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ endlich. Prinzipiell ist die Berechnung des Diagramms nun abgeschlossen. Aber die mit den Partialbrüchen verbundenen Summationen lassen sich noch ausführen. Alle dazu notwendigen Relationen sind ebenfalls in Anhang B.2 aufgeführt. Folgendes Beispiel soll den Mechanismus der „Zurücknahme“ illustrieren:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} V_{f'fW^+}^{mnn'} \\
&= \sum_{t_1=1}^{r+1} \frac{(-1)^{r+1} (\omega_{f',t_1}^{(1)})^{r+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} V_{f'fW^+}^{mrrn'} + \sum_{t_1=1}^{r+1} \frac{(-1)^r (\omega_{f',t_1}^{(1)})^r}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} V_{f'fW^+}^{mr-1n'} + \dots \\
&= (-1)^{r+1} (-1)^r \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} V_{f'fW^+}^{mrrn'} + (-1)^r (-1)^r V_{f'fW^+}^{mr-1n'} \\
&= V_{f'fW^+}^{mr-1n'} - V_{f'fW^+}^{mrrn'} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Die Vereinfachungen im vorletzten Rechenschritt ergeben sich mit Hilfe von (B.36), (B.37) und (B.38).

Im Approximationsgrad $r = 0$ ist der nichtperturbative Parameter $V_{f'fW^+}^{mr-1n'}$ mit einem negativen Index versehen und soll, da er kein Bestandteil des nichtperturbativen Ansatzes ist,

¹Nur diese Form der Entwicklung führt letztlich zum richtigen Resultat, vgl. [Dri 97, Kuh 97].

definitionsgemäß verschwinden.

Die Zurücknahme des zweiten Partialbruchs ist sehr viel einfacher, denn dort trägt nur der höchste Summand der m -Summation bei. Der Beitrag zur nullten Ordnung dieser Schleife lässt sich jetzt in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) &= \frac{3}{2\beta_0 \bar{c}_f c_{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ V_{f'fW^+}^{rr-1n} - V_{f'fW^+}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_5 \left(A_{f'fW^+}^{rr-1n} - A_{f'fW^+}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) \right\} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} + \text{endl. Anteile} \end{aligned} \quad (3.10)$$

für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ vollständig angeben.

Die Ergebnisse der übrigen Diagramme, die zur SKG des inversen Fermion-Propagators beitragen, werden nun zusammengestellt. Da die Rechnungen, wie bereits zu Beginn erwähnt, völlig analog verlaufen, sind sie nicht explizit formuliert.

Zunächst wird das Pendant zur vorangegangenen Schleife betrachtet, wo ein Lepton-Neutrino oder ein up-Quark von rechts in das Diagramm einlaufen und in einem W^- -Vertex wechselwirken. Die Berechnung des Graphen

$$\mathcal{I}_{1b}(p, \Lambda) = \begin{array}{c} \text{Diagram: A circular loop with a wavy top arc labeled } W^+ \text{ and a solid bottom arc labeled } f'. \text{ An external line labeled } f \text{ enters from the right and connects to a small white circle on the right side of the loop. Another external line labeled } f \text{ exits from the left side of the loop.} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0)} f f' \mu^+(-p, q, p - q) t_{\mu\nu}(q - p) D_T^{+[r,0]}(q - p) \right. \\ &\quad \left. \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]} f' f \nu^-(-q, p, q - p) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ergibt für $(f, f') = (\nu_l, l)$ und $(f, f') = (u, d)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1b}(p, \Lambda) &= \frac{3}{2\beta_0 \bar{c}_{f'} c_{\pm}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ V_{f'fW^-}^{rr-1n} - V_{f'fW^-}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_5 \left(A_{f'fW^-}^{rr-1n} - A_{f'fW^-}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) \right\} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} + \text{endl. Anteile.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mit dem ungeladenen Fermion-Vertex wechselwirken alle hier betrachteten Fermionen, d. h. $f = \nu_l, l, u$ und d . Dem trägt das Diagramm

$$\mathcal{I}_2(p, \Lambda) = \text{Diagram} \quad (3.14)$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0)}{}_{ff\mu}{}^0(-p, q, p-q) t_{\mu\nu}(q-p) D_T^{0[r+1,0]}(q-p) \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]}{}^0(-q, p, q-p) \right\} \quad (3.15)$$

Rechnung, welches mit den erweiterten Ansätzen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(p, \Lambda) &= \frac{3}{2\beta_0 \bar{c}_f c_0} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2)_f \left\{ V_{ffW^0}^{r+1r-1n} - V_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma_5 \left(A_{ffW^0}^{r+1r-1n} - A_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) \right\} + (T_3)_f \left\{ W_{ffW^0}^{r+1r-1n} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + \gamma_5 \left(B_{ffW^0}^{r+1r-1n} - B_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) \right\} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{(\not{p})^n}{r} + \text{endl. Anteile} \\ &\quad \prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \end{aligned} \quad (3.16)$$

als Resultat nullter Ordnung liefert.

3.1.2 Formulierung der SK-Bedingungen

Nachdem nun alle beitragenden Schleifen ausgerechnet sind, können die SKG aufgestellt werden. Die Resultate der Integralberechnungen des vorhergehenden Abschnitts ergeben in kompakter Form

$$I(\not{p}, \Lambda) = \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \left\{ \frac{1}{c_\pm \bar{c}_{f'}} I_{1;n}^{ff'} + \frac{1}{c_0 \bar{c}_f} I_{2;n}^{ff'} \right\} \Lambda^{r+1-n} \frac{(\not{p})^n}{r} \prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \tilde{I}_n \Lambda^{r+1-n} \frac{(\not{p})^n}{r} \prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda). \quad (3.18)$$

Dabei beinhalten die Funktionen $I_{1;n}^{ff'}$ und $I_{2;n}^{ff'}$ die nichtperturbativen Parameter. Größen mit Massendimension, was hier die Λ -Skala und der von außen einlaufende Impuls p sind, sowie

die RG-Invariante β_0 und die Faktoren der Propagatoren sind herausdefiniert. \tilde{I}_n fasst den Inhalt der geschweiften Klammer in (3.17) zusammen.

Mit dieser verkürzenden Schreibweise und den erweiterten Ansätzen für die vollen Propagatoren aus Kapitel 2.3 nimmt die DSG des inversen Fermion-Propagators in nullter quasiperturbativer Ordnung die übersichtliche Gestalt

$$-\bar{c}_f \frac{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda)}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} = -\not{p} + \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \tilde{I}_n \Lambda^{r+1-n} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \quad (3.19)$$

an. Bei der so formulierten DSG handelt es sich „nur“ noch um eine rein algebraische Beziehung, die alle SK-Bedingungen des Fermion-Propagators enthält. Um eine Bedingung für \bar{c}_f zu erhalten, ist der perturbative Limes zu bestimmen. Dies ist leicht, denn die Fermion-Schleifen bilden in Landau-Eichung und im masselosen Fall keine perturbativen Divergenzen aus [PT 82]. Gleichung (3.19) im Limes $\Lambda \rightarrow 0$ liefert

$$\bar{c}_f = 1. \quad (3.20)$$

Damit kann die DSG des Fermion-Propagators in Landau-Eichung prinzipiell keinen von einem verschiedenen Wert für \bar{c}_f bewirken. Die Schleifen der DSG müssten dazu Korrekturterme zum nackten Propagator liefern, die proportional zu \not{p} sind. Genau genommen ist an dieser Stelle zusätzlich zu klären, ob die Renormierungskonstanten vermöge der Beziehung (1.49) die nullte quasiperturbative Ordnung modifizieren. Beim Blick auf die entsprechende Konstante für den Fermion-Propagator (1.46) wird jedoch deutlich, dass diese Frage im Gegensatz zu den Fermion-Vertizes, wie sich später zeigt, verneint werden kann.

Damit ergibt sich für die DSG des inversen Fermion-Propagators (3.19) die folgende Form

$$-\frac{\prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda)}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} = -\not{p} + \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \tilde{I}_n \Lambda^{r+1-n} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)}. \quad (3.21)$$

In den bisherigen Arbeiten, wie z. B. [Dri 97, Kuh 97], sind an dieser Stelle die SKG über Residuenvergleiche der Polfaktoren ermittelt worden. Eine hierzu äquivalente Möglichkeit ist der in [Grü 02] benutzte Mechanismus. Die rearrangierte DSG (3.21) wird mit den Polfaktoren multipliziert. Die SKG ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich in dem äußeren Impuls und der Λ -Skala.

Multiplikation mit den Poltermen liefert

$$-\prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda) = -\not{p} \prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) + \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \tilde{I}_n \Lambda^{r+1-n} (\not{p})^n. \quad (3.22)$$

Bei niedrigen Approximationsgraden r ist der Koeffizientenvergleich noch recht übersichtlich, im Allgemeinen aber schwierig. Es ist zweckmäßig, die Produkte

$$\prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda) = \sum_{l=0}^{r+1} \tilde{\omega}_{f,l}^{(1)} (\not{p})^l (\Lambda)^{r+1-l}, \quad \tilde{\omega}_{f,l}^{(1)} = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \frac{1}{l!(r+1-l)!} \prod_{i=1}^{r+1-l} \omega_{f,\sigma(i)}^{(1)} \quad (3.23)$$

und

$$\prod_{s=1}^r \left(\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda \right) = \sum_{l=0}^r \tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} (\not{p})^l (\Lambda)^{r-l}, \quad \tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} \omega_{f,\sigma(i)}^{(2)} \quad (3.24)$$

auszurechnen. Die $\tilde{\omega}$ sind die bekannten elementarsymmetrischen Funktionen der entsprechenden ω und sind die Koeffizienten von Nenner- bzw. Zählerpolynomen des Propagators. Dabei bezeichnet S_r die Permutationsgruppe vom Grad r . Die DSG (3.22) schreibt sich damit als

$$\sum_{l=0}^{r+1} \tilde{\omega}_{f,l}^{(1)} \not{p}^l \Lambda^{r+1-l} = \sum_{l=0}^r \tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} \not{p}^{l+1} \Lambda^{r-l} - \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^r \tilde{I}_n \Lambda^{r+1-n} \not{p}^n \quad (3.25)$$

und die SKG lassen sich simultan in der Form

$$\tilde{\omega}_{f,m}^{(1)} = \tilde{\omega}_{f,m-1}^{(2)} - \frac{1}{\beta_0} \tilde{I}_m \quad (3.26)$$

für $m = 0, 1, \dots, r$ angeben. Der Fall $m = r + 1$ reproduziert die Renormierung und liefert daher mit $\tilde{I}_{r+1} = 0$ nur eine triviale Aussage.

Da die kompakte Form der SKG (3.26) wenig aussagekräftig ist, soll die Gleichung nach den Matrixstrukturen $\mathbf{1}$ und γ_5 weiter zerlegt werden. Die Schleifenresultate, die in \tilde{I}_m verborgen liegen, werden eingesetzt. Damit sind die SK-Bedingungen für $(f, f') = (l, \nu_l)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{f,m}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{f,m-1}^{(2)} - \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} \left(V_{ffW^+}^{rr-1m} - V_{ffW^+}^{rrm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) - \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(V_{ffW^0}^{r+1r-1m} \right. \\ &\quad \left. - V_{ffW^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} - W_{ffW^0}^{r+1r-1m} + W_{ffW^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} \left(A_{ffW^+}^{rr-1m} - A_{ffW^+}^{rrm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) - \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(A_{ffW^0}^{r+1r-1m} \right. \\ &\quad \left. - A_{ffW^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} - B_{ffW^0}^{r+1r-1m} + B_{ffW^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{f',m}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{f',m-1}^{(2)} - \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} \left(V_{ff'W^-}^{rr-1m} - V_{ff'W^-}^{rrm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) - \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(V_{ff'W^0}^{r+1r-1m} \right. \\ &\quad \left. - V_{ff'W^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + W_{ff'W^0}^{r+1r-1m} - W_{ff'W^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} \left(A_{ff'W^-}^{rr-1m} - A_{ff'W^-}^{rrm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) - \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(A_{ff'W^0}^{r+1r-1m} \right. \\ &\quad \left. - A_{ff'W^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + B_{ff'W^0}^{r+1r-1m} - B_{ff'W^0}^{r+1rm} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

gegeben. Bei Vorgabe eines expliziten Approximationsgrades sollen die Parameter V, W, A und B mit negativen Indizes verschwinden.

Streng genommen müssten an dieser Stelle die SKG der ladungskonjugierten DSG berechnet und ebenfalls hinzugenommen werden. Da aber die Approximanten, wie schon in Kapitel 2 erwähnt, invariant unter \mathcal{CP} -Transformationen sind, gewinnt man aufgrund der Symmetriebeziehungen (2.31) und (2.36) keine neuen Informationen.

Obwohl die DSG Boson-Linien enthalten, taucht in den SKG kein zugehöriger mit Λ skaliertes nichtperturbativer Parameter auf. Dies ist auf die Divergenzstruktur der Diagramme zurückzuführen. Die einzige Verknüpfung mit dem Boson-Sektor erfolgt über die multiplikativen Konstanten c_{\pm} und c_0 aus den Ansätzen der Propagatoren.

3.1.3 Selbstkonsistenz für $r/r + 1 = 0/1$

In diesem kurzen Abschnitt werden die SKG, die aus der Analyse des inversen Fermion-Propagators folgen, für den einfachsten Approximationsgrad $r/r + 1 = 0/1$ dargestellt. Die aus diesen Gleichungen zu bestimmenden erweiterten Ansätze werden an dieser Stelle für $r = 0$ kurz aufgeführt. Die Fermion-Propagatoren für $f = \nu_l, l, u$ und d haben die Form

$$S_f^{[0,0]}(\not{p}) = \frac{1}{\bar{c}_f} \frac{1}{\not{p} + \omega_{f,1}^{(1)} \Lambda} \quad (3.31)$$

mit jeweils einem Massepol. Die geladenen Fermionvertizes behalten bis auf einen Faktor ihre störungstheoretische Gestalt. Zu nichtperturbativen Modifikationen durch die Λ -Skala kommt es erst bei höheren Approximationsgraden. Der W^0 -Fermion-Vertex

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_3^{[0/1,0]}{}^0_{ff\mu}(-p_1, p_2, k) &= -(T_3)_f \frac{t_{\mu\nu}(k)}{k^2 + \bar{u}'_{0,1} \Lambda^2} \gamma_\nu \left\{ V_{ffW^0}^{100} k^2 + V_{ffW^0}^{000} \Lambda^2 + A_{ffW^0}^{000} \gamma_5 \Lambda^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2)_f \frac{t_{\mu\nu}(k)}{k^2 + \bar{u}'_{0,1} \Lambda^2} \gamma_\nu \left\{ W_{ffW^0}^{000} \Lambda^2 + B_{ffW^0}^{000} \gamma_5 \Lambda^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

hingegen ist komplizierter. Das Selbstkonsistenzproblem für die Propagatoren allein ist selbstverständlich unterbestimmt. Erst durch Hinzunahme der SKG der 3-Punkt-Vertizes wird eine Lösung ermöglicht.

Für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ sind die SK-Beziehungen

$$\omega_{f,1}^{(1)} = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^+}^{000} \omega_{f',1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(V_{ffW^0}^{100} - W_{ffW^0}^{100} \right) \omega_{f,1}^{(1)}, \quad (3.33)$$

$$0 = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} A_{f'fW^+}^{000} \omega_{f',1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(A_{ffW^0}^{100} - B_{ffW^0}^{100} \right) \omega_{f,1}^{(1)}, \quad (3.34)$$

$$\omega_{f',1}^{(1)} = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{ff'W^-}^{000} \omega_{f,1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(V_{f'f'W^0}^{100} + W_{f'f'W^0}^{100} \right) \omega_{f',1}^{(1)}, \quad (3.35)$$

$$0 = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} A_{ff'W^-}^{000} \omega_{f,1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} \left(A_{f'f'W^0}^{100} + B_{f'f'W^0}^{100} \right) \omega_{f',1}^{(1)} \quad (3.36)$$

gegeben. Mit Hilfe des Ansatzes (3.32) sieht man sofort, dass die Gleichungen (3.34) und (3.36) trivial werden. Es bleiben

$$\omega_{f,1}^{(1)} = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^+}^{000} \omega_{f',1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{ffW^0}^{100} \omega_{f,1}^{(1)}, \quad (3.37)$$

$$\omega_{f',1}^{(1)} = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{ff'W^-}^{000} \omega_{f,1}^{(1)} + \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{f'f'W^0}^{100} \omega_{f',1}^{(1)}. \quad (3.38)$$

Durch Umstellen der Gleichungen ergibt sich als einfachstes Beispiel für die noch zu diskutierende allgemeine Skalierungseigenschaft der SKG ein homogenes Gleichungssystem der Form

$$\left(1 - \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{ffW^0}^{100}\right) \omega_{f,1}^{(1)} - \left(\frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^+}^{000}\right) \omega_{f',1}^{(1)} = 0, \quad (3.39)$$

$$-\left(\frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^-}^{000}\right) \omega_{f,1}^{(1)} + \left(1 - \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{f'fW^0}^{100}\right) \omega_{f',1}^{(1)} = 0. \quad (3.40)$$

Die triviale Lösung dieses Systems ist für Leptonen und leichte Quarks, deren Massen weit unterhalb der elektroschwachen Massenskala liegen, bereits durchaus realistisch. Für das bottom- und das top-Quark gilt dies sicher nicht. Ihre Massen sollten sich im Rahmen der erweiterten Theorie aus der Determinantenbedingung

$$\left(1 - \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{ffW^0}^{100}\right) \left(1 - \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{f'fW^0}^{100}\right) - \frac{9}{4\beta_0^2 c_{\pm}^2} V_{f'fW^+}^{000} V_{f'fW^-}^{000} = 0 \quad (3.41)$$

für nichttriviale Lösungen eines homogenen Systems ergeben. Das Massenverhältnis ergibt sich zu

$$\omega_{f,1}^{(1)}/\omega_{f',1}^{(1)} = \left(\frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^+}^{000}\right) \left(1 - \frac{3}{4\beta_0 c_0} V_{ffW^0}^{100}\right)^{-1}. \quad (3.42)$$

Ein interessanter Fall von (3.41) ist die in Kapitel 2 geschilderte strenge perturbative Limesbildung. Demnach müssen alle c -Parameter und die Konstanten der Zählerpolynome in den Vertexfunktionen mit maximalen Indizes in den SKG den Wert eins annehmen. Für (3.41) ergibt sich hier

$$16\beta_0^2 - 24\beta_0 - 27 = 0. \quad (3.43)$$

Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $-3/4$ und $9/4$ für β_0 . Der erste Wert ist mit der Bedingung der asymptotischen Freiheit $\beta_0 > 0$ nicht verträglich und darum auszuschließen. Für ein Quark-Isodublett, d. h. $N_f = 3$, stimmt $\beta_0 = 9/4$ mit dem in [Kuh 97] gefundenen Wert überein. Das Massenverhältnis bestimmt sich zu $\omega_{f,1}^{(1)} = \omega_{f',1}^{(1)}$. Für eine $SU(2)$ -Eichgruppe mit einem Quark-Dublett und entsprechend gezählten Farbquantenzahlen wäre $\beta_0 = 16/3$ theoretisch richtig. Damit stimmen die Größenordnungen überein.

An dieser Stelle wird deutlich, welchen Vorteil der Verzicht auf die strenge perturbative Limesbildung bietet: Die SKG beinhalten mehr Parameter und haben so eine größere Lösungsvielfalt. Der Nachteil liegt jedoch darin, dass zusätzliche Bedingungen formuliert werden müssen.

3.2 Der Fermion- W^0 -Vertex

Da die Berechnungen der quasiperturbativen Korrekturen und das Aufstellen der SKG für drei Fermion-Vertizes vollkommen analog verläuft, wird der W^0 -Fermion-Vertex exemplarisch behandelt. Die dazu notwendigen Schleifenberechnungen werden durchgeführt und die SK-Bedingungen werden abgeleitet. Auf eine detaillierte Herleitung der Schleifenresultate der übrigen Fermion-Vertizes, die Gegenstand eines späteren Abschnitts sein werden, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Die SK-Bedingungen werden lediglich angegeben und diskutiert.

3.2.1 Schleifenresultate

Startpunkt der Berechnungen ist die BS resummierte DSG (1.67). Dabei werden die Diagramme, die die oberflächlich konvergenten fermionischen 4-Punkt-Vertizes enthalten, weggelassen. Sie tragen zum SKM nicht bei. Auf die verbleibende Gleichung ist der MKP, wie in Kapitel 2 eingeführt, anzuwenden. Dadurch werden die inneren Linien punktiert. Zu berechnen bleiben lediglich die nicht-abelschen Diagramme. Das „abelsche“ Diagramm, in dem der Boson-Vertex nicht vorkommt, bildet in Landau-Eichung keinerlei Divergenzen aus, vgl. [PT 82], und trägt also ebenfalls nicht zum SKM bei. Damit kann es zu den endlichen Teilen gerechnet werden. In der verbleibenden DSG

$$(3.44)$$

für die Selbstreproduktion der nullten quasiperturbativen Ordnungen sind zwei Schleifen zu berechnen. Für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ ist die logarithmisch divergente Schleife

$$(3.45)$$

$$(3.46)$$

zu behandeln.

Der MKP greift im Vergleich zu den Diagrammen des vorigen Abschnitts voll, denn hier tritt der Fall auf, dass zwei volle Vertizes durch eine Propagator-Linie verbunden sind. Es werden also unphysikalische Pole ausgebildet, die durch Graphen mit Schattentermen absorbiert werden müssen.

Nach den bisherigen Erfahrungen im Umgang mit Schattengraphen gibt es prinzipiell zwei äquivalente Möglichkeiten, das obige, entschärfte Dreiecksdiagramm zu berechnen. Um die unphysikalischen Pole zu eliminieren, können zu dem unpunktierten Diagramm alle acht Schattengraphen hinzuaddiert werden, und man erhält neun zu berechnende Schleifen. Das ist machbar und wird beispielsweise in [Zan 00] praktiziert. Technisch einfacher ist es, nach dem Einsetzen der erweiterten Feynman-Regeln in das unpunktierte Diagramm die Polfaktoren in ihre Partialbrüche zu zerlegen [Grü 02]. Die unphysikalischen Polbeiträge lassen sich somit leicht herauspräparieren. Sie werden von den Schattenterme, die natürlich nicht ausgerechnet werden, exakt absorbiert.

Dieses Verfahren ergibt für die obige Schleife vor Integration und Feynman-Parametrisierung den langen Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{3a}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \frac{1}{2 c_\pm^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\
&\frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2} (-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+l} (-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+m}}{\psi_{t_1} \psi_{t_2} \psi_{t_3}} \\
&\cdot \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\gamma_{\mu_1} \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \gamma_5 \right) \frac{1}{\not{q} + \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda} \gamma_{\nu_1} \left(V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \gamma_5 \right) \right. \\
&\cdot \frac{\delta_{\mu_1 \mu_2} (q-p_1)^2 - (q-p_1)_{\mu_1} (q-p_1)_{\mu_2}}{(q-p_1)^2 ((q-p_1)^2 + u_{\pm,t_2}^{(1)} \Lambda^2)} \left(2\delta_{\mu_2 \nu_2} (p_2-q)_\sigma C_{lmn}^1 + 2\delta_{\nu_2 \sigma} (p_3)_{\mu_2} C_{lmn}^2 \right. \\
&- 2\delta_{\sigma \mu_2} (p_3)_{\nu_2} C_{lmn}^3 + \varepsilon_{\mu_2 \nu_2 \sigma \alpha} (-2q+p_1+p_2)_\alpha C_{lmn}^4 + \varepsilon_{\mu_2 \nu_2 \sigma \alpha} (p_3)_\alpha C_{lmn}^5 \left. \right) \\
&\cdot \left. \frac{\delta_{\nu_1 \nu_2} (q-p_2)^2 - (q-p_2)_{\nu_1} (q-p_2)_{\nu_2}}{(q-p_2)^2 ((q-p_2)^2 + u_{\pm,t_3}^{(1)} \Lambda^2)} \right] \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(p_3^2)^n \Lambda^{2r+2-2n}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_3^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

mit den Polfaktoren der Partialbruchzerlegungen

$$\psi_{t_1} = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (\omega_{f',s}^{(2)} - \omega_{f',t_1}^{(1)}), \quad (3.48)$$

$$\psi_{t_2} = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_2}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t_2}^{(1)}), \quad (3.49)$$

$$\psi_{t_3} = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_3}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_3}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t_3}^{(1)}). \quad (3.50)$$

An diesem Zwischenergebnis wird deutlich, dass die unphysikalischen Pole, die von den inneren Linien zwischen den angezogenen Vertexfunktionen geliefert werden, nicht mehr vorkommen. Das Ergebnis ist an den Stellen $\not{q} = -\omega_{f',t_1}^{(2)} \Lambda$, $(q-p_1)^2 = -u_{\pm,t_2}^{(2)} \Lambda^2$ und $(q-p_2)^2 = -u_{\pm,t_3}^{(2)} \Lambda^2$ regulär.

In (3.47) ist die Lorentzstruktur des Boson-Vertex bereits vereinfacht. Mit den Transversalprojektoren der inneren Boson-Linien lässt sich der Grad der Integrationsimpulse teilweise durch den Rechentrick

$$t_{\mu\nu}(q-p)q_\mu = t_{\mu\nu}(q-p)((q-p)_\mu + p_\mu) = t_{\mu\nu}(q-p)p_\mu \quad (3.51)$$

herabsetzen. Damit wird die logarithmisch divergente Schleife überschaubar. Die zur Kontraktion von γ -Matrizen und ε -Tensoren notwendigen Beziehungen sind in Anhang B.1 zu-

sammengefasst. Insgesamt ergibt sich nach Verwendung des $1/g^2$ -Mechanismus als Resultat

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3a}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\ &\frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2} (-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+l} (-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+m}}{\psi_{t_1} \psi_{t_2} \psi_{t_3}} \\ &\cdot \gamma_{\sigma} \left(V_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} + A_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(p_3^2)^n \Lambda^{2r+2-2n}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_3^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (3.52) \end{aligned}$$

mit den nichtperturbativen Funktionen

$$\begin{aligned} V_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} &= \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^1 \\ &\quad - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^4, \quad (3.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} &= \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^1 \\ &\quad - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^4. \quad (3.54) \end{aligned}$$

Dabei hängen (3.53) und (3.54) nicht von den Parametern C_{lmn}^2 , C_{lmn}^3 und C_{lmn}^5 ab.

Beim Aufstellen der SKG im nächsten Abschnitt wird der störungstheoretische Limes des Fermion-Diagramms (3.45) benötigt. Die soeben berechnete Schleife ist zu renormieren. Die Divergenz lässt sich aber nicht ohne weiteres aus (3.52) gewinnen, denn dort hat der MKP bereits gegriffen. Ein Teil der perturbativen Divergenzen liegt in den Diagrammen mit Schattelinien verborgen. Damit favorisiert auch der MKP die Aufgabe des strikten perturbativen Limes.

In diesem Fall ist es geschickter, das unpunktierete Diagramm zu berechnen und seine Divergenzen im perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ zu extrahieren [Grü 02]. Das Ergebnis entspricht natürlich der störungstheoretischen Berechnung des Diagramms, wobei die nichtperturbativen Parameter mit maximalen Indizes den Grenzwertprozess $\Lambda \rightarrow 0$ überleben. Insgesamt bleibt

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \mathcal{I}_{3a}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_{\sigma} V_{ff'W^-}^{rrr} V_{f'fW^+}^{rrr} C_{rrr+1}^1 \quad (3.55)$$

als der, der störungstheoretischen Divergenz entsprechende Term, zu notieren. Die Bestimmung des Schleifenintegrals ist der vorangegangenen Rechnung sehr ähnlich.

Die Berechnung des Diagramms für $(f', f) = (\nu_l, l)$ und $(f', f) = (u, d)$ verläuft analog und bedarf keiner weiteren Erklärungen. Die Schleife

$$\mathcal{I}_{3b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^{\epsilon})^{-1} \begin{array}{c} \begin{array}{c} W_{\mu}^0 \\ \text{---} \\ W^- \\ \text{---} \\ W^+ \\ \text{---} \\ f' \end{array} \end{array} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
= & (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0] +}(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \right. \\
& \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0] -}(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{+[r,0]}(p_2 - q) \\
& \left. \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\nu_2 \mu_2 \sigma}(p_2 - q, q - p_1, p_3) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (3.57)
\end{aligned}$$

ergibt nach völlig analoger Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{3b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = & -\frac{3}{4\beta_0 c_\pm^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\
& \frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f,t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2} (-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+m} (-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+l}}{\psi_{t_1} \psi_{t_2} \psi_{t_3}} \\
& \cdot \gamma_\sigma \left(V_{b;m_1,\dots,n}^{ff'} + A_{b;m_1,\dots,n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(p_3^2)^n \Lambda^{2r+2-2n}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_3^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (3.58)
\end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
V_{b;m_1,\dots,n}^{ff'} = & \left(V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^1 \\
& + 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^4, \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{b;m_1,\dots,n}^{ff'} = & \left(V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^1 \\
& + 2 \left(V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^4 \quad (3.60)
\end{aligned}$$

und den bereits definierten Poltermen (3.48), (3.49) und (3.50). Der perturbative Limes liefert den Ausdruck

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \mathcal{I}_{3b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = -\frac{3}{4\beta_0 c_\pm^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_\sigma V_{f'fW^+}^{rrr} V_{ff'W^-}^{rrr} C_{rrr+1}^1, \quad (3.61)$$

durch den der störungstheoretische Vertex in der DSG (3.44) modifiziert wird.

3.2.2 Renormierung des Vertex

Zur Berechnung von S-Matrixelementen werden die renormierten vollen Greenschen Funktionen verwendet. Der Zusammenhang ist durch die LSZ-Reduktionsformel gegeben [Mut 87]. Der Prozess der Renormierung kann auf die Vertexfunktionen übertragen werden. Ein N -Punkt-Vertex Γ_N in der hier betrachteten Konvention geht als $g_0^{N-2} \Gamma_N$ in die vollen Greenschen Funktionen ein, und für $N > 2$ bedarf der g_0 -Faktor einer perturbativen Renormierung, da er nicht von einem $\Pi(\epsilon)$ absorbiert wird². Es ist für das erweiterte Schema zu prüfen, inwieweit die nullte quasiperturbative Ordnung für die Variante II der quasiperturbativen Reihe

²Die Zerlegung von Greenschen Funktionen nach Vertexfunktionen geschieht durch eine Reduzibilitätsanalyse. Sie wird in Anhang A.2 am Beispiel der bosonischen 3-Punkt-Funktion vorgeführt.

durch Terme aus den Renormierungskonstanten bis zur Ordnung g^2 modifiziert werden kann. Ausgangspunkt der nun folgenden Überlegungen ist für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ die DSG des Fermion- W^0 -Vertex (3.44) in der analytischen Form

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) &= \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0]-}(-p_1, q, p_1 - q) \right. \\ &\quad \cdot t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]+}(-q, p_2, q - p_2) \\ &\quad \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{+[r,0]}(p_2 - q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]+0}_{\mu_2 \nu_2 \sigma}(q - p_1, p_2 - q, p_3) \right\} \\ &= \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda) + \mathcal{O}(g_0^2). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die Funktion $K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda)$ enthält neben den Impulsabhängigkeiten die Λ -Skala, die Matrizen γ_σ und γ_5 , sowie die im vorigen Abschnitt berechneten Kombinationen aus den nicht-perturbativen Parametern. Die Terme $\mathcal{O}(g_0^2)$ bilden keine Divergenzen aus und korrigieren somit die nullte quasiperturbative Ordnung nicht.

Der Zusammenhang zwischen der renormierten und der unrenormierten vollen Vertexfunktion ist nach (1.49) durch

$$\begin{aligned} (g(\nu) \nu^\epsilon) \left(\bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) \right)_R &= Z_2(\nu, \epsilon) Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} (g_0 \nu_0^\epsilon) \bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) \\ &= Z_2(\nu, \epsilon) Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} (g(\nu) \nu^\epsilon) \bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (3.63)$$

gegeben, wobei für die renormierte Kopplung der Zusammenhang (1.24) gilt. Einsetzen der DSG auf der rechten Seite von (3.63) liefert

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) \right)_R &= Z_2(\nu, \epsilon) Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} \\ &\quad + Z_2(\nu, \epsilon) Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda) + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \quad (3.64)$$

für den renormierten Vertex. Nun sind die Renormierungskonstanten entsprechend zu entwickeln. Da nur Beiträge bis zur Ordnung g^2 für den SKM interessant sind, reichen die angegebenen Darstellungen (1.31), (1.46) und (1.47) für weitere Zwecke aus. Die Entwicklung der Wurzeln ergibt

$$Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{11}{6}N - \frac{1}{3}N_f\right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4), \quad (3.65)$$

$$Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} = 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{13}{12}N - \frac{1}{3}N_f\right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4). \quad (3.66)$$

Mit $N = 2$ gilt für das von N_f unabhängige Produkt der Renormierungskonstanten

$$Z_2(\nu, \epsilon) Z_3(\nu, \epsilon)^{1/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4). \quad (3.67)$$

Dies in (3.64) eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]0}_{ff\sigma}(-p_1, p_2, p_3) \right)_R &= \left(1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4)\right) \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} \\ &\quad + \left(1 + \mathcal{O}(g^2)\right) \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda) + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Bei der Korrektur des nackten Vertex ist im Vergleich zu dem aus dem Schleifenintegral stammenden Term, der bereits proportional zu g^2 ist, eine zusätzliche Ordnung zu berücksichtigen.

Es ist zu sehen, dass (3.68) im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ keine endliche Größe ausbildet. Daher wird gefordert, dass die K -Funktion den divergenten Term absorbieren muss. Es bietet sich an, die Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]}{}_{ff\sigma}{}^0(-p_1, p_2, p_3) \right)_R &= \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} \\ &+ \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \left(K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda) - \frac{3}{2} \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} \right) \\ &+ \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} + \mathcal{O}(g_0^2, g^2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

zu erweitern. Es ergibt sich eine endliche Beziehung für den Fermion-Vertex, denn nach Anwendung des $1/g^2$ -Mechanismus gilt

$$\left(\bar{\Gamma}_3^{[r+1,0]}{}_{ff\sigma}{}^0(-p_1, p_2, p_3) \right)_R = \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \bar{\Gamma}_{3ff\sigma}^{(0)0} + \frac{1}{\beta_0} K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda). \quad (3.70)$$

Dabei liefert die rechte Seite der Gleichung die Korrektur zur quasiperturbativen nullten Ordnung. Der perturbative Limes erzeugt eine Bedingung für den führenden Koeffizienten der nichtperturbativen Approximante

$$V_{ffW^0}^{r+1rr} = 1 + \frac{1}{\beta_0} \left(-\frac{1}{2} \gamma_\sigma K_\sigma(\not{p}_1, \not{p}_2, \not{p}_3, \Lambda = 0) - \frac{3}{2} \right). \quad (3.71)$$

3.2.3 Die SK-Bedingungen

Mit den berechneten Schleifen und den Betrachtungen des letzten Abschnitts können nun die SKG aufgestellt werden. Gleichung (3.70) überführt die DSG, wobei $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ gilt, im Rahmen der erweiterten Theorie nach Multiplikation mit den Polfaktoren der Ansätze in die Beziehung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{r+1} \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r (\not{p}_1)^n \Lambda^{r-n} \gamma_\sigma \left(I_{VA}^{mnn'} - I_{WB}^{mnn'} \right) (\not{p}_2)^{n'} \Lambda^{r-n'} (p_3^2)^m \Lambda^{2r+2-2m} \\ &= \frac{1}{2} \prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \gamma_\sigma \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \prod_{s=1}^{r+1} (p_3^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \\ &+ \frac{3}{4\beta_0 c_\pm^2} \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r (\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1} \gamma_\sigma \mathcal{I}^{nn_1n'_2} (\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2} (p_3^2)^n \Lambda^{2r+2-2n}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Dabei verkürzen die Ausdrücke

$$I_{VA}^{mnn'} = V_{ffW^0}^{mnn'} + A_{ffW^0}^{mnn'} \gamma_5, \quad (3.73)$$

$$I_{WB}^{mnn'} = W_{ffW^0}^{mnn'} + B_{ffW^0}^{mnn'} \gamma_5 \quad \text{und} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{nn_1n'_2} &= \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2}}{\psi_{t_1}} \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+l}}{\psi_{t_2}} \\ &\frac{(-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+m}}{\psi_{t_3}} \left\{ V_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} + A_{a;m_1,\dots,n}^{ff'} \gamma_5 \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

die Schreibweise. Gleichung (3.75) beinhaltet dabei bis auf die äußeren Polfaktoren das Resultat der Schleifenberechnung (3.52). Die Funktionen $V^{ff'}$ und $A^{ff'}$, die eine Kombination der nichtperturbativen Parameter enthalten, werden in (3.53) und (3.54) definiert.

Der perturbative Limes der DSG, der im vorigen Abschnitt - wir erinnern an die Ausführungen vor Gleichung (3.55) - zum Teil vorweggenommen wurde, wird zunächst bestimmt. Für den Limes $\Lambda \rightarrow 0$ der nichtperturbativen Approximante und des nackten Vertex gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{r+1} \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r (\not{p}_1)^{n-r} \Lambda^{r-n} \gamma_\sigma \left(I_{VA}^{mnn'} - I_{WB}^{mnn'} \right) (\not{p}_2)^{n'-r} \Lambda^{r-n'} (p_3^2)^{m-r-1} \Lambda^{2r+2-2m} \\ & \xrightarrow{\Lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} V_{ffW^0}^{r+1rr} \gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{(\not{p}_1)^r} \prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \gamma_\sigma \prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \prod_{s=1}^{r+1} (p_3^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \frac{1}{(\not{p}_2)^r} \frac{1}{(p_3^2)^{r+1}} \\ & \xrightarrow{\Lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Zusammen mit dem perturbativen Limes (3.55) des Schleifenresultats lässt sich zunächst die Gleichung für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$,

$$V_{ffW^0}^{r+1rr} = 1 + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_\pm^2} V_{ff'W^-}^{rrrr} - V_{ff'W^+}^{rrrr} + C_{rrr+1}^1 - 1 \right), \quad (3.78)$$

notieren. Eine zusätzliche Bedingung dieser Art tritt bei den 2-Punkt-Vertizes, wo der MKP in den Schleifen nicht vorkommt, nicht auf.

Im Gegensatz zum inversen Fermion-Propagator erlaubt diese Beziehung, dass die nichtperturbativen Parameter der Vertexapproximante mit maximalem Indexsatz auch in Landau-Eichung im Prinzip einen von eins verschiedenen Wert ausbilden können. Ob dies der Fall ist, kann nur durch die numerischen Rechnungen in Kapitel 6 gezeigt werden. Darüberhinaus ist zu sehen, dass die Bedingung im strengen perturbativen Limes trivial erfüllt ist.

Die übrigen SK-Bedingungen erhält man aus (3.72) durch Koeffizientenvergleich in den äußeren Impulsen und der Λ -Skala. Es ist dazu zweckmäßig die Produkte wiederum mittels der elementarsymmetrischen Funktionen gemäß

$$\tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} \omega_{f,\sigma(i)}^{(2)} \quad \text{und} \quad \tilde{u}_{0,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \frac{1}{l!(r+1-l)!} \prod_{i=1}^{r+1-l} u_{0,\sigma(i)}^{(2)} \quad (3.79)$$

zu schreiben. Damit lässt sich (3.72) in der Form

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{r+1} \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r (\not{p}_1)^n \Lambda^{r-n} \gamma_\sigma \left(I_{VA}^{mnn'} - I_{WB}^{mnn'} \right) (\not{p}_2)^{n'} \Lambda^{r-n'} (p_3^2)^m \Lambda^{2r+2-2m} \\ & = \sum_{l=0}^r \tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} (\not{p}_1)^l \Lambda^{r-l} \gamma_\sigma \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \sum_{l=0}^r \tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} (\not{p}_2)^l \Lambda^{r-l} \sum_{l=0}^{r+1} \tilde{u}_{0,s}^{(2)} (p_3^2)^l \Lambda^{2r+2-2l} \\ & \quad + \frac{3}{4\beta_0 c_{f'} c_\pm^2} \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^r \sum_{n_2=0}^r (\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1} \gamma_\sigma \mathcal{I}^{nn_1n_2'} (\not{p}_2)^{n_2'} \Lambda^{r-n_2'} (p_3^2)^n \Lambda^{2r+2-2n} \end{aligned} \quad (3.80)$$

angeben. Es wird deutlich, dass die in (3.69) gestellte Forderung erfüllt ist. Der perturbative Limes des letzten Terms von (3.80) erzeugt mit der Bedingung (3.78) automatisch den zur Absorption des divergenten Teils in der ersten Zeile von (3.69) nötigen Ausdruck.

Koeffizientenvergleich der Terme in (3.80) liefert nun die etwas handlichere Beziehung

$$I_{VA}^{l_1 l_2 l_3} - I_{WB}^{l_1 l_2 l_3} = \left(1 - \frac{3}{2\beta_0}\right) \tilde{u}_{0,l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_3}^{(2)} + \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \mathcal{I}_1^{l_1 l_2 l_3} \quad (3.81)$$

für $l_1 = 0, \dots, r+1$ und $l_2, l_3 = 0, \dots, r$. Durch Sortieren nach Matrixstrukturen proportional zu $\mathbf{1}$ und γ_5 ergeben sich schließlich die SK-Bedingungen

$$\begin{aligned} V_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} - W_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2}}{\psi_{t_1}} \\ &\cdot \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+l} (-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+m}}{\psi_{t_2} \psi_{t_3}} \left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^1 \right. \\ &\left. - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{lml_1}^4 \right\} + \left(1 - \frac{3}{2\beta_0}\right) \tilde{u}_{0,l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_3}^{(2)}, \quad (3.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} - B_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^{n'_1+n_2}}{\psi_{t_1}} \\ &\cdot \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^{m_1+l} (-u_{\pm,t_3}^{(1)})^{m_2+m}}{\psi_{t_2} \psi_{t_3}} \left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{lml_1}^0 \right. \\ &\left. - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^4 \right\}. \quad (3.83) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich mit den in Anhang B.2 angegebenen Formeln kompakt darstellen. Mit den Abkürzungen

$$\sum_n^{f[r]} = \sum_{t_1=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}, \quad (3.84)$$

$$\sum_n^{\pm[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-u_{\pm,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})} \quad (3.85)$$

sind die SKG schließlich durch

$$\begin{aligned} V_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} - W_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\ &\left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^1 - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right. \right. \\ &\left. \left. + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{lml_1}^4 \right\} + \left(1 - \frac{3}{2\beta_0}\right) \tilde{u}_{0,l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f,l_3}^{(2)}, \quad (3.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} - B_{ffW^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\
&\left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^+}^{m_2 n_2 l_3} + V_{ff'W^+}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{lml_1}^0 - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} V_{ff'W^+}^{m_2 n_2 l_3} \right. \right. \\
&\left. \left. + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^4 \right\} \quad (3.87)
\end{aligned}$$

gegeben. Für $(f', f) = (\nu_l, l)$ und $(f', f) = (u, d)$ findet man mit $l_1 = 0, \dots, r+1$ und $l_2, l_3 = 0, \dots, r$ die analogen SK-Bedingungen

$$V_{ff'W^0}^{r+1rr} = 1 + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}^2} V_{ff'W^+}^{rrr} V_{ff'W^-}^{rrr} - C_{rrr+1}^1 - 1 \right), \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned}
V_{ff'W^0}^{l_1 l_2 l_3} + W_{ff'W^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\
&\left\{ \left(V_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^1 + 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} \right. \right. \\
&\left. \left. + V_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^4 \right\} + \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \tilde{u}_{0,l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f',l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f',l_3}^{(2)}, \quad (3.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{ff'W^0}^{l_1 l_2 l_3} + B_{ff'W^0}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\
&\left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} + V_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^1 + 2 \left(V_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right. \right. \\
&\left. \left. + A_{ff'W^+}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{lml_1}^4 \right\}. \quad (3.90)
\end{aligned}$$

3.2.4 Selbstkonsistenz für $r/r+1 = 0/1$

Im Spezialfall $r/r+1 = 0/1$ ergeben sich die SKG aus (3.78) und (3.86) bis (3.90) mit

$$\sum_1^{f[0]} = \sum_1^{f'[0]} = \sum_1^{\pm[0]} = 1 \quad (3.91)$$

einerseits für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ zu

$$V_{ffW^0}^{100} = 1 + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}^2} V_{ff'W^-}^{000} - V_{ff'W^+}^{000} C_{001}^1 - 1 \right), \quad (3.92)$$

$$V_{ffW^0}^{000} - W_{ffW^0}^{000} = \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) u_{0,1}^{(2)} + \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} V_{ff'W^-}^{000} - V_{ff'W^+}^{000} C_{000}^1, \quad (3.93)$$

$$A_{ffW^0}^{000} - B_{ffW^0}^{000} = -\frac{3}{\beta_0 c_{\pm}^2} V_{ff'W^-}^{000} - V_{ff'W^+}^{000} C_{000}^4 \quad (3.94)$$

und andererseits $(f', f) = (\nu_l, l)$ und $(f', f) = (u, d)$ zu

$$V_{f'f'W^0}^{100} = 1 + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}^2} V_{f'f'W^+}^{000} V_{f'f'W^-}^{000} C_{001}^1 - 1 \right), \quad (3.95)$$

$$V_{f'f'W^0}^{000} + W_{f'f'W^0}^{000} = \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) u_{0,1}^{(2)} + \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} V_{f'f'W^+}^{000} V_{f'f'W^-}^{000} C_{000}^1, \quad (3.96)$$

$$A_{f'f'W^0}^{000} + B_{f'f'W^0}^{000} = \frac{3}{\beta_0 c_{\pm}^2} V_{f'f'W^-}^{000} V_{f'f'W^+}^{000} C_{000}^4. \quad (3.97)$$

Aufgrund des niedrigen Approximationsgrades kann sich in diesen SK-Bedingungen ein \mathcal{CP} verletzender Term, hier der Parameter C_{000}^4 , nur bedingt ausbilden. Die Gleichungen (3.92), (3.93), (3.95) und (3.96) enthalten keinen Beitrag, der die \mathcal{CP} -Invarianz prinzipiell brechen kann. Dies ist auf die Randbedingungen (2.28) und (2.35) zurückzuführen. Die Konstante C_{000}^4 ist mit Ausnahme der c_{\pm} -Faktoren damit nur mit $A_{ffW^0}^{000}$, $B_{ffW^0}^{000}$, $A_{f'f'W^0}^{000}$ und $B_{f'f'W^0}^{000}$ verknüpft, also den Parametern, die in den erweiterten Ansätzen ein γ_5 mit sich führen. Eine Verbindung mit anderen Parametern findet aber schon für den nächst höheren Approximationsgrad $r/r + 1 = 1/2$ statt.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich bereits einige Restriktionen für die Parameter gewinnen. Beim Vergleich von (3.92) mit (3.95) fällt sofort die Bedingung

$$V_{ffW^0}^{100} = V_{f'f'W^0}^{100}, \quad (3.98)$$

die für jedes Iso-Dublett getrennt erfüllt ist, für die führenden Koeffizienten der neutralen Fermion-Vertizes ins Auge. D. h., für *diese* Koeffizienten, und damit den Limes großer Impulse findet keine dynamische Brechung der schwachen Isospininvarianz statt.

Aus den Beziehungen (3.93) und (3.96) ergibt sich

$$V_{ffW^0}^{000} - W_{ffW^0}^{000} = V_{f'f'W^0}^{000} + W_{f'f'W^0}^{000} \quad (3.99)$$

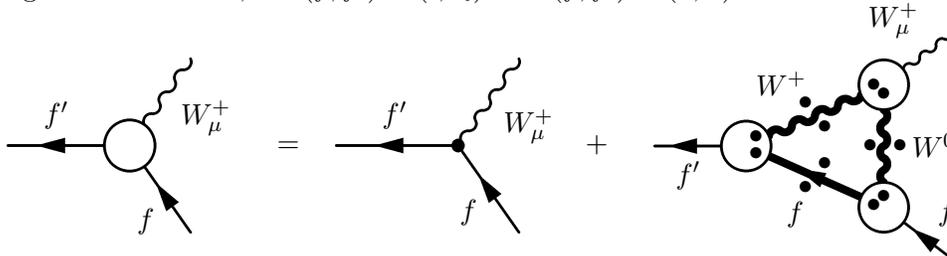
und analog aus (3.94) und (3.97)

$$A_{ffW^0}^{000} - B_{ffW^0}^{000} = -A_{f'f'W^0}^{000} - B_{f'f'W^0}^{000}. \quad (3.100)$$

3.3 Selbstkonsistenz der Fermion- W^{\pm} -Vertizes

In diesem Abschnitt werden die SK-Bedingungen der verbleibenden fermionischen Vertizes zusammengestellt. Dies sind der Fermion- W^+ - und der Fermion- W^- -Vertex. Nach der Punktierung sind wie bei der BS-resummierten Gleichung für den neutralen Fermion-Vertex nach Fortlassen der abelschen Diagramme jeweils zwei Schleifen zu berechnen.

Betrachtet wird zunächst der Fermion- W^+ -Vertex. Die zugehörige Bewegungsgleichung ergibt sich nach Streichen der Terme, die nicht in der Lage sind, die nullte quasiperturbative Ordnung zu modifizieren, für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ zu



Die Ergebnisse der Diagrammberechnungen der Gleichung sind in Anhang C zusammengestellt. Mit ihnen bzw. deren perturbativer Limiten nach Zurücknahme des MKP lässt sich die Bedingung für den führenden Parameter der Vertexapproximante in der Form

$$V_{f'fW^+}^{rrr} = 1 + \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}c_0} (V_{f'f'W^0}^{r+1rr} + V_{ffW^0}^{r+1rr}) V_{f'fW^+}^{rrr} C_{rrr+1}^2 - 2 \right) \quad (3.102)$$

angeben. Die SKG resultieren auch hier aus einem Koeffizientenvergleich der äußeren Impulse und der Λ -Skala aus (3.101) mit den Schleifenresultaten (C.29) und (C.36). Mit

$$\sum_n^{f[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}, \quad (3.103)$$

$$\sum_n^{\pm[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-u_{\pm,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})}, \quad (3.104)$$

$$\sum_n^{0[r+1]} = \sum_{t=1}^{r+2} \frac{(-u_{0,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(2)} - u_{0,t}^{(1)})}, \quad (3.105)$$

wobei $u_{0,r+2}^{(1)} = 0$, gilt für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ sowie $l_1, l_2, l_3 = 0, \dots, r$

$$\begin{aligned} V_{f'fW^+}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+n}^{0[r+1]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\ &\quad \left\{ \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + C_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{l_1 m n}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} C_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} \right) (C_{l_1 m n}^5 - C_{l_1 m n}^4) \right\} \\ &+ \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}c_0} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+m}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \\ &\quad \left\{ \left(V_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} Y_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} + A_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} D_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{l_1 m n}^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(Y_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} A_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} D_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{l_1 m n}^5 - C_{l_1 m n}^4) \right\} \\ &+ \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \tilde{u}_{\pm, l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f', l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f, l_3}^{(2)}, \quad (3.106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{f'fW^+}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+n}^{0[r+1]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \\
&\quad \left\{ \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} C_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{l_1 mn}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} + C_{f'f'W^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{l_1 mn}^5 - C_{l_1 mn}^4) \right\} \\
&+ \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+m}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \\
&\quad \left\{ \left(Y_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} A_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} D_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{l_1 mn}^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(V_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} Y_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} + A_{f'fW^+}^{m_1 l_2 n'_1} D_{ffW^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{l_1 mn}^5 - C_{l_1 mn}^4) \right\}. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Dabei sind die Parameter des erweiterten Ansatzes für den Fermion- W^0 -Vertex durch

$$X_{ffW^0}^{lmn} = V_{ffW^0}^{lmn} + W_{ffW^0}^{lmn}, \quad C_{ffW^0}^{lmn} = A_{ffW^0}^{lmn} + B_{ffW^0}^{lmn}, \quad (3.108)$$

$$Y_{ffW^0}^{lmn} = V_{ffW^0}^{lmn} - W_{ffW^0}^{lmn}, \quad D_{ffW^0}^{lmn} = A_{ffW^0}^{lmn} - B_{ffW^0}^{lmn} \quad (3.109)$$

zusammengefasst. Für die Parameter mit der Tilde gilt hier

$$\tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} \omega_{f,\sigma(i)}^{(2)} \quad \text{und} \quad \tilde{u}_{\pm,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} u_{\pm,\sigma(i)}^{(2)}. \quad (3.110)$$

Beim Vergleich der SK-Bedingungen (3.106) und (3.107) mit denen des neutralen Fermion-Vertex fällt auf, dass sich hier statt der bosonischen C_{lmn}^1 -Parameter die Parameter C_{lmn}^2 etablieren. Weiterhin treten die Koeffizienten C_{lmn}^4 nur in einer Kombination mit den C_{lmn}^5 auf.

Die SK-Bedingungen für den Fermion- W^- -Vertex ergeben sich aus der Bewegungsgleichung für $(f', f) = (\nu_l, l)$ und $(f', f) = (u, d)$

$$(3.111)$$

Der perturbative Limes liefert

$$V_{ff'W^-}^{rrr} = 1 + \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm c_0}} (V_{ffW^0}^{r+1rr} + V_{ff'W^0}^{r+1rr}) V_{ff'W^-}^{rrr} - C_{rrr+1}^3 - 2 \right). \quad (3.112)$$

Für die übrigen SK-Bedingungen findet sich für $l_1, l_2, l_3 = 0, \dots, r$

$$\begin{aligned} V_{ff'W^-}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm c_0}} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+n}^{0[r+1]} \sum_{m_2+l}^{\pm[r]} \\ &\quad \left(Y_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} + D_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{ll_1 n}^3 \\ &\quad - \left(Y_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} + V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} D_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} \right) (C_{ll_1 n}^5 + C_{ll_1 n}^4) \} \\ &+ \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm c_0}} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \\ &\quad \left\{ \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} X_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} C_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{ll_1 n}^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(X_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} + V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} C_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{ll_1 n}^5 + C_{ll_1 n}^4) \right\} \\ &+ \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \tilde{u}_{\pm, l_1}^{(2)} \tilde{\omega}_{f, l_2}^{(2)} \tilde{\omega}_{f', l_3}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} A_{ff'W^-}^{l_1 l_2 l_3} &= \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm c_0}} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+n}^{0[r+1]} \sum_{m_2+l}^{\pm[r]} \\ &\quad \left\{ \left(Y_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} + V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} D_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} \right) C_{ll_1 n}^3 \right. \\ &\quad \left. - \left(Y_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} + D_{ffW^0}^{m_1 l_2 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{ll_1 n}^5 + C_{ll_1 n}^4) \right\} \\ &+ \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm c_0}} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \\ &\quad \left\{ \left(X_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} + V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} C_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) C_{ll_1 n}^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(V_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} X_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} + A_{ff'W^-}^{m_1 l_2 n'_1} C_{ff'W^0}^{m_2 n_2 l_3} \right) (C_{ll_1 n}^5 + C_{ll_1 n}^4) \right\} \end{aligned} \quad (3.114)$$

mit den zur Abkürzung der Ausdrücke bereits bekannten Parametern.

Die Angabe der oben abgeleiteten SKG für $r/r+1 = 0/1$ ist langwierig. Das liegt darin begründet, dass in den Schleifen neben den Fermionen und den W^\pm -Bosonen auch ungeladene Bosonen propagieren. Da der Approximationsgrad des W^0 -Bosons um eins erhöht ist, verkompliziert sich im Vergleich zu den SK-Bedingungen des W^0 -Vertex das Ausführen einiger Summen.

Der MKP hat darüberhinaus Terme entfernt, die zur Zurücknahme der Partialbruchzerlegungen nötig sind. Diese beinhalten zwar unphysikalische Pole, aber aus mathematischer Sicht sind die Partialbruchsummen nun unvollständig und ein Zurücknehmen ist nicht möglich. Eine Teilsummutation kann jedoch bei konkreter Vorgabe eines Approximationsgrades von Hand

durchgeföhrt werden und ist in Anhang B.2 angegeben.

Werden zusätzlich die Randbedingungen (2.28) und (2.35) beachtet, so präsentieren sich die SK-Bedingungen für $r/r + 1 = 0/1$ mit $u_{0,2}^{(1)} = 0$ einerseits für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und (d, u) in der Form

$$V_{f'fW^+}^{000} = 1 + \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}c_0} (V_{f'f'W^0}^{100} + V_{ffW^0}^{100}) V_{f'fW^+}^{000} + C_{001}^2 - 2 \right), \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} 4\beta_0 c_{\pm}c_0 u_{0,1}^{(2)}(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) V_{f'fW^+}^{000} &= 4\beta_0 c_{\pm}c_0 u_{0,1}^{(2)}(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \\ &+ 3V_{f'fW^+}^{000} \left[C_{000}^2 \left(X_{f'f'W^0}^{000} + Y_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(C_{000}^5 - C_{000}^4 \right) \left(C_{f'f'W^0}^{000} - D_{ffW^0}^{000} \right) \right] \\ &+ 3u_{0,1}^{(2)} V_{f'fW^+}^{000} \left[C_{001}^2 \left(X_{f'f'W^0}^{000} + Y_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + C_{000}^2 \left(V_{f'f'W^0}^{100} + V_{ffW^0}^{100} \right) \right] \\ &+ 3u_{0,1}^{(1)}u_{0,1}^{(2)} V_{f'fW^+}^{000} + C_{001}^2 \left(V_{f'f'W^0}^{100} + V_{ffW^0}^{100} \right), \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} 0 &= V_{f'fW^+}^{000} \left[C_{000}^2 \left(C_{f'f'W^0}^{000} + D_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(C_{000}^5 - C_{000}^4 \right) \left(X_{f'f'W^0}^{000} - Y_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + u_{0,1}^{(2)} C_{001}^2 \left(C_{f'f'W^0}^{000} + D_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + u_{0,1}^{(2)} \left(C_{000}^5 - C_{000}^4 \right) \left(V_{f'f'W^0}^{100} - V_{ffW^0}^{100} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.117)$$

und andererseits für $(f', f) = (\nu_l, l)$ und (u, d)

$$V_{ff'W^-}^{000} = 1 + \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}c_0} (V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100}) V_{ff'W^-}^{000} - C_{001}^3 - 2 \right), \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} 4\beta_0 c_{\pm}c_0 u_{0,1}^{(2)}(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) V_{ff'W^-}^{000} &= 4\beta_0 c_{\pm}c_0 u_{0,1}^{(2)}(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) \left(1 - \frac{3}{2\beta_0} \right) \\ &+ 3V_{ff'W^-}^{000} \left[C_{000}^3 \left(Y_{ffW^0}^{000} + X_{f'f'W^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(C_{000}^5 + C_{000}^4 \right) \left(D_{ffW^0}^{000} - C_{f'f'W^0}^{000} \right) \right] \\ &+ 3u_{0,1}^{(2)} V_{ff'W^-}^{000} \left[C_{001}^3 \left(Y_{ffW^0}^{000} + X_{f'f'W^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + C_{000}^3 \left(V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100} \right) \right] \\ &+ 3u_{0,1}^{(1)}u_{0,1}^{(2)} V_{ff'W^-}^{000} - C_{001}^3 \left(V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100} \right), \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} 0 &= V_{ff'W^-}^{000} \left[C_{000}^3 \left(D_{ffW^0}^{000} + C_{f'f'W^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(C_{000}^5 + C_{000}^4 \right) \left(Y_{ffW^0}^{000} - X_{f'f'W^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. + u_{0,1}^{(2)} C_{001}^3 \left(D_{ffW^0}^{000} + C_{f'f'W^0}^{000} \right) \right. \\ &\quad \left. - u_{0,1}^{(2)} \left(C_{000}^5 + C_{000}^4 \right) \left(V_{ffW^0}^{100} - V_{f'f'W^0}^{100} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Es fällt auf, dass beim Einsetzen der Gleichungen (3.115) in (3.116) bzw. (3.118) in (3.119) die Abhängigkeiten von den Parametern c_{\pm} und c_0 und der RG-Invarianten β_0 auf diesem Niveau herausfallen. Dies überführt beispielsweise (3.116) nach Kürzen der Terme in

$$\begin{aligned}
-(u_{0,1}^{(2)})^2 (V_{f'f'W^0}^{100} + V_{ffW^0}^{100}) V_{f'fW^+}^{000} C_{001}^2 = \\
V_{f'fW^+}^{000} \left[C_{000}^2 \left(X_{f'f'W^0}^{000} + Y_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\
\left. + \left(C_{000}^5 - C_{000}^4 \right) \left(C_{f'f'W^0}^{000} - D_{ffW^0}^{000} \right) \right] \\
+ u_{0,1}^{(2)} V_{f'fW^+}^{000} \left[C_{001}^2 \left(X_{f'f'W^0}^{000} + Y_{ffW^0}^{000} \right) \right. \\
\left. + C_{000}^2 \left(V_{f'f'W^0}^{100} + V_{ffW^0}^{100} \right) \right]. \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Mit der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehung (3.99) und (3.100) ist zu sehen, dass die SK-Bedingungen (3.117) und (3.120) bereits trivial erfüllt sind. Sie stellen daher keine Bedingungen an die nichtperturbativen Parameter. Beim Vergleich von (3.116) mit (3.119) lässt sich unter Verwendung der Symmetriebeziehungen (2.31) und (2.41) die Gleichung

$$\left(C_{f'f'W^0}^{000} - D_{ffW^0}^{000} \right) C_{000}^4 = 0 \tag{3.122}$$

angeben. Daraus erhält man mit der Gleichung (3.100) ein wichtiges Kriterium für \mathcal{CP} -Verletzung: Ist eine der Bedingungen

$$D_{ffW^0}^{000} \neq 0, \quad C_{f'f'W^0}^{000} \neq 0 \tag{3.123}$$

erfüllt, so muss der Koeffizient C_{000}^4 des \mathcal{CP} -verletzenden Tensors in dem Ansatz für den Boson-Vertex (2.37) verschwinden.

3.4 Zwischenergebnis

Die analytischen Berechnungen im Fermion-Sektor sind nun abgeschlossen. Die SKG der Propagatoren und der Vertizes sind in beliebiger Approximationsstufe formuliert.

Es wird deutlich, dass nach den Partialbruchzerlegungen der Integranden die Schleifen mit Techniken aus der Störungstheorie lösbar sind. Damit wird auch die Behandlung endlicher Anteile, die allerdings hier nicht berechnet werden, prinzipiell zugänglich. Der $1/g^2$ -Mechanismus funktioniert in der hier masselosen Theorie problemlos.

Die Verkopplung des Fermion-Sektors mit dem bosonischen ist unterschiedlich stark ausgeprägt. Für den Propagator geschieht dies über die c -Faktoren und die damit verbundenen weichen Randbedingungen (2.16) und (2.17). Der Faktor \bar{c}_f im Ansatz des Fermion-Propagators kann keinen von eins verschiedenen Wert annehmen, was auf die Wahl der Landau-Eichung zurückzuführen ist. Bei den fermionischen Vertizes ist dies anders, denn die Modifikationen des nackten Vertex durch die Schleifen in den BS-resummierten DSG bleiben im perturbativen Limes bestehen. Ein Blick auf die zugehörigen Renormierungskonstanten unterstreicht dieses Resultat.

Wir haben gesehen, dass der strenge perturbative Limes in den SKG des inversen Fermion-Propagators zu einer widersprüchlichen Lösung für $r = 0$ führt. Bei höheren Approximationsgraden muss dies aber nicht der Fall sein, was durch Rechnungen in [Dri 97] und [Kuh 97] gestützt wird. Dort sind widerspruchsfreie Lösungen für QCD bereits auf dem Niveau $r = 1$

gefunden worden.

Durch die Bewegungsgleichungen der Fermion-Vertizes findet eine stärkere Mischung mit dem Boson-Sektor statt. Zum einen ist dies eine Folge der BSR. Sie haben nicht nur den Vorteil, dass die DSG in eine Crossing-symmetrische Form überführt werden, sondern es werden mehr Informationen aus höheren in niedrigere Schleifenordnungen verlagert. Zum anderen enthalten alle berechneten Diagramme den recht komplizierten 3-Boson-Vertex.

Es besteht prinzipiell die Möglichkeit, dass die Gleichungen eine Ausbildung fermionischer Massen gestatten. Wie in Abschnitt 3.1.3 deutlich wird, beinhalten die SKG aber auch Lösungen verschwindender Fermionmassen. Ob der neutrale Fermion-Vertex Terme, die ein γ_5 tragen, dynamisch erzeugen kann, ist allgemein nicht vorhersagbar. Für den Approximationsgrad 0/1 formulieren die Gleichungen (3.92) und (3.93) aber sehr starke Einschränkungen. Alles Weitere muss hier die Numerik liefern.

Wie bereits erwähnt, ist der Parameter C_{lmn}^4 prinzipiell in der Lage, die \mathcal{CP} -Invarianz zu brechen. Dies wird bei genauer Betrachtung der SKG noch einmal deutlich. Der Term C_{lmn}^4 hat nach der Ladungskonjugation von beispielsweise (3.106) zu (3.113) unter Verwendung der Symmetriebeziehungen (2.31), (2.36) und (2.41) ein falsches Vorzeichen. Er müsste, sollte er die \mathcal{CP} -Invarianz erhalten, ein Minuszeichen liefern.

Insgesamt sind für den Approximationsgrad 0/1 pro Isodublett nach Verwendung aller Symmetriebeziehungen 8 fermionische nichtperturbative Parameter zu bestimmen. Dem stehen bis hierher genau 10 SK-Bedingungen gegenüber. Damit liegen vom Standpunkt des Fermion-Sektors mehr Gleichungen als Variablen vor. Dies hat zwei Ursachen: Für die nichtperturbativen Vertexparameter mit maximalem Indexsatz werden zwei Gleichungen geliefert. Der perturbative Limes der Bewegungsgleichungen steht der SK-Bedingung, die aus dem Koeffizientenvergleich in den äußeren Impulse und der Λ -Skala folgt, gegenüber. Da in letztere Beziehung der MKP angewendet wurde und die verbliebenen Partialbruchsummen nicht zurückgenommen werden können, sind die Bedingungen nicht äquivalent. Die Verwendung von Symmetriebeziehungen zwischen den Koeffizienten reduziert dagegen die Zahl der nichtperturbativen Parameter weiter. Dabei fallen keine Gleichungen weg, denn der darin enthaltene Parameter C_{000}^4 besitzt als \mathcal{CP} -verletzender Term keine Symmetrie. Dieser Umstand schlägt sich zum Beispiel in Gleichung (3.122) nieder.

Es ist ein interessantes Resultat, dass die nichtperturbativen Parameter $V_{ffW^0}^{000}$, $W_{ffW^0}^{000}$, $A_{ffW^0}^{000}$ und $B_{ffW^0}^{000}$ für $f = \nu_l, l, u, d$ in den SKG nur in Summen oder Differenzen voneinander auftreten. Es gibt hier keine Möglichkeit die Werte der in den Ansätzen vorhandenen Koeffizienten zu bestimmen. Dazu werden weitere Bedingungen, wie zum Beispiel die Vakuumkondensate, benötigt. Um das SK-Problem insgesamt lösen zu können, müssen weitere Gleichungen berechnet werden, die die Parameter aus dem Boson-Sektor festlegen.

Kapitel 4

Boson-Vertizes

In diesem Kapitel werden die SK-Bedingungen des Boson-Sektors formuliert. Die Vorgehensweise bei ihrer Herleitung orientiert sich an dem im 3. Kapitel verwendeten Schema. Diskutiert werden die DSG der Propagatoren. Die Gleichung des bosonischen Tripel-Vertex wird einer BSR unterzogen, die analog auch bei den Fermion-Vertizes durchgeführt wurde, und anschließend trivial symmetrisiert. Dabei vereinfacht die Wahl der Landau-Eichung die Berechnung der Schleifen erheblich.

Die SKG, die aus dynamischen Gleichungen für die 4-Punkt-Vertizes folgen, werden aufgrund ihres Umfangs in dieser Arbeit numerisch nicht untersucht. Daher wird lediglich ein möglicher Zugang aufgezeigt. Teilresultate von Schleifenberechnungen werden abschließend präsentiert. Zunächst wird jedoch erörtert, inwieweit der Geist-Sektor im Sinne der erweiterten Feynman-Regeln von den übrigen Sektoren der Theorie entkoppelt. Diese Vereinfachung ist ebenfalls mit der Wahl der Landau-Eichung verknüpft.

4.1 Geister

In [Dri 97] wird für eine nicht-abelsche Eichtheorie dargelegt, dass der Geist-Sektor durch die Wahl der Landau-Eichung im Rahmen der erweiterten Störungstheorie keine nichtperturbativen Modifikationen benötigt. Die Schleifenintegrale mit Geist-Linien sind effektiv konvergent, so dass die Geist-Propagatoren und Vertizes nur triviale SKG liefern.

Dieser Sachverhalt ist für die hier vorkommenden 3-Punkt-Geist-Vertizes weiterhin gültig. An den zugehörigen Bewegungsgleichungen kann man sehen, dass die darin vorkommenden Schleifendiagramme in Landau-Eichung keine nichtperturbativen Divergenzen ausbilden können. Dies folgt nicht nur bei Verwendung von DSG, wie sie zum Beispiel in [Mer 96] angegeben sind, sondern auch für deren BS-resummierte Form. Werden allgemeine Ansätze für die Propagatoren und Vertexfunktionen konstruiert und in die Bewegungsgleichungen eingesetzt, so eliminieren die Transversalprojektoren der inneren Boson-Linien die zu integrierenden Impulskomponenten der Geist-Vertizes. Der Divergenzgrad der linear divergenten Diagramme wird damit um zwei herabgesetzt, so dass die Schleifenintegrale nur konvergente Terme ausbilden. Mögliche Kandidaten für die Approximanten der 3-Punkt-Vertexfunktionen sind also im Rahmen des SKM (2.68) durch ihre *störungstheoretischen Pendants* zu ersetzen. Darüber hinaus erzwingen die Bewegungsgleichungen im perturbativen Limes die Festlegung der Vertex-Parameter mit maximalem Indexsatz auf ihren störungstheoretischen Wert.

Diese Vereinfachung ist auf die Propagatoransätze, die den hier benutzten weichen Randbedingungen (2.16) und (2.17) genügen, nicht vollständig übertragbar. Aus den Bewegungsgleichungen können SK-Bedingungen mit dem perturbativen Limes bestimmt werden. Approximanten für die Propagator-Funktionen im Geist-Sektor sind schon in früheren Arbeiten formuliert worden. Nach [Ewe 00, Mer 96, Sti 96] lassen sich geeignete Approximanten notieren. Die Darstellungen

$$\tilde{D}^{[r,0]}(p^2) = \frac{1}{\tilde{c}_\pm} \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + v_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2)} \quad \text{und} \quad \tilde{D}^{[r+1,0]}(p^2) = \frac{1}{\tilde{c}_0} \frac{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + v_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{r+2} (p^2 + v_{0,s}^{(1)} \Lambda^2)} \quad (4.1)$$

für die Propagatoren des c_\pm - und des c_0 -Feldes genügen den geforderten Randbedingungen. Die Angabe der zulässigen Wertebereiche für die nichtperturbativen Parameter ist für die weiteren Zwecke nicht notwendig. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die Geist-Propagatoren stets einen masselosen Pol besitzen, denn Feynman-Diagramme mit äußeren Geist-Linien faktorisieren pro Geist-Antigeist-Paar immer ein Impulsquadrat ab.

Zur Bestimmung der Schleifen werden die Approximanten in die DSG eingesetzt. Die Berechnung wird an dem Diagramm

$$\tilde{J}_\pm(p, \Lambda) = \begin{array}{c} \text{---} c_- \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} c_+ \text{---} \end{array} \quad (4.2)$$

aus der Gleichung für den inversen c_+ -Propagator (A.77) exemplarisch vorgeführt.

Der Transversalprojektor der Boson-Linie setzt den Divergenzgrad der Schleife um eine Impulspotenz herab. Damit ist sie logarithmisch divergent. Das Diagramm ergibt damit nach einer Partialbruchzerlegung der inneren Propagator-Linien

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\pm(p, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \frac{1}{c_0 \tilde{c}_\pm} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+2} \alpha_{t_1} \beta_{t_2} \left\{ p^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + v_{\pm,t_1}^{(1)} \Lambda^2} \frac{1}{(q-p)^2 + u_{0,t_2}^{(1)} \Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. - p_\mu p_\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + v_{\pm,t_1}^{(1)} \Lambda^2} \frac{1}{(q-p)^2 + u_{0,t_2}^{(1)} \Lambda^2} \frac{q_\mu q_\nu}{(q-p)^2} \right\} + \text{endl. Anteile} \quad (4.3) \end{aligned}$$

mit den Residuen

$$\alpha_{t_1} = \frac{\prod_{s=1}^r (v_{\pm,s}^{(2)} - v_{\pm,t_1}^{(1)})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (v_{\pm,s}^{(1)} - v_{\pm,t_1}^{(1)})} \quad \text{und} \quad \beta_{t_2} = \frac{\prod_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(2)} - u_{0,t_2}^{(1)})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,t_2}^{(1)})}. \quad (4.4)$$

Das Integral (4.3) ist mit den Formeln aus Anhang B leicht lösbar und ergibt

$$\frac{D-1}{D} \frac{1}{c_0 \tilde{c}_\pm} \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+2} \alpha_{t_1} \beta_{t_2} \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^{2\frac{1}{\epsilon}} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} p^2 + \text{endl. Anteile.} \quad (4.5)$$

Die Zurücknahme der Partialbrüche ist nach einer Entwicklung der Zähler von α_{t_1} und β_{t_2} unproblematisch. Im Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ findet sich für die Schleife

$$\tilde{\mathcal{J}}_\pm(p, \Lambda) = \frac{3}{4 \beta_0 c_0 \tilde{c}_\pm} p^2. \quad (4.6)$$

Es wird deutlich, dass die Schleife keine Modifikationen in Form der Λ -Skala ausbilden kann. Das Resultat (4.6) unterscheidet sich von der störungstheoretischen Rechnung der Schleife nur um die Konstante $1/c_0 \tilde{c}_\pm$. Die andere Schleife der DSG (A.77) ergibt ein ähnliches Ergebnis. Wird der in Abschnitt 3.2.2 angegebene Apparat zur Bestimmung von SKG auf die DSG des c_\pm -Propagators angewendet, so lassen sich die SK-Bedingungen formulieren. Für den perturbativen Limes der DSG ergibt sich

$$\tilde{c}_\pm = \left(1 + \frac{3}{2\beta_0} \right) - \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_\pm \tilde{c}_0} + \frac{1}{c_0 \tilde{c}_\pm} \right). \quad (4.7)$$

Um weitere SK-Bedingungen formulieren zu können, muss zunächst die DSG umgestellt werden. Multiplikation mit den Poltermen führt auf

$$\tilde{c}_\pm \prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + v_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2) = \left[1 + \frac{3}{2\beta_0} - \frac{3}{4\beta_0} \left(\frac{1}{c_\pm \tilde{c}_0} + \frac{1}{c_0 \tilde{c}_\pm} \right) \right] p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + v_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2). \quad (4.8)$$

Diese Beziehung ermutigt nun zum Einsetzen von (4.7). Wir erhalten das schöne Resultat

$$\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + v_{\pm,s}^{(1)} \Lambda^2) = p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + v_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2). \quad (4.9)$$

Beim Vergleich mit (4.1) wird deutlich, dass der Ansatz für den c_\pm -Propagator *mit Ausnahme des Faktors* \tilde{c}_\pm auf seine störungstheoretische Form gezwungen wird.

Diese Argumentation ist selbstverständlich auf den neutralen Geist-Propagator übertragbar. Aus der zugehörigen DSG (A.78) lässt sich durch den perturbativen Limes eine Bedingung für \tilde{c}_0 in der Form

$$\tilde{c}_0 = \left(1 + \frac{3}{2\beta_0} \right) - \frac{3}{2\beta_0 c_\pm \tilde{c}_\pm} \quad (4.10)$$

extrahieren. Die übrigen SK-Bedingungen bewirken, dass die weiteren Parameter im Ansatz des Propagators verschwinden müssen.

Da die Vertizes ohnehin und die Geist-Propagatoren nach Anwendung von (4.9) für den c_\pm -Propagator und analoger Beziehung für den c_0 -Propagator perturbativ sind, kann das $\Lambda^{-2\epsilon}$, welches zum Beispiel in (4.5) auftritt, nur von den Boson-Propagatoren geliefert werden. Verlassen die bosonischen c -Faktoren den strengen perturbativen Limes, so wird ebensolches bei

den c -Faktoren der Geist-Propagatoren bewirkt.

Bei den nun folgenden Berechnungen im Boson-Sektor sind im Gegensatz zu früheren Arbeiten die Schleifen mit Geist-Linien zu berücksichtigen. Es sei aber schon jetzt darauf hingewiesen, dass diese Diagrammberechnungen nicht kompliziert sind. Die Ergebnisse der Integrale unterscheiden sich nur um die c -Faktoren aus den Propagatoren von den störungstheoretischen Resultaten und können an den jeweiligen Renormierungskonstanten, vgl. Kapitel 1, abgelesen werden. Bei den praktischen Berechnungen der Schleifen ist es demnach zweckmäßig die Ansätze (4.1) in den DSG zu verwenden. Der Grenzprozess $\Lambda \rightarrow 0$ wird erst nach Anwendung des $1/g^2$ -Mechanismus vollzogen. Die zusätzlichen Parameter \tilde{c}_\pm und \tilde{c}_0 stellen für die Lösbarkeit des SK-Systems kein Problem dar, denn im Gegenzug ergänzen die Bedingungen (4.7) und (4.10) den Satz der SKG.

Eine *künstliche* Einschränkung $\tilde{c}_\pm = \tilde{c}_0 = 1$ der in Kapitel 2 angegebenen Randbedingungen ersetzt, neben den bereits störungstheoretischen Vertizes, auch die Geist-Propagatoren vollständig durch ihre perturbativen Partner. Der Geist-Sektor verschwindet dadurch vollständig aus dem System der SKG. Dies geht mit dem in [Dri 97] gefundenen Ergebnis konform. Bei Betrachtung der Gleichungen (4.7) und (4.10) wird jedoch deutlich, dass die Wahl $\tilde{c}_\pm = \tilde{c}_0 = 1$ gleichzeitig eine Einschränkung des Boson-Sektors in der Form $c_\pm = c_0 = 1$ bedeuten würde. Da die vorliegende Arbeit die Variante II der quasiperturbativen Reihen für die Vertexfunktionen verfolgt, ist diese Vorgehensweise nicht plausibel und wird auch nicht weiter verfolgt. Dagegen sind die schwächeren Einschränkungen $\tilde{c}_\pm = \tilde{c}_0 = \tilde{c}$ und $c_\pm = c_0 = c$, die einer Erhaltung der Isospinsymmetrie bei großen Impulsen entsprechen, durchaus mit $\tilde{c} \neq 1$ und $c \neq 1$ verträglich.

4.2 Selbstkonsistenz der Boson-Propagatoren

Die SK-Bedingungen der Boson-Propagatoren werden nun zusammengestellt. Da die zu behandelnden Schleifen für die bosonischen Propagatoren schon in früheren Arbeiten berechnet worden sind, werden die Details nicht dargelegt. Eine ausführliche Diskussion für den einfachsten Approximationsgrad $r/r + 1 = 0/1$ ist z. B. in [Mer 96] zu finden. Da mittlerweile geeignete Methoden zur Verfügung stehen, werden auch die bosonischen SKG in beliebiger Approximationsstufe angegeben. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind zusammen mit den Resultaten aus dem Fermion-Sektor in Anhang C zu finden.

Die Schleifen der DSG für den W^+ -Propagator (A.72) ergeben mit der im vorigen Kapitel gezeigten SK-Bedingung $c_f = 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+^T(p, \Lambda) &= \frac{9}{4\beta_0 c_\pm} \Lambda^2 \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} + \frac{9}{4\beta_0 c_0} \Lambda^2 \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,s}^{(2)}) \right\} \\ &+ \frac{1}{6\beta_0 \tilde{c}_\pm \tilde{c}_0} p^2 + \frac{1}{\beta_0} \sum_{m=0}^r \left\{ \frac{1}{c_0 c_\pm} \left[\frac{5}{2} p^2 \left\{ C_{mrr+1}^1 - \frac{1}{3} C_{mrr+1}^2 + C_{mrr+1}^3 \right\} + \Lambda^2 J_m \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{(f,f')} \left[\frac{2}{3} p^2 V_{f'fW^+}^{mmr} + \Lambda^2 J_m^{ff'} \right] \right\} \frac{(\Lambda^2)^{r-m} (p^2)^m}{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \quad (4.11) \end{aligned}$$

mit $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ als Resultat nullter Ordnung. Die Gleichung enthält, wie in Anhang C erklärt ist, den transversalen Anteil der DSG, was durch den Index T

gekennzeichnet werden soll. Longitudinale Beiträge werden durch transversale Projektionen von außen eliminiert.

In (4.11) sind die Schleifenresultate der Tadpole-Graphen, der geschlossenen Geist-, Fermion- und Boson-Diagramme summiert. Die Tadpoles bilden aufgrund ihrer störungstheoretischen 4-Punkt-Vertizes keine Pole aus. Für die Geist-Schleifen verhält es sich wegen der störungstheoretischen 3-Punkt-Vertizes ebenso. Die Boson- und die geschlossene Fermion-Schleife spalten Polterme in den äußeren Impulsen ab.

Der Großteil der nichtperturbativen Modifikationen, die in (4.11) mit der Λ -Skala skalieren, liegt in den J -Funktionen

$$J_m = -3 \left(C_{mrr+1}^2 \sum_{s=1}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} + u_{0,s}^{(1)}) - C_{mr-1r+1}^2 - C_{mrr}^2 \right), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} J_m^{ff'} &= V_{f'fW^+}^{mrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \omega_{f',t}^{(1)} + \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)}) - 2 \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f',s}^{(1)} \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right\} \\ &\quad - V_{f'fW^+}^{mr-1r} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - 2\omega_{f,s}^{(1)}) - V_{f'fW^+}^{mrr-1} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - 2\omega_{f',s}^{(1)}) \\ &\quad + V_{f'fW^+}^{mr-2r} - 2V_{f'fW^+}^{mr-1r-1} + V_{f'fW^+}^{mrr-2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

verborgen, die die Schreibweise verkürzen sollen. Auffällig ist, dass die Fermion-Schleifen keine Parameter aus den Fermion-Vertizes etablieren können, die ein γ_5 tragen. Den Grund hierfür macht man sich mit den in Anhang B angegebenen Spurrelationen schnell klar.

Die DSG des W^- -Propagators muss an dieser Stelle nicht gesondert betrachtet werden. Das soeben angegebene Resultat der Schleifenberechnungen enthält keine \mathcal{CP} -brechenden Terme, denn ε -Tensoren können aufgrund der Relation (B.21) nicht auftreten. Die DSG des W^+ - und des W^- -Propagators produzieren daher *denselben Beitrag zur nullten quasiperturbativen Ordnung*, was nach Verwendung der Symmetriebeziehungen für die nichtperturbativen Parameter der 3-Punkt-Vertexfunktionen aus Kapitel 2 unmittelbar klar wird.

Im Unterschied zur DSG des Fermion-Propagators modifizieren die Schleifen der DSG hier trotz der Wahl der Landau-Eichung den perturbativen W^+ -Propagator. Der Parameter c_{\pm} bekommt damit die Chance, einen von eins verschiedenen Wert auszubilden. Der störungstheoretische Limes der DSG liefert mit den erweiterten Ansätzen

$$\begin{aligned} c_{\pm} &= 1 - \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{5}{2c_{\pm}c_0} (C_{rrr+1}^1 - \frac{1}{3}C_{rrr+1}^2 + C_{rrr+1}^3) - \frac{25}{6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6\tilde{c}_{\pm}\tilde{c}_0} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \sum_{(f,f')} V_{f'fW^+}^{rrr} + \frac{2}{3} N_f \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

als Bedingung. Die weiteren SKG ergeben sich mit dem bekannten Schema aus der DSG nach Multiplizieren mit den Polfaktoren durch einen Koeffizientenvergleich in den Impulsquadraten und der Λ -Skala. Dies liefert schließlich die gesuchten $r+1$ SK-Bedingungen

$$\begin{aligned}
c_{\pm} \tilde{u}_{\pm,m}^{(1)} &= \left(1 + \frac{25}{6\beta_0} + \frac{1}{6\beta_0} \left(1 - \frac{1}{\tilde{c}_{\pm}\tilde{c}_0} \right) - \frac{2}{3\beta_0} N_f \right) \tilde{u}_{\pm,m-1}^{(2)} \\
&\quad - \frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} \tilde{u}_{\pm,m}^{(2)} - \frac{9}{4\beta_0 c_0} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,s}^{(2)}) \right\} \tilde{u}_{\pm,m}^{(2)} \\
&\quad - \frac{1}{\beta_0 c_{\pm} c_0} \left\{ \frac{5}{2} C_{m-1rr+1}^1 - \frac{5}{6} C_{m-1rr+1}^2 + \frac{5}{2} C_{m-1rr+1}^3 + J_m \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0} \sum_{(f,f')} \left\{ \frac{2}{3} V_{f'fW^+}^{m-1rr} + J_m^{ff'} \right\} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

für $m = 0, \dots, r+1$, wobei $\tilde{u}_{\pm,r+1}^{(2)} = J_{r+1} = J_{r+1}^{ff'} = 0$ zu beachten ist. Die Summation über die nichtperturbativen Parameter der Fermion-Vertizes gilt für die Paare $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$. Die geschlossenen Quark-Schleifen erhalten aufgrund ihrer Farbladungen einen Faktor drei. Für die Propagatorkoeffizienten mit der Tilde gilt

$$\tilde{u}_{\pm,l}^{(1)} = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \frac{1}{l!(r+1-l)!} \prod_{i=1}^{r+1-l} u_{\pm,\sigma(i)}^{(1)} \quad \text{für } l = 0, \dots, r+1, \tag{4.16}$$

$$\tilde{u}_{\pm,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} u_{\pm,\sigma(i)}^{(2)} \quad \text{für } l = 0, \dots, r. \tag{4.17}$$

Im Übrigen sollen alle nichtperturbativen Parameter verschwinden, die bei einem expliziten Approximationsgrad Indizes mit negativem Vorzeichen besitzen.

An den SK-Bedingungen wird noch einmal deutlich, dass die Beiträge aus dem Geist-Sektor kaum in Erscheinung treten. Die Forderung $\tilde{c}_{\pm} = \tilde{c}_0 = 1$ eliminiert den Geist-Term aus den SKG und reproduziert damit das in [Dri 97] gefundene Ergebnis. Wie zu Beginn dieses Kapitels angedeutet, unterscheiden sich die Terme von den aus der Störungstheorie bekannten Werten nur um die Konstanten \tilde{c}_{\pm} und \tilde{c}_0 . *Die Ergebnisse der Geister-Schleifenberechnung können im Rahmen der erweiterten Feynman-Regeln also bereits an den passenden Renormierungskonstanten abgelesen werden.*

Wie auch in Kapitel 3 werden die SK-Bedingungen für den Spezialfall $r/r+1 = 0/1$ angegeben. Der perturbative Limes (4.14) geht in

$$\begin{aligned}
c_{\pm} &= 1 - \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{5}{2 c_{\pm} c_0} (C_{001}^1 - \frac{1}{3} C_{001}^2 + C_{001}^3) - \frac{25}{6} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6 \tilde{c}_{\pm} \tilde{c}_0} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \sum_{(f,f')} V_{f'fW^+}^{000} + \frac{2}{3} N_f \right) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

über. Eine weitere Bedingung liefert (4.15) für $m = 0$ in der Form

$$\begin{aligned}
c_{\pm} u_{\pm,1}^{(1)} &= -\frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} u_{\pm,1}^{(1)} - \frac{9}{4\beta_0 c_{\pm} c_0} (u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) + \frac{3}{\beta_0 c_{\pm} c_0} \left\{ C_{001}^2 (u_{\pm,1}^{(1)} + u_{0,1}^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. - C_{000}^2 \right\} + \frac{1}{\beta_0} \sum_{(f,f')} V_{f'fW^+}^{000} (\omega_{f,1}^{(1)} - \omega_{f',1}^{(1)})^2 \}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung stimmt im strengen perturbativen Limes mit dem in [Mer 96] gefundenen Resultat für die SKG des W^+ -Propagators überein.

Die im Rahmen des erweiterten Schemas ausgewerteten Diagramme des W^0 -Propagators (A.73) sind wiederum in Anhang C angegeben und liefern die für den SKM nötigen Beiträge zur nullten quasiperturbativen Ordnung

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0^T(p, \Lambda) &= \frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} \Lambda^2 \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} + \frac{1}{6\beta_0 \tilde{c}_{\pm}^2} p^2 \\ &\quad + \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=0}^{r+1} \left\{ \frac{1}{c_{\pm}^2} \left[\frac{5}{2} p^2 \left\{ -\frac{1}{3} C_{rrn}^1 + C_{rrn}^2 + C_{rrn}^3 \right\} + \Lambda^2 J_n \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\beta_0} \sum_f \left[\frac{1}{3} (\mathbf{1}_2)_f p^2 V_{ffW^0}^{nrr} + \frac{2}{3} (T_3)_f p^2 W_{ffW^0}^{nrr} + \Lambda^2 J_n^f \right] \right\} \frac{(\Lambda^2)^{r+1-n} (p^2)^n}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)}, \quad (4.20) \end{aligned}$$

bestehend aus den Resultaten der Berechnungen der Tadpole-, Geist-, Boson- und Fermion-Schleife. Die Funktionen

$$J_n = -3 \left(2 C_{rrn}^1 \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - C_{r-1rn}^1 - C_{rr-1n}^1 \right), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} J_n^f &= \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2)_f \left(V_{ffW^0}^{nr-2r} + V_{ffW^0}^{nrr-2} + \left(V_{ffW^0}^{nr-1r} + V_{ffW^0}^{nrr-1} \right) \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 2 V_{ffW^0}^{nrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} - \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right\} - 2 V_{ffW^0}^{nr-1r-1} \right) \\ &\quad + (T_3)_f \left(W_{ffW^0}^{nr-2r} + W_{ffW^0}^{nrr-2} + \left(W_{ffW^0}^{nr-1r} + W_{ffW^0}^{nrr-1} \right) \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 2 W_{ffW^0}^{nrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} - \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right\} - 2 W_{ffW^0}^{nr-1r-1} \right) \quad (4.22) \end{aligned}$$

gestatten im Weiteren eine kompakte Darstellung.

Der Ausdruck für J_n^f ist im Vergleich zum Analogon des W^+ -Propagators aufgrund des komplizierten Ansatzes des neutralen Fermion-Vertizes umfangreicher. Es ist daher bemerkenswert, dass J_n^f für den Approximationsgrad $r/r+1 = 0/1$ keinen Beitrag liefert. Die $\omega_{f,1}^{(1)}$ heben sich unabhängig von f exakt weg. An den Polfaktoren in (4.20) ist jetzt schon zu sehen, dass die SKG des W^0 -Propagators eine Bedingung mehr als die des W^+ -Propagators aufweist. Per Konstruktion modelliert der Ansatz ein masseloses Photon und das Z^0 -Boson und besitzt deswegen einen zusätzlichen Pol.

Der perturbative Limes der DSG (A.73) mit den Schleifenresultaten (4.20) und den erweiterten Ansätzen aus Kapitel 2 liefert

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{5}{2c_{\pm}^2} \left(-\frac{1}{3} C_{rrr+1}^1 + C_{rrr+1}^2 + C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{25}{6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6\tilde{c}_{\pm}^2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3\beta_0} \sum_f (\mathbf{1}_2)_f V_{ffW^0}^{r+1rr} + \frac{2}{3} N_f \right). \quad (4.23) \end{aligned}$$

Als SKG finden sich für $n = 0, \dots, r + 2$

$$\begin{aligned}
c_0 \tilde{u}_{0,n}^{(1)} &= \left(1 + \frac{25}{6\beta_0} + \frac{1}{6\beta_0} \left(1 - \frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2} \right) - \frac{2}{3\beta_0} N_f \right) \tilde{u}_{0,n-1}^{(2)} \\
&- \frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} \tilde{u}_{0,n}^{(2)} - \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2} \left\{ -\frac{5}{6} C_{rrn-1}^1 + \frac{5}{2} C_{rrn-1}^2 \right. \\
&\left. + \frac{5}{2} C_{rrn-1}^3 + J_n \right\} + \frac{1}{\beta_0} \sum_f \left\{ \frac{1}{3} (\mathbf{1}_2)_f V_{ffW^0}^{n-1rr} + (T_3)_f \frac{2}{3} W_{ffW^0}^{n-1rr} + J_n^f \right\}, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{u}_{0,r+2}^{(1)} = J_{r+2} = J_{r+2}^f = 0$ gilt. Die f -Summation erfolgt über alle hier betrachteten Fermionen $f = \nu_l, l, u$ und d , wobei die geschlossenen Quark-Schleifen wiederum einen Faktor drei erhalten. Die T_3 -Matrix liefert je nach Vertex ein Vorzeichen, $(T_3)_f = +1/2$ für $f = \nu_l, u$ und $(T_3)_f = -1/2$ für $f = l, d$. Weiterhin gilt

$$\tilde{u}_{0,l}^{(1)} = \sum_{\sigma \in S_{r+2}} \frac{1}{l!(r+2-l)!} \prod_{i=1}^{r+2-l} u_{0,\sigma(i)}^{(1)} \quad \text{für } l = 0, \dots, r+2, \quad (4.25)$$

$$\tilde{u}_{0,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \frac{1}{l!(r+1-l)!} \prod_{i=1}^{r+1-l} u_{0,\sigma(i)}^{(2)} \quad \text{für } l = 0, \dots, r+1. \quad (4.26)$$

Der Spezialfall für $r/r+1 = 0/1$ liefert hier

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 - \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{5}{2c_{\pm}^2} \left(-\frac{1}{3} C_{001}^1 + C_{001}^2 + C_{001}^3 \right) - \frac{25}{6} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6\tilde{c}_{\pm}^2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3\beta_0} \sum_f (\mathbf{1}_2)_f V_{ffW^0}^{100} + \frac{2}{3} N_f \right), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_0 u_{0,1}^{(1)} &= \left(1 + \frac{25}{6\beta_0} + \frac{1}{6\beta_0} \left(1 - \frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2} \right) - \frac{2}{3\beta_0} N_f \right) u_{0,1}^{(2)} \\
&- \frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} u_{\pm,1}^{(1)} - \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2} \left\{ -\frac{5}{6} C_{000}^1 + \frac{5}{2} C_{000}^2 + \frac{5}{2} C_{000}^3 - 6 C_{001}^1 u_{\pm,1}^{(1)} \right\} \\
&+ \frac{1}{\beta_0} \sum_f \left\{ \frac{1}{3} (\mathbf{1}_2)_f V_{ffW^0}^{000} + \frac{2}{3} (T_3)_f W_{ffW^0}^{000} \right\}, \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$0 = \left(-\frac{9}{4\beta_0 c_{\pm}} u_{0,1}^{(2)} + \frac{6}{\beta_0 c_{\pm}^2} C_{000}^1 \right) u_{\pm,1}^{(1)}. \quad (4.29)$$

Auch hier ist zu sehen, dass die Beiträge aus den Geist-Schleifen minimal sind und für $\tilde{c}_{\pm} = \tilde{c}_0 = 1$ aus den Gleichungen herausfallen. Dies wird auch bei den weiteren SKG zu beobachten sein.

Die Null auf der linken Seite von (4.29) spiegelt die Masselosigkeit des Photons wieder, denn diese erfordert $u_{0,2}^{(1)} = 0$ im Ansatz für den Propagator des W^0 -Feldes. Gleichung (4.29) stellt damit auf diesem Approximationsniveau eine sehr wichtige Beziehung dar, denn der echt nichtperturbative Parameter C_{000}^1 aus dem Boson-Vertex entscheidet über die Möglichkeit einer Massenausbildung in den Ansätzen. Verschwindet er durch die numerischen Rechnungen, kann entweder das W^{\pm} -Boson keine Masse ausbilden oder der W^0 -Propagator fällt auf

die Approximationsstufe $r = 0$ zurück. Er kann damit nicht das Photon und das Z^0 -Boson simultan modellieren.

Damit sind die SKG der bosonischen Selbstenergien bestimmt. Die nächsten Abschnitte in diesem Kapitel befassen sich mit den wesentlich komplizierteren 3- und 4-Punkt-Vertex-Gleichungen.

4.3 Der Boson-Vertex

4.3.1 Bestimmungsgleichung

Die direkte Verwendung einer oder mehrerer unresummiertes DSG für den bosonischen Tripel-Vertex ist unzweckmäßig. Das jeweils von links in ein Diagramm einlaufende Bein ist ausgezeichnet, denn es trifft auf einen perturbativen Vertex. An der im Anhang angegebenen Gleichung (A.74) ist dies deutlich zu sehen. Im Rahmen der erweiterten Störungstheorie wirkt sich dieser Umstand so aus, dass Defekttterme produziert werden [Dri 97]. Diese Problematik kann man allerdings vermeiden. Analog zur BSR der DSG des neutralen Fermion-Vertex (siehe Abschnitt 1.4) wird die DSG des Boson-Vertex (A.74) mit ausgezeichnete neutraler Boson-Linie resummiert. Dies liefert unter Berücksichtigung des MKP die folgende Gleichung:

Dabei sind Diagramme mit Geist-Linien und solche Graphen, die erst ab zwei Schleifen beitragen, in (4.30) weggelassen und werden auch in den noch folgenden Gleichungen nicht mit aufgeführt.

Da wir bei der Behandlung der Bewegungsgleichungen auf 1-Schleifen-Niveau operieren, können die BS-Kerne in (4.30) genähert werden. Dies läuft auf eine Ersetzung durch 1-Teilchen-Austauschgraphen und 4-Punkt-Vertexfunktionen hinaus. Im Gegensatz zu den 4-Punkt-Vertexfunktionen des Fermion-Sektors sind die bosonischen oberflächlich divergent. Damit bewirken Diagramme mit ihnen ebenfalls Modifikationen der nullten quasiperturbativen Ordnung des Boson-Vertex. Zusätzlich ist die Crossing-Symmetrie durch die beiden Tadpole-Graphen gestört. Die BS-resummierte Gleichung besitzt daher nur eine partielle Permutationssymmetrie bezüglich der rechten beiden Beine.

Die vollständige Symmetrie der Bewegungsgleichung kann durch eine *Trivialsymmetrisierung* hergestellt werden. Dazu sind zusätzlich zur obigen Gleichung die resummierten DSG mit ausgezeichnetem W^+ - und W^- -Bein zu bestimmen. Die Addition aller drei BS-resummierten

DSG ergibt nach Einsetzen der Näherungen für die BS-Kerne die vollkommen Crossing-symmetrische Gleichung. Sie ist von der folgenden Gestalt:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tree-level vertex} = \text{Tree-level vertex} + \text{Tree-level vertex} + \text{Loop diagrams} \\
 & + \frac{1}{3} \text{Loop diagrams} + \frac{2}{3} \text{Loop diagrams} \\
 & + \frac{1}{3} \text{Loop diagrams} + \frac{2}{3} \text{Loop diagrams} \\
 & + \frac{1}{3} \text{Loop diagrams} + \frac{2}{3} \text{Loop diagrams} \\
 & - \sum_{(f, f')} \text{Diagram with } f \text{ and } f' \text{ lines} - \sum_{(f, f')} \text{Diagram with } f \text{ and } f' \text{ lines} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Es sei noch einmal betont, dass keines der äußeren Beine ausgezeichnet ist. Ein störungstheoretischer 3-Boson-Vertex kommt aufgrund der Resummation in den Schleifen-Diagrammen nicht mehr vor. Er ist in der bosonischen Dreiecksschleife durch die volle Vertexfunktion ersetzt. Damit werden auch Informationen aus höheren Schleifenordnungen in niedrigere verlagert. Die Berechnung der Diagramme wird hingegen erheblich komplizierter. Die 4-Punkt-Vertexfunktionen treten in der Bewegungsgleichung sowohl in störungstheoretischer als auch in angezogener Form auf. Diese Charaktereigenschaft ist auch für die entsprechenden DSG typisch.

4.3.2 Schleifenberechnungen

In der vorliegenden Arbeit wird die bosonische 3-Punkt-Funktion erstmalig in beliebiger Approximationsstufe behandelt. Das Kernstück der Schleifenberechnungen stellt der Dreiecksgraph

$$\mathcal{J}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\xi)^{-1} \text{Diagram} \quad (4.32)$$

dar. Die Bestimmung der divergenten Anteile des Diagramms ist aufwändig, denn die darin enthaltenen Boson-Vertizes sind volle Funktionen, so dass der im 2. Kapitel formulierte Ansatz für den Boson-Vertex jeweils voll zum Tragen kommt. Das Ausmultiplizieren des Zählers führt auf rund 64000 Terme. Durch die Feynman-Parametrisierung und die sich daraus ergebenden Variablensubstitution liegen entsprechend mehr Terme vor.

Es ist darum sinnvoll, die Kontraktion der Lorentztensoren nach den üblichen Partialbruchzerlegungen der inneren Linien mit Anwendung des MKP und der Feynman-Parametrisierung durchzuführen. Kontraktionsformeln für ε -Tensoren sind in Anhang B.1 notiert. Beim Herauspräparieren der divergenten Anteile können nicht beitragende Terme gleich fortgelassen werden. Die Integrationen lassen sich mit den Beziehungen aus Anhang B.4 durchführen. Wie auch bei der Diskussion der fermionischen 3-Punkt-Funktionen in Kapitel 3 lassen sich die Partialbruchsummen nicht allgemein ausführen und verbleiben daher in verkürzter Notation im Endresultat. Aus Übersichtsgründen wird das Ergebnis der Schleifenberechnung im Anhang angegeben, siehe (C.117). Vernachlässigt man in den Ansätzen für den Boson-Vertex Terme, die einen ε -Tensor tragen, so stimmt das hier gefundene Resultat im strengen perturbativen Limes für den einfachsten Approximationsgrad $r/r + 1 = 0/1$ mit dem in [Mer 96] angegebenen Ausdruck überein. Das Diagramm wird in [Sti 03] unabhängig behandelt, so dass die Richtigkeit der Ergebnisse auf beliebiger Approximationsstufe sichergestellt ist.

Tadpole-Diagramme sind in (4.31) mehrfach zu berechnen. Es bietet sich darum an, eine Hilfsformel bereitzustellen, mit der sich alle Tadpole-artigen Integrale lösen lassen. Für diese Schleifen ist charakteristisch, dass sie sich neben den beiden inneren Boson-Linien aus 3- und 4-Punkt-Amplituden zusammensetzen. Durch die inneren Transversalprojektoren können die Potenzen der Integrationsimpulse mit dem bereits benutzten Rechenrick (3.51) zum Teil herab gesetzt werden. Sämtliche Tadpole-Schleifen sind damit auf einen allgemeinen Ausdruck, siehe auch (C.109), überführbar, der wiederum mit aus der Störungstheorie bekannten Techniken bestimmt werden kann. Die Terme aus den Partialbruchzerlegungen lassen sich dabei immer in den Vorfaktoren der Lorentztensoren verstecken. Die Partialbruchsummen in den Tadpole-Schleifen mit den nackten 4-Punkt-Funktionen lassen sich mit den in Anhang B.2 angegebenen Relationen ausführen. Dagegen gelingt dieses Verfahren mit punktierten Diagrammen nicht. Die Ergebnisse der Schleifenberechnungen zum Boson-Vertex sind im Anschluss an das Resultat des Dreiecksgraphen zusammengestellt.

Für die geschlossenen Fermion-Diagramme ist eine ähnliche Vorgehensweise sinnvoll. Hierfür ist die Hilfsformel (C.113) notwendig. Die geschlossenen Diagramme mit Geist-Linien produzieren Divergenzen, die bis auf die c -Faktoren aus den Geist-Propagatoren über (1.49) an den Renormierungskonstanten (1.31) und (1.47) abgelesen werden können.

4.3.3 Die SK-Gleichungen

In Analogie zu (3.63) wird der Zusammenhang zwischen renormierter und unrenormierter Vertexfunktion benötigt. Mit Hilfe von (1.49) kann er zu

$$\begin{aligned} (g(\nu) \nu^\epsilon) \left(\Gamma_3^{[r/r+1,0] +- 0}_{\mu \nu \rho}(p_1, p_2, p_3) \right)_R &= Z_3(\nu, \epsilon)^{3/2} (g_0 \nu_0^\epsilon) \Gamma_3^{[r/r+1,0] +- 0}_{\mu \nu \rho}(p_1, p_2, p_3) \\ &= Z_3(\nu, \epsilon)^{3/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} (g(\nu) \nu^\epsilon) \Gamma_3^{[r/r+1,0] +- 0}_{\mu \nu \rho}(p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (4.33)$$

bestimmt werden, wobei für die Kopplungsentwicklung der Renormierungskonstanten

$$Z_3(\nu, \epsilon)^{3/2} Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{1/2} = 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \left(-1 + \frac{15}{4} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} N_f \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.34)$$

gilt. Die Summanden in der runden Klammer entsprechen den störungstheoretischen Divergenzen aus dem Dreiecksgraphen, den Tadpole-Schleifen, den Geister-Loops und den geschlossenen Fermion-Diagrammen.

In der Bewegungsgleichung (4.31) wird der nackte 3-Boson-Vertex durch (4.34) modifiziert. Diese Ausdrücke werden wiederum durch Terme aus den Schleifendiagrammen kompensiert. Dazu wird der perturbative Limes der Bewegungsgleichung benötigt. Da sich der perturbative Boson-Vertex aus drei verschiedenen Lorentztensoren zusammensetzt, führt dies unter Beachtung der perturbativen Randbedingungen (2.42) auf drei Gleichungen. Sie sind in beliebiger Approximationsstufe in Anhang D zusammengestellt.

Die weiteren SKG erhält man auch hier aus (4.31) mit den Schleifenresultaten aus Anhang C über einen Koeffizientenvergleich in den äußeren Impulsquadraten und der Λ -Skala. Selbstverständlich ist dabei (4.34) zu berücksichtigen. Die SKG beliebiger Approximationsstufe sind ebenfalls in Anhang D zu finden.

Der Spezialfall $r/r+1 = 0/1$ liefert acht Bedingungen. Da die Gleichungen recht umfangreich sind, werden exemplarisch die SKG proportional zum ersten Lorentztensor des Boson-Vertex, vgl. (2.37), angegeben. Da in der numerischen Behandlung des SK-Systems die 4er Vertizes aufgrund ihres Umfangs nicht berücksichtigt werden können, sind in den folgenden Gleichungen die vollen 4-Punkt-Funktionen in den punktierten Tadpole-Diagrammen von (4.30) durch ihre störungstheoretischen Pendanten als ersetzt zu verstehen. Wir haben damit nach wie vor eine vollständig Bose- und Crossing-symmetrische Gleichung für den Boson-Vertex in der Hand. Der perturbative Limes liefert

$$\begin{aligned} C_{001}^1 &= 1 - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_\pm^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] - \frac{5}{12\beta_0} \left[\frac{1}{c_\pm c_0} \left(5C_{001}^1 + 2C_{001}^2 + 2C_{001}^3 \right) - 9 \right] \\ &+ \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_\pm^2 c_0} \left(C_{001}^1 C_{001}^2 C_{001}^3 + \frac{1}{6} C_{001}^1 \left((C_{001}^1 - C_{001}^3) C_{001}^3 + C_{001}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2) \right) \right) - 1 \right] \\ &+ \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \left[(V_{ffW^0}^{100} + V_{ff'W^0}^{100}) V_{ff'W^+}^{000} + V_{ff'W^-}^{000} - 2N_f \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$. Aus der SK-Bedingung (D.8) folgt einerseits

$$\begin{aligned}
C_{001}^1 &= \left(1 - \frac{1}{\beta_0} + \frac{15}{4\beta_0} + \frac{1}{12\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f - \frac{1}{12\beta_0}\tilde{c}_\pm^2\tilde{c}_0\right) \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \left[(V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100}) V_{ffW^+}^{000} V_{ff'W^-}^{000} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0 c_\pm^2 c_0} \sum_0^{0[1]} \left(u_{0,1}^{(1)} u_{0,1}^{(2)} A_{11,1}^{3W} + u_{0,1}^{(2)} (A_{10,1}^{3W} + A_{01,1}^{3W}) + A_{00,1}^{3W} \right) \\
&\quad - \frac{5}{12\beta_0 c_\pm c_0} \left(5 C_{001}^1 + 2 C_{001}^2 + 2 C_{001}^3 \right). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Wiederum abkürzend werden

$$(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) u_{0,1}^{(2)} \sum_0^{0[1]} = 1 \quad \text{für} \quad u_{0,1}^{(1)} \neq u_{0,1}^{(2)} \quad \text{und} \quad u_{0,1}^{(2)} \neq 0 \tag{4.37}$$

benutzt. Die Größe $\sum_0^{0[1]}$ ist ebenfalls in Anhang D zu finden. Die Funktionen mit Kombinationen aus nichtperturbativen Parametern des Boson-Vertex sind recht unübersichtlich und ergeben sich mit dem Schleifenresultat (C.117) zu

$$A_{11,1}^{3W} = C_{001}^1 C_{001}^2 C_{001}^3 + \frac{1}{6} C_{001}^1 ((C_{001}^1 - C_{001}^3) C_{001}^3 + C_{001}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2)), \tag{4.38}$$

$$A_{10,1}^{3W} = C_{001}^1 C_{001}^2 C_{000}^3 + \frac{1}{6} C_{001}^1 ((C_{001}^1 - C_{001}^3) C_{000}^3 + C_{001}^2 (C_{000}^1 - C_{000}^2)), \tag{4.39}$$

$$A_{01,1}^{3W} = C_{001}^1 C_{000}^2 C_{001}^3 + \frac{1}{6} C_{001}^1 ((C_{000}^1 - C_{000}^3) C_{001}^3 + C_{000}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2)) \tag{4.40}$$

und

$$\begin{aligned}
A_{00,1}^{3W} &= C_{001}^1 C_{000}^2 C_{000}^3 + \frac{1}{6} C_{001}^1 ((C_{000}^1 - C_{000}^3) C_{000}^3 + C_{000}^2 (C_{000}^1 - C_{000}^2)) \\
&\quad - \frac{1}{6} C_{001}^1 (C_{000}^5 - C_{000}^4) (C_{000}^4 + C_{000}^5) - C_{000}^4 C_{001}^1 (C_{000}^4 + C_{000}^5) \\
&\quad + C_{000}^4 C_{001}^1 (C_{000}^5 - C_{000}^4). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Parameter C_{000}^4 und C_{000}^5 tragen in dem nichtperturbativen Ansatz für den Boson-Vertex einen ε -Tensor. Damit verkomplizieren sich die obigen Funktionen zum Teil erheblich.

Die SK-Bedingung liefert andererseits

$$\begin{aligned}
C_{000}^1 &= \left(1 - \frac{1}{\beta_0} + \frac{15}{4\beta_0} + \frac{1}{12\beta_0} - \frac{2}{3\beta_0}N_f - \frac{1}{12\beta_0}\tilde{c}_\pm^2\tilde{c}_0\right) u_{0,1}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \left[(V_{ffW^0}^{000} - W_{ffW^0}^{000}) V_{ffW^+}^{000} V_{ff'W^-}^{000} + (V_{f'f'W^0}^{000} + W_{f'f'W^0}^{000}) V_{f'fW^+}^{000} V_{f'f'W^-}^{000} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0 c_\pm^2 c_0} \sum_0^{0[1]} \left(u_{0,1}^{(1)} u_{0,1}^{(2)} A_{11,0}^{3W} + u_{0,1}^{(2)} (A_{10,0}^{3W} + A_{01,0}^{3W}) + A_{00,0}^{3W} \right) \\
&\quad - \frac{5}{12\beta_0 c_\pm c_0} \left(5 C_{001}^1 + 2 C_{001}^2 + 2 C_{001}^3 \right) u_{0,1}^{(2)}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Wiederum findet man mit den Resultaten der Schleifenberechnungen für den Boson-Vertex

$$A_{11,0}^{3W} = C_{000}^1 C_{001}^2 C_{001}^3 + \frac{1}{6} C_{000}^1 ((C_{001}^1 - C_{001}^3) C_{001}^3 + C_{001}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2)), \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} A_{10,0}^{3W} &= C_{000}^1 C_{001}^2 C_{000}^3 + \frac{1}{6} C_{000}^1 ((C_{001}^1 - C_{001}^3) C_{000}^3 + C_{001}^2 (C_{000}^1 - C_{000}^2)) \\ &\quad - C_{000}^4 (C_{001}^1 + \frac{2}{3} C_{001}^2) (C_{000}^4 + C_{000}^5) + 2 C_{001}^2 C_{000}^4 C_{000}^4, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} A_{01,0}^{3W} &= C_{000}^1 C_{000}^2 C_{001}^3 + \frac{1}{6} C_{000}^1 ((C_{000}^1 - C_{000}^3) C_{001}^3 + C_{000}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2)) \\ &\quad + C_{000}^4 (C_{001}^1 + \frac{2}{3} C_{001}^2) (C_{000}^5 - C_{000}^4) + 2 C_{000}^4 C_{000}^4 C_{001}^3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

und

$$\begin{aligned} A_{00,0}^{3W} &= C_{000}^1 C_{000}^2 C_{000}^3 + \frac{1}{6} C_{000}^1 ((C_{000}^1 - C_{000}^3) C_{000}^3 + C_{000}^2 (C_{000}^1 - C_{000}^2)) \\ &\quad - \frac{1}{6} C_{000}^1 (C_{000}^5 - C_{000}^4) (C_{000}^4 + C_{000}^5) - C_{000}^4 (2 C_{000}^1 + \frac{2}{3} C_{000}^2) (C_{000}^4 + C_{000}^5) \\ &\quad + C_{000}^4 (2 C_{000}^1 + \frac{2}{3} C_{000}^2) (C_{000}^5 - C_{000}^4) + 2 C_{000}^4 C_{000}^4 (C_{000}^2 + C_{000}^3). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Im Vergleich zu den Beiträgen des Dreiecksgraphen sind die der Fermion-Schleifen sehr einfach, vgl. (4.42). Zum einen müssen Parameter in den Ansätzen für die geladenen Fermion-Vertizes durch die geforderten perturbativen Randbedingungen verschwinden. Andererseits eliminieren die Spurrelationen für die γ -Matrizen viele Terme.

Unter Verwendung der Symmetrierelationen (2.41) wird beim Vergleich der perturbativen Limiten (D.10) und (D.12) erneut der \mathcal{CP} -verletzende Charakter des mit C_{lmn}^4 gehenden Lorentztensors deutlich. Für den Approximationsgrad 0/1 wäre bei einem Koeffizientenvergleich $C_{000}^4 = 0$ korrekt, denn die Gleichungen wären in diesem Fall äquivalent. Es ist an dieser Stelle aber nicht vorherzusagen, ob beide Gleichungen auch für $C_{000}^4 \neq 0$ zu erfüllen sind.

4.4 Bemerkungen zu den 4-Boson-Vertizes

Die Behandlung der 4-Punkt-Funktionen im Rahmen der nichtperturbativ erweiterten Feynman-Regeln sollte aus Konsistenzgründen mit Hilfe BS-artiger Gleichungen erfolgen. Auf die Problematik bei der Verwendung von DSG wurde ja bereits mehrfach hingewiesen. Vollständig Bose- und Crossing-symmetrische Bewegungsgleichungen für die 4-Punkt-Funktionen lassen sich aus ihren jeweiligen BSG gewinnen [BL 77, Sti 90].

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die BSG des 4-Punkt-Vertex mit zweifach positiv und negativ geladenen Beinen aus Kapitel 2. Per Definition ist T_s in (2.84) 1-PI sowie schattenirreduzibel bezüglich des horizontalen s -Kanals. Der 2-PI (und schattenirreduzible) BS-Kern K_s kann bezüglich der zwei weiteren Mandelstam-Kanäle t und u zerlegt werden. Der BS-Kern lässt sich dabei so weit ausdünnen, dass die verbleibende Amplitude bis auf den nackten Vertex nur Diagramme mit mindestens drei Schleifen enthält, die überdies primitiv divergent sind. Für Details siehe wiederum [BL 77].

$$\begin{aligned}
& - \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \\
& - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
& + \sum_{(f,f')} \text{Diagram 5} + \sum_{(f,f')} \text{Diagram 6} \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Die M-Funktion in (4.48) ist stark ausgedünnt. Sie enthält nur noch 2-PI Anteile und das in jedem Kanal. Nach dem störungstheoretischen Vertex treten erst wieder Diagramme auf, die drei oder mehr Schleifen besitzen.

Die 4-Punkt-Amplituden T_s , T_t und T_u können durch ihre Skelettgraphenentwicklung ersetzt werden. Die BS-Kerne werden so genähert, dass keine 2-Schleifen-Terme entstehen. Speziell können Diagramme, die 4-Punkt-Amplituden mit Fermion-Linien enthalten, weggelassen werden. Sie sind oberflächlich konvergent und daher nicht in der Lage, die nullte quasiperturbative Ordnung der Vertexfunktion zu modifizieren.

Wird (4.48) auf diese Weise genähert, so ergeben sich insgesamt 27 Diagramme. Die Berechnung der Schleifendivergenzen ist zwar zum Teil aufwendig, aber dennoch *in beliebiger Approximationsstufe prinzipiell durchführbar*, weil infolge der logarithmischen Divergenz in allen Integranden nur noch die höchsten Potenzen des Schleifenimpulses mitgenommen werden müssen. Die Berechnung erfolgte in dieser Arbeit zum Teil mit dem symbolischen Computeralgebra-Programm MATHEMATICA. Das Zusatzpaket TRACER macht die γ - und Lorentz-Algebra in D Dimensionen symbolisch behandelbar¹. Mit Hilfe geeigneter Ersetzungsregeln können beim Extrahieren der Divergenzen einer Schleife konvergente Anteile und diejenigen Anteile, die durch die Manipulationsvorschriften der sphärisch symmetrischen Integration verschwinden, fortgelassen werden. Daran schließt sich die symbolische Integration der einzelnen Terme an. Dies führt auf die in Anhang C.3.3 angegebenen Hilfsformeln.

Als einfache Beispiele werden zwei Diagramme aus der 1-Schleifen-Näherung von (4.48)

¹Tracer, in der Version 1.1 von M. Jamin und M.E. Lautenbacher, ist auf der Webseite von Wolfram Research <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/2987/> erhältlich.

behandelt. Zum einen sind die Divergenzen einer Schleife mit zwei bosonischen 4-Punkt-Amplituden zu bestimmen. Für die Schleife

$$\mathcal{J}(p_1, p_2, p_3, p_4, \Lambda) = \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-2} \text{Diagram} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ V_4^{[r/r+1,0] + - 0 0}_{\nu \rho \nu_1 \mu_1}(p_2, p_3, q - p_2 - p_3, -q) \right. \\ &\quad \cdot t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{0[r+1,0]}(-q) t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_2 - p_3) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_2 - p_3) \\ &\quad \left. \cdot V_4^{[r/r+1,0] + - 0 0}_{\mu \sigma \nu_2 \mu_2}(p_1, p_2, -q + p_2 + p_3, q) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (4.50) \end{aligned}$$

findet sich

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(p_1, p_2, p_3, p_4, \Lambda) &= \frac{1}{2\beta_0 c_0^2} \sum_{k_1=0}^r \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{k_2=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{m_1+m_2}^{0[r+1]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} \\ &\quad \frac{(p_1^2)^{k_2} (\Lambda^2)^{r-k_2}}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_2^2)^{k_1} (\Lambda^2)^{r-k_1}}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \left[\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} A_{k_1, \dots, n_2}^{4W} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} B_{k_1, \dots, n_2}^{4W} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} C_{k_1, \dots, n_2}^{4W} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D_{k_1, \dots, n_2}^{4W} \right] \frac{(p_3^2)^{l_1} (\Lambda^2)^{r-l_1}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_4^2)^{l_2} (\Lambda^2)^{r-l_2}}{\prod_{s=1}^r (p_4^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \text{endl. Anteile} \quad (4.51) \end{aligned}$$

mit den üblichen Partialbruchsummen (siehe Anhang D) und den Funktionen der nichtperturbativen Parameter

$$\begin{aligned} A_{k_1, \dots, n_2}^{4W} &= \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2 (13 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^3 (V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 \\ &\quad + 13 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) + V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^4, \quad (4.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{k_1, \dots, n_2}^{4W} &= \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2 (V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 + 13 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^3 (13 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 \\ &\quad + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^4, \quad (4.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{k_1, \dots, n_2}^{4W_1} &= \frac{3}{4} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 (4 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^1 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2 (18 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^1 \\ &\quad + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{24} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^3 (18 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^1 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 + V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3), \quad (4.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{k_1, \dots, n_2}^{4W} &= \frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^4 - \frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^3 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^4 + \frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 V_{k_2 l_2 m_2 n_2}^3. \quad (4.55) \end{aligned}$$

Die Behandlung bosonischer Boxgraphen ist komplizierter, denn bis zu vier ε -Tensoren aus dem Ansatz für den Boson-Vertex sind in den Diagrammen miteinander zu kontrahieren. Dagegen lässt sich wieder ausnutzen, dass die Schleifen nur logarithmisch divergent sind. Eine Hilfsformel zur Berechnung ist ebenfalls in Anhang C.3.3 angegeben.

Wie bei den fermionischen Dreiecksdiagrammen können die fermionischen Boxgraphen hier

keine Terme proportional zum ε -Tensor ausbilden. Beispielsweise lässt sich für den Boxgraphen

$$\mathcal{J}(p_1, p_2, p_3, p_4, \Lambda) = - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^{-2} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Diagram of a box graph with four vertices, each containing a fermion loop. The vertices are connected by lines labeled } f \text{ and } f'. \text{ External lines are labeled } W_\nu^+, W_\mu^+, W_\rho^-, \text{ and } W_\sigma^-. \end{array} \\ (4.56) \end{array}$$

als Ergebnis

$$\begin{aligned} &= - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0] +}(q - p_1, -q, p_1) S_f^{[r,0]}(-q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0] -}(q, -q - p_4, p_4) \right. \\ &\quad \cdot S_{f'}^{[r,0]}(-q - p_4) \bar{\Gamma}_3^{[r,0] +}(q + p_4, -q - p_2 - p_4, p_2) S_f^{[r,0]}(-q - p_2 - p_4) \\ &\quad \left. \cdot \bar{\Gamma}_3^{[r,0] -}(q + p_2 + p_4, -q + p_1, p_3) S_{f'}^{[r,0]}(-q + p_1) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (4.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(p_1, p_2, p_3, p_4, \Lambda) &= - \frac{1}{\beta_0} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{m_3=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{m_4=0}^r \sum_{n_4=0}^r \sum_{n'_4=0}^r \\ &\quad \sum_{n_1+n'_3}^{f'[r]} \sum_{n_3+n'_2}^{f[r]} \sum_{n_2+n'_4}^{f'[r]} \sum_{n_4+n'_1}^{f[r]} \frac{(p_1^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{r} \frac{(p_2^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{r} A_{m_1, \dots, n'_4}^{4F} \left[\frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \frac{1}{3} \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \right] \frac{(p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{r-m_3}}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_4^2)^{m_4} (\Lambda^2)^{r-m_4}}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \text{endl. Anteile} \quad (4.58) \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} A_{m_1, \dots, n'_4}^{4F} &= V_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} V_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} + V_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} A_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} \\ &\quad + V_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} A_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} + V_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} V_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} \\ &\quad + A_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} A_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} + A_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} V_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} \\ &\quad + A_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} V_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} + A_{f'f W^+}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'f W^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'f W^-}^{m_3 n_3 n'_3} A_{f'f W^-}^{m_4 n_4 n'_4} \quad (4.59) \end{aligned}$$

notieren.

4.5 Zwischenergebnis

Die bosonischen 2- und 3-Punkt-Funktionen sind nun in beliebiger Approximationsstufe bei gleichzeitiger Wahl der Landau-Eichung vollständig behandelt. Die zugehörigen SK-Bedingungen sind aufgestellt. Der Geist-Sektor bleibt bis auf die konstanten Faktoren in den Propagatoren von nichtperturbativen Modifikationen befreit. Die Bestimmung von Diagrammen mit Geist-Linien ist entsprechend unproblematisch.

Die 4-Punkt-Funktionen sind im Prinzip in beliebiger Approximationsstufe behandelbar. Die Bose- und die Crossing-Symmetrie der Amplituden bleibt durch die Verwendung von BSG

gewahrt. Die darin enthaltenen Schleifen lassen sich im Rahmen des SKM lösen. Die Berechnung der Integrale erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe des symbolischen Computer-Algebra-Programms MATHEMATICA. Die symbolische Bestimmung der Tadpole-Diagramme in Abschnitt 4.3 gelingt ebenfalls, was noch einmal die Richtigkeit der Ergebnisse unterstreicht. Die Behandlung des bosonischen Dreiecksgraphen mit MATHEMATICA scheitert jedoch.

Eine numerische Behandlung der SKG für die 4-Punkt-Funktionen sprengt den Rahmen dieser Arbeit. Bereits auf der Approximationsstufe 0/1 liegen ohne Verwendung von Symmetriebeziehungen allein für die drei 4-Punkt-Funktionen circa 60 SKG vor, die jeweils aus rund 150 Termen bestehen. Wir schneiden daher das SK-Problem nach den 3-Punkt-Funktionen ab und nähern die 4-Punkt-Vertexfunktionen durch ihre perturbativen Partner. Die dynamische Gleichung für den Boson-Vertex behält bei diesem Cutoff ihre Bose- und Crossing-symmetrische Form bei. Die zugehörigen SKG vereinfachen sich entsprechend.

Damit stehen im Approximationsgrad $r/r + 1 = 0/1$ nach Verwendung von Symmetriebeziehungen den verbleibenden 11 bosonischen Parametern 12 Gleichungen gegenüber. Die Diskrepanz zwischen Parametern und Gleichungen, wie sie auch im Fermion-Sektor vorhanden ist, verschärft sich hier. Für höhere Approximationsgrade läuft die Anzahl der bisher abgeleiteten SK-Bedingungen aus Kapitel 3 und 4 und der nichtperturbativen Parameter auseinander. Die SKG sind dann mit Vakuumkondensaten, die Gegenstand des nächsten Kapitels sein werden, zu kombinieren.

Kapitel 5

Vakuumkondensate

Die Vakuumkondensate (VK) stellen in masselosen Theorien ein rein nichtperturbatives Element von QFT dar. Wird die Gültigkeit der OPE, wie sie in Kapitel 2 eingeführt wurde, vorausgesetzt, so wird deutlich, dass die Kondensate im Fall abwesender Teilchenmassen nur mit der Λ -Skala skalieren können. In der reinen Störungstheorie verschwinden die Kondensate daher oder führen auf triviale Aussagen.

Gebildet werden die VK, indem die äußeren Ortsvariablen der vollen Greenschen Funktionen auf denselben Wert gesetzt werden. Dabei führen die nichtperturbativen Modifikationen der Vertexfunktionen im Allgemeinen auf nichtverschwindende VK, proportional zu Potenzen der Massenskala Λ .

Für diese Arbeit sind die *Kondensatbedingungen der Bewegungsgleichungen* von besonderem Interesse, da sie aufgrund ihrer Entstehung mit den gewöhnlichen DSG harmonieren. Sie stellen daher natürliche Ergänzungen dar und komplettieren den Satz der SKG. Wie später deutlich wird, kann bei dieser Herleitung der Kondensatbedingungen auf die Berechnung von Diagrammen mit zwei Schleifen *nicht* verzichtet werden.

5.1 Bemerkung zu 2-Schleifen-Diagrammen

Die Berechnung von divergenten Mehrschleifendiagrammen kann nicht naiv erfolgen, denn die Auswertung der Integrale hängt im Allgemeinen von der Parametrisierung der inneren Linien ab. Eine bloße Hintereinanderausführung der Integrationen erzeugt für Diagramme mit sogenannten Überlappdivergenzen nicht-lokale Singularitäten im Regularisierungsparameter, die durch die Struktur der Lagrange-Dichte nicht absorbiert werden können. Die Forderung nach Lokalität von Feldtheorien wäre verletzt.

Die genaue Vorgehensweise bei der Berechnung von divergenten Mehrschleifendiagrammen ist aus der Störungstheorie bekannt und gelingt dort mit Hilfe der Zimmermannschen Wald-Formel (forest formula), wie sie zum Beispiel in [Col 85, Kug 97] angegeben ist. Mit ihr können die für einen beliebigen Graphen notwendigen Counterterme gefunden werden, indem die divergenten Subgraphen dieser Diagramme zu Wäldern zusammengefasst werden. Eine bestimmte Kombination der Elemente dieser Wälder ermöglicht im Renormierungsprozess die Beseitigung der singulären Anteile.

Die systematisch erweiterte Störungstheorie gehorcht nach ihren Konstruktionsprinzipien den Grundsätzen der perturbativen Renormierung. Damit können die in dieser Arbeit behandel-

ten Mehrschleifendiagramme à la Zimmermann berechnet werden. Die führende Divergenz eines Mehrschleifenintegrals ergibt sich aus der Summe der führenden Divergenzen seiner Wälder. Daran schließt sich die perturbative Renormierung der so gewonnenen Ergebnisse an.

5.2 Definition der Vakuump kondensate

Vakuump kondensate sind als Vakuumerwartungswert geeigneter wechselwirkender Normalprodukte am gleichen Raumzeitpunkt mit der Summation über alle Raumindizes definiert [PT 82]. Alternativ können die VK aus den vollen und nicht-trunkierten Greenschen Funktionen berechnet werden. Für den Ortsraum werden alle unabhängigen Ortsvariablen auf einen Wert gesetzt, was sich formal als

$$\text{VK}(G_N(x, x_1, \dots, x_{N-1})) := \lim_{x_1, \dots, x_{N-1} \rightarrow x} G_N(x, x_1, \dots, x_{N-1}) \quad (5.1)$$

schreiben lässt. Nach einer Fourier-Transformation ergibt sich für den Impulsraum das VK einer Greenschen Funktion aus der Integration über die freien äußeren Impulse gemäß

$$\text{VK}(G_N(k_1, \dots, k_{N-1})) = \int \frac{d^D k_1}{(4\pi)^D} \cdots \int \frac{d^D k_{N-1}}{(4\pi)^D} G_N(k_1, \dots, k_{N-1}). \quad (5.2)$$

Dabei sind alle Lorentz-Indizes, die hier fortgelassen sind, zu kontrahieren.

Für die erweiterte Störungstheorie ist sofort klar, dass (5.2) für den masselosen Fall nur von der Λ -Skala abhängen kann, da kein weiterer Skalierungsmaßstab vorliegt. Im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden die nichtperturbativen Modifikationen und damit auch die Kondensate. Dies ist bei Teilkondensaten (TK), die bei Greenschen Funktionen mit drei oder mehr äußeren Impulsen gebildet werden können, anders. TK erhält man analog zu (5.2), wobei nicht alle möglichen Integrationen über die äußeren Impulse ausgeführt werden. Auch sie liefern Bedingungen, die zur Bestimmung der nichtperturbativen Parameter herangezogen werden können.

Der in Kapitel 2 vorgestellte SKM ist in obiger Definition des VK bzw. TK nicht direkt anwendbar. Dazu sind zuerst aus den Vertexfunktionen die Greenschen Funktionen zu ermitteln. Trunkierte Anteile, reduzible Graphen und eventuell vorhandene unverbundene Diagramme sind hinzuzufügen. Je mehr Beine eine Vertexfunktion aufweist, desto aufwendiger ist die Prozedur.

Es stellt sich sofort die Frage, wie ein Kondensat zu bilden ist und welche Beiträge es gibt. Eine direkte Überintegration der DSG führt, wie in [Grü 02] gezeigt, lediglich auf Linearkombinationen der ursprünglichen DSG. Die Berücksichtigung von Termen, die maximal eine bestimmte perturbative Ordnung und gleichzeitig maximal eine bestimmte Potenz von $1/\beta_0$ (d. h. Schleifenordnung) haben, lässt prinzipiell unterschiedliche Bestimmungsgleichungen für die VK zu. Diese Vorgehensweise ist also in gewisser Weise willkürlich und darum ungeeignet. Nach den bisherigen Erfahrungen scheint die Begrenzung nach Schleifenordnungen sinnvoll. Eine Begrenzung auf maximal 1-Loop-Terme führt, wie in den folgenden Abschnitten deutlich wird, zum Teil auf triviale Aussagen. Analog wie bei den bis hierher betrachteten Bewegungsgleichungen ist es beim Aufstellen der zugehörigen vollen VK schlüssig, jeweils rechter Hand eine Schleifenordnung mehr zuzulassen.

5.3 Kondensat des Fermion-Propagators

Mit der Definition des VK (5.2) und der Beachtung der funktionalen Zusammenhänge für Greensche Funktionen aus Anhang A.2 gilt für das Kondensat des Fermion-Propagators

$$\text{VK}(S_f(k)) = \lim_{x \rightarrow y} \langle 0 | \bar{\psi}_f(x) \psi_f(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^D k}{(4\pi)^D} S_f(k). \quad (5.3)$$

Um die DSG des Fermion-Propagators in die Definition des Kondensates einsetzen zu können, ist (A.67) mit einem nackten und einem vollen Propagator zu multiplizieren. Nach Umstellung der Terme kann die Gleichung in die rechte Seite von (5.3) eingesetzt werden. Das liefert die SK-Bedingung

$$f \text{ (Kreis mit Vertauschungsoperator) } = f \text{ (nacktes Diagramm) } + f \text{ (Diagramm mit } W^\mp \text{ Schleife) } + f \text{ (Diagramm mit } W^0 \text{ Schleife) } \quad (5.4)$$

Um den $1/g^2$ -Mechanismus anwenden zu können, werden die Beiträge zum Kondensat mit einem Faktor $(g_0 \nu_0^\epsilon)^2$ versehen, wodurch sie als echte 1- und 2-Schleifen-Terme ausgezeichnet werden.

Nun können die sich aus (5.4) ergebenden SKG berechnet werden. Wie bei den Bewegungsgleichungen werden auch hier die divergenten Anteile der Schleifen bestimmt. Diese sind bei den 1-Loop-Diagrammen Terme proportional zu $1/\epsilon$. Bei den 2-Schleifen-Graphen werden die führenden divergenten Ausdrücke, die mit $1/\epsilon^2$ gehen, extrahiert. Terme mit $1/\epsilon$ tragen in diesem Fall nicht bei, da auf sie der SKM nicht anwendbar ist. Sie tragen zu den endlichen Anteilen erster Ordnung in $g(\nu)$ bei.

Bevor es an die technisch aufwendigere Berechnung der 2-Schleifen-Graphen gehen soll, wird zunächst die linke Seite von (5.4) behandelt. Die Berechnung des Integrales über den Fermion-Propagator ist *straight forward*. Nach Einsetzen der Approximante für den Fermion-Propagator kann das Integral durch eine Partialbruchzerlegung und Umwandlung des Integrandennenners ohne Feynman-Parametrisierung gelöst werden. Das liefert

$$\begin{aligned} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_1(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S_f^{[r,0]}(p) \\ &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{t=1}^{r+1} \frac{\prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)})} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\not{p} + \omega_{f,t}^{(1)} \Lambda} \\ &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{t=1}^{r+1} \frac{\prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)})} \frac{1}{(4\pi)^D} \Gamma(\epsilon - 1) (\omega_{f,t}^{(1)} \Lambda)^{3-2\epsilon} + \text{endl. Anteile.} \quad (5.5) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Da hierfür in Kapitel 3 einige Vorarbeit geleistet wurde, kann das Ergebnis der q -Integration sofort als

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}(\Lambda) &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \frac{1}{2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} \\
&\cdot \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_2}^{(1)})} \frac{(-\omega_{f,t_3}^{(1)})^{n'}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_3}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t_3}^{(1)})} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \\
&\cdot \left[\left(\frac{1}{D} (y-2) \not{p} + y \not{p} + \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda \right) \gamma_\mu [V_{f'fW^+}^{mnn'} + A_{f'fW^+}^{mnn'} + \gamma_5] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{D} (y-1) (\gamma_\nu \not{p}_\mu + \gamma_\mu \not{p}_\nu) \gamma_\nu [V_{f'fW^+}^{mnn'} + A_{f'fW^+}^{mnn'} + \gamma_5] \right] \\
&\cdot \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon) (R^2)^{-\epsilon} \frac{1}{\not{p} + \omega_{f,t_3}^{(1)} \Lambda} \frac{1}{\not{p}} \gamma_\mu + \text{endl. Anteile} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

mit der Funktion

$$R^2 = p^2(y-y^2) + (\omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda)^2(1-y) + u_{\pm,t_2}^{(2)} \Lambda^2 xy \quad (5.11)$$

angegeben werden. Zur Bestimmung der verbleibenden p -Integration ist eine Feynman-Parametrisierung notwendig. Mit Hilfe von (B.48) ergibt sich für den vom p -Impuls abhängigen Teil

$$\frac{1}{p^2 + (\omega_{f,t_3} \Lambda)^2} \frac{1}{p^2} \frac{1}{R^{-2\epsilon}} = \frac{\Gamma(2+\epsilon)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(\epsilon)} \int_0^1 v dv \int_0^1 dw (1-v)^{\epsilon-1} f_\epsilon(v). \quad (5.12)$$

Die Hilfsfunktion

$$f_\epsilon(v) = \frac{1}{[(1-v)R^2 + v(1-w)p^2 + vw(p^2 + (\omega_{f,t_3} \Lambda)^2)]^{2+\epsilon}} \quad (5.13)$$

lässt sich nicht ohne weiteres integrieren. Durch geschicktes Ergänzen (siehe auch [Str 96]) geht (5.13) mit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v dv (1-v)^{\epsilon-1} f_\epsilon(v) &= \int_0^1 v dv (1-v)^{\epsilon-1} (f_\epsilon(v) + f_\epsilon(1) - f_\epsilon(1)) \\
&= \int_0^1 v dv (1-v)^{\epsilon-1} f_\epsilon(1) + \int_0^1 v dv (1-v)^{\epsilon-1} (f_\epsilon(v) - f_\epsilon(1)) \\
&= f_\epsilon(1) \int_0^1 v dv (1-v)^{\epsilon-1} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\
&= \frac{1}{[p^2 + w(\omega_{f,t_3} \Lambda)^2]^{2+\epsilon}} B(2, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.14)
\end{aligned}$$

in eine handliche Form über, wobei $B(\alpha, \beta)$ die Eulersche Betafunktion (B.71) ist. Nach der Berechnung einiger Parameterintegrale und Zusammenfassen der Terme findet sich für die

Schleife der Ausdruck

$$\begin{aligned}
(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}(\Lambda) &= (g_0\nu_0^\epsilon)^4 \frac{1}{2c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} \\
&\cdot \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_2}^{(1)})} \frac{(-\omega_{f,t_3}^{(1)})^{n'}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_3}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t_3}^{(1)})} \int_0^1 dw \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{[p^2 + w(\omega_{f,t_3}\Lambda)^2]^{2+\epsilon}} \\
&\cdot \left[(D-1) \omega_{f',t_1}^{(1)} \Lambda [V_{f'fW^+}^{mnn'} - A_{f'fW^+}^{mnn'} + \gamma_5] + \frac{D^2 - 5D + 4}{3D} \omega_{f,t_3}^{(1)} \Lambda \right. \\
&\cdot \left. [V_{f'fW^+}^{mnn'} + A_{f'fW^+}^{mnn'} + \gamma_5] \right] \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon) + \text{endl. Anteile.} \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Das Impulsintegral kann nun mit der Standardformel (B.58) bestimmt werden. Das dabei auftretende divergente Parameterintegral ist unproblematisch, so dass insgesamt mit der kurzen Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dw \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{[p^2 + w(\omega_{f,t_3}\Lambda)^2]^{2+\epsilon}} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\epsilon)\Gamma(2\epsilon-1)}{\Gamma(2-\epsilon)\Gamma(2+\epsilon)} (\omega_{f,t_3}\Lambda)^{2-4\epsilon} \int_0^1 dw w^{1-2\epsilon} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\epsilon} (\omega_{f,t_3}\Lambda)^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{5.16}
\end{aligned}$$

und nach Anwenden des $1/g^2$ -Mechanismus

$$\begin{aligned}
(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}(\Lambda) &= -\frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^r \sum_{t_1=1}^{r+1} \sum_{t_2=1}^{r+1} \sum_{t_3=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f',t_1}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_1}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - \omega_{f',t_1}^{(1)})} \\
&\cdot \frac{(-u_{\pm,t_2}^{(1)})^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_2}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t_2}^{(1)})} \frac{(-\omega_{f,t_3}^{(1)})^{n'}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t_3}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t_3}^{(1)})} \omega_{f',t_1}^{(1)} (\omega_{f,t_3}^{(1)})^2 [V_{f'fW^+}^{mnn'} \\
&- A_{f'fW^+}^{mnn'} + \gamma_5] + \text{endl. Anteile} \tag{5.17}
\end{aligned}$$

als führende nicht-störungstheoretische Divergenz folgt.

Die Partialbruchzerlegungen sind noch zurückzunehmen. Das Ausführen der Summationen

ist langwierig und liefert mit den in Anhang B.2 notierten Formeln

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \left([V_{f'fW^+}^{rrr} - A_{f'fW^+}^{rrr} \gamma_5] \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad - [V_{f'fW^+}^{rrr-1r} - A_{f'fW^+}^{rr-1r} \gamma_5] \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} - \left. \left([V_{f'fW^+}^{rrrr-1} - A_{f'fW^+}^{rrr-1} \gamma_5] \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad - [V_{f'fW^+}^{rrr-1r-1} - A_{f'fW^+}^{rr-1r-1} \gamma_5] \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + \left. \left. \left([V_{f'fW^+}^{rrrr-2} - A_{f'fW^+}^{rrr-2} \gamma_5] \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - [V_{f'fW^+}^{rrr-1r-2} - A_{f'fW^+}^{rr-1r-2} \gamma_5] \right) \right\} + \text{endl. Anteile.} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Da beim Aufstellen der SK-Bedingungen nach Matrixstrukturen zu sortieren ist, bietet sich eine Gliederung nach Termen an, die proportional zur Einheitsmatrix und zur γ_5 -Matrix sind. Zusammenfassend ergibt sich für diese Parametrisierungsrichtung

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{I}_{2a}(\Lambda) = \text{Diagramm} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ V_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \right. \\
&\quad - V_{f'fW^+}^{rrr-1r} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} - V_{f'fW^+}^{rrrr-1} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} - V_{f'fW^+}^{rrr-1r-1} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \\
&\quad + V_{f'fW^+}^{rrrr-2} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} - V_{f'fW^+}^{rrr-1r-2} + \gamma_5 \left[- A_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \right. \\
&\quad + A_{f'fW^+}^{rr-1r} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} + A_{f'fW^+}^{rrr-1} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + A_{f'fW^+}^{rr-1r-1} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \\
&\quad \left. \left. - A_{f'fW^+}^{rrr-2} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + A_{f'fW^+}^{rr-1r-2} \right] \right\} + \text{endl. Anteile.} \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Die Berechnung der übrigen Parametrisierungen verläuft vollkommen analog. Auch werden keine weiteren neuen Techniken benötigt. Für die Parametrisierung der unteren Schleife von (5.7) findet sich

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2b}(\Lambda) = \text{Diagramm} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2b}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ -V_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} \sum_{t=1}^{r+1} (\omega_{f',t}^{(1)} - \frac{1}{2}\omega_{f,t}^{(1)}) \right. \\
&+ V_{f'fW^+}^{r-1rr} \sum_{t=1}^{r+1} (\omega_{f',t}^{(1)} - \frac{1}{2}\omega_{f,t}^{(1)}) - V_{f'fW^+}^{rr-1r} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} - \frac{1}{2}V_{f'fW^+}^{rrr-1} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} \\
&- V_{f'fW^+}^{r-1r-1r} + \frac{1}{2}V_{f'fW^+}^{r-1rr-1} + \gamma_5 \left[A_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} \sum_{t=1}^{r+1} (\omega_{f',t}^{(1)} + \frac{1}{2}\omega_{f,t}^{(1)}) \right. \\
&- A_{f'fW^+}^{r-1rr} \sum_{t=1}^{r+1} (\omega_{f',t}^{(1)} + \frac{1}{2}\omega_{f,t}^{(1)}) + A_{f'fW^+}^{rr-1r} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} - \frac{1}{2}A_{f'fW^+}^{rrr-1} \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm,t}^{(1)} \\
&\left. \left. + A_{f'fW^+}^{r-1r-1r} + \frac{1}{2}A_{f'fW^+}^{r-1rr-1} \right] \right\} + \text{endl. Anteile.} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Für die verbleibende Rechnung folgt

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2c}(\Lambda) = \text{Diagram} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2c}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ -V_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \omega_{f',t_3}^{(1)} \right. \\
&+ V_{f'fW^+}^{rr-1r} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} - V_{f'fW^+}^{rr-2r} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + V_{f'fW^+}^{rr-3r} \\
&+ \gamma_5 \left[A_{f'fW^+}^{rrr} \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \omega_{f',t_3}^{(1)} - A_{f'fW^+}^{rr-1r} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \right. \\
&\left. \left. + A_{f'fW^+}^{rr-2r} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} - A_{f'fW^+}^{rr-3r} \right] \right\} + \text{endl. Anteile.} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Die so berechneten Schleifen sind noch zu renormieren. Dazu ist von jeder Subdivergenz ein Gegenterm, der die zugehörige perturbative Divergenz enthält, abzuziehen. Insgesamt sind damit die Counterterme zu (5.19), (5.21) und (5.23) durch

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_2^{CT}(\Lambda) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (5.25)$$

zu bestimmen. Dabei enthalten die durch die Kreuze dargestellten Vertizes die störungstheoretische Divergenz der jeweiligen Subschleife.

Die Schleifen (5.19) und (5.21) enthalten ausschließlich nichtperturbative Divergenzen. Daher ist es nicht notwendig, entsprechende Counterterme zu berechnen und es gilt

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2a}^{CT}(\Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2b}^{CT}(\Lambda) = 0. \quad (5.26)$$

Das Diagramm (5.23) bedarf allerdings eines Renormierungsterms: Dazu wird die dort parametrisierte Subschleife störungstheoretisch bestimmt. Das entspricht der Berechnung des Diagramms

$$\begin{array}{c} f' \quad f' \\ \rightarrow \quad \otimes \quad \rightarrow \end{array} = \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} f' \quad f' \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} W^- \text{---} \\ \text{---} f \text{---} \\ \text{---} f \text{---} \end{array} \\ \Lambda=0 \end{array} \right] . \quad (5.27)$$

Die üblichen Rechentechniken erlauben eine schnelle Bestimmung zu

$$\begin{array}{c} f' \quad f' \\ \rightarrow \quad \otimes \quad \rightarrow \end{array} = \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_{f'fW^+}^{rrr} + \text{endl. Anteile.} \quad (5.28)$$

Mit (5.28) als Insertion in der Fermion-Schleife mit nichtperturbativen Propagator ist nun

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2c}^{CT}(\Lambda) = f' \begin{array}{c} \text{---} \\ \otimes \\ \text{---} \end{array} \quad (5.29)$$

zu ermitteln. Es kann dabei auf das bereits bekannte Ergebnis (5.6) zurückgegriffen werden, weil (5.28) eine impulsunabhängige Größe ist. Es findet sich

$$\begin{aligned} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_{2c}^{CT}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{2\beta_0^2 c_{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_{f'fW^+}^{rrr} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \omega_{f',m}^{(2)} \right. \\ &\quad - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + \sum_{l=1}^r \omega_{f',l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \omega_{f',t_3}^{(1)} \right\} + \text{endl. Anteile} \quad (5.30) \end{aligned}$$

als Counterterm. Er ist von (5.23) abzuziehen.

Wie bereits erwähnt, verläuft die Bestimmung der weiteren Schleifen von (5.4) im Rahmen der nichtperturbativ erweiterten Störungstheorie analog. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Anhang C zusammengestellt. Die Kondensatbedingungen für eine beliebige Approximationsstufe lassen sich damit schnell bestimmen. Dazu setzt man die Schleifenresultate in die Kondensatgleichung (5.4) ein. Die Counterbeiträge sind von den jeweiligen Schleifen abzuziehen. Multiplikationen mit Poltermen oder Koeffizientenvergleiche entfallen, da volle Kondensate nur noch von der Λ -Skala abhängen. Die Λ -Skala fällt auf beiden Seiten von (5.4) heraus. Es verbleibt eine matrixwertige Gleichung, die nach Termen proportional zu $\mathbf{1}$ und γ_5 zu sortieren ist.

Auf die Angabe der SK-Bedingungen auf beliebiger Approximationsstufe $r/r+1$, die das VK

des Fermion-Propagators stellt, wird aus Gründen der Übersicht an dieser Stelle verzichtet. Stattdessen werden die SKG für den einfachsten Approximationsgrad 0/1 angegeben. Für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$ gilt

$$- \left(\omega_{f,1}^{(1)} \right)^3 = \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}} V_{f'fW^+}^{000} \left\{ \left(\omega_{f',1}^{(1)} \right)^3 - \left(\omega_{f,1}^{(1)} \right)^2 \omega_{f',1}^{(1)} - u_{\pm,1}^{(1)} \left(\omega_{f',1}^{(1)} - \frac{1}{2} \omega_{f,1}^{(1)} \right) \right\} \\ + \frac{3}{16\beta_0 c_0} \left\{ V_{ffW^0}^{100} \left(4 \left(\omega_{f,1}^{(1)} \right)^3 - u_{0,1}^{(1)} \omega_{f,1}^{(1)} \right) + \left(V_{ffW^0}^{000} - W_{ffW^0}^{000} \right) \omega_{f,1}^{(1)} \right\} \quad (5.31)$$

$$0 = D_{ffW^0}^{000} \omega_{f,1}^{(1)} = \left(A_{ffW^0}^{000} - B_{ffW^0}^{000} \right) \omega_{f,1}^{(1)} \quad (5.32)$$

bzw. für $(f', f) = (\nu_l, l)$ und $(f', f) = (u, d)$

$$- \left(\omega_{f',1}^{(1)} \right)^3 = \frac{3}{4\beta_0 c_{\pm}} V_{f'f'W^-}^{000} \left\{ \left(\omega_{f,1}^{(1)} \right)^3 - \left(\omega_{f',1}^{(1)} \right)^2 \omega_{f,1}^{(1)} - u_{\pm,1}^{(1)} \left(\omega_{f,1}^{(1)} - \frac{1}{2} \omega_{f',1}^{(1)} \right) \right\} \\ + \frac{3}{16\beta_0 c_0} \left\{ V_{f'f'W^0}^{100} \left(4 \left(\omega_{f',1}^{(1)} \right)^3 - u_{0,1}^{(1)} \omega_{f',1}^{(1)} \right) + \left(V_{f'f'W^0}^{000} + W_{f'f'W^0}^{000} \right) \omega_{f',1}^{(1)} \right\} \quad (5.33)$$

$$0 = C_{f'f'W^0}^{000} \omega_{f',1}^{(1)} = \left(A_{f'f'W^0}^{000} + B_{f'f'W^0}^{000} \right) \omega_{f',1}^{(1)}. \quad (5.34)$$

Die fermionischen Vakuump kondensate unterscheiden sich deutlich von den in Kapitel 3 hergeleiteten SK-Bedingungen des Fermion-Propagators. Sie stellen keine Linearkombinationen der ursprünglichen SKG aus den DSG dar. Obige Gleichungen enthalten neben den bosonischen c -Faktoren bereits auf dem Niveau $r/r + 1 = 0/1$ die nichtperturbativen Parameter aus den Propagatoren $u_{\pm,1}^{(1)}$ und $u_{0,1}^{(1)}$. Ihr Auftreten liegt in der Divergenzstruktur der hier berechneten Diagramme begründet.

Wie bei den SKG des Fermion-Propagators lassen auch die Kondensate Lösungen verschwindender Massen für Fermionen zu. Dies stellt mit den in Kapitel 3.1.3 angegebenen Gründen ein sinnvolles Ergebnis dar. Eine Determinantenbedingung für ein nichttriviales Ergebnis lässt sich aufgrund der Nichtlinearitäten in den Parametern allerdings nicht angeben. Da die Kondensatbedingungen viele Parameter enthalten, führt der strenge perturbative Limes hier nicht zu widersprüchlichen Resultaten.

Werden nichtverschwindende Werte für $\omega_{f,1}^{(1)}$ bzw. $\omega_{f',1}^{(1)}$ gesucht, so wird beim Blick auf die Kondensatbedingungen (5.32) und (5.34) deutlich, dass das Kriterium (3.123) für die Ausbildung einer \mathcal{CP} -verletzenden Struktur im Boson-Vertex hier nicht erfüllt werden kann. Zusätzlich wird Gleichung (3.122) trivial, wodurch die geladenen Fermion-Vertizes keinerlei Aussagen über \mathcal{CP} -verletzende Terme enthalten. Mit den SK-Bedingungen des neutralen Fermion-Vertex (3.94) und (3.97) wird hingegen sofort klar, dass C_{000}^4 verschwinden muss.

Da mit den noch zu besprechenden Boson-Kondensaten genügend SK-Bedingungen vorliegen, wird aus obigen Grund bei der numerischen Behandlung des SK-Systems auf die Gleichungen (5.32) und (5.34) verzichtet. Ihre Bedingungen sind im kompletten SK-System aller Wahrscheinlichkeit nach als ein Lösungszweig sowieso enthalten. Darüberhinaus reichen die zusätzlichen Bedingungen nicht aus (siehe Abschnitt 3.4), um den Parametersatz des neutralen Fermion-Vertex vollständig zu bestimmen. Hier verbleibt auf der Stufe 0/1 eine gewisse Freiheit. Für höhere Approximationsgrade ist bei Betrachtung der Schleifenergebnisse der Fermion-Kondensate in Anhang C.2 jedoch zu erwarten, dass die Ausdrücke proportional zur γ_5 -Matrix nichttriviale Gleichungen liefern.

5.4 Kondensate der Boson-Propagatoren

Die Herleitung der Kondensatbedingungen für die Boson-Propagatoren verläuft nach obigem Muster. Das Umstellen der zugehörigen DSG liefert die in Anhang A.3.4 notierten Propagator-Kondensate. Im Vergleich zum Fermion-Sektor ist die Berechnung der Schleifen aufwendiger. Dies ist einerseits auf die komplexe Struktur des Boson-Vertex zurückzuführen. Andererseits besitzen die geschlossenen Boson-Schleifen drei Divergenzregionen, die jeweils einen eigenen Counterbeitrag benötigen. Diese sind zusammen mit den Resultaten der Schleifenberechnungen am Ende von Anhang C angegeben.

Auch bei den Boson-Kondensaten sind 2-Schleifen-Diagramme zu berücksichtigen. Dies ist nicht nur aus Konsistenzgründen zu fordern, sondern lässt sich schon an dem Schleifenresultat

$$\mathcal{L}_1(\Lambda) = W^\pm \text{ (diagramm)} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_1(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t_{\mu\mu}(q) D_T^{+[r,0]}(q) \\ &= -\frac{3\Lambda^2}{\beta_0 c_\pm} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} + \text{endl. Anteile} \end{aligned} \quad (5.36)$$

festmachen. Wären die Kondensate auf 1-Schleifen-Rechnungen begrenzt, müsste (5.35) als SKG verschwinden. Damit würde ein Tadpole-Term in der DSG (A.72) eliminiert werden. Die analoge Kondensatbedingung für den W^0 -Propagator würde zusätzlich den zweiten Tadpole-Beitrag streichen. Für die Approximationsstufe $r = 0$ zwingt (5.35) den W^+ -Propagator auf seine perturbative Gestalt.

Die Kondensatbedingungen der Boson-Propagatoren sollen auch hier auf dem Niveau $r/r + 1 = 0/1$ angegeben werden. Im Gegensatz zu den SKG aus Kapitel 4 wird bei ihrer Herleitung über alle freien Impulse integriert. Zusätzlich werden die äußeren Lorentzindizes geschlossen. Damit ergibt sich für den W^\pm -Propagator die Bedingung

$$\begin{aligned} -u_{\pm,1}^{(1)} &= \frac{9}{4\beta_0 c_\pm} u_{\pm,1}^{(1)} + \frac{9}{4\beta_0 c_0} (u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) + \frac{1}{2\beta_0 c_\pm c_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(15 C_{001}^1 + C_{001}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 33 C_{001}^3 \right) u_{\pm,1}^{(1)} + 3 \left(C_{001}^1 + C_{001}^2 \right) u_{0,1}^{(1)} + 6 C_{001}^1 (u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) - 3 \left(C_{000}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_{000}^2 \right) \right\} - \frac{1}{\beta_0} \sum_{(f,f')} V_{ff'W^\pm}^{000} \left(u_{\pm,1}^{(1)} - \frac{1}{2} (\omega_{f,1}^{(1)} - \omega_{f',1}^{(1)})^2 \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Obwohl der W^0 -Propagator zwei Teilchen modellieren soll, liefert auch dessen Kondensatberechnung nur *eine* Gleichung. Es findet sich

$$\begin{aligned} -3(u_{0,1}^{(1)} - u_{0,1}^{(2)}) &= \frac{27}{4\beta_0 c_\pm} u_{\pm,1}^{(1)} + \frac{1}{2\beta_0 c_\pm^2} \left\{ \frac{15}{2} \left(-C_{001}^1 + 3C_{001}^2 + 3C_{001}^3 \right) u_{0,1}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + 5 \left(-C_{001}^1 + 3C_{001}^2 + 3C_{001}^3 \right) u_{0,1}^{(2)} + \left(36C_{001}^1 + 27C_{001}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2C_{001}^3 \right) u_{\pm,1}^{(1)} + \frac{5}{2} \left(C_{000}^1 - 3C_{000}^2 - 3C_{000}^3 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta_0} \sum_f \left\{ V_{ffW^0}^{100} (3u_{0,1}^{(1)} + 2u_{0,1}^{(2)}) - V_{ffW^0}^{000} - 2(T_3)_f W_{ffW^0}^{000} \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

5.5 Zwischenergebnis

Der nichtstörungstheoretische Charakter der Kondensate wird unterstrichen, denn sie verschwinden im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$. Analog zu den bisherigen SKG stellen sie Bedingungen an die nichtperturbativen Parameter und vervollständigen die SKG aus Kapitel 3 und 4.

Bei der numerischen Behandlung des vollständigen SK-Systems liegt bei der Wahl der Gleichungen eine gewisse Freiheit vor. Im Fermion-Sektor wird auf die Verwendung von (5.32) und (5.34) verzichtet. Andernfalls gäbe es keine Möglichkeit mehr, \mathcal{CP} -Verletzung zu beobachten. Es liegen aber dennoch genügend Gleichungen vor, um das SK-Problem auf dem Niveau 0/1 lösen zu können.

Für höhere Approximationsgrade, die in der vorliegenden Arbeit aufgrund ihrer Komplexität nur näherungsweise untersucht werden können, entsteht dagegen eine Kluft zwischen der Zahl der nichtperturbativen Parameter und der zur Verfügung stehenden SK-Bedingungen. Dies liegt an den Ansätzen für die Propagatoren. Bei der Erhöhung um eine Approximationsstufe erhält der Ansatz zwei zusätzliche Koeffizienten. Dagegen wird nur eine weitere SKG geliefert. Um aus dieser Diskrepanz zu entkommen, sind weitere VK oder auch TK zu bestimmen.

Kapitel 6

Analyse der SK-Gleichungen

Bei der Analyse der SKG aus Kapitel 3, 4 und 5 wird nun auf dem Approximationsniveau $r/r + 1 = 0/1$ numerisch untersucht, inwieweit sich die nichtperturbativen Modifikationen mit Hilfe der Λ -Skala in den erweiterten Ansätzen, speziell in den Propagatoren zur Erzeugung von Massen, etablieren. Können sich zusätzlich paritätsverletzende Matrixstrukturen in den Approximanten für die Fermion-Vertizes, d. h. Terme proportional zu γ_5 , ausbilden? Darüberhinaus wird mit einem vereinfachten Satz von Gleichungen der Frage nachgegangen, ob die Beschreibung mehrerer Generationen im Fermion-Sektor prinzipiell möglich ist.

Zur Lösung der verschiedenen nichtlinearen Gleichungssysteme wird ein Paket der GNU-Scientific-Library benutzt¹. Den Kern bildet ein sogenannter Hybridalgorithmus, der nach Vorgabe eines Startwertes iterativ gegen eine Lösung des Systems zu konvergieren versucht. Ist eine Schranke für die Abweichungen der Gleichungen von Null erreicht, so bricht der Algorithmus ab. Der Hybridalgorithmus besteht aus einer Kombination eines mehrdimensionalen Newton-Verfahrens und eines Minimierungsalgorithmus, der die Konvergenz bei der Lösungssuche verbessern soll. Von außen vorgegebene Ableitungen des Gleichungssystems werden vom Algorithmus nicht benötigt, sie werden automatisch durch finite Differenzen approximiert. Die Startwerte werden mit Hilfe verschiedener Zufallszahlengeneratoren erzeugt, die ebenfalls von der GSL zur Verfügung gestellt werden. Die Zufallszahlen werden aus dem Intervall von -10 bis 10 gewählt, so dass sie im Bereich der trivialen perturbativen Lösung liegen. Diese Vorgehensweise basiert auf der plausiblen Annahme, dass in den nichtperturbativen Termen die Koeffizienten der Λ -Potenzen reelle Zahlen der Größenordnung eins sein sollten, da sonst effektiv eine völlig neue Skala erzeugt würde.

Wie bei allen numerischen Verfahren kann neben der endlichen Genauigkeit der Rechnungen nicht garantiert werden, dass aus der enormen Zahl von Lösungen eines multivariaten Polynomgleichungssystems alle relevanten Lösungen gefunden werden. In den numerischen Rechnungen hier wird aber versucht, diesen Nachteil durch eine hohe Anzahl verschiedener Startvektoren wieder auszugleichen. Die perturbativen Limiten der 3-Punkt-Vertex-Gleichungen werden als Maß für die Güte der Wurzeln genutzt. Sie liefern eine Aussage darüber, wie „erratisch“ die gefundenen Lösungen sind.

¹Dokumentationen zur GSL sind unter <http://www.gnu.org/software/gsl/> erhältlich.

6.1 Eigenschaften der Lösungen

Die zuvor abgeleiteten SK-Bedingungen besitzen eine Skalierungseigenschaft, denn bei Gleichungen mit physikalischen Größen muss immer eine Dimensionszählung erfüllt sein. Die SKG können dimensionell passend mit Potenzen eines Parameters multipliziert werden. Als Skalierungsparameter kann prinzipiell jede von Null verschiedene Variable gewählt werden. Es ist zweckmäßig einen bosonischen Parameter zu verwenden, da die Ausbildung von Fermionmassen nicht erwartet werden kann. Ihre experimentell gemessenen Werte liegen zum größten Teil weit unterhalb der hier betrachteten Energieskala. Für den Approximationsgrad $r/r+1 = 0/1$ wird $u_{\pm,1}^{(1)}$, d. h. die Masse der W^\pm -Bosonen in Einheiten von Λ^2 , als Skalierungsparameter herangezogen. Für die übrigen bosonischen Variablen folgt damit

$$u_{0,1}^{(1)} \longrightarrow u_{\pm,1}^{(1)} u_{0,1}^{(1)}, \quad u_{0,1}^{(2)} \longrightarrow u_{\pm,1}^{(1)} u_{0,1}^{(2)} \quad (6.1)$$

$$\text{und } C_{00n}^i \longrightarrow \left(u_{\pm,1}^{(1)}\right)^{1-n} C_{00n}^i \quad \text{für } i = 1, \dots, 5. \quad (6.2)$$

Die fermionischen Parameter skalieren in den Ansätzen mit einer anderen Massendimension. Diese Koeffizienten werden mittels der Vorschriften

$$\omega_{f,1}^{(1)} \longrightarrow \sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} \omega_{f,1}^{(1)}, \quad (6.3)$$

$$V_{ffW^0}^{m00} \longrightarrow \left(u_{\pm,1}^{(1)}\right)^{2-2m} V_{ffW^0}^{m00} \quad \text{und} \quad A_{ffW^0}^{m00} \longrightarrow \left(u_{\pm,1}^{(1)}\right)^{2-2m} A_{ffW^0}^{m00} \quad (6.4)$$

reskaliert, wobei für die W - und B -Funktionen in dem Ansatz für den neutralen Fermion-Vertex die zu (6.4) analogen Skalierungsvorschriften gelten.

Durch die Skalierung werden die SK-Bedingungen aus den Kapiteln 3 und 4 und die Vakuumkondensate aus Kapitel 5 strukturell nicht verändert. In den Gleichungen lässt sich nun immer eine Potenz von $u_{\pm,1}^{(1)}$ abspalten, so dass die verbleibenden Gleichungen den Parameter $u_{\pm,1}^{(1)}$ nicht mehr enthalten.

Wie in Kapitel 2 bereits angedeutet wurde, sind von physikalischer Seite gewisse Anforderungen an die numerischen Lösungen zu stellen. Da es sich hier um eine euklidische Theorie handelt, müssen alle Approximanten reell sein. Es kommen damit für die Polynomwurzeln nur Lösungen in Frage, die als komplex konjugierte Paare auftreten oder reell sind. Komplex konjugierte Polepaare in den Propagatoransätzen entsprechen kurzlebigen Elementaranregungen und können in dem hier untersuchten Approximationsgrad nicht in Erscheinung treten. Derartige Lösungen werden in der QCD als Confinement-Lösungen interpretiert und zum Beispiel in [Dri 97, Kuh 97] diskutiert. Für die Pole der Propagatoren hier sind lediglich reelle Werte von Interesse, da reale Teilchen modelliert werden sollen. Dabei sollten die Polstellen nicht positiv reell sein, da sie dann auf Zustände mit imaginärer Masse, den sogenannten Tachyonen, führen. Die Reflexionspositivität erfordert zusätzlich, dass die Propagatoren für euklidische Impulse nicht negativ werden dürfen. Für die Nullstellen sind daher nur negativ reelle Nullstellen oder komplex konjugierte Nullstellenpaare zulässig.

Beim Blick auf die experimentell gemessenen Massen für Bosonen und Fermionen lassen sich Wertebereiche für „gute“ Lösungen der skalierten Parameter angeben. Da die Masse des Z^0 -Bosons leicht überhalb der Masse der W^\pm -Teilchen liegt, hätte $u_{0,1}^{(1)} > 1$ die richtige Tendenz. Werte für die fermionischen Parameter im Bereich $0 \leq \omega_{f,1}^{(1)} < 1$ wären optimal.

Die in den Kapiteln 3 und 4 abgeleiteten perturbativen Limiten der Fermion-Vertizes und des

3-Boson-Vertex werden bei den numerischen Untersuchungen als Maß für die Güte der Approximanten genutzt. Sie sind zu ihren zugehörigen SK-Bedingungen nicht äquivalent, so dass die simultane Erfüllung nicht erwartet werden kann. Der perturbative Limes des neutralen Fermion-Vertex liefert

$$\phi_{0/1}^0 := 1 - V_{ffW^0}^{100} + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm}^2} (V_{f'fW^+}^{000})^2 C_{001}^1 - 1 \right) = 0. \quad (6.5)$$

Mit dem geladenen Fermion-Vertex erhalten wir

$$\phi_{0/1}^1 := 1 - V_{f'fW^+}^{100} + \frac{3}{2\beta_0} \left(\frac{1}{c_{\pm c_0}} V_{ffW^0}^{100} V_{f'fW^+}^{000} C_{001}^2 - 1 \right) = 0 \quad (6.6)$$

sowie aus der Bedingung für den Boson-Vertex

$$\begin{aligned} \phi_{0/1}^2 := & 1 - C_{001}^1 + \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left(C_{001}^1 (C_{001}^2)^2 + \frac{1}{3} C_{001}^1 (C_{001}^1 - C_{001}^2) C_{001}^2 \right) - 1 \right] \\ & - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm c_0}} \left(25C_{001}^1 + 20C_{001}^2 \right) - 45 \right] \\ & + \frac{1}{3\beta_0} \left[\sum_{(f,f')} (V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100}) V_{f'fW^+}^{000} V_{ff'W^-}^{000} - 2N_f \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

und

$$\begin{aligned} \phi_{0/1}^3 := & 1 - C_{001}^2 + \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left(C_{001}^1 (C_{001}^2)^2 - \frac{1}{6} C_{001}^1 C_{001}^2 (C_{001}^1 - C_{001}^2) \right) - 1 \right] \\ & - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] - \frac{1}{24\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm c_0}} \left(11C_{001}^1 + 34C_{001}^2 \right) + \frac{1}{c_{\pm}^2} \left(9C_{001}^1 + 36C_{001}^2 \right) \right. \\ & \left. - 90 \right] + \frac{1}{3\beta_0} \left[\sum_{(f,f')} (V_{ffW^0}^{100} + V_{f'f'W^0}^{100}) V_{f'fW^+}^{000} V_{ff'W^-}^{000} - 2N_f \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Im Folgenden werden Lösungen gesucht, wo (6.5), (6.6), (6.7) und (6.8) näherungsweise bei Null liegen.

Streben die nichtperturbativen Parameter der Vertex-Approximanten bzw. die c -Faktoren gegen die strenge perturbative Lösung, so sind die Funktionen (6.5) bis (6.8) keine guten Anzeiger mehr, da sie trivial erfüllt sind. Dann könnte man auf die entsprechenden SK-Bedingungen zurückgreifen. In der vorliegenden Arbeit tritt dieser Fall nicht auf, wird aber in [Grü 02] erfolgreich praktiziert.

6.2 Lösung des SK-Problems für $r/r + 1 = 0/1$

Das vollständige und skalierte SK-System aus den Kapiteln 3, 4 und 5 ist nach einer Umbenennung der Variablen in Anhang E.1 zusammengestellt. Die numerische Untersuchung erfolgt nun in zwei Schritten. Zunächst ist es sinnvoll zu klären, ob das Gleichungssystem eine die \mathcal{CP} -Invarianz brechende Lösung besitzt. Dies wird mit verschiedenen Kombinationen der SKG bei einer Genauigkeit von 10 bis 12 signifikanten Stellen numerisch getestet. Ein von Null verschiedener Wert für den Term C_{000}^4 wird dabei *nicht gefunden*.

Damit können sich, wie an den SK-Bedingungen deutlich wird, im Rahmen der Rechengenauigkeit auch *keine* paritätsverletzenden Ausdrücke auf diesem Approximationsniveau

nichtperturbativ etablieren. Dies steht im mathematischen Einklang mit den fermionischen Kondensatbedingungen (5.32) und (5.34). Wir notieren daher

$$A_{ffW^0}^{000} - B_{ffW^0}^{000} = A_{f'f'W^0}^{000} + B_{f'f'W^0}^{000} = 0 \quad (6.9)$$

für $(f, f') = (l, \nu_l)$ und $(f, f') = (d, u)$. Mit diesen Vereinfachungen reduziert sich das SK-System auf die in Anhang E.2 angegebenen Gleichungen.

Dieses verkürzte System wird nun im zweiten Schritt genauer unter die Lupe genommen. Von Interesse sind lediglich reelle Werte für die Parameter, die wiederum mit einer Genauigkeit von 10 bis 12 signifikanten Stellen bestimmt werden. Aus Gründen der Übersicht werden für Parameter nur vier Stellen nach dem Komma angegeben. Die geringste Abweichung von $\phi_{0/1}^i = 0$ für $i = 0, \dots, 3$ für die ϕ -Funktionen weist die Lösung

$N_f = 4$		$N_f = 4$	
$\omega_{l,1}^{(1)} = \omega_{\nu_l,1}^{(1)}$	$0.0000 \sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}}$	c_{\pm}	0.7900
$\omega_{d,1}^{(1)} = \omega_{u,1}^{(1)}$	$0.0000 \sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}}$	c_0	6.5905
$V_{\nu_l l W^+}^{000} = V_{l \nu_l W^-}^{000}$	0.6164	$u_{0,1}^{(1)}$	$2.8574 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{ud W^+}^{000} = V_{du W^-}^{000}$	0.2139	$u_{0,1}^{(2)}$	$3.0399 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{ll W^0}^{100} = V_{\nu_l \nu_l W^0}^{100}$	32.6960	C_{100}^1	2.5769
$V_{ll W^0}^{000} - W_{ll W^0}^{000}$	$2.1774 u_{\pm,1}^{(1)}$	C_{000}^1	$0.9006 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + W_{\nu_l \nu_l W^0}^{000}$	$2.1774 u_{\pm,1}^{(1)}$	$C_{100}^2 = C_{100}^3$	1.5583
$A_{ll W^0}^{000} - B_{ll W^0}^{000}$	0	$C_{000}^2 = C_{000}^3$	$-4.7369 u_{\pm,1}^{(1)}$
$A_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + B_{\nu_l \nu_l W^0}^{000}$	0	C_{000}^4	0
$V_{uu W^0}^{100} = V_{dd W^0}^{100}$	5.4248	C_{000}^5	$4.2748 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{dd W^0}^{000} - W_{dd W^0}^{000}$	$2.0105 u_{\pm,1}^{(1)}$	\tilde{c}_{\pm}	0.3992
$V_{uu W^0}^{000} + W_{uu W^0}^{000}$	$2.0105 u_{\pm,1}^{(1)}$	\tilde{c}_0	0.2486
$A_{dd W^0}^{000} - B_{dd W^0}^{000}$	0		
$A_{uu W^0}^{000} + B_{uu W^0}^{000}$	0		
$\phi_{0/1}^0$	0.9829	$\phi_{0/1}^2$	0.0764
$\phi_{0/1}^1$	0.0511	$\phi_{0/1}^3$	-0.7434

auf. Neben dieser Lösung werden 48 weitere gefunden, die den physikalischen Randbedingungen aus dem vorigen Abschnitt genügen. Ihre Abweichungen liegen aber oberhalb der hier ermittelten Werte für die ϕ -Funktionen. Physikalische Lösungen, in denen sich Werte ungleich Null für Parameter der Fermion-Propagatoren ausbilden, werden in den numerischen Untersuchungen nicht gefunden. Die Ursache kann hier in dem niedrigen Approximationsgrad liegen. In Kapitel 3 wurde schon bemerkt, dass im strengen perturbativen Limes keine Lösung jenseits der Null möglich ist. Da zusätzlich $c_f = 1$ erfüllt sein muss, besteht für

die Parameter wenig Spielraum. Einige der ermittelten unphysikalischen Lösungen besitzen nichtverschwindende Werte für die ω 's. Da sie entgegengesetzte Vorzeichen für Parameter eines Dubletts besitzen, scheiden sie allerdings aus. Damit sind die Fermionkondensate aus Kapitel 5 trivial erfüllt.

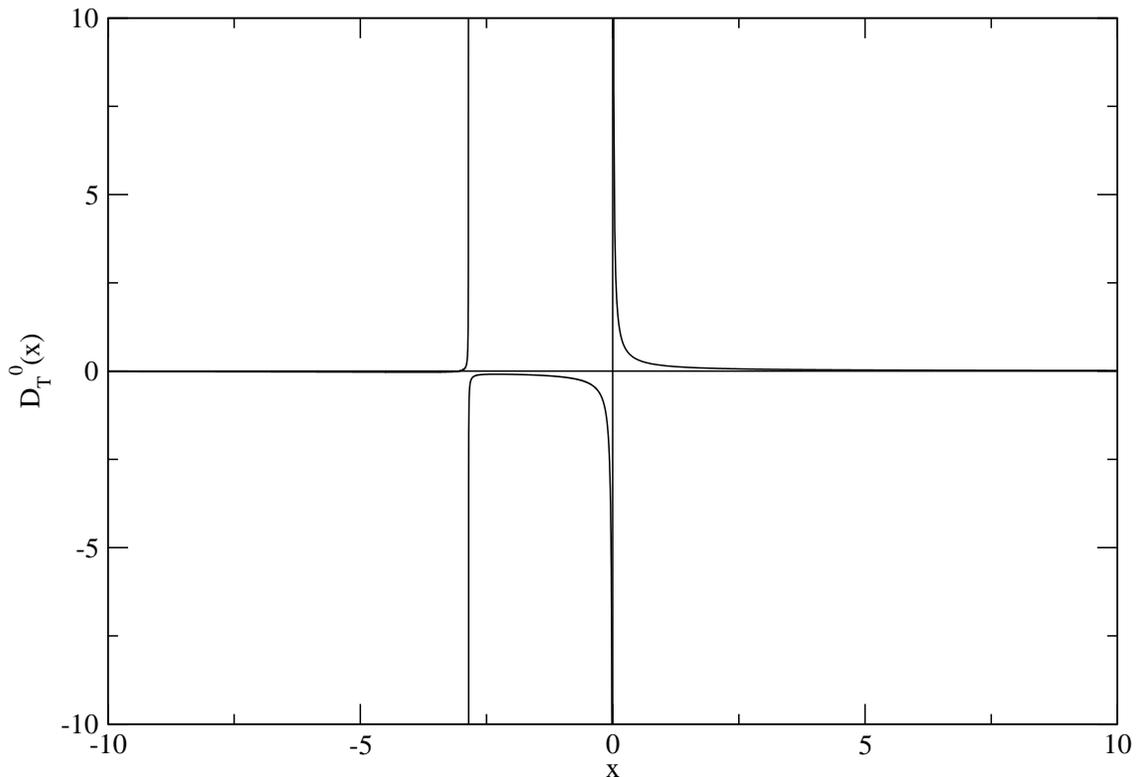
Der Verzicht auf die Forderung nach strenger perturbativer Limesbildung in den Ansätzen wird durch hier gefundenen Werte gestützt. Die c -Faktoren der Propagatoren und die nicht-perturbativen Parameter führender Impulsordnung in den Vertexansätzen sind von eins verschieden. Besonders bemerkenswert ist, dass die Geist-Propagatoren ihre strenge perturbative Gestalt nicht beibehalten.

Im Boson-Sektor werden Massen dynamisch erzeugt. Dabei liegt der für das Z^0 -Boson gefundene Wert fast dreimal so hoch wie der Massenwert der W^\pm -Teilchen. Qualitativ wird dieses Ergebnis in [Mer 96] ebenfalls gefunden. Damit wird die physikalische Realität, in der das Massenverhältnis bei 1.14 liegt, zwar nicht korrekt wiedergegeben, aber dies kann auf diesem Approximationsniveau auch nicht erwartet werden. Die Tendenz ist sicher die richtige. Mit den numerisch bestimmten Parametern findet sich für den W^0 -Propagator

$$D_T^{0[1,0]}(k^2) = 0.1517 \frac{k^2 + 3.0399 u_{\pm,1}^{(1)} \Lambda^2}{k^2(k^2 + 2.8574 u_{\pm,1}^{(1)} \Lambda^2)} \quad (6.10)$$

$$= 0.1614 \frac{1}{k^2} - 0.0097 \frac{1}{k^2 + 2.8574 u_{\pm,1}^{(1)} \Lambda^2}. \quad (6.11)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Variablen $x := k^2/u_{\pm,1}^{(1)}\Lambda^2$ lässt er sich illustrieren:



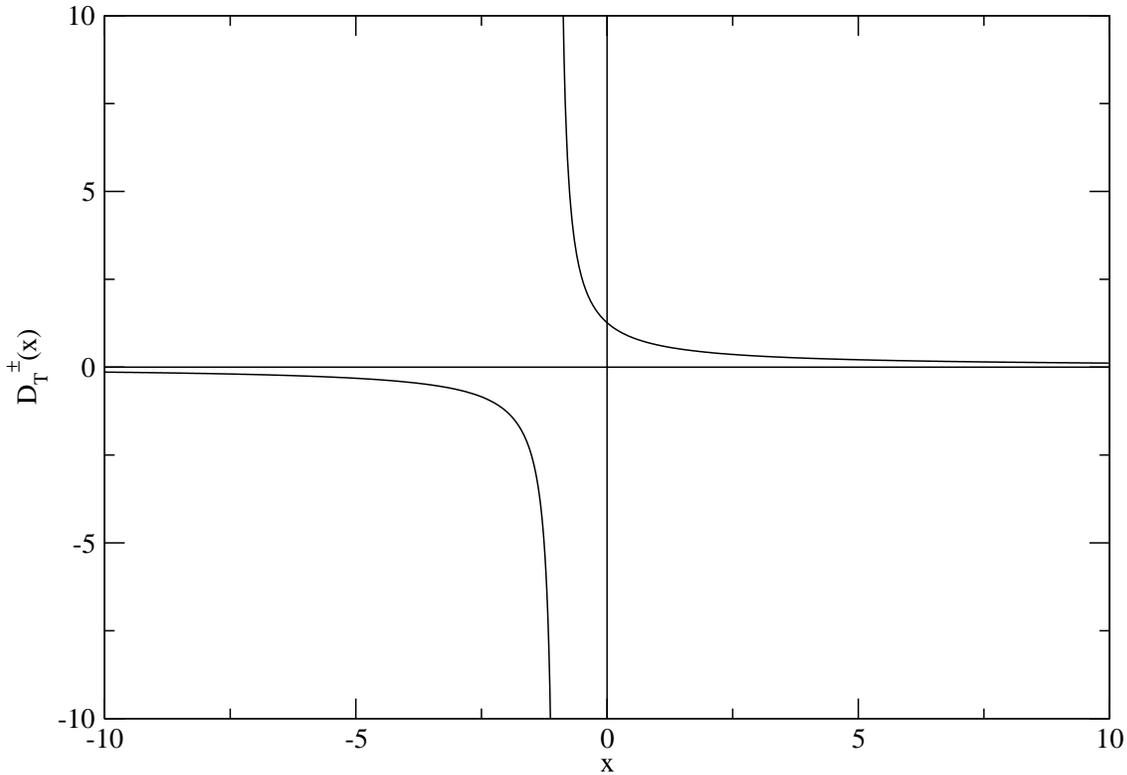
Wie zu sehen ist, besitzt der Propagator einen masselosen und einen massiven Pol. Damit ist er in der Lage zwei Teilchen, das Photon und das Z^0 -Boson simultan zu modellieren.

Sieht man von dem Vorfaktor in dem Propagator einmal ab, so unterscheidet er sich von der perturbativen $1/k^2$ Asymptotik im Bereich von 0 bis hin zu kleinen Vielfachen von $u_{\pm,1}^{(1)}\Lambda^2$. An der Partialbruchzerlegung des W^0 -Propagators (6.11) ist auffällig, dass der Z^0 -Pol ein negatives Residuum hat. In einer skalaren Feldtheorie führt dieses Verhalten auf Probleme, aber in Eichtheorien sind die Residuen eichabhängig, so dass die hier gefundene Lösung nicht auf Widersprüche führt.

Der W^\pm -Propagator bildet per Konstruktion einen massiven Pol aus,

$$D_T^{0[1,0]}(k^2) = 1.2658 \frac{1}{k^2 + u_{\pm,1}^{(1)}\Lambda^2}, \quad (6.12)$$

und besitzt bis auf den Faktor die gewöhnliche $1/k^2$ Asymptotik:



Die absoluten Zahlenwerte für die Bosonmassen können nicht angegeben werden, da die hier verwendete nullte quasiperturbative Approximationsordnung das Renormierungsschema (innerhalb der Klasse der dimensionellen Schemata) und damit den Wert für die Λ -Skala noch nicht festlegt. Der Boson-Vertex bildet bis auf den Parameter C_{000}^4 seine nichtperturbativen Modifikationen voll aus. Dabei verlassen auch hier die Parameter führender Impulsordnung den strengen perturbativen Limes.

6.3 Der Photon-Vertex

Die fermionischen Vertex-Approximanten behalten innerhalb ihrer Dubletts die volle Symmetrie. Dabei kommen die Werte für Leptonen und Quarks verschieden heraus, was auf unterschiedlich starke Kopplungen führt. Zusätzlich stellt der Fermion-Photon-Vertex an die

Kopplung mit Leptonen und Neutrinos gewisse Forderungen. Der Photon-Vertex lässt sich aus dem neutralen Fermion-Vertex (2.32) mittels

$$S_f^{[r,0]}(p_1) g_0 \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]}{}^0_{ff\nu}(-p_1, p_2, k) S_f^{[r,0]}(p_2) t_{\mu\nu}(k) k^2 D_T^{0[r+1,0]}(k) \Big|_{k^2=0} \quad (6.13)$$

isolieren, was dem Residuum an der Stelle des Photonpols $k^2 = 0$ entspricht. Mit den rationalen Approximanten aus Kapitel 2 kann (6.13) ausgewertet werden. Nach Kürzen einiger Terme findet sich

$$\begin{aligned} & g_0 t_{\mu\nu}(k) k^2 \left[\prod_{s=1}^{r+1} \left(\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda \right) \right]^{-1} \left\{ - (T_3)_f N_{ff\nu}^{[r/r+1]0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{1}_2)_f M_{ff\nu}^{[r/r+1]0}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \right\} \left[\prod_{s=1}^{r+1} \left(\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda \right) \right]^{-1} \left[c_0 \prod_{s=1}^{r+2} \left(k^2 + u_{0,s}^{(1)} \Lambda^2 \right) \right]^{-1} \Big|_{k^2=0} \\ = & \frac{1}{c_0} g_0 t_{\mu\nu}(k) \left[\prod_{s=1}^{r+1} \left(\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda \right) \right]^{-1} \sum_{n,n'=0}^r \Lambda^{2r-(n+n')} \\ & \cdot \left\{ - (T_3)_f (\not{p}_1)^n \left[V_{ffW^0}^{[0nn']} \gamma_\nu + A_{ffW^0}^{[0nn']} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'} \right. \\ & \quad \left. - (\mathbf{1}_2)_f (\not{p}_1)^n \left[W_{ffW^0}^{[0nn']} \gamma_\nu + B_{ffW^0}^{[0nn']} \gamma_\nu \gamma_5 \right] (\not{p}_2)^{n'} \right\} \\ & \quad \cdot \left[\prod_{s=1}^{r+1} \left(\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(1)} \Lambda \right) \right]^{-1} \left[c_0 \prod_{s=1}^{r+1} u_{0,s}^{(1)} \right]^{-1}. \quad (6.14) \end{aligned}$$

Aus dem Experiment ist bekannt, dass Neutrinos mit Photonen nicht meßbar wechselwirken. Mit anderen Worten muss (6.14) im Rahmen der erweiterten Störungstheorie für $f = \nu_l$ verschwinden. Da für ein Neutrino diese Forderung ihre Gültigkeit für alle Impulse p_1 und p_2 behalten soll, muss

$$V_{\nu_l \nu_l W^0}^{[0nn']} + W_{\nu_l \nu_l W^0}^{[0nn']} = 0 = A_{\nu_l \nu_l W^0}^{[0nn']} + B_{\nu_l \nu_l W^0}^{[0nn']} \quad (6.15)$$

gelten. Mit der im vorigen Abschnitt untersuchten Approximationsstufe $r/r+1 = 0/1$, in der $n = n' = 0$ gilt, wird daher bezüglich seiner Kopplung kein realistisches Neutrino beschrieben. Der Versuch in der numerischen Behandlung, die Bedingung (6.15) von Hand auf das SK-System aufzuprägen, um so nicht in „typische“ Lösungen zu laufen, liefert keine Resultate. Zusätzliche Informationen könnten prinzipiell die VK produzieren, aber für den vorliegenden Fall trifft dies nicht zu. Eine Hyperladung Y_f , siehe Kapitel 1, kann auf dieser Approximationsstufe dynamisch nicht simuliert werden. Verantwortlich hierfür ist die Symmetrie der SKG (3.93) und (3.96).

Um zu klären, ob die übrigen Gleichungen auf dem hier untersuchten niedrigen Approximationsniveau eine Verschiebung des Ladungsschwerpunktes prinzipiell zulassen, wird in einer weiteren numerischen Analyse die Gleichung (3.96) als SKG fallengelassen. Stattdessen werden die Bedingungen

$$V_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + W_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} = 0 \quad \text{und} \quad V_{uuW^0}^{000} + W_{uuW^0}^{000} = 2 \left(V_{ddW^0}^{000} - W_{ddW^0}^{000} \right) \quad (6.16)$$

von außen vorgegeben. Damit wird (6.15) respektiert und das experimentell gefundene Ladungsverhältnis der Quarks bereits festgelegt.

Für diesen Fall werden 43 physikalische Lösungen des Gleichungssystems bestimmt. Die ge-

ringste Abweichung der ϕ -Funktionen von Null weist die Lösung

$N_f = 4$		$N_f = 4$	
$\omega_{l,1}^{(1)} = \omega_{\nu_l,1}^{(1)}$	$0.0000 \sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}}$	c_{\pm}	1.0819
$\omega_{d,1}^{(1)} = \omega_{u,1}^{(1)}$	$0.0000 \sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}}$	c_0	3.8095
$V_{\nu_l l W^+}^{000} = V_{l \nu_l W^-}^{000}$	0.6251	$u_{0,1}^{(1)}$	2.3853 $u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{udW^+}^{000} = V_{duW^-}^{000}$	1.7760	$u_{0,1}^{(2)}$	2.5034 $u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{llW^0}^{100} = V_{\nu_l \nu_l W^0}^{100}$	24.9230	C_{100}^1	1.9709
$V_{llW^0}^{000} - W_{llW^0}^{000}$	$1.7542 u_{\pm,1}^{(1)}$	C_{000}^1	$1.0157 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + W_{\nu_l \nu_l W^0}^{000}$	0	$C_{100}^2 = C_{100}^3$	1.5639
$A_{llW^0}^{000} - B_{llW^0}^{000}$	0	$C_{000}^2 = C_{000}^3$	$-3.9150 u_{\pm,1}^{(1)}$
$A_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + B_{\nu_l \nu_l W^0}^{000}$	0	C_{000}^4	0
$V_{uuW^0}^{100} = V_{ddW^0}^{100}$	0.6985	C_{000}^5	$3.0842 u_{\pm,1}^{(1)}$
$V_{ddW^0}^{000} - W_{ddW^0}^{000}$	$2.5842 u_{\pm,1}^{(1)}$	\tilde{c}_{\pm}	0.2735
$V_{uuW^0}^{000} + W_{uuW^0}^{000}$	$1.2921 u_{\pm,1}^{(1)}$	\tilde{c}_0	0.1765
$A_{ddW^0}^{000} - B_{ddW^0}^{000}$	0		
$A_{uuW^0}^{000} + B_{uuW^0}^{000}$	0		
$\phi_{0/1}^0$	-0.8944	$\phi_{0/1}^2$	0.0216
$\phi_{0/1}^1$	0.1746	$\phi_{0/1}^3$	-0.9607

auf. Die hier gefundenen Wurzeln weichen von denen im Abschnitt zuvor angegebenen Zahlenwerten zum größten Teil wenig ab. Das Verhältnis der Parameter für die Lepton- und Quark-Kopplung an die geladenen Fermion-Vertizes dreht sich um. Der Koeffizient $V_{uuW^0}^{100}$ nimmt um eine Größenordnung ab. Damit werden die Resultate des vorherigen Abschnitts bis auf die Vorgaben (6.16) qualitativ reproduziert. Die Abweichungen der SK-Bedingung (3.96) für Neutrinos

$$\left(1 - \frac{3}{2\beta_0}\right) u_{0,1}^{(2)} + \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} V_{\nu_l l W^+}^{000} + V_{l \nu_l W^-}^{000} - C_{000}^1 \approx 1.4863 \quad (6.17)$$

und up-artige Quarks

$$\left(1 - \frac{3}{2\beta_0}\right) u_{0,1}^{(2)} + \frac{3}{2\beta_0 c_{\pm}^2} V_{udW^+}^{000} + V_{duW^-}^{000} - C_{000}^1 \approx 1.7641 \quad (6.18)$$

liegen etwas oberhalb des Wertes für die $\phi_{0/1}^0$ -Funktion und sind daher im Rahmen. Dieses Ergebnis ist ein deutliches Indiz dafür, dass die *dynamische Erzeugung einer Hyperladung im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie möglich ist* und auf der nächst höheren Approximationsstufe, wo neben den anderen auch die Gleichung (3.96) genügend Freiraum besitzt, erwartet werden kann.

Die Photon-Fermion-Kopplung ist aus der QED bekannt. Der zugehörige Vertex bestimmt sich dort zu $e\gamma_\mu$, wobei e die Elementarladung ist. Damit müssen in (6.14) die paritätsbrechenden Terme für $f = l$ verschwinden,

$$A_{lW^0}^{0nn'} - B_{lW^0}^{0nn'} = 0. \quad (6.19)$$

Darüberhinaus lässt sich mit Hilfe von (6.14) eine Aussage über das Verhältnis der $SU(2)$ -Kopplung und der elektromagnetischen e machen. Allerdings wäre dabei die Forderung nach Äquivalenz von (6.14) mit dem Photon-Vertex für alle Impulse stark. In einer schwächeren Form nimmt man die Gültigkeit für die Lepton-Impulse auf ihren Massenschalen an. Werden die Residuen an den Stellen $\not{p}_1 = -\omega_{l,1}^{(1)}\Lambda$ und $\not{p}_2 = -\omega_{l,1}^{(1)}\Lambda$ gebildet, so liefert dies

$$\frac{e}{g_0} = \frac{1}{2c_0} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} u_{0,s}^{(1)}} \sum_{n,n'=0}^r \frac{(-\omega_{l,1}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq 1}}^{r+1} (\omega_{l,s}^{(1)} - \omega_{l,1}^{(1)})} \left[V_{lW^0}^{0nn'} - W_{lW^0}^{0nn'} \right] \frac{(-\omega_{l,1}^{(1)})^{n'}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq 1}}^{r+1} (\omega_{l,s}^{(1)} - \omega_{l,1}^{(1)})}. \quad (6.20)$$

Für die Approximationsstufe $r/r+1 = 0/1$ und verschwindende Massen für das Lepton (aus der unteren Komponente des schwachen Isospinors) und den numerisch ermittelten Werten für die Approximanten des vorigen Abschnitts reduziert sich (6.20) auf

$$\frac{e}{g_0} = \frac{1}{2c_0} \left[\frac{1}{u_{\pm,1}^{(1)}} \left(V_{lW^0}^{000} - W_{lW^0}^{000} \right) \right] \left[\frac{u_{0,1}^{(1)}}{u_{\pm,1}^{(1)}} \right]^{-1} = 0.058. \quad (6.21)$$

Im GWS-Modell ergibt sich das Kopplungsverhältnis der $SU(2)$ -Kopplung g und der Elementarladung zu

$$\frac{e}{g} = \sin \Theta_W = 0.482. \quad (6.22)$$

Für den Weinbergwinkel Θ_W wird $\sin^2 \Theta_W = 0.232$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema gefunden [PS 95]. Die Werte (6.21) und (6.22) unterscheiden sich um eine Größenordnung und spiegeln das im Rahmen der erweiterten Theorie überhöht gefundene Massenverhältnis zwischen den W^\pm -Teilchen und den Z^0 -Bosonen wieder. Eine genaue Übereinstimmung von g_0 und g kann natürlich nicht erwartet werden, da sich die Elementarladung im GWS-Modell neben der $SU(2)$ -Kopplung auch aus der $U(1)$ -Kopplung zusammensetzt [Aok 82, DGH 94].

6.4 Bemerkungen

Mit Hilfe des 3-Boson-Vertex lässt sich wie im vorigen Abschnitt das Verhältnis der $SU(2)$ -Kopplung und der elektromagnetischen angeben. Dies soll hier gleich auf der Approximationsstufe 0/1 geschehen. Hierzu wird bei der Residuenbildung der Impuls der neutralen Linie im Vertex auf den Photon-Pol und die Impulse der geladenen Boson-Linien auf ihre Massenschalen gesetzt. Da in der numerischen Analyse des SK-Systems in Abschnitt 6.2 die Werte für C_{000}^1 und C_{000}^2 unterschiedlich herauskommen, erhält man hier zwei verschiedene Verhältnisse. Mit C_{000}^1 findet man den Wert

$$\frac{e}{g_0} = \frac{1}{c_\pm^2 c_0} \left[\frac{1}{u_{\pm,1}^{(1)}} C_{000}^1 \right] \left[\frac{u_{0,1}^{(1)}}{u_{\pm,1}^{(1)}} \right]^{-1} = 0.077, \quad (6.23)$$

der mit dem Verhältnis (6.21) aus dem leptonischen Fermion-Photon-Vertex vergleichbar ist. Dagegen ergibt sich

$$\frac{e}{g_0} = \frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left[\frac{1}{u_{\pm,1}^{(1)}} C_{000}^2 \right] \left[\frac{u_{0,1}^{(1)}}{u_{\pm,1}^{(1)}} \right]^{-1} = -0.403. \quad (6.24)$$

Dieser Wert ist bis auf das entgegengesetzte Vorzeichen von der Größenordnung des Kopplungsverhältnisses (6.22) im GWS-Modell.

Insgesamt deutet der Unterschied der Kopplungsverhältnisse darauf hin, dass die Universalität der $SU(2)$ -Kopplung auf der numerisch analysierten niedrigen Approximationsstufe 0/1 nicht gewährleistet ist. Dies ist aber nicht weiter verwunderlich, denn das hier untersuchte $SU(2)$ -Modell besitzt im Vergleich zum GWS-Modell, in dem neben der zusätzlichen $U(1)$ -Kopplungskonstanten justierbare Yukawa-Kopplungen zur Verfügung stehen, wesentlich weniger freie Parameter.

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde, sind die Ward-Identitäten für die Renormierungskonstanten in jeder Ordnung der Störungstheorie erfüllt. Durch die numerischen Untersuchungen wird gezeigt, dass die nichtperturbativ erweiterte Theorie eine endliche Renormierung bevorzugt, denn die c -Faktoren der Propagatoren und die Koeffizienten der Vertizes mit maximalem Indexsatz verlassen den strengen perturbativen Limes. Wertet man die Ward-Identitäten mit den in Abschnitt 6.2 angegebenen Zahlenwerten für die c -Faktoren aus, so wird deutlich, dass sie gebrochen sind. Damit erklären sich die verschiedenen bestimmten Kopplungsverhältnisse (6.23) und (6.24), denn die Ward-Identitäten garantieren, wenn sie erfüllt sind, die Universalität der renormierten Kopplungskonstante.

6.5 Generationenbildung

Fermionische Generationen können prinzipiell durch die Verwendung höherer Approximationsgrade dynamisch erzeugt werden. Da die zu untersuchenden SKG für $r = 1$ oder $r = 2$ im Fermion-Sektor bereits sehr kompliziert sind, werden vereinfachte Gleichungssysteme untersucht. Die nichtperturbativ erweiterten 3-Punkt-Vertexfunktionen werden in einer Art Rainbow-Approximation genähert. Um die Gleichungssysteme noch weiter zu vereinfachen, wird lediglich ein fermionisches Dublett betrachtet. Dies ist für $N_f = 1$ ein Lepton- und für $N_f = 3$ ein Quark-Dublett.

Die bosonischen Funktionen werden auf die Approximationsstufe $r/r + 1 = 0/1$ festgelegt, denn ein massiver Pol für den W^0 - und den W^{\pm} -Propagator ist ausreichend. Zudem werden nur Terme zugelassen, deren Lorentztensoren bereits in der Lagrange-Dichte vorhanden sind, d. h. Ausdrücke proportional zum ε -Tensor werden nicht miteinbezogen. Echt nichtperturbative Modifikationen werden jedoch berücksichtigt, da die Massenbildung im Boson-Sektor direkt davon abhängt, vgl. (4.29). Die Zählerfunktionen der Vertex-Approximanten im Fermion-Sektor werden nur von den Parametern der führenden Impulsordnung getragen. Dies hat den Vorteil, dass die SK-Bedingungen durch diese Vorgehensweise überschaubar bleiben. Da allerdings einige der SKG wegfallen, ist das resultierende SK-System für die Approximationsstufe $r = 1$ und $r = 2$ für die fermionischen Funktionen durch Kondensatbedingungen und die perturbativen Limiten zu ergänzen.

Für den fermionischen Approximationsgrad $r = 0$ werden Lösungen gefunden, die den in den vorigen Abschnitten präsentierten ähnlich sind. Unabhängig von N_f können Fermionmassen

auch hier nicht dynamisch erzeugt werden. Der W^0 -Propagator bildet einen masselosen und einen massiven Pol aus. Da die Null- und die von Null verschiedene Polstellen sehr dicht beieinander liegen, besitzt der Propagator die Tendenz auf die Approximationsstufe $r = 0$ zurückzufallen.

In der nächst höheren Approximationsstufe $r = 1$ im Fermion-Sektor setzt sich die Tendenz des W^0 -Propagators auf $r = 0$ zurückzufallen in vielen der gefundenen Lösungen durch. Dieses Verhalten scheint als Fehler der Rainbow-Approximation wahrscheinlich. Bei zwei der gefundenen Lösungen für $N_f = 3$ ist dies allerdings nicht so. Der W^0 -Propagator erhält seine gewünschte Form. Zusätzlich kann der Fermion-Propagator einen masselosen und einen massiven Pol ausbilden. Die gefundenen Werte für ein Dublett sind allerdings gleich groß, so dass die Eichsymmetrie spontan nicht gebrochen wird. Dies kann allerdings ein Fehler der Rainbow-Approximation sein, da die SKG hier auf eine bezüglich der fermionischen Parameter symmetrische Form gebracht wird. Aber insgesamt wird deutlich, dass das SK-System auf der nächst höheren Approximationsstufe *prinzipiell Lösungen mit nichtverschwindenden Fermionmassen* bereit hält.

Auf der Approximationsstufe $r = 2$ werden keine physikalischen Lösungen gefunden. Das liegt an der Kombination der zur Verfügung stehenden SKG mit den Bedingungen der VK und den perturbativen Limiten. Eine simultane Lösung aller Beziehungen und insbesondere der Limiten liefert keine Resultate.

Zusammenfassung und Ausblick

Auf der Grundlage einer systematisch erweiterten Störungstheorie wurde anhand einer $SU(2)$ -Eichtheorie untersucht, inwieweit sich die Erzeugung von Teilchenmassen, einer Hyperladung, Paritäts- und \mathcal{CP} -verletzender Strukturen als nichtperturbative Effekte verstehen lassen. Dazu wurden in Kapitel 2 die rationalen Approximanten der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen für den elektroschwachen Sektor auf beliebiger Approximationsstufe formuliert. Wesentlich war hierbei die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit der Theorie, die deren Form physikalisch sinnvoll einschränkt. Die Approximanten sind so beschaffen, dass sie den perturbativen Limes bis auf eine multiplikative Konstante (endliche Renormierung) rekonstruieren. Der im Folgenden vorgestellte Selbstkonsistenzmechanismus lieferte auf der Basis der Dyson-Schwinger-Gleichungen für die 2-Punkt-Funktionen und Bethe-Salpeter-resummierten Gleichungen für die 3-Punkt-Funktionen für die freien Parameter der Approximanten einen Satz von Selbstkonsistenzbedingungen. Anhand der Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems konnte die Frage beantwortet werden, ob dynamische Massenerzeugung und Symmetriebrechung möglich ist.

In den Kapiteln 3 und 4 wurden die Bewegungsgleichungen auf 1-Schleifen-Niveau mit den rationalen Approximanten erfolgreich ausgewertet. Die Selbstkonsistenzgleichungen für den Fermion-Sektor wurden auf beliebiger Approximationsstufe vollständig formuliert. Die nichtperturbativen Parameter führender Impulsordnung in den Approximanten der 3-Punkt-Vertexfunktionen werden durch die Bewegungsgleichungen nicht auf die Werte festgelegt, die dem strengen perturbativen Limes entsprechen. Der Fermion-Propagator, in dem diese Freiheit durch eine multiplikative Konstante im Ansatz für den Propagator realisiert ist, legt sich dagegen auf den strengen perturbativen Limes fest. Dies ist auf Wahl der Landau-Eichung und den Verzicht auf Strommassen in der Lagrange-Dichte zurückzuführen. Bemerkenswert ist, dass im Geist-Sektor die Geist-Propagatoren ihre strenge störungstheoretische Gestalt auch in Landau-Eichung nur bis auf eine multiplikative Konstante annehmen. Aus den perturbativen Limiten der Dyson-Schwinger-Gleichungen ergaben sich nach Auswertung der erweiterten Ansätze auch hier Selbstkonsistenzbedingungen. Erstmals wurden in dieser Arbeit Selbstkonsistenzbedingungen für die Propagator-Gleichungen und die 3-Punkt-Funktion, die aufgrund \mathcal{P} - und \mathcal{CP} -verletzender nichtperturbativer Modifikationen besonders kompliziert ist, im Boson-Sektor auf beliebiger Approximationsstufe berechnet. Da die numerische Behandlung der 4-Punkt-Vertexfunktionen ein eigenes Projekt darstellt, wurde hier ein möglicher Zugang in Form crossing-symmetrischer Bethe-Salpeter-Gleichungen angegeben. An zwei Beispielen wurde illustriert, dass auch hier die Behandlung auf *beliebigem* Approximationsniveau möglich ist.

Selbstkonsistenzbedingungen, die aus den Vakuumkondensaten der Propagator-Bewegungsgleichungen für Fermionen und Bosonen resultieren, wurden im 5. Kapitel dieser Arbeit ab-

geleitet. Dabei wurde deutlich gemacht, dass auf die Mitnahme von Termen mit 2-Schleifen *nicht* verzichtet werden kann. Auf der Approximationsstufe $r/r + 1 = 0/1$ wurde untersucht, in welcher Form die hier gewonnenen Gleichungen die Übrigen ergänzen.

Im finalen 6. Kapitel wurde das Selbstkonsistenzgleichungssystem, welches von polynomialer nichtlinearer Gestalt ist, auf der Approximationsstufe $r/r + 1 = 0/1$ numerisch analysiert. Es sei darauf hingewiesen, dass das hier verwendete Verfahren nicht garantieren kann, im Rahmen der Rechengenauigkeit alle Lösungen zu finden. Für letztere Aufgabe stehen derzeit im Prinzip die sogenannten Homotopieverfahren und Analysen auf der Grundlage von Gröbner-Basen sowie Kombinationen beider Verfahren zur Verfügung. Da aber das hier behandelte Gleichungssystem bereits eine hohe Anzahl von Variablen aufweist, ist fraglich, ob derartige Methoden, deren Komplexität exponentiell mit der Anzahl der Gleichungen zunimmt, überhaupt greifen. Stattdessen wurden eine hohe Zahl zufällig erzeugter Startwerte getestet.

Das Selbstkonsistenzsystem wurde in einem ersten Schritt auf Lösungen untersucht, die in den erweiterten Ansätzen auf \mathcal{CP} -Verletzung führt. In numerischen Analyse wurden solche Lösungen allerdings *nicht* gefunden. Dies ist physikalisch plausibel, denn \mathcal{CP} -Verletzung wird in der Natur nur in wenigen Systemen, wie zum Beispiel bei Kaon-Zerfällen, beobachtet. Es ist daher anzunehmen, dass sie sich auch erst im Rahmen der Korrekturen durch die erste quasiperturbative Ordnung zeigt. Da die Selbstkonsistenzgleichungen auf dem Niveau $0/1$ noch wenig Spielraum besitzen, können sich mit dem Wegfallen \mathcal{CP} -verletzender Terme auch keine paritätsbrechenden herausbilden.

Fermionmassen konnten auf der Approximationsstufe $0/1$ noch nicht dynamisch erzeugt werden. Die Zahl der dort zur Verfügung stehenden Parameter ist dort vermutlich zu klein. Dies stellt aber keineswegs ein unphysikalisches Resultat dar, denn vom Standpunkt elektroschwacher Prozesse, besitzen die Leptonen und die ersten beiden Quarkgenerationen, die mit der starken Skala Λ_{QCD} skalieren, verschwindende Massen. Erst die Massen der dritten Quark-Generation liegen im Bereich der elektroschwachen Skala. In einer weitergehenden numerischen Auswertung wurden in einer Rainbow-artigen Näherung für der Approximationsstufe $1/2$ im Fermion-Sektor unter Verwendung der Vakuumkondensatbedingungen auch Lösungen mit *nichtverschwindenden Fermionmassen* gefunden. Darunter ist allerdings keine, die die Eichsymmetrie der Theorie spontan bricht.

Im Boson-Sektor hingegen bildeten sich bereits auf dem niedrigsten Approximationsniveau Teilchenmassen aus. Der W^0 -Propagator kann per Konstruktion ein masseloses Photon und ein massives Z^0 -Boson modellieren. Da der für den Massenpol der Z^0 -Teilchen gefundene Wert oberhalb dem der W^\pm -Bosonen liegt, was der physikalischen Realität entspricht, ist hier die *Eichsymmetrie spontan gebrochen*. Da die Selbstkonsistenzbedingungen für $0/1$ nicht viel Freiraum besitzen, findet auf deren Basis die dynamische Erzeugung einer Hyperladung nicht statt. Es wurde jedoch deutlich gemacht, dass beim Verzicht auf eine Restriktion und unter Vorgabe der Ladungsschwerpunkte von Leptonen und Quarks Lösungen existieren, die die *Modellierung einer Hyperladung möglich* machen. Bei der Analyse höherer Approximationsgrade werden die Vakuumkondensate eine besondere Rolle spielen, denn sie könnten die zur Verschiebung der Ladungsschwerpunkte notwendigen Bedingungen liefern.

Die Ergebnisse zeigen, dass die nichtperturbativ erweiterte Störungstheorie im elektroschwachen Sektor ein vielversprechendes Konzept darstellt. Teilchenmassen lassen sich dynamisch erzeugen, wobei sogar symmetriebrechende Lösungen im Boson-Sektor gefunden wurden. Es ist ein Zug der niedrigen Approximationsstufe $0/1$, dass sich keine paritätsbrechenden Mo-

difikationen nichtperturbativ ausbilden und die Erzeugung einer Hyperladung nicht möglich ist. Beim Blick auf die fermionischen Selbstkonsistenzbedingungen in Kapitel 3 ist dies auf höherem Niveau aber sicher zu erwarten.

Anhang A

Funktionalintegralmethoden

A.1 Die störungstheoretischen Basisvertizes

A.1.1 Ortsraumversion der Wirkung

Die euklidische Wirkung des hier untersuchten $SU(2)$ -Modells

$$S_E [W, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_F(x) + \mathcal{L}_V(x) + \mathcal{L}_G(x) + \mathcal{L}_{GF}(x) \right\} \quad (\text{A.1})$$

beschreibt die minimal angekoppelten Fermionen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= i \sum_f \bar{\psi}_f(x) \not{\partial} \psi_f(x) \\ &+ g_0 \bar{q}(x) T_{\pm} \gamma_{\mu} q(x) W_{\mu}^{\pm}(x) + g_0 \bar{l}(x) T_{\pm} \gamma_{\mu} l(x) W_{\mu}^{\pm}(x) \\ &+ g_0 \bar{q}(x) T_0 \gamma_{\mu} q(x) W_{\mu}^0(x) + g_0 \bar{l}(x) T_0 \gamma_{\mu} l(x) W_{\mu}^0(x) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und die drei masselosen Bosonfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= W_{\mu}^{+}(x) [-\delta_{\mu\nu} \square + \partial_{\mu} \partial_{\nu}] W_{\nu}^{-}(x) + \frac{1}{2} W_{\mu}^0(x) [-\delta_{\mu\nu} \square + \partial_{\mu} \partial_{\nu}] W_{\nu}^0(x) \\ &- i g_0 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \left[(\partial_{\mu} W_{\nu}^{+}(x)) W_{\rho}^{-}(x) W_{\sigma}^0(x) + (\partial_{\mu} W_{\nu}^{-}(x)) W_{\rho}^0(x) W_{\sigma}^{+}(x) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\mu} W_{\nu}^0(x)) W_{\rho}^{+}(x) W_{\sigma}^{-}(x) \right] \\ &- \frac{1}{2} g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_{\mu}^{+}(x) W_{\nu}^{+}(x) W_{\rho}^{-}(x) W_{\sigma}^{-}(x) \\ &+ g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_{\mu}^{+}(x) W_{\nu}^{-}(x) W_{\rho}^0(x) W_{\sigma}^0(x), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit den Faddeev-Popov-Geisterfeldern

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= -\bar{c}^{+}(x) \square c^{-}(x) - \bar{c}^{-}(x) \square c^{+}(x) - \bar{c}^0(x) \square c^0(x) \\ &+ i g_0 W_{\mu}^{+}(x) \left[(\partial_{\mu} \bar{c}^{-}(x)) c^0(x) - (\partial_{\mu} \bar{c}^0(x)) c^{-}(x) \right] \\ &+ i g_0 W_{\mu}^{-}(x) \left[(\partial_{\mu} \bar{c}^0(x)) c^{+}(x) - (\partial_{\mu} \bar{c}^{+}(x)) c^0(x) \right] \\ &+ i g_0 W_{\mu}^0(x) \left[(\partial_{\mu} \bar{c}^{+}(x)) c^{-}(x) - (\partial_{\mu} \bar{c}^{-}(x)) c^{+}(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

und beliebiger kovarianter Eichfixierung

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{\xi} (\partial_{\mu} W_{\mu}^{+}(x)) (\partial_{\mu} W_{\mu}^{-}(x)) - \frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu} W_{\mu}^0(x))^2. \quad (\text{A.5})$$

Die physikalischen Bosonen hängen von den $SU(2)$ -Eichvektorfeldern in der Form

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_\mu^1(x) \mp i A_\mu^2(x)] \\ W_\mu^0(x) &:= A_\mu^3(x) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ab. Die zugehörigen Generatormatrizen sind über die Pauli-Matrizen

$$T_+ := \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 + iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$T_- := \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 - iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$T_0 := T_3 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

definiert. Die Lepton-Isodoublets setzen sich aus einem ungeladenen, neutrino-artigen Fermion und einem geladenen lepton-artigen Fermion

$$l(x) = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}, \quad \bar{l}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_l & \bar{l} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

zusammen. Die Quark-Doublets bestehen aus einem up- und einem down-artigen Quark

$$q(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \bar{q}(x) = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

A.1.2 Feynman-Regeln

Mittels der Fourier-Transformation der Felder, hier am Beispiel des neutralen W -Bosons angegeben

$$W_\mu^0(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{W}_\mu^0(p), \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{W}_\mu^0(p) = \int d^4 x e^{ipx} W_\mu^0(x) \quad (\text{A.13})$$

und der Integraldarstellung der δ -Distribution

$$\delta^4(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')}, \quad (\text{A.14})$$

$$\delta^4(p - p') = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{ix(p-p')} \quad (\text{A.15})$$

kann die Wirkung in den Impulsraum übersetzt werden. Da die Theorie in einem dimensionell regularisiertem Schema behandelt werden soll, ist es zweckmäßig die Wirkung im Impulsraum

in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen mit $\tilde{g}_0 =: g_0 \nu_0^\epsilon$ zu formulieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E [W, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = & \\
& - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} W_\mu^+(-q) \Gamma_{2\ \mu\nu}^{(0)+}(q) W_\nu^-(q) - \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} W_\mu^0(-q) \Gamma_{2\ \mu\nu}^{(0)0}(q) W_\nu^0(q) \\
& + \tilde{g}_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Gamma_{3\ \mu\nu\rho}^{(0)+-0}(-q-p, q, p) W_\mu^+(-q-p) W_\nu^-(q) W_\rho^0(p) \\
& - \frac{1}{4} \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Gamma_{4\ \mu\nu\rho\sigma}^{(0)++--} W_\mu^+(-q-p-k) W_\nu^-(q) W_\rho^+(p) W_\sigma^+(k) \\
& - \frac{1}{2} \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Gamma_{4\ \mu\nu\rho\sigma}^{(0)+-00} W_\mu^+(-q-p-k) W_\nu^-(q) W_\rho^0(p) W_\sigma^0(k) \\
& - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{c}^+(-q) \tilde{\Gamma}_2^{(0)+}(q) c^-(q) - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{c}^-(-q) \tilde{\Gamma}_2^{(0)+}(q) c^+(q) \\
& - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{c}^0(-q) \tilde{\Gamma}_2^{(0)0}(q) c^0(q) \\
& - \tilde{g}_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_3^{(0)+-0}{}_\mu(q) \bar{c}^-(q) c^+(p) W_\mu^0(-q-p) + \{\text{Perm. von } +, -, 0\} \\
& - \tilde{g}_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_3^{(0)-+0}{}_\mu(q) \bar{c}^+(q) c^-(p) W_\mu^0(-q-p) + \{\text{Perm. von } +, -, 0\} \\
& - \sum_f \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_f(-q) \bar{\Gamma}_2^{(0)}(q) \psi_f(q) \\
& - \tilde{g}_0 \sum_{(f,f')} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_{f'}(q) \bar{\Gamma}_3^{(0)}{}_{ff'\mu}^+ \psi_f(p) W_\mu^+(-q-p) \\
& - \tilde{g}_0 \sum_{(f,f')} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_f(q) \bar{\Gamma}_3^{(0)}{}_{ff'\mu}^- \psi_{f'}(p) W_\mu^-(-q-p) \\
& - \tilde{g}_0 \sum_f \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_f(q) \bar{\Gamma}_3^{(0)0}{}_{ff\mu} \psi_f(p) W_\mu^0(-q-p). \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Dabei sind die 2-Punkt-Vertexfunktionen die negativ Inversen der Propagatoren. Es gilt $f = l, \nu_l, d, u$ und $(f, f') = (l, \nu_l), (d, u)$. Die Propagatoren sind zusammen mit den 3- und 4-Punkt-Funktionen im Folgenden mit ihrer diagrammatischen Notation, den störungstheoretischen Feynman-Regeln, definiert:

- Transversal- und Longitudinalprojektor:

$$t_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{p^2} p_\mu p_\nu, \quad l_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2} p_\mu p_\nu \tag{A.17}$$

- Boson-Propagatoren:

$$D_{\mu\nu}^{(0)+}(p) := t_{\mu\nu}(p) \frac{1}{p^2} + l_{\mu\nu}(p) \frac{\xi}{p^2} \hat{=} \begin{array}{c} \mu \quad W^\pm \quad \nu \\ \text{---} \end{array} \tag{A.18}$$

$$D_{\mu\nu}^{(0)0}(p) := t_{\mu\nu}(p) \frac{1}{p^2} + l_{\mu\nu}(p) \frac{\xi}{p^2} \hat{=} \begin{array}{c} \mu \quad W^0 \quad \nu \\ \text{---} \end{array} \tag{A.19}$$

- Geist-Propagatoren:

$$\tilde{D}^{(0)+}(p^2) := \frac{1}{p^2} \hat{=} \text{---} \overset{c^\pm}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{D}^{(0)0}(p^2) := \frac{1}{p^2} \hat{=} \text{---} \overset{c^0}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.21})$$

- Fermion-Propagator:

$$S_f^{(0)}(p) := \frac{1}{\not{p}} \hat{=} \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.22})$$

- Nackter Drei-Boson-Vertex:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 \Gamma_3^{(0)+-0}{}_{\mu\nu\rho}(k, p, q) &= \tilde{g}_0 \left(\delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu \right) \\ &\hat{=} \text{---} \overset{W_\mu^+}{\text{---}} \text{---} \overset{W_\rho^0}{\text{---}} \text{---} \overset{W_\nu^-}{\text{---}} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

- Nackte Geist-Antigeist-Boson-Vertizes:

$$\tilde{g}_0 \tilde{\Gamma}_3^{(0)\alpha\beta\gamma}{}_\mu(p) := \pm \tilde{g}_0 p^\mu \hat{=} \text{---} \overset{c^\alpha}{\leftarrow} \text{---} \text{---} \overset{W_\mu^\gamma}{\text{---}} \text{---} \overset{c^\beta}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.24})$$

(„+“ für $(\alpha, \beta, \gamma) = (+, -, 0)$ zyklisch und „-“ für $(\alpha, \beta, \gamma) = (+, 0, -)$ zyklisch)

- Nackte Fermionen-Vertizes:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_3^{(0)+}{}_{ff'\mu} &:= -\frac{\tilde{g}_0}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \hat{=} \text{---} \overset{f'}{\leftarrow} \text{---} \text{---} \overset{W_\mu^+}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \\ ((f, f')) &= (l, \nu_l), (d, u) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_3^{(0)-}{}_{ff'\mu} &:= -\frac{\tilde{g}_0}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \hat{=} \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \text{---} \overset{W_\mu^-}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{f'}{\leftarrow} \text{---} \\ ((f, f')) &= (l, \nu_l), (d, u) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} := -\tilde{g}_0 (T_3)_f \gamma_\mu \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} f \text{---} \bullet \text{---} W_\mu^0 \\ \text{---} f \text{---} \end{array} \quad (\text{A.27})$$

($f = l, \nu_l, d, u$)

- Nackte Vier-Boson-Vertizes:

$$\tilde{g}_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)++--} := \tilde{g}_0^2 \left(2\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \right) \hat{=} \begin{array}{c} W_\sigma^+ \\ W_\mu^+ \quad W_\rho^- \\ W_\nu^+ \end{array} \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{g}_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)+-00} := -\tilde{g}_0^2 \left(2\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \right) \hat{=} \begin{array}{c} W_\sigma^0 \\ W_\mu^+ \quad W_\rho^0 \\ W_\nu^- \end{array} \quad (\text{A.29})$$

A.2 Euklidische Green- und Vertexfunktionen

A.2.1 Erzeugende Funktionale

Das erzeugende Funktional für die euklidischen Greenschen Funktionen ist definiert durch

$$Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] := \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}(W) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \cdot \exp \left\{ -S_E[W, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E[W, \dots; J, \dots] \right\} \quad (\text{A.30})$$

mit

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}(W) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \exp \left\{ -S_E[W, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] \right\} \quad (\text{A.31})$$

und dem Funktional der Quellen

$$j_E[W, \dots; J, \dots] := \int d^D q \left(J_\mu^-(q) W_\mu^+(q) + J_\mu^+(q) W_\mu^-(q) + J_\mu^0(q) W_\mu^0(q) + \dots + \sum_f \text{tr} \left\{ \bar{\psi}_f(q) \eta_f(-q) + \bar{\eta}_f(-q) \psi_f(q) \right\} \right), \quad (\text{A.32})$$

wobei die f -Summationen über l, ν_l, d und u läuft. Durch Logarithmieren

$$W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \quad (\text{A.33})$$

lassen sich mittels funktionaler Ableitungen nach den Quellen die zusammenhängenden (*connected*) Greenschen Funktionen gewinnen. Beispielweise sind:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta J_{\mu_3}^0(p_3) \delta J_{\mu_2}^0(p_2) \delta J_{\mu_1}^0(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) G_{n(c)}^{0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta J_{\mu_3}^0(p_3) \delta J_{\mu_2}^+(p_2) \delta J_{\mu_1}^-(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) G_{n(c)}^{+ \ - \ 0 \ \cdots \ 0}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta J_{\mu_3}^0(p_3) \delta \omega^+(p_2) \delta \bar{\omega}^-(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{G}_{n(c)}^{+ \ - \ 0 \ \cdots \ 0}_{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta J_{\mu_3}^0(p_3) \delta \eta_f(p_2) \delta \bar{\eta}_f(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{G}_{n(c) \ f f \mu_3 \cdots \mu_n}^{0 \ \cdots \ 0}(p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Die 2-Punkt-Funktionen entsprechen den Propagatoren. Das erzeugende Funktional für die amputierten 1-PI Vertexfunktionen erhält man durch Legendre-Transformation von (A.33) gemäß

$$\Gamma_E[\hat{W}, \hat{c}, \hat{c}, \hat{\psi}, \hat{\psi}] = W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] - j_E[\hat{W}, \dots; J, \dots], \quad (\text{A.38})$$

mit

$$\begin{aligned} j_E[\hat{W}, \dots; J, \dots] &:= \int d^D q \left(J_{\mu}^-(q) \hat{W}_{\mu}^+(q) + J_{\mu}^+(q) \hat{W}_{\mu}^-(q) + J_{\mu}^0(q) \hat{W}_{\mu}^0(q) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \sum_f \text{tr} \left\{ \hat{\psi}_f(q) \eta_f(-q) + \bar{\eta}_f(-q) \hat{\psi}_f(q) \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Die neuen Variablen $\hat{W}, \dots, \hat{\psi}$ werden als effektive Felder bezeichnet und sind beim Abschalten der Quellterme identisch mit den entsprechenden 1-Punkt-Funktionen, die wiederum durch eine geeignete Normierung des erzeugenden Funktionals aus Symmetriegründen zum Verschwinden gebracht werden können. Die Vertexfunktionen sind damit wie folgt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[\hat{W}, \hat{c}, \hat{c}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{W}_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta \hat{W}_{\mu_3}^0(p_3) \delta \hat{W}_{\mu_2}^0(p_2) \delta \hat{W}_{\mu_1}^0(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{g}_0^{(n-2)} \Gamma_n^{0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[\hat{W}, \hat{c}, \hat{c}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{W}_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta \hat{W}_{\mu_3}^0(p_3) \delta \hat{W}_{\mu_2}^+(p_2) \delta \hat{W}_{\mu_1}^-(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{g}_0^{(n-2)} \Gamma_n^{+ \ - \ 0 \ \cdots \ 0}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[\hat{W}, \hat{c}, \hat{c}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{W}_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta \hat{W}_{\mu_3}^0(p_3) \delta \hat{c}^+(p_2) \delta \hat{c}^-(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{g}_0^{(n-2)} \tilde{\Gamma}_n^{+-0 \cdots 0}_{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[\hat{W}, \hat{c}, \hat{c}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{W}_{\mu_n}^0(p_n) \cdots \delta \hat{W}_{\mu_3}^0(p_3) \delta \hat{\psi}_f(p_2) \delta \hat{\psi}_f(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{g}_0^{(n-2)} \bar{\Gamma}_n^{ff\mu_3 \cdots \mu_n}{}^0 \cdots 0(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

definiert. Die verwendeten Ableitungen sind Linksdifferenzierungen, was bei den funktionalen Ableitungen nach Grassmann-wertigen Feldern zu beachten ist.

Den direkten Zusammenhang zwischen den Greenschen Funktionen und den Vertexfunktionen erhält man durch eine Reduzibilitätsanalyse. Mit der Legendre-Transformation lassen sich Identitäten vom Typ

$$\frac{\delta W_E[J, \cdots \bar{\eta}]}{\delta J_\mu^+(-p)} = (2\pi)^{-D} \hat{W}_\mu^-(p) \quad \text{und} \quad \frac{\delta \Gamma_E[\hat{W}, \cdots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^-(p)} = -(2\pi)^{-D} J_\mu^+(-p) \quad (\text{A.44})$$

aufstellen. Damit lassen sich die effektiven Felder als Funktionale der Quellen und umgekehrt auffassen. Mit dieser Eigenschaft sind weitere Identitäten, die auch als Funktionale Kettenregeln bezeichnet werden, formulierbar. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \hat{W}_\mu^0(p)} &= -(2\pi)^D \int d^D q \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \cdots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^0(p) \delta \hat{W}_\nu^0(-q)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^0(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \cdots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^0(p) \delta \hat{W}_\nu^-(-q)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^+(q)} + \cdots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Mit (A.45) sind die Greenschen Funktionen nach den Vertexfunktionen entwickelbar. Für den ungeladenen Boson-Propagator ist

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} \delta^D(p-k) &= \frac{\delta \hat{W}_\mu^0(p)}{\delta \hat{W}_\nu^0(k)} = -(2\pi)^D \int d^D q \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \cdots \psi]}{\delta \hat{W}_\nu^0(k) \delta \hat{W}_\rho^0(-q)} \frac{\delta \hat{W}_\mu^0(p)}{\delta J_\rho^0(q)} + \cdots \right\} \\ &= -(2\pi)^{2D} \int d^D q \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \cdots \psi]}{\delta \hat{W}_\nu^0(k) \delta \hat{W}_\rho^0(-q)} \frac{\delta^2 W_E[J, \cdots \bar{\eta}]}{\delta J_\rho^0(q) \delta J_\mu^0(-p)} + \cdots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Werden die Quellterme zu Null gesetzt und verwendet (A.34) und (A.40) für $n = 2$, so findet sich

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} \delta^D(p-k) &= - \int d^D q \delta^D(-q-k) \Gamma_{2\nu\rho}^{00}(-q, k) \delta^D(-p+q) G_{2(c)\mu\rho}^{00}(-p, q) \\ &= -\delta^D(p-k) \Gamma_{2\nu\rho}^0(k) D_{\mu\rho}^0(k). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Dabei ist zu beachten, dass die Greenschen 2-Punkt-Funktionen den vollen Propagatoren entsprechen.

Die Propagatoren sind also das negativ Inverse der 2-Punkt-Vertexfunktionen. Die Skelettgraphenentwicklung der zusammenhängen Greenschen 3-Punkt-Funktion, die in dieser Arbeit

mehrfach benötigt wird, verläuft nach obigem Schema

$$\begin{aligned}
0 &= -(2\pi)^{2D} \frac{\delta}{\delta \hat{W}_\lambda^0(q)} \int d^D l \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^+(-l) \delta \hat{W}_\sigma^-(k)} \frac{\delta^2 W_E[J, \dots \bar{\eta}]}{\delta J_\nu^+(p) \delta J_\mu^-(l)} + \dots \right\} \\
&= -(2\pi)^{2D} \int d^D l \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\lambda^0(q) \delta \hat{W}_\mu^+(-l) \delta \hat{W}_\sigma^-(k)} \frac{\delta^2 W_E[J, \dots \bar{\eta}]}{\delta J_\nu^+(p) \delta J_\mu^-(l)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^+(-l) \delta \hat{W}_\sigma^-(k)} \frac{\delta}{\delta \hat{W}_\lambda^0(q)} \frac{\delta^2 W_E[J, \dots \bar{\eta}]}{\delta J_\nu^+(p) \delta J_\mu^-(l)} + \dots \right\}. \quad (\text{A.48})
\end{aligned}$$

Verwendung der funktionalen Kettenregel (A.45) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= -(2\pi)^{2D} \int d^D l \left\{ \frac{\delta^3 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\lambda^0(q) \delta \hat{W}_\mu^+(-l) \delta \hat{W}_\sigma^-(k)} \frac{\delta^2 W_E[J, \dots \bar{\eta}]}{\delta J_\nu^+(p) \delta J_\mu^-(l)} \right. \\
&\quad \left. - (2\pi)^D \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\mu^+(-l) \delta \hat{W}_\sigma^-(k)} \int d^D m \frac{\delta^2 \Gamma_E[\hat{W}, \dots \psi]}{\delta \hat{W}_\lambda^0(q) \delta \hat{W}_\rho^0(-m)} \frac{\delta^3 W_E[J, \dots \bar{\eta}]}{\delta J_\rho^0(m) \delta J_\nu^+(p) \delta J_\mu^-(l)} + \dots \right\} \\
&= -(2\pi)^{-D} \int d^D l \delta^D(q-l+k) \tilde{g}_0 \Gamma_{3\sigma\mu\lambda}^{+-0}(k, -l, q) \delta^D(p+l) D_{\mu\nu}^+(p) \\
&\quad + (2\pi)^{-D} \int d^D l \int d^D m \delta^D(k-l) \Gamma_{2\mu\sigma}^+(k) \delta^D(-m+q) \Gamma_{2\lambda\rho}^+(q) \\
&\quad \cdot \delta^D(m+p+l) G_{3(c)\mu\nu\rho}^{+-0}(l, p, m). \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

Schließlich bleiben noch die Integrale auszuführen. Die Entwicklung der bosonischen 3-Punkt-Funktion lässt sich nach Abspalten der verbleibenden δ -Distribution und unter Verwendung von (A.47) in der Form

$$G_{3(c)\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) = \tilde{g}_0 \Gamma_{3\mu_1\nu_1\rho_1}^{+-0}(k, p, q) D_{\mu\mu_1}^+(k) D_{\nu\nu_1}^+(p) D_{\rho\rho_1}^0(q) \quad (\text{A.50})$$

angeben. Die Skelettgraphenentwicklung höherer Ordnung bekommt man durch entsprechend mehrfache Anwendung von Ableitungen auf eine funktionale Kettenregel, wie sie z. B. in (A.45) angegeben ist. Die im nächsten Abschnitt eingeführten Feynman-Regeln für die vollen Funktionen gestatten eine intuitive Herleitung solcher Entwicklungen.

A.2.2 Feynman-Regeln

Mit den aus Abschnitt A.1.2 und den an dieser Stelle definierten Feynman-Regeln ist man in der Lage, Störungsreihen und DSG, die die Störungsreihen in rekursiver Form beinhalten, in diagrammatischer Form anzugeben. Die zu einem Vertex gehörenden Strahlungskorrekturen bis zu einer festgelegten Ordnung lassen sich ohne lange Rechnung unter Beachtung topologischer Gesichtspunkte formulieren.

- Volle Propagatoren:

$$D_{\mu\nu}^+(p) \hat{=} \begin{array}{c} \mu \quad W^\pm \quad \nu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad (\text{A.51})$$

$$D_{\mu\nu}^0(p) \hat{=} \begin{array}{c} \mu \quad W^0 \quad \nu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad (\text{A.52})$$

$$\tilde{D}^+(p^2) \hat{=} \text{---} \overset{c^\pm}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.53})$$

$$\tilde{D}^0(p^2) \hat{=} \text{---} \overset{c^0}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.54})$$

$$S_f(p) \hat{=} \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \quad (\text{A.55})$$

$$f = e, \nu_e, d, u$$

• Tripel Vertizes:

$$\tilde{g}_0 \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} W_\mu^+ \\ \text{---} W_\rho^0 \\ \text{---} W_\nu^- \end{array} \quad (\text{A.56})$$

$$\tilde{g}_0 \tilde{\Gamma}_3^{\alpha\beta\gamma}(-p_1, p_2, k) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} c^\alpha \\ \text{---} p_1 \\ \text{---} c^\beta \\ \text{---} W_\mu^\gamma \end{array} \quad (\text{A.57})$$

$$\tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_3^{ff\mu^+}(-p_1, p_2, k) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} f' \\ \text{---} f \\ \text{---} W_\mu^+ \end{array} \quad (\text{A.58})$$

$$((f, f')) = (e, \nu_e), (d, u)$$

$$\tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_3^{ff\mu^-}(-p_1, p_2, k) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} f \\ \text{---} f' \\ \text{---} W_\mu^- \end{array} \quad (\text{A.59})$$

$$((f, f')) = (e, \nu_e), (d, u)$$

$$\tilde{g}_0 \bar{\Gamma}_3^{ff\mu^0}(-p_1, p_2, k) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} f \\ \text{---} f \\ \text{---} W_\mu^0 \end{array} \quad (\text{A.60})$$

$$(f = e, \nu_e, d, u)$$

- Volle 4-Boson-Vertizes:

$$\tilde{g}_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{++--}(p_1, p_2, p_3, p_4) \hat{=} \begin{array}{c} \begin{array}{c} W_\sigma^+ \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ W_\rho^- \end{array} \\ W_\mu^+ \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ W_\nu^+ \end{array} \quad (\text{A.61})$$

$$\tilde{g}_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(p_1, p_2, p_3, p_4) \hat{=} \begin{array}{c} \begin{array}{c} W_\sigma^0 \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ W_\rho^0 \end{array} \\ W_\mu^+ \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ W_\nu^- \end{array} \quad (\text{A.62})$$

Soll ein Feynman-Graph in seinen algebraischen Ausdruck überführt werden, so sind neben den graphischen Übersetzungsvorschriften die folgenden Regeln zu beachten: Die Pfeilrichtung bei Fermion- und Geistlinien gibt die Richtung des Impulses und die Flußrichtung der Fermion- bzw. Geistszahl an. Die Impulse und Laufrichtungen der Bosonen in den Boson-Vertizes sind als einlaufend zu betrachten. Darüberhinaus ist das Integrationsmaß für die Schleifenintegration $\int (2\pi)^{-D} d^D q$. Fermion- und Geistschleifen sind mit einem Minuszeichen zu versehen. Diagramme mit Fermionlinien werden entgegen der Flußrichtung ausgewertet.

A.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Das Verschwinden des Pfadintegrals über eine funktionale Ableitung nach einem Feld führt auf eine funktionale Gestalt der Dyson-Schwinger-Gleichungen. Weitere Differentiationen nach geeigneten Quellen liefern nach Abschalten selbiger die gewünschten Gleichungen.

A.3.1 Fermion-Sektor

Die funktionale Ableitung nach einem Fermion-Feld zeichnet diesen Sektor aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}(W) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_f(-p_1)} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -S_E[W, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E[W, \dots; J, \dots] \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left\{ \bar{\Gamma}_{2f}^{(0)}(p_1) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_f(-p_1)} + \tilde{g}_0 \int d^D q \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^{(0)\pm} \frac{\delta}{\delta J_\mu^\mp(q-p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{f'}(-q)} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}_0 \int d^D q \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} \frac{\delta}{\delta J_\mu^0(q-p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_f(-q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\pi)^D} \eta_f(p_1) \right\} \cdot \exp \{ W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Aus der Gleichung (A.63) lassen sich alle DSG ableiten, in deren Diagramme ein Fermion von links in den nackten Vertex hineinläuft. Die Selbstenergie des Fermion-Propagators soll

ausführlich bestimmt werden. Die weiteren Gleichungen ergeben sich analog, werden aber nur graphisch aufgeführt. Anwendung von $\frac{\delta}{\delta\eta_f(p_2)}$ liefert

$$\begin{aligned}
 0 = & \left\{ \bar{\Gamma}_{2f}^{(0)}(p_1) \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta\eta_f(p_2)\delta\bar{\eta}_f(-p_1)} + \tilde{g}_0 \int d^D q \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^{(0)\pm} \frac{\delta^3 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_\mu^\mp(q-p_1)\delta\eta_f(p_2)\delta\bar{\eta}_{f'}(-q)} \right. \\
 & + \tilde{g}_0 \int d^D q \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} \frac{\delta^3 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_\mu^0(q-p_1)\delta\eta_f(p_2)\delta\bar{\eta}_f(-q)} \\
 & \left. + \frac{1}{(2\pi)^D} \delta(p_2 - p_1) \right\} \cdot \exp \{ W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \}, \tag{A.64}
 \end{aligned}$$

was nach dem Abschalten der Quellen und den Definitionen für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen

$$\begin{aligned}
 0 = & \delta^D(p_2 - p_1) + \delta^D(p_2 - p_1) \bar{\Gamma}_{2f}^{(0)}(p) S_f(p_2) \\
 & + \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^{(0)\pm} \delta^D(p_2 - p_1) S_{f'}(q) \bar{\Gamma}_{3f'f\nu}^\mp(-q, p, q - p) S_f(p_2) D_{\mu\nu}^+(q - p) \\
 & + \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} \delta^D(p_2 - p_1) S_f(q) \bar{\Gamma}_{3ff\nu}^0(-q, p, q - p) S_f(p_2) D_{\mu\nu}^0(q - p) \tag{A.65}
 \end{aligned}$$

zur Folge hat. Abspalten der δ -Funktionen, einigen Umformungen und Neubennungen von Variablen ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{2f}(p) = & \bar{\Gamma}_{2f}^{(0)}(p) + \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^{(0)\pm} S_{f'}(q) \bar{\Gamma}_{3f'f\nu}^\mp(-q, p, q - p) D_{\mu\nu}^+(q - p) \\
 & + \tilde{g}_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} S_f(q) \bar{\Gamma}_{3ff\nu}^0(-q, p, q - p) D_{\mu\nu}^0(q - p). \tag{A.66}
 \end{aligned}$$

Mit den Feynman-Regeln lassen sich die DSG für den Propagator

$$\begin{aligned}
 - \left(\text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} = & - \left(\text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} + \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \\
 & + \text{---} \overset{f}{\leftarrow} \text{---} \text{---} \overset{f'}{\leftarrow} \text{---} \tag{A.67}
 \end{aligned}$$

und die fermionischen Vertizes illustrieren:

Diagram (A.68) illustrates the decomposition of a fermion self-energy loop with a W^0 boson. The left side shows a fermion line with an incoming arrow labeled f and an outgoing arrow labeled f , connected by a circle representing a self-energy loop. A wavy line labeled W^0_μ is attached to the top of the circle. This is equal to the sum of three terms: a tree-level vertex where the fermion line is split by a wavy line W^0_μ ; a loop diagram with a W^0 boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}_s ; and a loop diagram with a W^\pm boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}'_s .

$$(A.68)$$

Diagram (A.69) illustrates the decomposition of a fermion self-energy loop with a W^+ boson. The left side shows a fermion line with an incoming arrow labeled f' and an outgoing arrow labeled f , connected by a circle representing a self-energy loop. A wavy line labeled W^+_μ is attached to the top of the circle. This is equal to the sum of three terms: a tree-level vertex where the fermion line is split by a wavy line W^+_μ ; a loop diagram with a W^0 boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}_s ; and a loop diagram with a W^- boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}'_s .

$$(A.69)$$

Diagram (A.70) illustrates the decomposition of a fermion self-energy loop with a W^- boson. The left side shows a fermion line with an incoming arrow labeled f and an outgoing arrow labeled f' , connected by a circle representing a self-energy loop. A wavy line labeled W^-_μ is attached to the top of the circle. This is equal to the sum of three terms: a tree-level vertex where the fermion line is split by a wavy line W^-_μ ; a loop diagram with a W^0 boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}_s ; and a loop diagram with a W^+ boson and a fermion loop, with a vertex labeled \bar{T}'_s .

$$(A.70)$$

Die in den Diagrammen auftretenden 4-Punkt-Amplituden sind 1-PI bezüglich des horizontalen s -Kanals. Mit Hilfe der Reduzibilitätsanalyse findet man beispielsweise für die Amplitude T'_s in (A.68)

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
 & = \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \quad (\text{A.71})
 \end{aligned}$$

A.3.2 Boson-Sektor

Sämtliche Gleichungen in diesem Abschnitt werden auf 1-Schleifen-Niveau diagrammatisch angegeben. Da in dieser Arbeit nicht nur die DSG, sondern ihre BS resummierte Form verwendet werden, sind für den 3-Boson-Vertex und die 4-Boson-Vertizes stellvertretend Gleichungen formuliert. Ihre Graphen sind durch ein von links einlaufendes W^0 -Bosonen ausgezeichnet.

$$\begin{aligned}
 - \left(\text{Wavy line with 2 dots} \right)^{-1} &= - \left(\text{Wavy line with 2 dots} \right)^{-1} + \text{Diagram 1} \\
 &- \sum_{(f, f')} \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \frac{1}{2} \text{Diagram 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \quad (A.72) \\
 & \text{Diagram 1: } W_\mu^\mp \text{ (wavy) } \rightarrow \text{circle with } c^0 \text{ (dashed) and } c^\mp \text{ (dashed)} \rightarrow W_\nu^\pm \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 2: } W_\mu^\mp \text{ (wavy) } \rightarrow \text{circle with } c^\pm \text{ (dashed) and } c^0 \text{ (dashed, smiley face)} \rightarrow W_\nu^\pm \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\text{Diagram 3} \right)^{-1} = - \left(\text{Diagram 4} \right)^{-1} + \text{Diagram 5} \\
 & \text{Diagram 3: } W^0 \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 4: } W^0 \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 5: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } W^+ \text{ (wavy) and } W^- \text{ (wavy)} \rightarrow W_\nu^0 \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{Diagram 6} - \sum_f \text{Diagram 7} \\
 & \text{Diagram 6: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } W^+ \text{ (wavy)} \rightarrow W_\nu^0 \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 7: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } f \text{ (dashed)} \rightarrow W_\nu^0 \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9} \quad (A.73) \\
 & \text{Diagram 8: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } c^+ \text{ (dashed) and } c^+ \text{ (dashed)} \rightarrow W_\nu^0 \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 9: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } c^- \text{ (dashed) and } c^- \text{ (dashed)} \rightarrow W_\nu^0 \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 10} = \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} \\
 & \text{Diagram 10: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle} \rightarrow W_\rho^- \text{ (wavy)} \text{ and } W_\nu^+ \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 11: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle} \rightarrow W_\rho^- \text{ (wavy)} \text{ and } W_\nu^+ \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 12: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } T_s \text{ (circle)} \rightarrow W_\rho^- \text{ (wavy)}, W_\nu^+ \text{ (wavy)}, \text{ and } W^+ \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} \\
 & \text{Diagram 13: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } W^0 \text{ (wavy)} \rightarrow W_\rho^- \text{ (wavy)} \text{ and } W_\nu^+ \text{ (wavy)} \\
 & \text{Diagram 14: } W_\mu^0 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{circle with } W^0 \text{ (wavy)} \rightarrow W_\rho^- \text{ (wavy)} \text{ and } W_\nu^+ \text{ (wavy)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_f \text{Diagram 1} \\
 & - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \tag{A.74}
 \end{aligned}$$

Diagram 1: A circle with a thick solid line on top and bottom, labeled f . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_ρ^- and W_ν^+ exit from the right. A circle labeled \tilde{T}'_s is attached to the right side.

Diagram 2: A circle with a thick dashed line on top and bottom, labeled c^- . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_ρ^- and W_ν^+ exit from the right. A circle labeled \tilde{T}_s is attached to the right side.

Diagram 3: A circle with a thick dashed line on top and bottom, labeled c^+ . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_ρ^- and W_ν^+ exit from the right. A circle labeled \tilde{T}'_s is attached to the right side.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 4} = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
 & + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \\
 & + \text{Diagram 9} - \sum_f \text{Diagram 10} \\
 & - \text{Diagram 11} - \text{Diagram 12} \tag{A.75}
 \end{aligned}$$

Diagram 4: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right.

Diagram 5: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right. A small circle labeled T is attached to the right side.

Diagram 6: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right. A thick wavy line loop is attached to the right side.

Diagram 7: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right. A thick wavy line loop is attached to the right side. A circle labeled T_s is attached to the top of the loop.

Diagram 8: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right. A thick wavy line loop is attached to the right side. A circle labeled T'_s is attached to the top of the loop.

Diagram 9: A circle with a wavy line W_μ^0 entering from the left and three wavy lines W_σ^- , W_ρ^+ , and W_ν^0 exiting from the right. A thick wavy line loop is attached to the right side. A circle labeled T''_s is attached to the top of the loop.

Diagram 10: A circle with a thick solid line on top and bottom, labeled f . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_σ^- and W_ν^0 exit from the right. A circle labeled \tilde{T} is attached to the right side.

Diagram 11: A circle with a thick dashed line on top and bottom, labeled c^+ . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_σ^- and W_ν^0 exit from the right. A circle labeled \tilde{T}' is attached to the right side.

Diagram 12: A circle with a thick dashed line on top and bottom, labeled c^- . A wavy line W_μ^0 enters from the left. Two wavy lines W_σ^- and W_ν^0 exit from the right. A circle labeled \tilde{T}'' is attached to the right side.

Die graphische Zerlegung der T_5 -Amplituden ist kompliziert und exemplarisch für die bosonische Funktion wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W_\rho^+ \\ \circlearrowleft T \\ W_\mu^- \quad W_\nu^0 \\ W_\sigma^- \end{array} = \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W_\rho^+ \\ \circlearrowleft T_5 \\ W_\mu^- \quad W_\nu^0 \\ W_\sigma^- \end{array} - \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W^0 \quad W_\rho^+ \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ W_\mu^- \quad W_\nu^0 \end{array} \\
 & - \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W^+ \quad W_\rho^+ \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ W_\mu^- \quad W_\nu^0 \end{array} - \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W^+ \quad W_\sigma^- \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ W_\mu^- \quad W_\rho^+ \quad W_\nu^0 \end{array} - \begin{array}{c} W_\sigma^- \\ W_\lambda^+ \quad W^0 \quad W_\rho^+ \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ W_\mu^- \quad W_\nu^0 \end{array} \quad (A.76)
 \end{aligned}$$

A.3.3 Geist-Sektor

Aus dem Geist-Sektor werden nur die Diagramme der beiden Propagatoren benötigt.

$$\begin{aligned}
 - \left(\text{---} \overset{c_\pm}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} &= - \left(\text{---} \overset{c_\pm}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} + \begin{array}{c} W^\pm \\ \text{---} \overset{c_\mp}{\leftarrow} \quad \circlearrowleft \quad \text{---} \overset{c_\pm}{\leftarrow} \\ c_0 \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} W^0 \\ \text{---} \overset{c_\mp}{\leftarrow} \quad \circlearrowleft \quad \text{---} \overset{c_\pm}{\leftarrow} \\ c_\pm \end{array} \quad (A.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \left(\text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} &= - \left(\text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \text{---} \right)^{-1} + \begin{array}{c} W^+ \\ \text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \quad \circlearrowleft \quad \text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \\ c_- \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} W^- \\ \text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \quad \circlearrowleft \quad \text{---} \overset{c_0}{\leftarrow} \\ c_+ \end{array} \quad (A.78)
 \end{aligned}$$

A.3.4 Kondensate

Die Vakuumkondensate werden aus den DSG ermittelt. Bei den Propagator-Kondensaten werden die DSG mit einem nackten und einem vollen Propagator multipliziert und neu arrangiert. Über die äußeren Impulse wird integriert. In den Boson-Gleichungen werden zusätzlich die Lorentzindizes geschlossen.

Da in den Schleifen nackte auf volle Linien treffen, wird zur Unterscheidung ein Dreieck als neues Symbol eingeführt. Es ist nicht mit den Polfaktoren aus dem MKP zu verwechseln.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= f \text{ Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \quad (\text{A.79})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^\pm \text{Diagram 1} &= W^\pm \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \sum_{(f,f')} \text{Diagram 4} \\
 &+ \text{Diagram 5} + \frac{1}{2} \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \quad (\text{A.80})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^0 \text{Diagram 1} &= W^0 \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \frac{1}{2} \text{Diagram 4} \\
 &- \sum_f \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} \quad (\text{A.81})
 \end{aligned}$$

Anhang B

Wichtige Ergänzungen

B.1 Algebra der euklidischen γ -Matrizen

Die euklidischen γ -Matrizen dieser Arbeit erfüllen in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} \quad (\text{B.1})$$

mit der sich die Kontraktionen

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = -D \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = (D - 2) \gamma_\nu, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu = -(D - 4) \gamma_\nu \gamma_\rho + 4 \delta_{\nu\rho} \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{B.4})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu = (D - 4) \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma + 2 \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu \quad (\text{B.5})$$

bestimmen lassen. Bei der Berechnung von geschlossenen Fermion-Schleifen gelten die Spurrelationen

$$\text{tr} \{ \mathbf{1} \} = 4, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = -4 \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \} = 4 \left(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \right) \quad (\text{B.8})$$

über eine gerade Anzahl von γ -Matrizen. Definitionsgemäß sind sämtliche γ -Matrizen spurfrei, so dass auch die Spur über eine beliebige ungerade Anzahl verschwindet:

$$\text{tr} \{ \gamma_\mu \} = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{tr} \{ \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2n-1}} \} = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \dots \quad (\text{B.10})$$

Mit der fundamentalen Antikommutatorrelation lassen sich Produkte zwischen geraschten Impulsen, $\not{p} := \gamma_\mu p_\mu$, ermitteln. Die Beziehungen

$$\not{p} \not{p} = -p^2 \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{B.11})$$

$$\not{p} \not{k} + \not{k} \not{p} = -2(p \cdot k) \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{B.12})$$

$$\not{p} \gamma_\mu \not{p} = p^2 \gamma_\mu - 2 p_\mu \not{p} \quad (\text{B.13})$$

werden bei Kontraktionen im fermionischen Sektor benötigt. Die γ_5 -Matrix in 4 Dimensionen, die bei der Konstruktion axialer Ströme eine wichtige Rolle spielt, ist in $D = 4$ Dimensionen durch

$$\gamma_5 := -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (\text{B.14})$$

definiert, hat die Eigenschaften

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma_5\gamma_5 = \mathbf{1} \quad (\text{B.16})$$

und genügt den Spurrelationen

$$\text{tr}\{\gamma_5\} = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\text{tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\text{tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_5\} = -4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{B.19})$$

$$\text{tr}\{\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_{2n-1}}\gamma_5\} = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \dots \quad (\text{B.20})$$

Dabei ist $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe. Man überzeugt sich mit den Spurrelationen leicht, dass

$$p_\mu p_\nu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (\text{B.21})$$

gilt. Bei der Berechnung von bosonischen Dreiecks- und Vierecksdiagrammen sind Kontraktionen von ε -Tensoren auszuführen. Es werden die Formeln

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!, \quad (\text{B.22})$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} = 3! \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.23})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = 2(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}), \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\rho\gamma} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\rho\alpha} + \delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\rho\beta} \\ &\quad - \delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\beta}\delta_{\rho\alpha} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\rho\gamma} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\gamma}\delta_{\rho\beta}) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

benutzt. Mit Hilfe der so definierten γ -Matrizen und der Matrix

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (\text{B.26})$$

wobei die Gleichungen

$$\sigma_{\mu\nu} = i(\delta_{\mu\nu} + \gamma_\mu\gamma_\nu) \quad \text{und} \quad [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5] = 0 \quad (\text{B.27})$$

gelten, lässt sich jedes Produkt von 4×4 -Matrizen in der Form

$$S = \frac{1}{4} \left[\text{tr}\{S\}\mathbf{1} + \text{tr}\{\gamma_5 S\}\gamma_5 - \text{tr}\{\gamma_\mu S\}\gamma_\mu - \text{tr}\{\gamma_5\gamma_\mu S\}\gamma_\mu\gamma_5 + \frac{1}{2} \text{tr}\{\sigma_{\mu\nu} S\}\sigma_{\mu\nu} \right] \quad (\text{B.28})$$

darstellen [BP 99]. Damit ergibt sich für drei γ -Matrizen die Beziehung

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = -\left(\delta_{\nu\rho}\gamma_\mu - \delta_{\mu\rho}\gamma_\nu + \delta_{\mu\nu}\gamma_\rho + \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\gamma_\alpha\gamma_5\right) \quad (\text{B.29})$$

und daraus wiederum die sehr nützliche Formel

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = -3! \gamma_\sigma \gamma_5. \quad (\text{B.30})$$

Die Pauli-Matrizen treten in dieser Arbeit an zwei Stellen auf. Einerseits werden sie als Generatoren der $SU(2)$ -Eichgruppe verwendet. Andererseits lassen sich in $D = 4$ Dimensionen aus den drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

über die Relation

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{B.32})$$

und mit Hilfe der Einheitsmatrix gemäß

$$\gamma_4 := \begin{pmatrix} i\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

die euklidischen γ -Matrizen, die die Antikommutatorrelation (B.1) erfüllen, konstruieren. Die Pauli-Matrizen sind spurfrei und erfüllen die Beziehungen

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm} \sigma_m \quad \text{und} \quad [\sigma_k, \sigma_l] = \frac{i}{2} \varepsilon_{klm} \sigma_m. \quad (\text{B.34})$$

B.2 Partialbruchzerlegungen

Partialbruchzerlegungen sind in dieser Arbeit sehr wichtig. Sie ermöglichen sie eine übersichtliche Berechnung der Schleifenintegrale. Ein rationaler Ausdruck ist gemäß

$$\frac{(q^2)^n}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + a_s)} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} \frac{1}{q^2 + a_t} \quad \text{für} \quad n < r + 1 \quad (\text{B.35})$$

in seine Partialbrüche zerlegbar. Die Zerlegung des impulsunabhängigen Anteils von (B.35), der nach erfolgten Integrationen übrig bleibt, lässt sich mit Hilfe der Identitäten

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(a_t)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = 0 \quad \text{für} \quad n < r, \quad (\text{B.36})$$

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(a_t)^r}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r, \quad (\text{B.37})$$

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{(a_t)^{r+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \sum_{l=1}^{r+1} a_l \quad (\text{B.38})$$

$$\text{und} \quad \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(a_t)^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} a_{t_1} a_{t_2} \quad (\text{B.39})$$

rückgängig machen. Die Beweise hierzu finden sich in [Pot 00]. Allgemein gilt die Formel

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+n}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \sum_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_n=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n}}^{r+1} a_{t_1} a_{t_2} \dots a_{t_n} \quad \text{für } n \geq 2, \quad (\text{B.40})$$

wie sich mit Hilfe der vollständigen Induktion zeigen lässt. Die Zurücknahme von Partialbruchzerlegungen in den Dreiecks- und Vierecksdiagrammen

$$\begin{aligned} \frac{(q^2)^n}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + a_s) \prod_{s=1}^r (q^2 + b_s)} &= \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-a_t)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \prod_{s=1}^r (b_s - a_t)} \frac{1}{q^2 + a_t} \\ &+ \sum_{t=1}^r \frac{(-b_t)^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (b_s - b_t) \prod_{s=1}^{r+1} (a_s - b_t)} \frac{1}{q^2 + a_t} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

für $n < 2r + 1$ erfordert Summationen vom Typ

$$\sum_n^{[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t) \prod_{s=1}^r (b_s - a_t)} \quad \text{für } n = 0, \dots, 2r. \quad (\text{B.42})$$

Benötigt werden die Spezialfälle für $r = 0$

$$\sum_0^{[0]} = 1 \quad (\text{B.43})$$

und $r = 1$

$$\sum_0^{[1]} = \frac{-1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)}. \quad (\text{B.44})$$

$$\sum_1^{[1]} = \frac{b_1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)} = -b_1 \sum_0^{[1]}, \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \sum_2^{[1]} &= 1 - \frac{b_1^2}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)} = 1 + b_1^2 \sum_0^{[1]} \\ &= (b_1(a_1 + a_2) - a_1 a_2) \sum_0^{[1]}, \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

wo die interessante Relation

$$a_1 a_2 \sum_0^{[1]} + (a_1 + a_2) \sum_1^{[1]} + \sum_2^{[1]} = 0 \quad (\text{B.47})$$

gilt. Das Ausführen der Summation von (B.42) für r oder n beliebig ist schwierig.

B.3 Feynman-Parametrisierungen

Impulsintegrale lassen sich oftmals nicht ohne eine Vorbehandlung integrieren. Unterschiedliche Nenner eines Integranden lassen sich mit einem Trick, der auf Feynman zurückgeht, zusammenfassen. Aus der allgemeinen Form

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 x_1^{n-2} \int_0^1 dx_2 x_2^{n-3} \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \frac{y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \cdots y_n^{\alpha_n-1}}{[y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}} \quad (\text{B.48})$$

mit

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - x_1, & y_2 &= x_1(1 - x_2), & y_3 &= x_1 x_2(1 - x_3), & \dots, \\ y_{n-1} &= x_1 \cdots x_{n-2}(1 - x_{n-1}) & \text{und} & & y_n &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

sind die Standardformeln, wie sie in [Kug 97] zu finden sind,

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{(\alpha+\beta)}} \quad (\text{B.50})$$

und

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \frac{x_2 x_3^2 \cdots x_{n-1}^{n-2}}{[(a_1 - a_2)x_1 \cdots x_{n-1} + (a_2 - a_3)x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)x_{n-1} + a_n]^n} \quad (\text{B.51})$$

bestimmbar. Daraus lassen sich die wichtigen Spezialfälle

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \frac{1}{[ayx + by(1-x) + c(1-y)]^3} \quad (\text{B.53})$$

ableiten.

B.4 Euklidische Impulsintegration

Die in dieser Arbeit auftretenden Impulsintegrale werden im Rahmen einer dimensionell regulierten Theorie gelöst. Für ein allgemeines Integral der Gestalt

$$I_D[f] = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q) \quad (\text{B.54})$$

gelten nach [Col 85] die folgenden Manipulationsvorschriften:

- Linearität (für $a, b \in \mathbb{C}$):

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \{a f(q) + b g(q)\} = a \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q) + b \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} g(q) \quad (\text{B.55})$$

- Skalierung (für α beliebig):

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(\alpha \cdot q) = \alpha^{-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q) \quad (\text{B.56})$$

- Translationsinvarianz:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q+k) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q) \quad (\text{B.57})$$

- Anschlußbedingung:

Ist D ganzzahlig und positiv, so soll im Falle der Existenz $I_D[f]$ mit dem gewöhnlichen Integral übereinstimmen.

Explizit berechnen lassen sich die Integrale durch die Standardformel der dimensionellen Regularisierung

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + R^2)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2) \Gamma(\beta)} [R^2]^{D/2 + \alpha - \beta}, \quad (\text{B.58})$$

die man beispielsweise [Mut 87] oder [Ryd 96] entnehmen kann. Speziell gelten die Formeln für logarithmisch

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + R^2)^{\alpha+2}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon) (R^2)^{-\epsilon} \quad (\text{B.59})$$

und quadratisch

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + R^2)^{\alpha+1}} = (\alpha + 1) \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon - 1) (R^2)^{1-\epsilon} \quad (\text{B.60})$$

divergente Impulsintegrale. Integranden, in denen nicht nur Impulsquadrate, sondern auch Impulskomponenten vorkommen, lassen sich mit den Formeln der symmetrischen Integration manipulieren. Einerseits gilt

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q_{\mu_1} q_{\mu_2} \cdots q_{\mu_n} f(q^2) = 0 \quad (\text{B.61})$$

für n ungerade und zum anderen ist

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^{\mu_1} q^{\mu_2} \cdots q^{\mu_n} f(q^2) = \frac{S_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n)}^n}{D(D+2) \cdots (D+n-2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (q^2)^{n/2} f(q^2) \quad (\text{B.62})$$

für n gerade. Hierbei bezeichnet $S_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n)}^n$ für $n \geq 2$ den total symmetrischen Lorentztensor n -ter Stufe. Die zwei niedrigsten Ordnungen haben die Form

$$S_{(\mu_1 \mu_2)}^2 := \delta_{\mu_1 \mu_2}, \quad (\text{B.63})$$

$$S_{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)}^4 := \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4} + \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} + \delta_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3}. \quad (\text{B.64})$$

Die Gammafunktion mit ihren Polstellen einfacher Ordnung bei $\{0, -1, -2, \dots\}$ ist durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0 \quad (\text{B.65})$$

definiert. Nach [AS 72] existiert eine Entwicklung in der Form

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (\text{B.66})$$

mit der logarithmischen Ableitung

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{j(j+n)}, \quad \text{wobei } n \in \{-1, -2, \dots\}, \quad (\text{B.67})$$

und der Euler-Mascheroni Konstanten

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right) \approx 0,5772\dots \quad (\text{B.68})$$

Üblicherweise interpoliert die Gammafunktion die Fakultät

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.69})$$

und es gilt die Formel

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \quad (\text{B.70})$$

Die Integraldarstellung der Eulerschen Beta-Funktion

$$B(\alpha+1, \beta+1) = \int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \quad (\text{B.71})$$

kann darüber hinaus nützlich sein.

Anhang C

Schleifen-Galerie

An dieser Stelle sind die Ergebnisse der Schleifenberechnungen im Rahmen der nichtperturbativ erweiterten Feynman-Regeln zusammengestellt. Die Impulsintegrale sind mit Hilfe der Formeln aus Anhang B gelöst.

C.1 Fermion-Sektor

Die zu bestimmenden Integrale aus dem Fermion-Sektor sind Schleifen der DSG des Fermion-Propagators und der nicht-abelschen Dreiecksdiagramme mit zwei äußeren fermionischen Beinen und einem bosonischen Bein. Nach einer Partialbruchzerlegung der inneren Linien, wie es z. B. in Kapitel 3 vorgeführt wird, führen die Diagramme immer auf Integrale eines bestimmten Typs. Für den Fermion-Sektor werden mit Ausnahme der Kondensate lediglich zwei Integraltypen benötigt. Dies sind für die Fermion-Schleifen

$$\begin{aligned} I_1(p, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma_\mu (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{\not{q} + a\Lambda} \gamma_\nu (V_2 + A_2 \gamma_5) \frac{t_{\mu\nu}(q-p)}{(q-p)^2 + b\Lambda^2} \\ &= -\frac{3}{\beta_0} \Lambda a \left(V_1 V_2 - A_1 A_2 + \gamma_5 (V_1 A_2 - V_2 A_1) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

und für die fermionischen Dreiecksdiagramme

$$\begin{aligned} I_2(p, k, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 t_{\rho\sigma}(p) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma_{\mu_1} (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{\not{q} + a\Lambda} \gamma_{\nu_1} (V_2 + A_2 \gamma_5) \\ &\quad \cdot \frac{t_{\nu_1 \nu_2}(q-p)}{(q-p)^2 + b\Lambda^2} B_{\sigma\mu_2\nu_2}(p, k, q) \frac{t_{\mu_1 \mu_2}(q-p-k)}{(q-p-k)^2 + c\Lambda^2} \\ &= t_{\rho\sigma}(p) I_2^T(p, k, \Lambda), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

wobei

$$\begin{aligned} B_{\sigma\mu_2\nu_2}(p, k, q) &= 2 \left(-\delta_{\mu_2\nu_2}(q-p)_\sigma B_1 + \delta_{\nu_2\sigma} k_{\mu_2} B_2 - \delta_{\sigma\mu_2} k_{\nu_2} B_3 \right) \\ &\quad + \varepsilon_{\mu_2\nu_2\sigma\alpha} (-2q + 2p + k)_\alpha B_4 + \varepsilon_{\mu_2\nu_2\sigma\alpha} k_\alpha B_5, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

mit dem von außen transversalprojizierten Resultat der Schleife

$$\begin{aligned} I_2^T(p, k, \Lambda) &= \frac{3}{2\beta_0} \left[\left((V_1 V_2 + A_1 A_2) B_1 - 2(V_1 A_2 + V_2 A_1) B_4 \right) \gamma_\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left((V_1 A_2 + V_2 A_1) B_1 - 2(V_1 V_2 + A_1 A_2) B_4 \right) \gamma_\sigma \gamma_5 \right] + \mathcal{O}(g_0^2). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Inverser Fermion-Propagator

Mit der Hilfsformel (C.1) lassen sich alle Ergebnisse für die Schleifen nach Zurücknahme der Partialbruchzerlegungen angeben.

$$\mathcal{I}_{1a}(p, \Lambda) = \text{Diagram (C.5)} \quad (\text{C.5})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_{3 f f' \mu}^{(0)-}(-p, q, p-q) t_{\mu\nu}(q-p) D_T^{+[r,0]}(q-p) \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_{3 f' f \nu}^{[r,0]+}(-q, p, q-p) \right\} \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{3}{2\beta_0 c_{f'} c_{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ V_{f' f W^+}^{rr-1n} - V_{f' f W^+}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + \gamma_5 \left(A_{f' f W^+}^{rr-1n} - A_{f' f W^+}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) \right\} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{I}_{1b}(p, \Lambda) = \text{Diagram (C.8)} \quad (\text{C.8})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_{3 f f' \mu}^{(0)+}(-p, q, p-q) t_{\mu\nu}(q-p) D_T^{+[r,0]}(q-p) \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_{3 f' f \nu}^{[r,0]-}(-q, p, q-p) \right\} \quad (\text{C.9})$$

$$= \frac{3}{2\beta_0 c_{f'} c_{\pm}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ V_{f' f W^-}^{rr-1n} - V_{f' f W^-}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + \gamma_5 \left(A_{f' f W^-}^{rr-1n} - A_{f' f W^-}^{rrn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} \right) \right\} \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{I}_2(p, \Lambda) = \text{Diagram} \quad (\text{C.11})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0)}{}^0{}_{ff\mu}(-p, q, p-q) t_{\mu\nu}(q-p) D_T^{0[r+1,0]}(q-p) \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]}{}^0{}_{ff\nu}(-q, p, q-p) \right\} \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{3}{2\beta_0 c_f c_0} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r+1-n} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{1}_2)_f \left\{ V_{ffW^0}^{r+1r-1n} - V_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_5 \left(A_{ffW^0}^{r+1r-1n} - A_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) \right\} + (T_3)_f \left\{ W_{ffW^0}^{r+1r-1n} \right. \right. \\ \left. \left. - W_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + \gamma_5 \left(B_{ffW^0}^{r+1r-1n} - B_{ffW^0}^{r+1rn} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right) \right\} \right\} \\ \cdot \frac{(\not{p})^n}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.13})$$

Neutraler-Fermion-Vertex

Die fermionischen Dreiecksdiagramme sind mit Hilfe der Formel (C.4) bestimmbar. Die Partialbruchsummen lassen sich im Allgemeinen nicht ausführen. Dabei verkürzen die Funktionen

$$\sum_n^{f[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}, \quad (\text{C.14})$$

$$\sum_n^{\pm[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-u_{\pm,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})}, \quad (\text{C.15})$$

$$\sum_n^{0[r+1]} = \sum_{t=1}^{r+2} \frac{(-u_{0,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})} \quad (\text{C.16})$$

im Folgenden die Notation.

$$\mathcal{I}_{3a}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{ff'\mu_1}{}^-(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \right. \\ &\quad \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{f'f\nu_1}{}^+(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{+[r,0]}(p_2 - q) \\ &\quad \left. \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0]}{}_{\mu_2 \nu_2 \sigma}{}^{+0}(q - p_1, p_2 - q, p_1 - p_2) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3a}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{3}{4\beta_0 c_{f'} c_{\pm}^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\ &\quad \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+m}^{\pm[r]} \frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{r} \gamma_\sigma \left(V_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} \right. \\ &\quad \left. \prod_{s=1}^{n_1} (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \right. \\ &\quad \left. + A_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{r} \frac{(\not{p}_3)^n \Lambda^{2r+2-2n}}{r+1} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.19}) \\ &\quad \prod_{s=1}^{n_2} (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda) \prod_{s=1}^{n_3} (\not{p}_3 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^1 \\ &\quad - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^4 \quad (\text{C.20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^1 \\ &\quad - 2 \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^4 \quad (\text{C.21}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_{3b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{ff'\mu_1}{}^+(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \right. \\ &\quad \cdot S_{f'}^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{f'f\nu_1}{}^-(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{+[r,0]}(p_2 - q) \\ &\quad \left. \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0]}{}_{\nu_2 \mu_2 \sigma}{}^{+0}(p_2 - q, q - p_1, p_1 - p_2) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.23}) \end{aligned}$$

$$V_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} = \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^2 + \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \cdot A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right) (C_{lmn}^5 - C_{lmn}^4) \quad (C.30)$$

$$A_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} = \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^2 + \left(X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \cdot V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} + C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 - C_{lmn}^4) \quad (C.31)$$

$$X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} = V_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} + W_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (C.32)$$

$$C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} = A_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} + B_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (C.33)$$

$$\mathcal{I}_{4b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \begin{array}{c} \text{Diagram: A Feynman diagram with external lines } f', f, f \text{ and internal lines } W^+, W^0, W_\mu^+. \text{ Vertices are circles with dots.} \end{array} \quad (C.34)$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{f'f\mu_1}(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]}{}_{ff\nu_1}(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{0[r+1,0]}(p_2 - q) \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0]}{}_{\sigma\mu_2\nu_2}{}^{\pm 0}(p_1 - p_2, q - p_1, p_2 - q) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (C.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{4b}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= -\frac{3}{4\sqrt{2}\beta_0 c_f c_{\pm} c_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\ &\sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+m}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{r} \gamma_\sigma \left(V_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} \prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda) \right. \\ &\left. + A_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(\not{p}_3)^l \Lambda^{2r-2l}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned} \quad (C.36)$$

$$V_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} = \left(V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} Y_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} D_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^2 - \left(Y_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \cdot A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} D_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 - C_{lmn}^4) \quad (C.37)$$

$$A_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} = \left(Y_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} D_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^2 - \left(V_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} \cdot Y_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{f'fW^+}^{m_1 n_1 n'_1} D_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 - C_{lmn}^4) \quad (C.38)$$

$$Y_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} = V_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} - W_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \quad (C.39)$$

$$D_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} = A_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} - B_{f'fW^0}^{m_2 n_2 n'_2} \quad (C.40)$$

Fermion-Antifermion- W^- -Vertex

$$\mathcal{I}_{5a}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0] 0}{}_{ff\mu_1}(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1\mu_2}(q - p_1) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_1) \right. \\ &\quad \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}{}_{ff\nu_1}(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1\nu_2}(p_2 - q) D_T^{+[r,0]}(p_2 - q) \\ &\quad \left. \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}{}_{\nu_2\sigma\mu_2}(p_2 - q, p_1 - p_2, q - p_1) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.42}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{5a}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= -\frac{3}{4\sqrt{2}\beta_0 c_f c_{\pm c_0}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\ &\quad \sum_{n'_1+n_2}^{f[r]} \sum_{m_1+n}^{0[r+1]} \sum_{m_2+l}^{\pm[r]} \frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{r} \gamma_\sigma \left(V_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} \right. \\ &\quad \left. + A_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{(\not{p}_2)^{n'_2} \Lambda^{r-n'_2}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f,s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(p_3^2)^m \Lambda^{2r-2m}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.43}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^3 - \left(Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right. \\ &\quad \left. \cdot A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right) (C_{lmn}^5 + C_{lmn}^4) \quad (\text{C.44}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{a; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right) C_{lmn}^3 - \left(Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \right. \\ &\quad \left. \cdot V_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} + D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{ff'W^-}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 + C_{lmn}^4) \quad (\text{C.45}) \end{aligned}$$

$$Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} = V_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} - W_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (\text{C.46})$$

$$D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} = A_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} - B_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (\text{C.47})$$

$$\mathcal{I}_{5b}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.48})$$

$$\begin{aligned}
&= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{[r,0]}(-p_1, q, p_1 - q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \right. \\
&\quad \cdot S_f^{[r,0]}(q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]}(-q, p_2, q - p_2) t_{\nu_1 \nu_2}(p_2 - q) D_T^{0[r+1,0]}(p_2 - q) \\
&\quad \left. \cdot \Gamma_3^{[r/r+1,0]}(q - p_1, p_1 - p_2, p_2 - q) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.49})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{5b}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= -\frac{3}{4\sqrt{2}\beta_0 c_{f'} c_{\pm} c_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{r+1} \\
&\quad \sum_{n'_1+n_2}^{f'[r]} \sum_{m_1+l}^{\pm[r]} \sum_{m_2+n}^{0[r+1]} \frac{(\not{p}_1)^{n_1} \Lambda^{r-n_1}}{r} \gamma_\sigma \left(V_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} \right. \\
&\quad \left. + A_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} \gamma_5 \right) \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \omega_{f',s}^{(2)} \Lambda)} \frac{(p_3^2)^m \Lambda^{2r-2m}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.50})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} X_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} C_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^3 + \left(X_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right. \\
&\quad \left. \cdot A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} C_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 + C_{lmn}^4) \quad (\text{C.51})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{b; m_1, \dots, n}^{ff'} &= \left(X_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} + V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} C_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) C_{lmn}^3 + \left(V_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} \right. \\
&\quad \left. \cdot X_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} + A_{ff'W^-}^{m_1 n_1 n'_1} C_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \right) (C_{lmn}^5 + C_{lmn}^4) \quad (\text{C.52})
\end{aligned}$$

$$X_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} = V_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} + W_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \quad (\text{C.53})$$

$$C_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} = A_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} + B_{f'f'W^0}^{m_2 n_2 n'_2} \quad (\text{C.54})$$

C.2 Beiträge zum Kondensat der Fermion-Propagator-Gleichung

Die Kondensatberechnung erfordert die Bestimmung von 1- und 2-Schleifen-Diagrammen. Die Integration über den Fermion-Propagator ergibt mit den Formeln aus Anhang B

$$I_3(\Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\not{q} + a\Lambda} = -\frac{\Lambda^3}{\beta_0} a^3 + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.55})$$

Die Berechnung von 2-Schleifen-Integrale darf, wie zu Beginn von Kapitel 5 geschildert, nicht naiv erfolgen. Die Diagramme sind nach ihren Subdivergenzen zu zerlegen. Benötigt wird die Formel

$$\begin{aligned} I_4(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\not{q} + a\Lambda} \gamma_\mu (V + A\gamma_5) \frac{1}{\not{p} + b\Lambda} \frac{1}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{t_{\mu\nu}(q-p)}{(q-p)^2 + c\Lambda^2} \\ &= \frac{3\Lambda^3}{2\beta_0^2} a(a^2 - b^2 - c) (V - A\gamma_5) + \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2} bc (V + A\gamma_5) + \mathcal{O}(g_0^4), \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

wobei Terme proportional zu $1/\beta_0$ fortgelassen sind. Zur Bestimmung des Counterbeitrags zu dieser Schleife ist

$$\begin{aligned} I_5(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_\mu (V + A\gamma_5) \frac{1}{\not{p} + b\Lambda} \frac{1}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{t_{\mu\nu}(q-p)}{(q-p)^2 + c\Lambda^2} \\ &= \frac{3}{\beta_0} (V - A\gamma_5) + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

und erneut obige Beziehung (C.55) hilfreich.

Im Folgenden sind die Ergebnisse der Schleifenberechnungen für die Fermion-Kondensate im Rahmen der erweiterten Störungstheorie zusammengestellt. Die zu den 2-Schleifen-Resultaten zugehörigen Counterterme sind am Ende des Abschnitts aufgeführt.

$$\mathcal{K}_1(\Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ (Diagramm einer Schleife mit einem Pfeil) } f \quad (\text{C.58})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S_f^{[r,0]}(p) \\ &= \frac{\Lambda^3}{\beta_0 c_f} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \omega_{f,m}^{(2)} - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^r \omega_{f,l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \omega_{f,t_3}^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_2^{CT}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{2\beta_0^2 c_f c_{f'} c_\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_{f'fW^+}^{rrrr} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \omega_{f',m}^{(2)} \right. \\
&\quad - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + \sum_{l=1}^r \omega_{f',l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \omega_{f',t_3}^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \tag{C.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_3^{CT}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{2\beta_0^2 c_f c_{f'} c_\pm} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_{f'fW^-}^{rrrr} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \omega_{f',m}^{(2)} \right. \\
&\quad - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f',l}^{(2)} \omega_{f',k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f',t}^{(1)} + \sum_{l=1}^r \omega_{f',l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f',t_1}^{(1)} \omega_{f',t_2}^{(1)} \omega_{f',t_3}^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \tag{C.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_4^{CT}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_f^2 c_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_{ffW^0}^{r+1rr} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \omega_{f,m}^{(2)} \right. \\
&\quad - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + \sum_{l=1}^r \omega_{f,l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \omega_{f,t_3}^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \tag{C.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{K}_5^{CT}(\Lambda) &= \frac{3\Lambda^3}{4\beta_0^2 c_f^2 c_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_{ffW^0}^{r+1rr} \left\{ \sum_{\substack{l,k,m=1 \\ l < k < m}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \omega_{f,m}^{(2)} \right. \\
&\quad - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \omega_{f,l}^{(2)} \omega_{f,k}^{(2)} \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + \sum_{l=1}^r \omega_{f,l}^{(2)} \sum_{\substack{t_1, t_2=1 \\ t_1 \leq t_2}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{t_1, t_2, t_3=1 \\ t_1 \leq t_2 \leq t_3}}^{r+1} \omega_{f,t_1}^{(1)} \omega_{f,t_2}^{(1)} \omega_{f,t_3}^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \tag{C.79}
\end{aligned}$$

C.3 Boson-Sektor

C.3.1 Propagatoren

Die benötigten Integralformeln zur Diagrammberechnung der Schleifen aus den DSG der Boson-Propagatoren sind folgend zusammengestellt. Es treten unterschiedliche Diagrammtypen auf. Benutzt werden Formeln für geschlossene Boson-Schleifen

$$\begin{aligned} I_6(p, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q) \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q-p)}{(q-p)^2 + a\Lambda^2} \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q)}{q^2 + b\Lambda^2} B_{\nu\nu_2\nu_2}(p, q) \\ &= t_{\mu\nu}(p) I_6^T(p, \Lambda) + l_{\mu\nu}(p) I_6^L(p, \Lambda) \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

mit den Funktionen

$$A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q) = \delta_{\mu_1\mu} p_{\nu_1} A_1 + \delta_{\mu\nu_1} p_{\mu_1} A_2 + \delta_{\nu_1\mu_1} q_\mu A_3, \quad (\text{C.81})$$

$$\begin{aligned} B_{\nu\nu_2\nu_2}(p, q) &= \delta_{\nu\nu_2} p_{\nu_2} B_1 + \delta_{\mu_2\nu_2} q_\nu B_2 + \delta_{\nu_2\nu} p_{\mu_2} B_3 \\ &\quad + \varepsilon_{\nu\mu_2\nu_2\alpha} q_\alpha B_4 + \varepsilon_{\nu\mu_2\nu_2\alpha} p_\alpha B_5 \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

und dem Transversalanteil des Resultats

$$\begin{aligned} I_6^T(p, \Lambda) &= \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{24} p^2 \left((13A_1 + A_2 + 3A_3) B_1 + (3(A_1 - A_2) - 11A_3) B_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (A_1 + 13A_2 - 3A_3) B_3 \right) - \frac{3}{4} \Lambda^2 (a+b) A_3 B_2 \right) + \mathcal{O}(g_0^2). \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

Die Tadpoles werden mit Hilfe von

$$\begin{aligned} I_7(p, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(A_1 \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu_1\mu_2} + A_2 \delta_{\mu\mu_1} \delta_{\nu\nu_2} + A_3 \delta_{\mu\mu_2} \delta_{\nu\nu_1} \right) \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q)}{q^2 + a\Lambda^2} \\ &= t_{\mu\nu}(p) I_7^T(p, \Lambda) + l_{\mu\nu}(p) I_7^L(p, \Lambda), \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

$$I_7^T(p, \Lambda) = -\frac{3}{\beta_0} \Lambda^2 a \left(A_1 + \frac{1}{4} (A_2 + A_3) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.85})$$

bestimmt. Zur Behandlung von Diagrammen mit geschlossenen Fermion-Linien wird

$$\begin{aligned} I_8(p, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma_\mu (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{\not{p} - \not{q} + a\Lambda} \gamma_\nu (V_2 + A_2 \gamma_5) \frac{1}{-\not{q} + b\Lambda} \right\} \\ &= t_{\mu\nu}(p) I_8^T(p, \Lambda) + l_{\mu\nu}(p) I_8^L(p, \Lambda), \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

$$\begin{aligned} I_8^T(p, \Lambda) &= \frac{1}{\beta_0} \left(\left(\frac{4}{3} p^2 + 2\Lambda^2 (a^2 + b^2) \right) (V_1 V_2 + A_1 A_2) \right. \\ &\quad \left. - 4\Lambda^2 ab (V_1 V_2 - A_1 A_2) \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

benutzt, wobei „tr“ Spurbildung über die Spinorindizes bedeutet.

Geladener Boson-Propagator

$$\mathcal{J}_1(p, \Lambda) = \text{Diagram} \quad (\text{C.88})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_3^{(0) + - 0}{}_{\mu_1 \mu_2 \nu_1}(p - q, -p, q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p) D_T^{+[r, 0]}(q - p) \right. \\ \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(-q) D_T^{0[r+1, 0]}(-q) \Gamma_3^{[r/r+1, 0] + - 0}{}_{\nu \mu_2 \nu_2}(p, q - p, -q) \right\} \quad (\text{C.89})$$

$$\mathcal{J}_1^T(p, \Lambda) = \frac{1}{\beta_0 c_\pm c_0} \sum_{l=0}^r \left\{ \frac{5}{2} p^2 C_{lrr+1}^1 - \frac{5}{6} p^2 C_{lrr+1}^2 + \frac{5}{2} p^2 C_{lrr+1}^3 \right. \\ \left. - 3 \Lambda^2 \left(C_{lrr+1}^2 \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm, t}^{(1)} + C_{lrr+1}^2 \sum_{t=1}^{r+1} u_{0, t}^{(1)} - C_{lr-1r+1}^2 \right. \right. \\ \left. \left. - C_{lrr}^2 \right) \right\} \frac{(p^2)^l (\Lambda^2)^{r-l}}{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{0, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.90})$$

$$\mathcal{J}_2(p, \Lambda) = \text{Diagram} \quad (\text{C.91})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) + + - -}{}_{\mu \mu_1 \mu_2 \nu} t_{\mu_1 \mu_2}(q) D_T^{+[r, 0]}(q) \right\} \quad (\text{C.92})$$

$$\mathcal{J}_2^T(p, \Lambda) = \frac{9 \Lambda^2}{4 \beta_0 c_\pm} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm, s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm, s}^{(2)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.93})$$

$$\mathcal{J}_3(p, \Lambda) = \frac{1}{2} \text{Diagram} \quad (\text{C.94})$$

$$= \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) \quad + - 0 \quad 0}{}_{\mu \nu \mu_1 \mu_2} t_{\mu_1 \mu_2}(q) D_T^{0[r+1,0]}(q) \right\} \quad (\text{C.95})$$

$$\mathcal{J}_3^T(p, \Lambda) = \frac{9\Lambda^2}{4\beta_0 c_0} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,s}^{(2)}) \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.96})$$

$$\mathcal{J}_4(p, \Lambda) = - \sum_{(f, f')} \text{Diagram} \quad (\text{C.97})$$

$$= -(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{(f, f')} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0) \quad -}{}_{ff'\mu} S_{f'}^{[r,0]}(p-q) \bar{\Gamma}_3^{[r,0] \quad +}{}_{f'f\nu}(q-p, -q, p) \cdot S_f^{[r,0]}(-q) \right\} \quad (\text{C.98})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4^T(p, \Lambda) = & -\frac{1}{\beta_0} \sum_{f, f'} \frac{1}{c_f c_{f'}} \sum_{m=0}^r \left\{ \frac{2}{3} p^2 V_{f'fW^+}^{mrr} + \Lambda^2 \left(V_{f'fW^+}^{mr-2r} + V_{f'fW^+}^{mrr-2} \right. \right. \\ & - 2V_{f'fW^+}^{mr-1r-1} + V_{f'fW^+}^{mrr} \left. \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \omega_{f',t}^{(1)} + \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)}) \right. \right. \\ & - 2 \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f',s}^{(1)} \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \left. \right\} - V_{f'fW^+}^{mr-1r} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - 2\omega_{f,s}^{(1)}) \\ & \left. \left. - V_{f'fW^+}^{mrr-1} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - 2\omega_{f',s}^{(1)}) \right\} \frac{(p^2)^m (\Lambda^2)^{r-m}}{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.99}) \end{aligned}$$

Ungeladener Boson-Propagator

$$\mathcal{J}_5(p, \Lambda) = \text{Diagram} \quad (\text{C.100})$$

$$= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_3^{(0) + - 0}(q, p - q, -p) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p) D_T^{+[r, 0]}(q - p) \right. \\ \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(-q) D_T^{+[r, 0]}(-q) \Gamma_3^{[r/r+1, 0] + - 0}(q - p, -q, p) \right\} \quad (\text{C.101})$$

$$\mathcal{J}_5^T(p, \Lambda) = \frac{1}{\beta_0 c_\pm^2} \sum_{n=0}^{r+1} \left\{ -\frac{5}{6} p^2 C_{rrn}^1 + \frac{5}{2} p^2 C_{rrn}^2 + \frac{5}{2} p^2 C_{rrn}^3 \right. \\ \left. - 3 \Lambda^2 \left(2 C_{rrn}^1 \sum_{t=1}^{r+1} u_{\pm, t}^{(1)} - C_{r-1rn}^1 \right. \right. \\ \left. \left. - C_{rr-1n}^1 \right) \right\} \frac{(p^2)^n (\Lambda^2)^{r+1-n}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + u_{0, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.102})$$

$$\mathcal{J}_6(p, \Lambda) = \frac{1}{2} \text{Diagram} \quad (\text{C.103})$$

$$= \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) + - 0 0}(q) t_{\mu_1 \mu_2}(q) D_T^{+[r, 0]}(q) \right\} \quad (\text{C.104})$$

$$\mathcal{J}_6^T(p, \Lambda) = \frac{9 \Lambda^2}{4 \beta_0 c_\pm} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm, s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm, s}^{(2)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.105})$$

$$\mathcal{J}_7(p, \Lambda) = - \sum_f \text{Diagram} \quad (\text{C.106})$$

$$= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_f \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \bar{\Gamma}_3^{(0)} \begin{matrix} 0 \\ ff\mu \end{matrix} S_f^{[r,0]}(p-q) \bar{\Gamma}_3^{[r/r+1,0]} \begin{matrix} 0 \\ ff\nu \end{matrix} (q-p, -q, p) \right. \\ \left. \cdot S_f^{[r,0]}(-q) \right\} \quad (\text{C.107})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_7^T(p, \Lambda) = & - \frac{1}{\beta_0} \sum_f \frac{1}{c_f^2} \sum_{m=0}^{r+1} \left\{ \frac{1}{3} p^2 V_{ffW^0}^{mrr} + \frac{1}{2} \Lambda^2 \left(V_{ffW^0}^{mr-2r} + V_{ffW^0}^{mrr-2} \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(V_{ffW^0}^{mr-1r} + V_{ffW^0}^{mrr-1} \right) \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + 2 V_{ffW^0}^{mrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} - \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & - \left. \left. 2 V_{ffW^0}^{mr-1r-1} \right) + 2(T_3)_f \left\{ \frac{1}{3} p^2 W_{ffW^0}^{mrr} + \frac{1}{2} \Lambda^2 \left(W_{ffW^0}^{mr-2r} + W_{ffW^0}^{mrr-2} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \left(W_{ffW^0}^{mr-1r} + W_{ffW^0}^{mrr-1} \right) \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} + 2 W_{ffW^0}^{mrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} - \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right\} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2 W_{ffW^0}^{mr-1r-1} \right) \right\} \right\} \frac{(p^2)^m (\Lambda^2)^{r+1-m}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.108}) \end{aligned}$$

C.3.2 Boson-Vertex

Eine Hilfsformel für den sehr komplizierten Dreiecksgraphen wird nicht angegeben. Die Tadpole-Diagramme und die geschlossenen Fermion-Schleifen treten in dieser Arbeit mehrfach auf. Die Resultate der Integralberechnungen sind von außen an allen drei Beinen transversal projiziert. Bei der Berechnung der Tadpoles wird

$$I_9(p, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q)}{q^2 + a\Lambda^2} \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q-p)}{(q-p)^2 + b\Lambda^2} B_{\rho\mu_2\nu_2}(p, q), \quad (\text{C.109})$$

wobei

$$A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} = \delta_{\mu\nu_1} \delta_{\nu\mu_1} A_1 + \delta_{\mu\mu_1} \delta_{\nu\nu_1} A_2 + \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu_1\nu_1} A_3 + \varepsilon_{\mu\nu\mu_1\nu_1} A_4 \quad (\text{C.110})$$

$$\begin{aligned} B_{\rho\mu_2\nu_2}(p, q) = & \delta_{\rho\mu_2} p_{\nu_2} B_1 + \delta_{\rho\nu_2} p_{\mu_2} B_2 + \delta_{\nu_2\mu_2} q_\rho B_3 + \varepsilon_{\mu_2\rho\nu_2\alpha} q_\alpha B_4 \\ & + \varepsilon_{\mu_2\rho\nu_2\alpha} p_\alpha B_5 \quad (\text{C.111}) \end{aligned}$$

gilt, benötigt. Hierfür findet sich

$$\begin{aligned}
I_9^T(p, \Lambda) &= \frac{1}{\beta_0} \left[\delta_{\nu\rho}(2p)_\mu \left(\frac{1}{48}(13A_1 + A_2)B_1 + \frac{1}{48}(A_1 + 13A_2)B_2 - \frac{1}{16}(A_1 - A_2)B_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4}A_4(B_4 + 2B_5) \right) \right. \\
&\quad + \delta_{\mu\rho}(-2p)_\nu \left(-\frac{1}{48}(A_1 + 13A_2)B_1 - \frac{1}{48}(13A_1 + A_2)B_2 - \frac{1}{16}(A_1 - A_2)B_3 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4}A_4(B_4 + 2B_5) \right) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha} p_\alpha \left(\frac{1}{4}A_4(2B_1 - 2B_2 + B_3) - \frac{1}{4}(A_1 - A_2)(B_4 + 2B_5) \right) \right] + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.112})
\end{aligned}$$

Die geschlossenen Fermion-Schleifen führen auf ein Integral vom Typ

$$\begin{aligned}
I_{10}(p, k, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \frac{1}{-\not{q} + a\Lambda} \gamma_\mu (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{-\not{q} + \not{p} + \not{k} + b\Lambda} \right. \\
&\quad \left. \cdot \gamma_\rho (V_2 + A_2 \gamma_5) \frac{1}{-\not{q} + \not{p} + c\Lambda} \gamma_\nu (V_3 + A_3 \gamma_5) \right\}. \quad (\text{C.113})
\end{aligned}$$

Der in den drei Beinen transversale Anteil des Integrals ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
I_{10}^T(p, k, \Lambda) &= -\frac{4}{3\beta_0} \left(\delta_{\rho\nu}(-2p)_\mu + \delta_{\mu\rho}(-2k)_\nu + \delta_{\mu\nu}(2p)_\rho \right) \left(V_1 V_2 V_3 \right. \\
&\quad \left. + V_1 A_2 A_3 + A_1 V_2 A_3 + A_1 A_2 V_3 \right) + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.114})
\end{aligned}$$

Bei nun folgenden Resultaten der Schleifenberechnungen im Rahmen des erweiterten Schemas werden die Partialbruchsummen (C.14), (C.15) und (C.16), die Schreibweise verkürzen, verwendet.

$$\mathcal{J}_8(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.115})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_8(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\mu_1 \nu_1 \mu} (q, -q + p_1, -p_1) t_{\mu_1 \mu_2}(-q) \right. \\
&\quad \cdot D_T^{+[r,0]}(-q) t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\nu \mu_2 \rho_2} (p_2, -q, q - p_2) t_{\rho_1 \rho_2}(-q + p_2) \\
&\quad \left. \cdot D_T^{0[r+1,0]}(-q + p_2) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\nu_2 \rho \rho_1} (q - p_1, p_3, -q + p_2) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.116})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_8^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{l_3=0}^r \sum_{m_3=0}^r \sum_{n_3=0}^{r+1} \frac{(p_1^2)^{n_1} (\Lambda^2)^{r+1-n_1}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \\
&\cdot \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} \left[\delta_{\nu\rho} (p_3 - p_2)_\mu A_{l_1, \dots, n_3}^{3W} + \delta_{\rho\mu} (-p_1 - p_3)_\nu B_{l_1, \dots, n_3}^{3W} \right. \\
&+ \delta_{\mu\nu} (p_2 + p_1)_\rho C_{l_1, \dots, n_3}^{3W} + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha} (p_3 - p_2)_\alpha D_{l_1, \dots, n_3}^{3W} + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha} (-p_1)_\alpha E_{l_1, \dots, n_3}^{3W} \left. \right] \\
&\cdot \frac{(p_2^2)^{l_2} (\Lambda^2)^{r-l_2}}{r} \frac{(p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{r-m_3}}{r} + \mathcal{O}(g_0^2) \tag{C.117} \\
&\prod_{s=1}^r (p_{\pm}^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{l_1, \dots, n_3}^{3W} &= C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^3 + \frac{1}{6} C_{l_1 m_1 n_1}^1 ((C_{l_2 m_2 n_2}^1 - C_{l_2 m_2 n_2}^3) C_{l_3 m_3 n_3}^3 \\
&+ C_{l_2 m_2 n_2}^2 (C_{l_3 m_3 n_3}^1 - C_{l_3 m_3 n_3}^2)) - \frac{1}{6} C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) (C_{l_3 m_3 n_3}^4 \\
&+ C_{l_3 m_3 n_3}^5) - (C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_2 m_2 n_2}^4 + C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^1 + \frac{2}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^2) \\
&\cdot (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) + (C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_3 m_3 n_3}^1 \\
&+ \frac{2}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_3 m_3 n_3}^3) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) + 2 C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^4 \\
&+ C_{l_2 m_2 n_2}^4 C_{l_3 m_3 n_3}^3) \tag{C.118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{l_1, \dots, n_3}^{3W} &= C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^3 - \frac{1}{6} C_{l_2 m_2 n_2}^2 ((C_{l_1 m_1 n_1}^2 - C_{l_1 m_1 n_1}^3) C_{l_3 m_3 n_3}^3 \\
&+ C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_3 m_3 n_3}^1 - C_{l_3 m_3 n_3}^3)) + \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^3 - \frac{1}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^1) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) \\
&\cdot (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) - \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^5 + \frac{7}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4) C_{l_2 m_2 n_2}^2 (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) \\
&- \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^5 - \frac{1}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) C_{l_3 m_3 n_3}^3 + (C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_3 m_3 n_3}^4 \\
&+ C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_3 m_3 n_3}^3) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) + 2 C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^4 \tag{C.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{l_1, \dots, n_3}^{3W} &= C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^3 + \frac{1}{6} ((C_{l_1 m_1 n_1}^2 - C_{l_1 m_1 n_1}^3) C_{l_2 m_2 n_2}^2 - C_{l_1 m_1 n_1}^1 \\
&\cdot (C_{l_2 m_2 n_2}^1 - C_{l_2 m_2 n_2}^3)) C_{l_3 m_3 n_3}^3 + \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^2 - \frac{1}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^1) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) \\
&\cdot (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) - \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^5 + \frac{1}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4) C_{l_2 m_2 n_2}^2 (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) \\
&- \frac{1}{2} (C_{l_1 m_1 n_1}^5 - \frac{7}{3} C_{l_1 m_1 n_1}^4) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) C_{l_3 m_3 n_3}^3 - (C_{l_1 m_1 n_1}^1 C_{l_2 m_2 n_2}^4 \\
&+ C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^3) (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) + 2 C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^2 C_{l_3 m_3 n_3}^3 \tag{C.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{l_1, \dots, n_3}^{3W} &= \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) (C_{l_3 m_3 n_3}^1 + C_{l_3 m_3 n_3}^2) - \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 \\
&+ C_{l_2 m_2 n_2}^3) (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) + C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^1 (C_{l_3 m_3 n_3}^1 + C_{l_3 m_3 n_3}^2) \\
&+ C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^3) C_{l_3 m_3 n_3}^3 + C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) C_{l_3 m_3 n_3}^4 \\
&- C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^4 (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) - \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) \\
&\cdot (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) \tag{C.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{l_1, \dots, n_3}^{3W} &= -(C_{l_1 m_1 n_1}^2 + C_{l_1 m_1 n_1}^3)(C_{l_2 m_2 n_2}^2(C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) + (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) \\
&\quad \cdot C_{l_3 m_3 n_3}^3) - \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^3)(C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) \\
&\quad - \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^1 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4)(C_{l_3 m_3 n_3}^1 + C_{l_3 m_3 n_3}^2) - C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^2 (C_{l_3 m_3 n_3}^1 \\
&\quad + C_{l_3 m_3 n_3}^2) + C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^3) C_{l_3 m_3 n_3}^3 + \frac{1}{2} C_{l_1 m_1 n_1}^5 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 \\
&\quad - C_{l_2 m_2 n_2}^4)(C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) - C_{l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^4 (C_{l_3 m_3 n_3}^4 + C_{l_3 m_3 n_3}^5) \\
&\quad - C_{l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - C_{l_2 m_2 n_2}^4) C_{l_3 m_3 n_3}^4 \tag{C.122}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_9(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \cdot \text{Diagram} \tag{C.123}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ V_4^{[r/r+1,0]} \begin{matrix} + & - & 0 & 0 \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \mu \end{matrix} (p_2, q, p_3 - q, -p_1) t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) \right. \\
&\quad \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_3) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_3) \Gamma_3^{[r/r+1,0]} \begin{matrix} + & - & 0 \\ \mu_2 & \rho & \nu_2 \end{matrix} (-q, p_3, q - p_3) \right\} + \text{Schattenterme} \tag{C.124}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_9^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{1}{3 \beta_0 c_{\pm c_0}} \sum_{k_1=0}^r \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \frac{(p_1^2)^{n_1} (\Lambda^2)^{r+1-n_1}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{l_1+l_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+n_2}^{0[r+1]} \left[\delta_{\nu\rho} (p_3 - p_2)_\mu A_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} + \delta_{\rho\mu} (-p_1 - p_3)_\nu B_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha} (p_3 - p_2)_\alpha D_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha} (-p_1)_\alpha E_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{(p_2^2)^{k_1} (\Lambda^2)^{r-k_1}}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_3^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \right] \tag{C.125}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} &= \frac{1}{24} (13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^1 - \frac{1}{24} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{8} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^3 + \frac{1}{4} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 (-C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \tag{C.126}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} &= -\frac{1}{24} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^0 + \frac{1}{24} (13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{8} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^3 + \frac{1}{4} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 (-C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \tag{C.127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} &= \frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^2 - \frac{1}{2} C_{l_2 m_2 n_2}^3) \\
&\quad - \frac{1}{8} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \tag{C.128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{k_1, \dots, n_2}^{TP1} &= -\frac{1}{2} V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 (C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^2 - \frac{1}{2} C_{l_2 m_2 n_2}^3) \\
&\quad + \frac{1}{8} (V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) (C_{l_2 m_2 n_2}^5 - 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \tag{C.129}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{10}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.130})$$

$$= \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) + - 0 0}{}_{\nu \mu_1 \nu_1 \mu} t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) \right. \\ \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_3) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_3) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}{}_{\mu_2 \rho \nu_2}(-q, p_3, q - p_3) \right\} \quad (\text{C.131})$$

$$\mathcal{J}_{10}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{2}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m=0}^r (\Lambda^2)^{r-m} \left\{ \right. \\ + \delta_{\nu\rho}(p_3 - p_2)_\mu \left(-\frac{25}{24} C_{rmr+1}^1 - \frac{11}{24} C_{rmr+1}^2 - \frac{3}{8} C_{rmr+1}^3 \right) \\ + \delta_{\mu\rho}(-p_1 - p_3)_\nu \left(-\frac{11}{24} C_{rmr+1}^1 - \frac{25}{24} C_{rmr+1}^2 - \frac{3}{8} C_{rmr+1}^3 \right) \\ + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(p_3 - p_2)_\alpha \left(\frac{3}{8} C_{rmr+1}^5 - \frac{9}{8} C_{rmr+1}^4 \right) \\ + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(-p_1)_\alpha \left(-\frac{3}{8} C_{rmr+1}^5 + \frac{9}{8} C_{rmr+1}^4 \right) \\ \left. \right\} \frac{(p_3^2)^m}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.132})$$

$$\mathcal{J}_{11}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram}$$

$$= \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ V_4^{[r/r+1,0] + - 0 0}{}_{\mu_1 \rho \mu \nu_1}(q, p_3, -p_1, -q + p_2) t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) \right. \\ \left. \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_2) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_2) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}{}_{\nu \mu_2 \nu_2}(p_2, -q, q - p_2) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.133})$$

$$\mathcal{J}_{11}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{1}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{k_1=0}^r \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \frac{(p_1^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r+1-m_1}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \\ \cdot \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} \left[\delta_{\nu\rho}(p_3 - p_2)_\mu A_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} + \delta_{\mu\nu}(p_2 + p_1)_\rho C_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} \right. \\ \left. + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(p_3 - p_2)_\alpha D_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(-p_1)_\alpha E_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} \right] \\ \cdot \frac{(p_2^2)^{l_2} (\Lambda^2)^{r-l_2}}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_3^2)^{l_1} (\Lambda^2)^{r-l_1}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.134})$$

$$A_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} = \frac{1}{24}(13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^1 + \frac{1}{8}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^2 - \frac{1}{24}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^3 - \frac{1}{4}V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4(C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \quad (\text{C.135})$$

$$C_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} = -\frac{1}{24}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^1 + \frac{1}{8}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^2 + \frac{1}{24}(13V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)C_{l_2 m_2 n_2}^3 - \frac{1}{4}V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4(C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \quad (\text{C.136})$$

$$D_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} = -\frac{1}{2}V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4(C_{l_2 m_2 n_2}^1 - \frac{1}{2}C_{l_2 m_2 n_2}^2 + C_{l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{8}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)(C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \quad (\text{C.137})$$

$$E_{k_1, \dots, n_2}^{TP2} = -\frac{1}{2}V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4(C_{l_2 m_2 n_2}^1 - \frac{1}{2}C_{l_2 m_2 n_2}^2 + C_{l_2 m_2 n_2}^3) + \frac{1}{8}(V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - V_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2)(C_{l_2 m_2 n_2}^5 + 3C_{l_2 m_2 n_2}^4) \quad (\text{C.138})$$

$$\mathcal{J}_{12}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.139})$$

$$= \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) + - 0 0}_{\mu_1 \rho \mu \nu_1} t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_2) D_T^{0[r+1,0]}(q - p_2) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\nu \mu_2 \nu_2}(p_2, -q, q - p_2) \right\} \quad (\text{C.140})$$

$$\mathcal{J}_{12}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{2}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{l=0}^r (\Lambda^2)^{r-l} \left\{ \begin{aligned} & \delta_{\nu \rho}(p_3 - p_2)_\mu \left(-\frac{25}{24} C_{lrr+1}^1 - \frac{3}{8} C_{lrr+1}^2 - \frac{11}{24} C_{lrr+1}^3 \right) \\ & + \delta_{\nu \mu}(p_2 + p_1)_\rho \left(-\frac{11}{24} C_{lrr+1}^1 - \frac{3}{8} C_{lrr+1}^2 - \frac{25}{24} C_{lrr+1}^3 \right) \\ & + \varepsilon_{\nu \rho \mu \alpha} (p_3 - p_2)_\alpha \left(-\frac{3}{8} C_{lrr+1}^5 - \frac{9}{8} C_{lrr+1}^4 \right) \\ & + \varepsilon_{\nu \rho \mu \alpha} (-p_1)_\alpha \left(-\frac{3}{8} C_{lrr+1}^5 - \frac{9}{8} C_{lrr+1}^4 \right) \end{aligned} \right\} \frac{(p_2^2)^l}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.141})$$

$$\mathcal{J}_{13}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.142})$$

$$= \frac{1}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ K_4^{[r,0] + + - -}_{\nu_1 \nu \rho \mu_1}(q - p_1, p_2, p_3, -q) t_{\mu_1 \mu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(q - p_1) D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}_{\mu_2 \nu_2 \mu}(q, -q + p_1, -p_1) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.142})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{13}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{k_1=0}^r \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \frac{(p_1^2)^{n_2} (\Lambda^2)^{r+1-n_2}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \\
&\cdot \sum_{n_1+l_2}^{\pm[r]} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \left[\delta_{\mu\rho}(-p_1 - p_3)_\nu B_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\mu\nu}(p_2 + p_1)_\rho C_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(-p_1)_\alpha E_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} \right] \\
&\cdot \frac{(p_2^2)^{l_1} (\Lambda^2)^{r-l_1}}{r} \frac{(p_3^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{r} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (C.143) \\
&\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm, s}^{(2)} \Lambda^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} &= -\frac{1}{8}(U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^1 + \frac{1}{24}(U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^2 \\
&\quad - \frac{1}{24}(13U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^3 - \frac{1}{2} U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^5 \quad (C.144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} &= -\frac{1}{8}(U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^1 - \frac{1}{24}(13U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{24}(U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 + 13U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^3 - \frac{1}{2} U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 C_{l_2 m_2 n_2}^5 \quad (C.145)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{k_1, \dots, n_2}^{TP3} &= -U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^4 \left(-\frac{1}{2} C_{l_2 m_2 n_2}^1 + C_{l_2 m_2 n_2}^2 + C_{l_2 m_2 n_2}^3 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} (U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^1 - U_{k_1 l_1 m_1 n_1}^2) C_{l_2 m_2 n_2}^5 \quad (C.146)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{14}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (C.147)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0) + + - -}{}_{\mu_1 \nu \rho \nu_1} t_{\nu_1 \nu_2}(-q) D_T^{+[r,0]}(-q) t_{\mu_1 \mu_2}(q - p_1) \right. \\
&\quad \left. \cdot D_T^{+[r,0]}(q - p_1) \Gamma_3^{[r/r+1,0] + - 0}{}_{\nu_2 \mu_2 \mu} (q, -q + p_1, -p_1) \right\} \quad (C.148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{14}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{n=0}^{r+1} (\Lambda^2)^{r+1-n} \left\{ \right. \\
&\quad \delta_{\mu\rho}(-p_1 - p_3)_\nu \left(-\frac{3}{8} C_{rrn}^1 - \frac{11}{24} C_{rrn}^2 - \frac{25}{24} C_{rrn}^3 \right) \\
&\quad + \delta_{\nu\mu}(p_2 + p_1)_\rho \left(-\frac{3}{8} C_{rrn}^1 - \frac{25}{24} C_{rrn}^2 - \frac{11}{24} C_{rrn}^3 \right) \\
&\quad + \varepsilon_{\nu\rho\mu\alpha}(-p_1)_\alpha \left(-\frac{3}{2} C_{rrn}^5 \right) \\
&\quad \left. \right\} \frac{(p_1^2)^n}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (C.149)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{15}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = - (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.150})$$

$$\begin{aligned} &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \Gamma_3^{[r/r+1,0]} \Gamma_3^{[r,0]} S_f^{[r,0]}(-q+p_1) \right. \\ &\quad \cdot \Gamma_3^{[r,0]} S_{f'}^{[r,0]}(-q+p_2) \Gamma_3^{[r,0]} S_f^{[r,0]}(-q+p_3) \\ &\quad \left. \cdot S_f^{[r,0]}(-q) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.151}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{15}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{1}{3 \beta_0 c_f^2 c_{f'}} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{m_3=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \\ &\quad \frac{(p_1^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r+1-m_1}}{\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2)} \sum_{n'_1+n_3}^{f[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f'[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f[r]} \\ &\quad \cdot \left[\delta_{\rho\nu} (p_3 - p_2)_\mu + \delta_{\mu\rho} (-p_1 - p_3)_\nu + \delta_{\mu\nu} (p_2 + p_1)_\rho \right] A_{m_1, \dots, n'_3}^{3F1} \\ &\quad \cdot \frac{(p_2^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} \frac{(p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{r-m_3}}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.152}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m_1, \dots, n'_3}^{3F1} &= Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} + Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} \\ &\quad + D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} + D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} \quad (\text{C.153}) \end{aligned}$$

$$Y_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} = V_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} - W_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (\text{C.154})$$

$$D_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} = A_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} - B_{ffW^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (\text{C.155})$$

$$\mathcal{J}_{16}(p_1, p_2, p_3, \Lambda) = - (g_0 \nu_0^\epsilon)^{-1} \text{Diagram} \quad (\text{C.156})$$

$$\begin{aligned} &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \Gamma_3^{[r/r+1,0]} \Gamma_3^{[r,0]} S_{f'}^{[r,0]}(-q+p_1) \right. \\ &\quad \cdot \Gamma_3^{[r,0]} S_f^{[r,0]}(-q+p_3) \Gamma_3^{[r,0]} S_{f'}^{[r,0]}(-q+p_2) \\ &\quad \left. \cdot S_{f'}^{[r,0]}(-q) \right\} + \text{Schattenterme} \quad (\text{C.157}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{16}^T(p_1, p_2, p_3, \Lambda) &= \frac{1}{3\beta_0 c_f c_{f'}^2} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{m_3=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \\
&\frac{(p_1^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r+1-m_1}}{r+1} \sum_{n'_1+n_3}^{f'[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f'[r]} \\
&\prod_{s=1}^{r+1} (p_1^2 + u_{0,s}^{(2)} \Lambda^2) \\
&\cdot \left[\delta_{\rho\nu} (p_3 - p_2)_\mu + \delta_{\mu\rho} (-p_1 - p_3)_\nu + \delta_{\mu\nu} (p_2 + p_1)_\rho \right] A_{m_1, \dots, n'_3}^{3F2} \\
&\cdot \frac{(p_2^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{r} \frac{(p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{r-m_3}}{r} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (C.158) \\
&\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{\pm,s}^{(2)} \Lambda^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{m_1, \dots, n'_3}^{3F2} &= X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} + X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} \\
&+ C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} A_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} V_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} + C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} V_{f'fW^+}^{m_2 n_2 n'_2} A_{ff'W^-}^{m_3 n_3 n'_3} \quad (C.159)
\end{aligned}$$

$$X_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} = V_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} + W_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (C.160)$$

$$C_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} = A_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} + B_{f'f'W^0}^{m_1 n_1 n'_1} \quad (C.161)$$

C.3.3 Bosonische 4-Punkt-Vertizes

In den umfangreichen BSG der bosonische 4-Punkt-Vertizes tauchen lediglich vier unterschiedliche Diagrammtypen auf. Zu bestimmen sind Integrale, in denen zwei 4-Punkt-Amplituden auftreten. Dabei hilft die Formel

$$I_{11}(p, k, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q)}{q^2 + a\Lambda^2} \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q-p+k)}{(q-p+k)^2 + b\Lambda^2} B_{\mu_2\nu_2\sigma\rho}, \quad (\text{C.162})$$

wobei die 4-Punkt-Funktionen durch

$$A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu_1\nu_1}A_1 + \delta_{\mu\mu_1}\delta_{\nu\nu_1}A_2 + \delta_{\mu\nu_1}\delta_{\nu\mu_1}A_3 + \varepsilon_{\mu\nu\mu_1\nu_1}A_4, \quad (\text{C.163})$$

$$B_{\mu_2\nu_2\sigma\rho} = \delta_{\mu_2\nu_2}\delta_{\sigma\rho}B_1 + \delta_{\mu_2\sigma}\delta_{\nu_2\rho}B_2 + \delta_{\mu_2\rho}\delta_{\nu_2\sigma}B_3 + \varepsilon_{\mu_2\nu_2\sigma\rho}B_4 \quad (\text{C.164})$$

parametrisiert werden. Für das von außen vollständig transversal projizierte Resultat findet sich

$$\begin{aligned} I_{11}^T(p, k, \Lambda) = & \frac{1}{\beta_0} \left[\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} \left(\frac{3}{4}A_1(4B_1 + B_2 + B_3) + \frac{1}{24}A_2(18B_1 + B_2 + B_3) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{24}A_3(18B_1 + B_2 + B_3) \right) \right. \\ & + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} \left(\frac{1}{24}A_2(B_2 + 13B_3) + \frac{1}{24}A_3(13B_2 + B_3) - A_4B_4 \right) \\ & + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \left(\frac{1}{24}A_2(13B_2 + B_3) + \frac{1}{24}A_3(B_2 + 13B_3) + A_4B_4 \right) \\ & \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{2}A_2B_4 + \frac{1}{2}A_3B_4 - \frac{1}{2}A_4B_2 + \frac{1}{2}A_4B_3 \right) \right] + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.165}) \end{aligned}$$

Diagramme, die eine 4-Punkt-Amplitude und zwei 3-Punkt-Funktionen enthalten, werden mit

$$\begin{aligned} I_{12}(p, k, \Lambda) = & (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q-p-k)}{(q-p-k)^2 + a\Lambda^2} B_{\rho\rho_1\mu_2}(q) \frac{t_{\rho_1\rho_2}(q-k)}{(q-k)^2 + b\Lambda^2} \\ & \cdot C_{\sigma\nu_2\rho_2}(q) \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q)}{q^2 + c\Lambda^2}, \quad (\text{C.166}) \end{aligned}$$

wobei

$$A_{\mu\nu\mu_1\nu_1} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu_1\nu_1}A_1 + \delta_{\mu\mu_1}\delta_{\nu\nu_1}A_2 + \delta_{\mu\nu_1}\delta_{\nu\mu_1}A_3 + \varepsilon_{\mu\nu\mu_1\nu_1}A_4, \quad (\text{C.167})$$

$$B_{\rho\rho_1\mu_2}(q) = \delta_{\rho_1\mu_2}q_\rho B_1 + \varepsilon_{\rho\rho_1\mu_2\alpha}q_\alpha B_2, \quad (\text{C.168})$$

$$C_{\sigma\nu_2\rho_2}(q) = \delta_{\nu_2\rho_2}q_\sigma C_1 + \varepsilon_{\sigma\nu_2\rho_2\alpha}q_\alpha C_2 \quad (\text{C.169})$$

gilt, zu

$$\begin{aligned} I_{12}^T(p, k, \Lambda) = & \frac{1}{\beta_0} \left[\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} \left(-\frac{1}{4}(3A_1 + 2A_2 + 2A_3)B_2C_2 + \frac{1}{24}(18A_1 + 5A_2 + 5A_3)B_1C_1 \right) \right. \\ & + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} \left(-\frac{1}{24}(A_2 + A_3)B_1C_1 + \frac{1}{2}(A_3B_2C_2 + A_4B_1C_2 - A_4B_2C_1) \right) \\ & + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \left(-\frac{1}{24}(A_2 + A_3)B_1C_1 + \frac{1}{2}(A_2B_2C_2 - A_4B_1C_2 + A_4B_2C_1) \right) \\ & \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{4}(A_2 - A_3)(B_1C_2 - B_2C_1) - A_4B_2C_2 \right) \right] + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.170}) \end{aligned}$$

bestimmt. Die Boxgraphen, d. h. Diagramme mit vier 3-Punkt-Funktionen, treten mit inneren Boson- und Fermion-Linien auf. Für erstere

$$I_{13}(p, k, l, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} A_{\mu\mu_1\sigma_2}(q) \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q)}{q^2 + a\Lambda^2} B_{\nu\nu_1\mu_2}(q) \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q-k)}{(q-k)^2 + b\Lambda^2} \\ \cdot C_{\rho\rho_1\nu_2}(q) \frac{t_{\rho_1\rho_2}(q-k-l)}{(q-k-l)^2 + c\Lambda^2} D_{\sigma\sigma_1\rho_2}(q) \frac{t_{\sigma_1\sigma_2}(q-p)}{(q-p)^2 + d\Lambda^2} \quad (\text{C.171})$$

mit den Funktionen

$$A_{\mu\mu_1\sigma_2}(q) = \delta_{\mu_1\sigma_2} q_\mu A_1 + \varepsilon_{\mu\mu_1\sigma_2\alpha} q_\alpha A_2, \quad (\text{C.172})$$

$$B_{\nu\nu_1\mu_2}(q) = \delta_{\nu_1\mu_2} q_\nu B_1 + \varepsilon_{\nu\nu_1\mu_2\alpha} q_\alpha B_2, \quad (\text{C.173})$$

$$C_{\rho\rho_1\nu_2}(q) = \delta_{\rho_1\nu_2} q_\rho C_1 + \varepsilon_{\rho\rho_1\nu_2\alpha} q_\alpha C_2, \quad (\text{C.174})$$

$$D_{\sigma\sigma_1\rho_2}(q) = \delta_{\sigma_1\rho_2} q_\sigma D_1 + \varepsilon_{\sigma\sigma_1\rho_2\alpha} q_\alpha D_2 \quad (\text{C.175})$$

ergibt sich

$$I_{13}^T(p, k, l, \Lambda) = \frac{1}{\beta_0} \left[\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} \left(\frac{1}{8} A_1 B_1 C_1 D_1 + \frac{1}{12} (-5 A_1 B_1 C_2 D_2 + A_1 B_2 C_1 D_2 + A_1 B_2 C_2 D_1 \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 B_1 C_1 D_2 + A_2 B_1 C_2 D_1 - 5 A_2 B_2 C_1 D_1 + 7 A_2 B_2 C_2 D_2) \right) \right. \\ \left. + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} \left(\frac{1}{8} A_1 B_1 C_1 D_1 + \frac{1}{12} (A_1 B_1 C_2 D_2 - 5 A_1 B_2 C_1 D_2 + A_1 B_2 C_2 D_1 \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 B_1 C_1 D_2 - 5 A_2 B_1 C_2 D_1 + A_2 B_2 C_1 D_1 + A_2 B_2 C_2 D_2) \right) \right. \\ \left. + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \left(\frac{1}{8} A_1 B_1 C_1 D_1 + \frac{1}{12} (A_1 B_1 C_2 D_2 + A_1 B_2 C_1 D_2 - 5 A_1 B_2 C_2 D_1 \right. \right. \\ \left. \left. - 5 A_2 B_1 C_1 D_2 + A_2 B_1 C_2 D_1 + A_2 B_2 C_1 D_1 + 7 A_2 B_2 C_2 D_2) \right) \right. \\ \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} (A_1 B_2 C_2 D_2 - A_2 B_1 C_2 D_2 + A_2 B_2 C_1 D_2 \right. \right. \\ \left. \left. - A_2 B_2 C_2 D_1) \right) \right] + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.176})$$

Die fermionischen Boxgraphen berechnen sich mit Hilfe von

$$I_{14}(p, k, l, \Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma_\mu (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{\not{p} - \not{q} + a\Lambda} \gamma_\sigma (V_4 + A_4 \gamma_5) \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{\not{k} + \not{l} - \not{q} + d\Lambda} \gamma_\rho (V_3 + A_3 \gamma_5) \frac{1}{-\not{q} + \not{k} + c\Lambda} \gamma_\nu (V_2 + A_2 \gamma_5) \frac{1}{-\not{q} + b\Lambda} \right\}, \quad (\text{C.177})$$

$$I_{14}^T(p, k, l, \Lambda) = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4}{3} \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \frac{8}{3} \delta_{\mu\rho} \delta_{\sigma\nu} + \frac{4}{3} \delta_{\mu\sigma} \delta_{\rho\nu} \right) (V_1 V_2 V_3 V_4 + V_1 V_2 A_3 A_4 \\ + V_1 A_2 V_3 A_4 + V_1 A_2 A_3 V_4 + A_1 V_2 V_3 A_4 + A_1 V_2 A_3 V_4 + A_1 A_2 V_3 V_4 \\ + A_1 A_2 A_3 A_4) + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.178})$$

C.4 Bosonkondensate

Die Bestimmung der bosonischen Kondensaten ist im Vergleich zu den fermionischen aufwendiger. Die Schleifenrechnungen sind komplizierter und es werden mehr Gegenterme benötigt. Wie gehabt werden zunächst einige Hilfsformeln zusammengestellt. Die Impulsintegrale über die Boson-Propagatoren sind mit

$$I_{15}(\Lambda) = (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + a\Lambda^2} = -\frac{\Lambda^2}{\beta_0} a + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.179})$$

lösbar. Die Berechnung der Boson-Schleifen kann mit

$$I_{16}(\Lambda) = (g_0\nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q-p)}{(q-p)^2 + a\Lambda^2} A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q) \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q)}{q^2 + b\Lambda^2} \cdot \frac{t_{\mu\nu}(p)}{p^2 + c\Lambda^2} \frac{1}{p^2} B_{\nu\mu_2\nu_2}(p, q), \quad (\text{C.180})$$

wobei

$$A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q) = \delta_{\mu_1\mu} p_{\nu_1} A_1 + \delta_{\mu\nu_1} p_{\mu_1} A_2 + \delta_{\nu_1\mu_1} q_\mu A_3, \quad (\text{C.181})$$

$$B_{\nu\mu_2\nu_2}(p, q) = \delta_{\nu\mu_2} p_{\nu_2} B_1 + \delta_{\mu_2\nu_2} q_\nu B_2 + \delta_{\nu_2\nu} p_{\mu_2} B_3 + \varepsilon_{\nu\mu_2\nu_2\alpha} q_\alpha B_4 + \varepsilon_{\nu\mu_2\nu_2\alpha} p_\alpha B_5 \quad (\text{C.182})$$

gilt, erfolgen. Als Resultat der langwierigen Rechnungen ergibt sich

$$I_{16}(\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{8\beta_0^2} \left(\frac{1}{2} c \left((13A_1 + A_2 + 3A_3)B_1 + (3(A_1 - A_2) - 11A_3)B_2 + (A_1 + 13A_2 - 3A_3)B_3 \right) + 9a(A_2B_3 + A_3B_2) + 9b(A_1B_1 + A_3B_2) \right) + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (\text{C.183})$$

Zur Bestimmung der Counterbeiträge werden (C.80),

$$I_{17}(\Lambda) = (g_0\nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q-p)}{(q-p)^2 + a\Lambda^2} A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q) \frac{t_{\mu\nu}(p)}{p^2 + c\Lambda^2} \frac{1}{p^2} B_{\nu\mu_2\nu_2}(p, q) \quad (\text{C.184})$$

$$= t_{\nu_1\nu_2}(q) \frac{3}{4\beta_0} A_1 B_1 + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.185})$$

und

$$I_{18}(\Lambda) = (g_0\nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} A_{\mu\mu_1\nu_1}(p, q+p) \frac{t_{\nu_1\nu_2}(q+p)}{(q+p)^2 + b\Lambda^2} \cdot \frac{t_{\mu\nu}(p)}{p^2 + c\Lambda^2} \frac{1}{p^2} B_{\nu\mu_2\nu_2}(p, q+p) \quad (\text{C.186})$$

$$= t_{\nu_1\nu_2}(q) \frac{3}{4\beta_0} A_2 B_3 + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.187})$$

in Kombination mit (C.179) und

$$I_{19}(\Lambda) = (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + c\Lambda^2} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\beta_0} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.188})$$

verwendet. Diagramme, die aus den Tadpole-Beiträgen der DSG stammen, werden mit

$$\begin{aligned}
I_{20}(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{t_{\mu\nu}(p)}{p^2 + a\Lambda^2} \left(A_1 \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu_1\mu_2} + A_2 \delta_{\mu\mu_1} \delta_{\nu\nu_2} \right. \\
&\quad \left. + A_3 \delta_{\mu\mu_2} \delta_{\nu\nu_1} \right) \frac{t_{\mu_1\mu_2}(q)}{q^2 + b\Lambda^2} \\
&= -\frac{9\Lambda^2}{\beta_0^2} b \left(A_1 + \frac{1}{4}(A_2 + A_3) \right) + \mathcal{O}(g_0^2)
\end{aligned} \tag{C.189}$$

bestimmt. Da Impulsintegrale hier faktoriesieren, werden keine Counterbeiträge benötigt. Kondensatbeiträge aus den fermionischen Diagrammen werden mit der Hilfsformel

$$\begin{aligned}
I_{21}(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma_\mu (V_1 + A_1 \gamma_5) \frac{1}{\not{p} - \not{q} + a\Lambda} \gamma_\nu (V_2 + A_2 \gamma_5) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{-\not{q} + b\Lambda} \frac{t_{\mu\nu}(p)}{p^2 + c\Lambda^2} \frac{1}{p^2} \right\} \\
&= \frac{\Lambda^2}{\beta_0^2} \left((2c - 3(a^2 + b^2))(V_1 V_2 + A_1 A_2) \right. \\
&\quad \left. + 6ab(V_1 V_2 - A_1 A_2) \right) + \mathcal{O}(g_0^2)
\end{aligned} \tag{C.190}$$

bestimmt. Da nur eine der drei möglichen Parametrisierung einen divergenten Term liefert, ist auch nur ein Gegenterm erforderlich. Er bestimmt sich mit Hilfe von (C.87) und (C.179).

Geladenes Boson

$$\mathcal{L}_1(\Lambda) = W^\pm \text{ (diagramm)} \tag{C.191}$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_1(\Lambda) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t_{\mu\mu}(q) D_T^{+[r,0]}(q) \\
&= -\frac{3\Lambda^2}{\beta_0 c_\pm} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2)
\end{aligned} \tag{C.192}$$

$$\mathcal{L}_2(\Lambda) = \text{diagramm} \tag{C.193}$$

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_2(\Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0)++--} t_{\mu_1 \mu_2}(q) D_T^{+[r,0]}(q) \cdot t_{\mu\rho}(p) D_T^{(0)+}(p) t_{\rho\nu}(p) D_T^{+[r,0]}(p) \right\} \quad (\text{C.194})$$

$$= \frac{27 \Lambda^2}{4 \beta_0^2 c_\pm^2} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - \sum_{s=1}^r u_{\pm,s}^{(2)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.195})$$

$$\mathcal{L}_3(\Lambda) = \frac{1}{2} \begin{array}{c} W^0 \\ \text{---} \\ W^- \quad W^+ \end{array} \quad (\text{C.196})$$

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_3(\Lambda) = \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^4 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_4^{(0)++00} t_{\mu_1 \mu_2}(q) D_T^{0[r+1,0]}(q) \cdot t_{\mu\rho}(p) D_T^{(0)+}(p) t_{\rho\nu}(p) D_T^{+[r,0]}(p) \right\} \quad (\text{C.197})$$

$$= \frac{27 \Lambda^2}{4 \beta_0^2 c_\pm c_0} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,s}^{(2)}) \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.198})$$

$$\mathcal{L}_4(\Lambda) = \begin{array}{c} W^0 \\ \text{---} \\ W^+ \\ \text{---} \\ W^- \quad W^+ \end{array} \quad (\text{C.199})$$

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_4(\Lambda) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_3^{(0)++0} t_{\mu\rho}(p) D_T^{(0)+}(p) \cdot t_{\rho\nu}(p) D_T^{+[r,0]}(p) \Gamma_3^{[r/r+1,0]++0} t_{\mu_1 \mu_2}(q-p) D_T^{+[r,0]}(q-p) \cdot t_{\nu_1 \nu_2}(-q) D_T^{0[r+1,0]}(-q) \right\} \quad (\text{C.200})$$

$$= \frac{\Lambda^2}{2 \beta_0^2 c_\pm^2 c_0} \left\{ \frac{5}{2} \left(3C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^2 + 3C_{rrr+1}^3 \right) \sum_{l=1}^{r+1} u_{\pm,l}^{(1)} + 9 \left(C_{rrr+1}^2 + C_{rrr+1}^3 \right) \sum_{l=1}^{r+1} u_{\pm,l}^{(1)} \right. \\ \left. + 9 \left(C_{rrr+1}^1 + C_{rrr+1}^2 \right) \sum_{l=1}^{r+1} u_{0,l}^{(1)} + \frac{5}{2} \left(-3C_{r-1rr+1}^1 + C_{r-1rr+1}^2 - 3C_{r-1rr+1}^3 \right) \right. \\ \left. - 9 \left(C_{rrr}^1 + C_{rrr}^2 + C_{rr-1r+1}^2 + C_{rr-1r+1}^3 \right) \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.201})$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_4^{CT}(\Lambda) &= -\frac{\Lambda^2}{\beta_0^2 c_\pm^2 c_0} \left\{ \frac{5}{2} \left(3C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^2 + 3C_{rrr+1}^3 \right) \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} u_{\pm,l}^{(1)} + \sum_{l=1}^r u_{\pm,l}^{(2)} \right\} \right. \\
&\quad \left. + 9C_{rrr+1}^1 \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} (u_{0,l}^{(1)} - u_{0,l}^{(2)}) \right\} + 9C_{rrr+1}^3 \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} u_{\pm,l}^{(1)} + \sum_{l=1}^r u_{\pm,l}^{(2)} \right\} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.202})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_5(\Lambda) = - \sum_{(f,f')} \text{Diagram} \quad (\text{C.203})$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_5(\Lambda) &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{(f,f')} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \Gamma_{3ff'\mu}^{(0)-} S_{f'}^{[r,0]}(p-q) \right. \\
&\quad \cdot \Gamma_{3f'f\nu}^{[r,0]+}(q-p, -q, p) S_f^{[r,0]}(-q) t_{\mu\rho}(p) D_T^{(0)+}(p) \\
&\quad \left. \cdot t_{\rho\nu}(p) D_T^{+[r,0]}(p) \right\} \quad (\text{C.204})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Lambda^2}{\beta_0^2 c_\pm} \sum_{f,f'} \frac{1}{c_f c_{f'}} \left\{ V_{f'fW^+}^{rrrr} \sum_{s=1}^{r+1} u_{\pm,s}^{(1)} - V_{f'fW^+}^{r-1rr} - \frac{3}{2} \left(V_{f'fW^+}^{r(r-2)r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{f'fW^+}^{rrr-2} - 2V_{f'fW^+}^{rrr-1r-1} + V_{f'fW^+}^{rrrr} \left\{ \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} \omega_{f',t}^{(1)} + \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f',s}^{(1)} \sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right\} - V_{f'fW^+}^{rrr-1r} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f',s}^{(1)} - 2\omega_{f,s}^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. \left. - V_{f'fW^+}^{rrr-1} \sum_{s=1}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - 2\omega_{f',s}^{(1)}) \right\} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.205})
\end{aligned}$$

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_5^{CT}(\Lambda) = \frac{2\Lambda^2}{\beta_0^2 c_\pm} \sum_{f,f'} \frac{1}{c_f c_{f'}} V_{f'fW^+}^{rrrr} \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} u_{\pm,l}^{(1)} + \sum_{l=1}^r u_{\pm,l}^{(2)} \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.206})$$

Neutrales Boson

$$\mathcal{L}_6(\Lambda) = W^0 \text{Diagram} \quad (\text{C.207})$$

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_6 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t_{\mu\mu}(q) D_T^{0[r+1,0]}(q) \\
&= -\frac{3\Lambda^2}{\beta_0 c_0} \left\{ \sum_{s=1}^{r+1} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,s}^{(2)}) \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.208})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_9(\Lambda) = - \sum_f \text{Diagram} \quad (\text{C.216})$$

$$\begin{aligned} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_9(\Lambda) &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_f \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \Gamma_{3ff\mu}^{(0)0} S_f^{[r,0]}(p-q) \right. \\ &\quad \cdot \Gamma_{3ff\nu}^{[r/r+1,0]0}(q-p, -q, p) S_f^{[r,0]}(-q) t_{\mu\rho}(p) D_T^{(0)0}(p) \\ &\quad \left. \cdot t_{\rho\nu}(p) D_T^{0[r+1,0]}(p) \right\} \quad (\text{C.217}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{\Lambda^2}{2\beta_0^2 c_0} \sum_f \frac{1}{c_f^2} \left\{ V_{ffW^0}^{r+1rr} \left(\sum_{s=1}^{r+1} u_{0,s}^{(1)} - 3 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} + 3 \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad - V_{ffW^0}^{rrrr} - \frac{3}{2} \left(\left(V_{ffW^0}^{r+1r-1r} + V_{ffW^0}^{r+1rr-1} \right) \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + V_{ffW^0}^{r+1r-2r} + V_{ffW^0}^{r+1rr-2} \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 V_{ffW^0}^{r+1r-1r-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 (T_{3f}) \left\{ W_{ffW^0}^{r+1rr} \left(\sum_{s=1}^{r+1} u_{0,s}^{(1)} - 3 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} + 3 \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W_{ffW^0}^{rrrr} - \frac{3}{2} \left(\left(W_{ffW^0}^{r+1r-1r} + W_{ffW^0}^{r+1rr-1} \right) \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + W_{ffW^0}^{r+1r-2r} + W_{ffW^0}^{r+1rr-2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2 W_{ffW^0}^{r+1r-1r-1} \right) \right\} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.218}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{\Lambda^2}{2\beta_0^2 c_0} \sum_f \frac{1}{c_f^2} \left\{ V_{ffW^0}^{r+1rr} \left(\sum_{s=1}^{r+1} u_{0,s}^{(1)} - 3 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \leq t}}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \omega_{f,t}^{(1)} + 3 \left(\sum_{s=1}^{r+1} \omega_{f,s}^{(1)} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad - V_{ffW^0}^{rrrr} - \frac{3}{2} \left(\left(V_{ffW^0}^{r+1r-1r} + V_{ffW^0}^{r+1rr-1} \right) \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} + V_{ffW^0}^{r+1r-2r} + V_{ffW^0}^{r+1rr-2} \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 V_{ffW^0}^{r+1r-1r-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 (T_{3f}) \left\{ - W_{ffW^0}^{rrrr} - \frac{3}{2} \left(\left(W_{ffW^0}^{r+1r-1r} + W_{ffW^0}^{r+1rr-1} \right) \sum_{t=1}^{r+1} \omega_{f,t}^{(1)} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + W_{ffW^0}^{r+1r-2r} + W_{ffW^0}^{r+1rr-2} - 2 W_{ffW^0}^{r+1r-1r-1} \right) \right\} \right\} + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (\text{C.219}) \end{aligned}$$

$$(g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \mathcal{L}_9^{CT}(\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{\beta_0^2 c_0} \sum_f \frac{1}{c_f^2} V_{ffW^0}^{r+1rr} \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} (u_{0,l}^{(1)} + u_{0,l}^{(2)}) \right\} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (\text{C.220})$$

Anhang D

SKG des Boson-Vertex

Die SK-Bedingungen des Boson-Vertex sind an dieser Stelle in beliebiger Approximationsstufe zusammengetragen. Dabei werden die Abkürzungen

$$\tilde{u}_{\pm,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} u_{\pm,\sigma(i)}^{(2)}, \quad (\text{D.1})$$

$$\tilde{u}_{\pm,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \frac{1}{l!(r+1-l)!} \prod_{i=1}^{r+1-l} u_{0,\sigma(i)}^{(2)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\tilde{\omega}_{f,l}^{(2)} = \sum_{\sigma \in S_r} \frac{1}{l!(r-l)!} \prod_{i=1}^{r-l} \omega_{f,\sigma(i)}^{(2)} \quad (\text{D.3})$$

für die nichtperturbativen Parameter aus den Zählern der Propagatoren verwendet. Die Partialbruchsummen der inneren Diagrammlinien werden durch

$$\sum_n^{f[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-\omega_{f,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\omega_{f,s}^{(1)} - \omega_{f,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (\omega_{f,s}^{(2)} - \omega_{f,t}^{(1)})}, \quad (\text{D.4})$$

$$\sum_n^{\pm[r]} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(-u_{\pm,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(1)} - u_{\pm,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^r (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})}, \quad (\text{D.5})$$

$$\sum_n^{0[r+1]} = \sum_{t=1}^{r+2} \frac{(-u_{0,t}^{(1)})^n}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+2} (u_{0,s}^{(1)} - u_{0,t}^{(1)}) \prod_{s=1}^{r+1} (u_{\pm,s}^{(2)} - u_{\pm,t}^{(1)})} \quad (\text{D.6})$$

zusammengefasst. In den folgenden SKG für $j_1, j_2 = 0, \dots, r$ und $j_3 = 0, \dots, r+1$ sind die Funktionen, die eine umfangreichere Kombination aus nichtperturbativen Parametern enthalten, nicht mit aufgeschrieben. Sie sind in Anhang C definiert.

$$\begin{aligned}
C_{rrr+1}^1 &= 1 + \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left(C_{rrr+1}^1 C_{rrr+1}^2 C_{rrr+1}^3 + \frac{1}{6} C_{rrr+1}^1 ((C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^3) C_{rrr+1}^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C_{rrr+1}^2 (C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^2)) \right) - 1 \right] - \frac{1}{12 \beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] \\
&\quad - \frac{1}{3 \beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm} c_0} \left(-\frac{1}{24} (13V_{rrr+1r+1}^1 + V_{rrr+1r+1}^2 - 50) C_{rrr+1}^1 + \frac{1}{24} (V_{rrr+1r+1}^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 13V_{rrr+1r+1}^2 + 22) C_{rrr+1}^2 - \frac{1}{8} (V_{rrr+1}^1 - V_{rrr+1}^2 - 6) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3 \beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm} c_0} \left(-\frac{1}{24} (13V_{rrr+1r+1}^1 + V_{rrr+1r+1}^2 - 50) C_{rrr+1}^1 - \frac{1}{8} (V_{rrr+1r+1}^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - V_{rrr+1r+1}^2 - 6) C_{rrr+1}^2 + \frac{1}{24} (V_{rrr+1r+1}^1 + 13V_{rrr+1r+1}^2 + 22) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3 \beta_0} \left[\sum_{(f,f')} (V_{ffW^0}^{r+1rr} + V_{f'f'W^0}^{r+1rr}) V_{f'fW^+}^{rrr} V_{ff'W^-}^{rrr} - 2N_f \right] \quad (D.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2 j_3}^1 &= \left(1 + \frac{33}{12 \beta_0} - \frac{1}{12 \beta_0} \left(\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right) - \frac{2}{3 \beta_0} N_f \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{l_3=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{n_3=0}^{r+1} \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} A_{l_1, m_1, j_3, j_1, m_2, n_2, l_3, j_2, n_3}^{3W} \\
&\quad + \frac{1}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{l_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_1+n_2}^{0[r+1]} \sum_{l_1+l_2}^{\pm[r]} A_{j_1, l_1, m_1, j_3, l_2, j_2, n_2}^{TP1} \\
&\quad - \frac{2}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{25}{24} C_{rj_2r+1}^1 + \frac{11}{24} C_{rj_2r+1}^2 + \frac{3}{8} C_{rj_2r+1}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} A_{k_1, j_2, j_3, n_1, j_1, m_2, n_2}^{TP2} \\
&\quad - \frac{2}{3 \beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{25}{24} C_{j_1rr+1}^1 + \frac{3}{8} C_{j_1rr+1}^2 + \frac{11}{24} C_{j_1rr+1}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3 \beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f'[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F1} \\
&\quad + \frac{1}{3 \beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f'[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f'[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F2} \quad (D.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{rrr+1}^2 &= 1 + \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left(C_{rrr+1}^1 C_{rrr+1}^2 C_{rrr+1}^3 - \frac{1}{6} C_{rrr+1}^2 ((C_{rrr+1}^2 - C_{rrr+1}^3) C_{rrr+1}^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C_{rrr+1}^1 (C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^3)) \right) - 1 \right] - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] \\
&\quad - \frac{1}{3\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm} c_0} \left(\frac{1}{24} (V_{rrr+1r+1}^1 + 13V_{rrr+1r+1}^2 + 22) C_{rrr+1}^1 - \frac{1}{24} (13V_{rrr+1r+1}^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + V_{rrr+1r+1}^2 - 50) C_{rrr+1}^2 - \frac{1}{8} (V_{rrr+1}^1 - V_{rrr+1}^2 - 6) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2} \left(\frac{1}{8} (U_{rrrr}^1 - U_{rrrr}^2 + 6) C_{rrr+1}^1 - \frac{1}{24} (U_{rrrr}^1 + 13U_{rrrr}^2 - 22) C_{rrr+1}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{24} (13U_{rrrr}^1 + U_{rrrr}^2 + 50) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \left[\sum_{(f,f')} (V_{ffW^0}^{r+1rr} + V_{f'f'W^0}^{r+1rr}) V_{f'fW^+}^{rrr} V_{ffW^-}^{rrr} - 2N_f \right] \tag{D.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2 j_3}^2 &= \left(1 + \frac{33}{12\beta_0} - \frac{1}{12\beta_0} \left(\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right) - \frac{2}{3\beta_0} N_f \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{l_3=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{n_3=0}^{r+1} \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} B_{l_1, m_1, j_3, j_1, m_2, n_2, l_3, j_2, n_3}^{3W} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{l_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_1+n_2}^{0[r+1]} \sum_{l_1+l_2}^{\pm[r]} B_{j_1, l_1, m_1, j_3, l_2, j_2, n_2}^{TP1} \\
&\quad - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{11}{24} C_{rj_2r+1}^1 + \frac{25}{24} C_{rj_2r+1}^2 + \frac{3}{8} C_{rj_2r+1}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{n_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1+l_2}^{\pm[r]} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} B_{k_1, j_1, j_2, n_1, l_2, m_2, j_3}^{TP3} \\
&\quad - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \left(\frac{3}{8} C_{rrj_3}^1 + \frac{11}{24} C_{rrj_3}^2 + \frac{25}{24} C_{rrj_3}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f'[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F1} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f'[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f'[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F2} \tag{D.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{rrr+1}^3 &= 1 + \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2 c_0} \left(C_{rrr+1}^1 C_{rrr+1}^2 C_{rrr+1}^3 + \frac{1}{6} ((C_{rrr+1}^2 - C_{rrr+1}^3) C_{rrr+1}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C_{rrr+1}^1 (C_{rrr+1}^1 - C_{rrr+1}^3) C_{rrr+1}^3 \right) - 1 \right] - \frac{1}{12\beta_0} \left[\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right] \\
&\quad - \frac{1}{3\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm} c_0} \left(\frac{1}{24} (V_{rrr+1r+1}^1 + 13V_{rrr+1r+1}^2 + 22) C_{rrr+1}^1 - \frac{1}{8} (V_{rrr+1}^1 - V_{rrr+1}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 6) C_{rrr+1}^2 - \frac{1}{24} (13V_{rrr+1r+1}^1 + V_{rrr+1r+1}^2 - 50) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3\beta_0} \left[\frac{1}{c_{\pm}^2} \left(\frac{1}{8} (U_{rrrr}^1 - U_{rrrr}^2 + 6) C_{rrr+1}^1 + \frac{1}{24} (13U_{rrrr}^1 + U_{rrrr}^2 + 25) C_{rrr+1}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24} (U_{rrrr}^1 + 13U_{rrrr}^2 - 22) C_{rrr+1}^3 \right) - \frac{45}{8} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \left[\sum_{(f,f')} (V_{ffW^0}^{r+1rr} + V_{f'f'W^0}^{r+1rr}) V_{f'fW^+}^{rrr} + V_{ff'W^-}^{rrr} - 2N_f \right] \tag{D.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2 j_3}^3 &= \left(1 + \frac{33}{12\beta_0} - \frac{1}{12\beta_0} \left(\frac{1}{\tilde{c}_{\pm}^2 \tilde{c}_0} - 1 \right) - \frac{2}{3\beta_0} N_f \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{l_3=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{n_3=0}^{r+1} \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} C_{l_1, m_1, j_3, j_1, m_2, n_2, l_3, j_2, n_3}^{3W} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} C_{k_1, j_2, j_3, n_1, j_1, m_2, n_2}^{TP2} \\
&\quad - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{11}{24} C_{j_1 r r+1}^1 + \frac{3}{8} C_{j_1 r r+1}^2 + \frac{25}{24} C_{j_1 r r+1}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{n_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1+l_2}^{\pm[r]} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} C_{k_1, j_1, j_2, n_1, l_2, m_2, j_3}^{TP3} \\
&\quad - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \left(\frac{3}{8} C_{rrj_3}^1 + \frac{25}{24} C_{rrj_3}^2 + \frac{11}{24} C_{rrj_3}^3 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f'[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F1} \\
&\quad + \frac{1}{3\beta_0} \sum_{(f,f')} \sum_{n'_1=0}^r \sum_{n_3=0}^r \sum_{n'_3=0}^r \sum_{n_2=0}^r \sum_{n_1=0}^r \sum_{n'_2=0}^r \sum_{n'_1+n_3}^{f'[r]} \sum_{n'_3+n_2}^{f[r]} \sum_{n_1+n'_2}^{f'[r]} A_{j_3, n_1, n'_1, j_1, n_2, n'_2, j_2, n_3, n'_3}^{3F2} \tag{D.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2 j_3}^4 = & \\
& \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{l_3=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{n_3=0}^{r+1} \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} D_{l_1, m_1, j_3, j_1, m_2, n_2, l_3, j_2, n_3}^{3W} \\
& + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{l_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_1+n_2}^{0[r+1]} \sum_{l_1+l_2}^{\pm[r]} D_{j_1, l_1, m_1, j_3, l_2, j_2, n_2}^{TP1} \\
& - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(-\frac{3}{8} C_{rj_2r+1}^5 + \frac{9}{8} C_{rj_2r+1}^4 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
& + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} D_{k_1, j_2, j_3, n_1, j_1, m_2, n_2}^{TP2} \\
& - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{3}{8} C_{j_1 r r+1}^5 + \frac{9}{8} C_{j_1 r r+1}^4 \right) \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \tag{D.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2 j_3}^5 = & \\
& \frac{1}{\beta_0 c_{\pm}^2 c_0} \sum_{l_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{m_1=0}^r \sum_{l_3=0}^r \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{n_3=0}^{r+1} \sum_{l_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{m_1+l_3}^{\pm[r]} \sum_{n_2+n_3}^{0[r+1]} E_{l_1, m_1, j_3, j_1, m_2, n_2, l_3, j_2, n_3}^{3W} \\
& + \frac{1}{\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{m_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{l_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{m_1+n_2}^{0[r+1]} \sum_{l_1+l_2}^{\pm[r]} E_{j_1, l_1, m_1, j_3, l_2, j_2, n_2}^{TP1} \\
& - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{3}{8} C_{rj_2r+1}^5 - \frac{9}{8} C_{rj_2r+1}^4 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
& + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1=0}^{r+1} \sum_{n_2=0}^{r+1} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} \sum_{n_1+n_2}^{0[r+1]} E_{k_1, j_2, j_3, n_1, j_1, m_2, n_2}^{TP2} \\
& - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm} c_0} \left(\frac{3}{8} C_{j_1 r r+1}^5 + \frac{9}{8} C_{j_1 r r+1}^4 \right) \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tilde{u}_{0, j_3}^{(2)} \\
& + \frac{1}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \sum_{n_1=0}^r \sum_{l_2=0}^r \sum_{k_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \sum_{n_1+l_2}^{\pm[r]} \sum_{k_1+m_2}^{\pm[r]} E_{k_1, j_1, j_2, n_1, l_2, m_2, j_3}^{TP3} \\
& - \frac{2}{3\beta_0 c_{\pm}^2} \left(\frac{3}{2} C_{r r j_3}^5 \right) \tilde{u}_{\pm, j_1}^{(2)} \tilde{u}_{\pm, j_2}^{(2)} \tag{D.14}
\end{aligned}$$

Anhang E

SK-Gleichungssysteme für 0/1

E.1 Das vollständige Selbstkonsistenzproblem

$$\begin{aligned}
x_0 &:= c_{\pm} & x_1 &:= c_0 \\
x_2 &:= u_{0,1}^{(1)}/u_{\pm,1}^{(1)} & x_3 &:= u_{0,1}^{(2)}/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_4 &:= C_{001}^1 & x_5 &:= C_{000}^1/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_6 &:= C_{001}^2 = C_{001}^3 & x_7 &:= C_{000}^2/u_{\pm,1}^{(1)} = C_{000}^3/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_8 &:= C_{000}^4 & x_9 &:= C_{000}^5 \\
x_{10} &:= 1/\tilde{c}_{\pm} & x_{11} &:= 1/\tilde{c}_0 \\
x_{12} &:= \omega_{l,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} & x_{13} &:= \omega_{\nu,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} \\
x_{14} &:= \omega_{d,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} & x_{15} &:= \omega_{u,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} \\
x_{16} &:= V_{\nu_l W^+}^{000} = V_{l\nu_l W^-}^{000} & x_{17} &:= V_{udW^+}^{000} = V_{duW^-}^{000} \\
x_{18} &:= V_{llW^0}^{100} = V_{\nu_l\nu_l W^0}^{100} & x_{19} &:= V_{ddW^0}^{100} = V_{uuW^0}^{100} \\
x_{20} &:= (V_{llW^0}^{000} - W_{llW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{21} &:= (V_{\nu_l\nu_l W^0}^{000} + W_{\nu_l\nu_l W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_{22} &:= (A_{llW^0}^{000} - B_{llW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{23} &:= (A_{\nu_l\nu_l W^0}^{000} + B_{\nu_l\nu_l W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_{24} &:= (V_{ddW^0}^{000} - W_{ddW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{25} &:= (V_{uuW^0}^{000} + W_{uuW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} \\
x_{26} &:= (A_{ddW^0}^{000} - B_{ddW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{27} &:= (A_{uuW^0}^{000} + B_{uuW^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)}
\end{aligned}$$

- Fermion-Propagatoren

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{12} = 6x_1 x_{16} x_{13} + 3x_0 x_{18} x_{12} \quad (\text{E.1})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{13} = 6x_1 x_{16} x_{12} + 3x_0 x_{18} x_{13} \quad (\text{E.2})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{14} = 6x_1 x_{17} x_{15} + 3x_0 x_{19} x_{14} \quad (\text{E.3})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{15} = 6x_1 x_{17} x_{14} + 3x_0 x_{19} x_{15} \quad (\text{E.4})$$

- Neutraler Fermion-Vertex

$$2\beta_0 x_0^2 x_{18} = 2\beta_0 x_0^2 + 3(x_{16}^2 x_4 - x_0^2) \quad (\text{E.5})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{20} = (2\beta_0 - 3)x_0^2 x_3 + 3x_{16}^2 x_5 \quad (\text{E.6})$$

$$x_{20} = x_{21} \quad (\text{E.7})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{19} = 2\beta_0 x_0^2 + 3(x_{17}^2 x_4 - x_0^2) \quad (\text{E.8})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{24} = (2\beta_0 - 3)x_0^2 x_3 + 3x_{17}^2 x_5 \quad (\text{E.9})$$

$$x_{24} = x_{25} \quad (\text{E.10})$$

- Geladene Fermion-Vertizes

$$4\beta_0 x_0 x_1 x_{16} = 4\beta_0 x_0 x_1 + 6(x_{18} x_{16} x_6 - x_0 x_1) \quad (\text{E.11})$$

$$-2x_3^2 x_{18} x_6 = x_7(x_{21} + x_{20}) + x_3(x_6(x_{21} + x_{20}) + 2x_7 x_{18}) \quad (\text{E.12})$$

$$4\beta_0 x_0 x_1 x_{17} = 4\beta_0 x_0 x_1 + 6(x_{19} x_{17} x_6 - x_0 x_1) \quad (\text{E.13})$$

$$-2x_3^2 x_{19} x_6 = x_7(x_{25} + x_{24}) + x_3(x_6(x_{25} + x_{24}) + 2x_7 x_{19}) \quad (\text{E.14})$$

- Geist-Bedingungen

$$4\beta_0 x_0 x_1 = x_0 x_1 x_{10}(4\beta_0 + 6) - 3x_{10}(x_1 x_{11} + x_0 x_{10}) \quad (\text{E.15})$$

$$2\beta_0 x_0 = x_0 x_{11}(2\beta_0 + 3) - 3x_{10} x_{11} \quad (\text{E.16})$$

- Boson-Propagatoren

$$6\beta_0 x_0^2 x_1 = 6\beta_0 x_0 x_1 - (5(3x_4 + 2x_6) - 10x_0 x_1 + x_0 x_1 x_{10} x_{11} - 4x_0 x_1(x_{16} + 3x_{17})) \quad (\text{E.17})$$

$$4\beta_0 x_0^2 x_1 = -9x_1 - 9(x_2 - x_3) + 12(x_6(1 + x_2) - x_7) + 4x_0 x_1 x_{16}(x_{12} - x_{13})^2 + 12x_0 x_1 x_{17}(x_{14} - x_{15})^2 \quad (\text{E.18})$$

$$6\beta_0 x_0^2 x_1 = 6\beta_0 x_0^2 - (5(-x_4 + 6x_6) - 10x_0^2 + x_0^2 x_{10}^2 - 4x_0^2(x_{18} + 3x_{19})) \quad (\text{E.19})$$

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_2 = x_0^2(12\beta_0 - 2x_{10}^2 + 20)x_3 - 27x_0 - 2(-5x_5 + 30x_7 - 36x_4) + 4x_0^2(x_{20} + x_{21} + 3(x_{24} + x_{25})) \quad (\text{E.20})$$

$$0 = -3x_0 x_3 + 8x_5 \quad (\text{E.21})$$

- Boson-Vertex

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_4 = 12\beta_0 x_0^2 x_1 + 4(3x_4 x_6^2 + x_4(x_4 - x_6)x_6 - 3x_0^2 x_1) - x_0^2 x_1(x_{10}^2 x_{11} - 1) - (x_0(25x_4 + 20x_6) - 45x_0^2 x_1) + 4x_0^2 x_1(2x_{18} x_{16}^2 + 6x_{19} x_{17}^2 - 8) \quad (\text{E.22})$$

$$24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 = 24\beta_0 x_0^2 x_1 + 4(6x_4 x_6^2 - x_6(x_4 - x_6)x_4 - 6x_0^2 x_1) - 2x_0^2 x_1(x_{10}^2 x_{11} - 1) - (x_0(11x_4 + 34x_6) - 45x_0^2 x_1) - (x_1(9x_4 + 36x_6) - 45x_0^2 x_1) + 4x_0^2 x_1(2x_{18} x_{16}^2 + 6x_{19} x_{17}^2 - 8) \quad (\text{E.23})$$

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_5(x_2 - x_3)x_3 = x_0^2 x_1(12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3)x_3^2 + 12(x_2 x_3 x_{43} + x_3(x_{38} + x_{33}) + x_{28}) - 5x_0(5x_4 + 4x_6)(x_2 - x_3)x_3^2 + 4x_0^2 x_1((x_{20} + x_{21})x_{16}^2 + 3(x_{24} + x_{25})x_{17}^2)(x_2 - x_3)x_3 \quad (\text{E.24})$$

$$\begin{aligned}
24\beta_0 x_0^2 x_1 x_7 (x_2 - x_3) x_3 &= 2x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11}) (x_2 - x_3) x_3^2 + 24(x_2 x_3 x_{44} \\
&+ x_3(x_{39} + x_{34}) + x_{29}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3) x_3^2 \\
&- x_1(9x_5 + 36x_7)(x_2 - x_3) x_3 + 8x_0^2 x_1 ((x_{20} + x_{21}) x_{16}^2 \\
&+ 3(x_{24} + x_{25}) x_{17}^2) (x_2 - x_3) x_3 \tag{E.25}
\end{aligned}$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_1 x_9 (x_2 - x_3) x_3 = 2(x_2 x_3 x_{47} + x_3(x_{42} + x_{37}) + x_{32}) - 3x_1 x_9 \tag{E.26}$$

$$\begin{aligned}
12\beta_0 x_0^2 x_1 x_4 (x_2 - x_3) x_3 &= x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11}) (x_2 - x_3) x_3 + 12(x_2 x_3 x_{63} \\
&+ x_3(x_{58} + x_{53}) + x_{48}) - 5x_0(5x_4 + 4x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\
&+ 8x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} + 3x_{17}^2 x_{19}) (x_2 - x_3) x_3 \tag{E.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 (x_2 - x_3) x_3 &= 2x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11}) (x_2 - x_3) x_3 + 24(x_2 x_3 x_{64} \\
&+ x_3(x_{59} + x_{54}) + x_{49}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\
&- x_1(9x_4 + 36x_6)(x_2 - x_3) x_3 + 16x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} \\
&+ 3x_{17}^2 x_{19}) (x_2 - x_3) x_3 \tag{E.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 (x_2 - x_3) x_3 &= 2x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11}) (x_2 - x_3) x_3 + 24(x_2 x_3 x_{65} \\
&+ x_3(x_{60} + x_{55}) + x_{50}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\
&- x_1(9x_4 + 36x_6)(x_2 - x_3) x_3 + 16x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} \\
&+ 3x_{17}^2 x_{19}) (x_2 - x_3) x_3 \tag{E.29}
\end{aligned}$$

$$0 = 2(x_2 x_3 x_{67} + x_3(x_{62} + x_{57}) + x_{52}) - 3x_1 x_9 \tag{E.30}$$

$$x_{28} = x_5 x_7^2 + \frac{1}{3} x_5 (x_5 - x_7) x_7 - \frac{1}{6} x_5 x_9^2 \tag{E.31}$$

$$x_{29} = x_5 x_7^2 - \frac{1}{6} x_5 x_7 (x_5 - x_7) + \frac{1}{2} (x_7 - \frac{1}{3} x_5) x_9^2 - x_7 x_9^2 \tag{E.32}$$

$$x_{30} = x_5 x_7^2 - \frac{1}{6} x_5 x_7 (x_5 - x_7) + \frac{1}{2} (x_7 - \frac{1}{3} x_5) x_9^2 - x_7 x_9^2 \tag{E.33}$$

$$x_{31} = 0 \tag{E.34}$$

$$x_{32} = -4x_7^2 x_9 - \frac{1}{2} x_5 (x_5 + x_7) x_9 - \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_5 + x_7) + \frac{1}{2} x_9^3 \tag{E.35}$$

$$x_{33} = x_5 x_7 x_6 + \frac{1}{6} x_5 ((x_5 - x_7) x_6 + x_7 (x_4 - x_6)) \tag{E.36}$$

$$x_{34} = x_5 x_7 x_6 - \frac{1}{6} x_7 x_5 (x_4 - x_6) - \frac{1}{2} x_6 x_9^2 \tag{E.37}$$

$$x_{35} = x_5 x_7 x_6 - \frac{1}{6} x_5 (x_5 - x_7) x_6 - \frac{1}{2} x_5^2 x_6 \tag{E.38}$$

$$x_{36} = \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_4 + x_6) \tag{E.39}$$

$$x_{37} = -2x_7 x_9 x_6 - \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_4 + x_6) \tag{E.40}$$

$$x_{38} = x_5x_6x_7 + \frac{1}{6}x_5((x_4 - x_6)x_7 + x_6(x_5 - x_7)) \quad (\text{E.41})$$

$$x_{39} = x_5x_6x_7 - \frac{1}{6}x_6x_5(x_5 - x_7) - \frac{1}{2}x_6x_9^2 \quad (\text{E.42})$$

$$x_{40} = x_5x_6x_7 - \frac{1}{6}x_5(x_4 - x_6)x_7 - \frac{1}{2}x_6x_9^2 \quad (\text{E.43})$$

$$x_{41} = -\frac{1}{2}x_5(x_4 + x_6)x_9 \quad (\text{E.44})$$

$$x_{42} = -2x_7x_6x_9 \quad (\text{E.45})$$

$$x_{43} = x_5x_6^2 + \frac{1}{3}x_5(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.46})$$

$$x_{44} = x_5x_6^2 - \frac{1}{6}x_6x_5(x_4 - x_6) \quad (\text{E.47})$$

$$x_{45} = x_5x_6^2 - \frac{1}{6}x_5(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.48})$$

$$x_{46} = 0 \quad (\text{E.49})$$

$$x_{47} = 0 \quad (\text{E.50})$$

$$x_{48} = x_4x_7^2 + \frac{1}{3}x_4(x_5 - x_7)x_7 - \frac{1}{6}x_4x_9^2 \quad (\text{E.51})$$

$$x_{49} = x_4x_7^2 - \frac{1}{6}x_7x_4(x_5 - x_7) + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{3}x_4)x_9^2 \quad (\text{E.52})$$

$$x_{50} = x_4x_7^2 - \frac{1}{6}x_4(x_5 - x_7)x_7 + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{3}x_4)x_9^2 \quad (\text{E.53})$$

$$x_{51} = 0 \quad (\text{E.54})$$

$$x_{52} = -4x_6x_7x_9 - x_4(x_5 + x_7)x_9 \quad (\text{E.55})$$

$$x_{53} = x_4x_7x_6 + \frac{1}{6}x_4((x_5 - x_7)x_6 + x_7(x_4 - x_6)) \quad (\text{E.56})$$

$$x_{54} = x_4x_7x_6 - \frac{1}{6}x_7x_4(x_4 - x_6) \quad (\text{E.57})$$

$$x_{55} = x_4x_7x_6 - \frac{1}{6}x_4(x_5 - x_7)x_6 \quad (\text{E.58})$$

$$x_{56} = \frac{1}{2}x_4x_9(x_4 + x_6) \quad (\text{E.59})$$

$$x_{57} = -2x_6x_9x_6 - \frac{1}{2}x_4x_9(x_4 + x_6) \quad (\text{E.60})$$

$$x_{58} = x_4x_6x_7 + \frac{1}{6}x_4((x_4 - x_6)x_7 + x_6(x_5 - x_7)) \quad (\text{E.61})$$

$$x_{59} = x_4x_6x_7 - \frac{1}{6}x_6x_4(x_5 - x_7) \quad (\text{E.62})$$

$$x_{60} = x_4x_6x_7 - \frac{1}{6}x_4(x_4 - x_6)x_7 \quad (\text{E.63})$$

$$x_{61} = -\frac{1}{2}x_4(x_4 + x_6)x_9 \quad (\text{E.64})$$

$$x_{62} = -2x_6^2x_9 - \frac{1}{2}x_4(x_4 + x_6)x_9 \quad (\text{E.65})$$

$$x_{63} = x_4 x_6^2 + \frac{1}{3} x_4 (x_4 - x_6) x_6 \quad (\text{E.66})$$

$$x_{64} = x_4 x_6^2 - \frac{1}{6} x_6 x_4 (x_4 - x_6) \quad (\text{E.67})$$

$$x_{65} = x_4 x_6^2 - \frac{1}{6} x_4 (x_4 - x_6) x_6 \quad (\text{E.68})$$

$$x_{66} = 0 \quad (\text{E.69})$$

$$x_{67} = 0 \quad (\text{E.70})$$

E.2 Das SK-System mit $C_{000}^4 = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &:= c_{\pm} & x_1 &:= c_0 \\ x_2 &:= u_{0,1}^{(1)}/u_{\pm,1}^{(1)} & x_3 &:= u_{0,1}^{(2)}/u_{\pm,1}^{(1)} \\ x_4 &:= C_{001}^1 & x_5 &:= C_{000}^1/u_{\pm,1}^{(1)} \\ x_6 &:= C_{001}^2 = C_{001}^3 & x_7 &:= C_{000}^2/u_{\pm,1}^{(1)} = C_{000}^3/u_{\pm,1}^{(1)} \\ x_8 &:= C_{000}^4 = 0 & x_9 &:= C_{000}^5 \\ x_{10} &:= 1/\tilde{c}_{\pm} & x_{11} &:= 1/\tilde{c}_0 \\ x_{12} &:= \omega_{i,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} & x_{13} &:= \omega_{\nu,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} \\ x_{14} &:= \omega_{d,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} & x_{15} &:= \omega_{u,1}^{(1)}/\sqrt{u_{\pm,1}^{(1)}} \\ x_{16} &:= V_{\nu_l W^+}^{000} = V_{l\nu_l W^-}^{000} & x_{17} &:= V_{ud W^+}^{000} = V_{du W^-}^{000} \\ x_{18} &:= V_{ll W^0}^{100} = V_{\nu_l \nu_l W^0}^{100} & x_{19} &:= V_{dd W^0}^{100} = V_{uu W^0}^{100} \\ x_{20} &:= (V_{ll W^0}^{000} - W_{ll W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{21} &:= (V_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + W_{\nu_l \nu_l W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} \\ x_{22} &:= (A_{ll W^0}^{000} - B_{ll W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} = 0 & x_{23} &:= (A_{\nu_l \nu_l W^0}^{000} + B_{\nu_l \nu_l W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} = 0 \\ x_{24} &:= (V_{dd W^0}^{000} - W_{dd W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} & x_{25} &:= (V_{uu W^0}^{000} + W_{uu W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} \\ x_{26} &:= (A_{dd W^0}^{000} - B_{dd W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} = 0 & x_{27} &:= (A_{uu W^0}^{000} + B_{uu W^0}^{000})/u_{\pm,1}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

- Fermion-Propagatoren

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{12} = 6x_1 x_{16} x_{13} + 3x_0 x_{18} x_{12} \quad (\text{E.71})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{13} = 6x_1 x_{16} x_{12} + 3x_0 x_{18} x_{13} \quad (\text{E.72})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{14} = 6x_1 x_{17} x_{15} + 3x_0 x_{19} x_{14} \quad (\text{E.73})$$

$$4\beta_0 x_1 x_0 x_{15} = 6x_1 x_{17} x_{14} + 3x_0 x_{19} x_{15} \quad (\text{E.74})$$

- Neutraler Fermion-Vertex

$$2\beta_0 x_0^2 x_{18} = 2\beta_0 x_0^2 + 3(x_{16}^2 x_4 - x_0^2) \quad (\text{E.75})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{20} = (2\beta_0 - 3)x_0^2 x_3 + 3x_{16}^2 x_5 \quad (\text{E.76})$$

$$x_{20} = x_{21} \quad (\text{E.77})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{19} = 2\beta_0 x_0^2 + 3(x_{17}^2 x_4 - x_0^2) \quad (\text{E.78})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_{24} = (2\beta_0 - 3)x_0^2 x_3 + 3x_{17}^2 x_5 \quad (\text{E.79})$$

$$x_{24} = x_{25} \quad (\text{E.80})$$

- Geladene Fermion-Vertizes

$$4\beta_0 x_0 x_1 x_{16} = 4\beta_0 x_0 x_1 + 6(x_{18} x_{16} x_6 - x_0 x_1) \quad (\text{E.81})$$

$$-2x_3^2 x_{18} x_6 = x_7(x_{21} + x_{20}) + x_3(x_6(x_{21} + x_{20}) + 2x_7 x_{18}) \quad (\text{E.82})$$

$$4\beta_0 x_0 x_1 x_{17} = 4\beta_0 x_0 x_1 + 6(x_{19} x_{17} x_6 - x_0 x_1) \quad (\text{E.83})$$

$$-2x_3^2 x_{19} x_6 = x_7(x_{25} + x_{24}) + x_3(x_6(x_{25} + x_{24}) + 2x_7 x_{19}) \quad (\text{E.84})$$

- Geist-Bedingungen

$$4\beta_0 x_0 x_1 = x_0 x_1 x_{10}(4\beta_0 + 6) - 3x_{10}(x_1 x_{11} + x_0 x_{10}) \quad (\text{E.85})$$

$$2\beta_0 x_0 = x_0 x_{11}(2\beta_0 + 3) - 3x_{10} x_{11} \quad (\text{E.86})$$

- Boson-Propagatoren

$$6\beta_0 x_0^2 x_1 = 6\beta_0 x_0 x_1 - (5(3x_4 + 2x_6) - 10x_0 x_1 + x_0 x_1 x_{10} x_{11} - 4x_0 x_1(x_{16} + 3x_{17})) \quad (\text{E.87})$$

$$4\beta_0 x_0^2 x_1 = -9x_1 - 9(x_2 - x_3) + 12(x_6(1 + x_2) - x_7) + 4x_0 x_1 x_{16}(x_{12} - x_{13})^2 + 12x_0 x_1 x_{17}(x_{14} - x_{15})^2 \quad (\text{E.88})$$

$$6\beta_0 x_0^2 x_1 = 6\beta_0 x_0^2 - (5(-x_4 + 6x_6) - 10x_0^2 + x_0^2 x_{10}^2 - 4x_0^2(x_{18} + 3x_{19})) \quad (\text{E.89})$$

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_2 = x_0^2(12\beta_0 - 2x_{10}^2 + 20)x_3 - 27x_0 - 2(-5x_5 + 30x_7 - 36x_4) + 4x_0^2(x_{20} + x_{21} + 3(x_{24} + x_{25})) \quad (\text{E.90})$$

$$0 = -3x_0 x_3 + 8x_5 \quad (\text{E.91})$$

- Boson-Vertex

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_4 = 12\beta_0 x_0^2 x_1 + 4(3x_4 x_6^2 + x_4(x_4 - x_6)x_6 - 3x_0^2 x_1) - x_0^2 x_1(x_{10}^2 x_{11} - 1) - (x_0(25x_4 + 20x_6) - 45x_0^2 x_1) + 4x_0^2 x_1(2x_{18} x_{16}^2 + 6x_{19} x_{17}^2 - 8) \quad (\text{E.92})$$

$$24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 = 24\beta_0 x_0^2 x_1 + 4(6x_4 x_6^2 - x_6(x_4 - x_6)x_4 - 6x_0^2 x_1) - 2x_0^2 x_1(x_{10}^2 x_{11} - 1) - (x_0(11x_4 + 34x_6) - 45x_0^2 x_1) - (x_1(9x_4 + 36x_6) - 45x_0^2 x_1) + 4x_0^2 x_1(2x_{18} x_{16}^2 + 6x_{19} x_{17}^2 - 8) \quad (\text{E.93})$$

$$12\beta_0 x_0^2 x_1 x_5(x_2 - x_3)x_3 = x_0^2 x_1(12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3)x_3^2 + 12(x_2 x_3 x_{43} + x_3(x_{38} + x_{33}) + x_{28}) - 5x_0(5x_4 + 4x_6)(x_2 - x_3)x_3^2 + 4x_0^2 x_1((x_{20} + x_{21})x_{16}^2 + 3(x_{24} + x_{25})x_{17}^2)(x_2 - x_3)x_3 \quad (\text{E.94})$$

$$24\beta_0 x_0^2 x_1 x_7(x_2 - x_3)x_3 = 2x_0^2 x_1(12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3)x_3^2 + 24(x_2 x_3 x_{44} + x_3(x_{39} + x_{34}) + x_{29}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3)x_3^2 - x_1(9x_5 + 36x_7)(x_2 - x_3)x_3 + 8x_0^2 x_1((x_{20} + x_{21})x_{16}^2 + 3(x_{24} + x_{25})x_{17}^2)(x_2 - x_3)x_3 \quad (\text{E.95})$$

$$2\beta_0 x_0^2 x_1 x_9 (x_2 - x_3) x_3 = 2(x_2 x_3 x_{47} + x_3(x_{42} + x_{37}) + x_{32}) - 3x_1 x_9 \quad (\text{E.96})$$

$$\begin{aligned} 12\beta_0 x_0^2 x_1 x_4 (x_2 - x_3) x_3 &= x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3) x_3 + 12(x_2 x_3 x_{63} \\ &+ x_3(x_{58} + x_{53}) + x_{48}) - 5x_0(5x_4 + 4x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\ &+ 8x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} + 3x_{17}^2 x_{19})(x_2 - x_3) x_3 \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

$$\begin{aligned} 24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 (x_2 - x_3) x_3 &= 2x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3) x_3 + 24(x_2 x_3 x_{64} \\ &+ x_3(x_{59} + x_{54}) + x_{49}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\ &- x_1(9x_4 + 36x_6)(x_2 - x_3) x_3 + 16x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} \\ &+ 3x_{17}^2 x_{19})(x_2 - x_3) x_3 \end{aligned} \quad (\text{E.98})$$

$$\begin{aligned} 24\beta_0 x_0^2 x_1 x_6 (x_2 - x_3) x_3 &= 2x_0^2 x_1 (12\beta_0 + 2 - x_{10}^2 x_{11})(x_2 - x_3) x_3 + 24(x_2 x_3 x_{65} \\ &+ x_3(x_{60} + x_{55}) + x_{50}) - x_0(11x_4 + 34x_6)(x_2 - x_3) x_3 \\ &- x_1(9x_4 + 36x_6)(x_2 - x_3) x_3 + 16x_0^2 x_1 (x_{16}^2 x_{18} \\ &+ 3x_{17}^2 x_{19})(x_2 - x_3) x_3 \end{aligned} \quad (\text{E.99})$$

$$0 = 2(x_2 x_3 x_{67} + x_3(x_{62} + x_{57}) + x_{52}) - 3x_1 x_9 \quad (\text{E.100})$$

$$x_{28} = x_5 x_7^2 + \frac{1}{3} x_5 (x_5 - x_7) x_7 - \frac{1}{6} x_5 x_9^2 \quad (\text{E.101})$$

$$x_{29} = x_5 x_7^2 - \frac{1}{6} x_5 x_7 (x_5 - x_7) + \frac{1}{2} (x_7 - \frac{1}{3} x_5) x_9^2 - x_7 x_9^2 \quad (\text{E.102})$$

$$x_{30} = x_5 x_7^2 - \frac{1}{6} x_5 x_7 (x_5 - x_7) + \frac{1}{2} (x_7 - \frac{1}{3} x_5) x_9^2 - x_7 x_9^2 \quad (\text{E.103})$$

$$x_{31} = 0 \quad (\text{E.104})$$

$$x_{32} = -4x_7^2 x_9 - \frac{1}{2} x_5 (x_5 + x_7) x_9 - \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_5 + x_7) + \frac{1}{2} x_9^3 \quad (\text{E.105})$$

$$x_{33} = x_5 x_7 x_6 + \frac{1}{6} x_5 ((x_5 - x_7) x_6 + x_7 (x_4 - x_6)) \quad (\text{E.106})$$

$$x_{34} = x_5 x_7 x_6 - \frac{1}{6} x_7 x_5 (x_4 - x_6) - \frac{1}{2} x_6 x_9^2 \quad (\text{E.107})$$

$$x_{35} = x_5 x_7 x_6 - \frac{1}{6} x_5 (x_5 - x_7) x_6 - \frac{1}{2} x_9^2 x_6 \quad (\text{E.108})$$

$$x_{36} = \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_4 + x_6) \quad (\text{E.109})$$

$$x_{37} = -2x_7 x_9 x_6 - \frac{1}{2} x_5 x_9 (x_4 + x_6) \quad (\text{E.110})$$

$$x_{38} = x_5 x_6 x_7 + \frac{1}{6} x_5 ((x_4 - x_6) x_7 + x_6 (x_5 - x_7)) \quad (\text{E.111})$$

$$x_{39} = x_5 x_6 x_7 - \frac{1}{6} x_6 x_5 (x_5 - x_7) - \frac{1}{2} x_6 x_9^2 \quad (\text{E.112})$$

$$x_{40} = x_5 x_6 x_7 - \frac{1}{6} x_5 (x_4 - x_6) x_7 - \frac{1}{2} x_6 x_9^2 \quad (\text{E.113})$$

$$x_{41} = -\frac{1}{2} x_5 (x_4 + x_6) x_9 \quad (\text{E.114})$$

$$x_{42} = -2x_7 x_6 x_9 \quad (\text{E.115})$$

$$x_{43} = x_5x_6^2 + \frac{1}{3}x_5(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.116})$$

$$x_{44} = x_5x_6^2 - \frac{1}{6}x_6x_5(x_4 - x_6) \quad (\text{E.117})$$

$$x_{45} = x_5x_6^2 - \frac{1}{6}x_5(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.118})$$

$$x_{46} = 0 \quad (\text{E.119})$$

$$x_{47} = 0 \quad (\text{E.120})$$

$$x_{48} = x_4x_7^2 + \frac{1}{3}x_4(x_5 - x_7)x_7 - \frac{1}{6}x_4x_9^2 \quad (\text{E.121})$$

$$x_{49} = x_4x_7^2 - \frac{1}{6}x_7x_4(x_5 - x_7) + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{3}x_4)x_9^2 \quad (\text{E.122})$$

$$x_{50} = x_4x_7^2 - \frac{1}{6}x_4(x_5 - x_7)x_7 + \frac{1}{2}(x_6 - \frac{1}{3}x_4)x_9^2 \quad (\text{E.123})$$

$$x_{51} = 0 \quad (\text{E.124})$$

$$x_{52} = -4x_6x_7x_9 - x_4(x_5 + x_7)x_9 \quad (\text{E.125})$$

$$x_{53} = x_4x_7x_6 + \frac{1}{6}x_4((x_5 - x_7)x_6 + x_7(x_4 - x_6)) \quad (\text{E.126})$$

$$x_{54} = x_4x_7x_6 - \frac{1}{6}x_7x_4(x_4 - x_6) \quad (\text{E.127})$$

$$x_{55} = x_4x_7x_6 - \frac{1}{6}x_4(x_5 - x_7)x_6 \quad (\text{E.128})$$

$$x_{56} = \frac{1}{2}x_4x_9(x_4 + x_6) \quad (\text{E.129})$$

$$x_{57} = -2x_6x_9x_6 - \frac{1}{2}x_4x_9(x_4 + x_6) \quad (\text{E.130})$$

$$x_{58} = x_4x_6x_7 + \frac{1}{6}x_4((x_4 - x_6)x_7 + x_6(x_5 - x_7)) \quad (\text{E.131})$$

$$x_{59} = x_4x_6x_7 - \frac{1}{6}x_6x_4(x_5 - x_7) \quad (\text{E.132})$$

$$x_{60} = x_4x_6x_7 - \frac{1}{6}x_4(x_4 - x_6)x_7 \quad (\text{E.133})$$

$$x_{61} = -\frac{1}{2}x_4(x_4 + x_6)x_9 \quad (\text{E.134})$$

$$x_{62} = -2x_6^2x_9 - \frac{1}{2}x_4(x_4 + x_6)x_9 \quad (\text{E.135})$$

$$x_{63} = x_4x_6^2 + \frac{1}{3}x_4(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.136})$$

$$x_{64} = x_4x_6^2 - \frac{1}{6}x_6x_4(x_4 - x_6) \quad (\text{E.137})$$

$$x_{65} = x_4x_6^2 - \frac{1}{6}x_4(x_4 - x_6)x_6 \quad (\text{E.138})$$

$$x_{66} = 0 \quad (\text{E.139})$$

$$x_{67} = 0 \quad (\text{E.140})$$

Literaturverzeichnis

- [Aok 82] K. AOKI ET AL, *Elektroweak Theory*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 73 (1982)
- [AS 00] R. ALKOFER, L. v. SMEKAL, *The Infrared Behavior of QCD Green's Functions*, Physical Reports 353 (2001) 281; e-print archive: hep-ph/0007355 (2000)
- [AS 72] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions, 9th edition*, Dover Publications, inc., New York (1972)
- [BC 80] J.S. BALL, T.-W. CHIU, *Analytic properties of the vertex function in gauge theories*, Physical Review D 22 (1980) 2542 bzw. 2550
- [BD 65] J.D. BJORKEN, S.S. DRELL, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI Hochschultaschenbücher, McGraw-Hill, New York (1965)
- [BL 77] M. BAKER, C. LEE, *Overlapping-divergence-free skeleton expansion in non-Abelian gauge theories*, Physical Review D15 (1977) 2201
- [BP 99] D. BARDIN, G. PASSARINO, *The Standard Model in the Making*, Oxford University Press (1999)
- [BRS 74] C. BECCHI, A. ROUET, R. STORA, *The Abelian Higgs Kibble Model, Unitarity of the S-Operator*, Physical Letters 52 B (1974) 344; Communications in Mathematical Physics 42 (1975) 127
- [BS 51] H.A. BETHE, E.E. SALPETER, *A Relativistic Equation for Bound-State Problems*, Physical Review 84 (1951) 1232
- [Col 85] J.C. COLLINS, *Renormalization*, Cambridge University Press (1985)
- [CN 73] J.M. CORNWALL, R.E. NORTON, *Spontaneous Symmetric Breaking Without Scalar Mesons*, Physical Review D 8 (1973) 3338
- [DGH 94] J.F. DONOGHUE, E. GOLOWICH, B.R. HOLSTEIN, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press (1994)
- [Dri 97] L. DRIESEN, *Die Basisvertices der QCD und ihr Dyson-Schwinger Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (1997)

- [Dri 98] L. DRIESEN ET AL, *Extended iterative scheme for QCD: three-point vertices*, European Physical Journal A4 (1999) 381; e-print archive: hep-th/9808152 (1998); Münster preprint MS-TPI-97-4 (1997)
- [DS 98] L. DRIESEN, M. STINGL, *Extended iterative scheme for QCD: the four-gluon-vertex*, European Physical Journal A4 (1999) 401; e-print archive: hep-th/9808155; Münster preprint MS-TPI-98-19 (1998)
- [Dys 49] F.J. DYSON, *The S-Matrix in Quantum Electrodynamics*, Physical Review 75, (1949) 1736
- [Éca 81] J. ÉCALLE, *Les Fonctions Résurgentes*, Tomes I-III, Publications Mathématiques d'Orsay No. 85-05, 81-06, 81-05, Orsay, Frankreich, (1981-1985)
- [Ewe 00] A. EWERING, *Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2000)
- [Haa 92] R. HAAG, *Local Quantum Physics*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1992)
- [Grü 02] B. GRÜTER, *Eine nichtperturbative Näherungslösung für die ϕ^3 -Theorie in 6 Dimensionen*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2002)
- [IZ 80] C. ITZKSON, J.-B. ZUBER, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)
- [JJ 73] R. JACKIW, K. JOHNSON, *Dynamical Model of Spontaneously Broken Gauge Symmetries*, Physical Review D 8 (1973) 2386
- [Kug 97] T. KUGO, *Eichtheorie*, Springer Verlag, Berlin (1997)
- [Kuh 97] J. KUHS, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsrechnung für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1997)
- [Mer 96] C. MERTEN, *Dynamische Massenerzeugung und Symmetriebrechung durch die renormierungsgruppeninvariante Massenskala Λ* , Diplomarbeit an der WWU Münster (1996)
- [Mut 87] T. MUTA, *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific, Singapore (1987)
- [Nak 69] N. NAKANISHI, *A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 43 (1969)
- [Pot 00] K. POTZESNY, *Nichtperturbative Korrekturen 1. Ordnung in α_S zu Zweipunktfunktionen im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2000)
- [PS 95] M.E. PESKIN, D.V. SCHROEDER, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995)
- [PT 82] P. PASCUAL, R. TARRACH, *Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, Cambridge University Press (1982)

- [Riv 87] R.J. RIVERS, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [Ryd 96] L.H. RYDER, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996)
- [Sch 97] M. SCHMELLING, *Status of the strong coupling constant*, Plenary talk given at: XXVIII International Conference on High Energy Physics, Warsaw (1996); e-print archive: hep-ex/9701002
- [Sch 51] J. SCHWINGER, *The Theory of Quantized Fields I,II*, Physical Review 82, (1951) 914 bzw. 91 (1953) 713
- [Sch 91] M. SCHOLZE, *Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1991)
- [Sla 72] A.A. SLAVNOV, *Ward Identities in Gauge Theories*, Theoretical and Mathematical Physics 10 (1972) 99
- [Sti 90] M. STINGL, *Equations for Four-Point Amplitude in Quantum Field Theory*, unveröffentlichte Notizen, Münster (1990)
- [Sti 96] M. STINGL, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Zeitschrift für Physik A - Atomic Nuclei 353 (1996) 423
- [Sti 00] M. STINGL, *Parity-Violating Fermion Vertices*, unveröffentlichte Notizen, Münster (2000)
- [Sti 02] M. STINGL, *Field-Theory Amplitudes as Resurgent Functions*, e-print archive: hep-ph/0207349 (2002); Münster preprint MS-TP-01-04 (2001)
- [Sti 03] M. STINGL, *The Parity-Violating Three-Boson-Vertex*, unveröffentlichte Notizen, Münster (2003)
- [Str 96] A.F.-J. STREIBL, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1996)
- [Tay 71] J.C. TAYLOR, *Ward Identities and charge Renormalization of the Yang-Mills-Field*, Nuclear Physics B 33 (1971) 436
- [tHo 71] G. 'T HOOFT, *Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills Fields*, Nuclear Physics B 35 (1971) 167
- [tHo 73] G. 'T HOOFT, *Dimensional Regularization and the Renormalization group*, Nuclear Physics B 61 (1973) 455
- [TV 72] G. 'T HOOFT, M. VELTMAN, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics B 44 (1972) 189
- [VK 72] A.N. VASIL'EV, A.K. KAZANSKII, *Legendre Transforms of Generating Functionals in Quantum Field Theory*, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 12 No. 3 (1972) 352

- [Wei 73] S. WEINBERG, *New Approach to the Renormalization Group*, Physical Review D 8, (1973) 3497
- [Wei 96] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields, Volume I, II*, Cambridge University Press (1996)
- [Wie 00] A. WIELENBERG, *Untersuchung logarithmisch modifizierter nichtperturbativ-erweiterter Feynmanregeln der QCD in Landau-Eichung*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2001)
- [Wil 69] K.G. WILSON, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Physical Review 179 (1969) 1499
- [YM 54] C.N. YANG, R. MILLS, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Physical Review 96 (1954) 191
- [Zan 00] F. ZANTOW, *Der photonische Sektor in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2000)
- [Zim 59] W. ZIMMERMANN, *One Particle Singularities of Green Functions in Quantum Field Theory*, Nuovo Cimento Volume 13 (1959) 503
- [Zim 60] W. ZIMMERMANN, *One-Particle Singularities of Green's Functions in Quantum Field Theory - II*, Nuovo Cimento Volume 16 (1960) 690

Schlußwort

Zu guter Letzt möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. Mein spezieller Dank gilt

- Prof. Dr. Manfred Stingl für seine ständige Bereitschaft zu klärenden Gesprächen und für seine zahlreichen wertvollen Hinweise. Prof. Dr. Gernot Münster danke ich für die Übernahme des Koreferats.
- Roland Peetz und Eicke Ruthotto für das tolle Arbeitsklima im gemeinsamen Arbeitszimmer. Die vielen Tee-Stunden mit Euch sorgten für genügend Zerstreuung jenseits der Physik.
- den Mitgliedern der eigenen und der weiter gefaßten Arbeitsgruppe für die vielen interessanten Diskussionen. Erwähnen möchte ich Burghard Grüter und Björn Schwentker.
- Johann Hüsemann, Roland Peetz, Eicke Ruthotto und Willy Wenning für das sorgfältige Korrekturlesen. Verbliebende Fehler in dieser Arbeit gehen zu meinen Lasten. Vielen Dank für Euren Einsatz.
- den vielen Freunde aus Münster und Umgebung: Alex, Bob, Carsten, Christian, Christoph, Eicke, Floh, Florian, Isa, Mela, Niccola, Nicole, Ricki, Roland, Sonja, Thimmi, Tobi, Tobias und Zoltan.

Ganz besonders danken möchte ich meinen Eltern Christa und Willy für ihre Unterstützung und meiner Anja für die vielen ermutigenden Worte. Die Anfertigung dieser Arbeit hat viel Zeit geraubt, die ihr gehört hätte.

Lebenslauf

Name: André Ewering

Geburtsdatum: 12.12.1974

Geburtsort: Lüneburg

Familienstand: ledig

Schulbildung: 08/1981-07/1985 Besuch der Lamberti-Grundschule in Ochtrup
08/1985-07/1994 Besuch des städtischen Gymnasiums in Ochtrup
25.05.1994 Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife

Studium: 10/1994 Beginn des Studiums der Physik und Mathematik
an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
24.09.1996 Vordiplom in Physik
05/1998 Beginn der Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl
am Institut für theoretische Physik über das Thema:
„Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von
nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln“
03/1999-03/2000 Studentische Hilfskraft am Institut für theoretische
Physik
31.03.2000 Diplom in Physik
04/2000-07/2000 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für theoretische
Physik
08/2000 Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl
seit 08/2000 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für theoretische
Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

