

LUTZ DRIESEN

**Die Basiswertizes der  
Quantenchromodynamik und ihr Dyson-  
Schwinger-Selbstkonsistenzproblem im  
Rahmen einer systematisch erweiterten  
Störungsreihe**

1997







Theoretische Physik

**Die Basisvertizes der  
Quantenchromodynamik und ihr Dyson-  
Schwinger-Selbstkonsistenzproblem im  
Rahmen einer systematisch erweiterten  
Störungsreihe**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fach Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

**Lutz Driesen**

aus Osterforde

- 1997 -

Dekan:	Prof. Dr. F.-K. Holtmeier
Erster Gutachter:	Prof. Dr. M. Stingl
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Tag der mündlichen Prüfungen:	23.10. und 27.10.1997
Tag der Promotion:	27.10.1997



*Mir ist bis heute kein auch noch so kompliziertes  
Problem begegnet, das nicht, richtig betrachtet,  
noch komplizierter wurde.*

Poul Anderson [3]

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen der Kontinuums-QCD</b>	<b>5</b>
1.1 Konventionen und Notationen . . . . .	5
1.2 Wirkung und Feynman-Regeln im $D$ -dimensionalen, euklidischen Impulsraum	8
1.3 Die Dyson-Schwinger-Integralgleichungen für die Basisvertizes . . . . .	13
1.3.1 Selbstenergie-Gleichungen . . . . .	13
1.3.2 Gleichungen für die 3-Punkt-Vertizes . . . . .	15
1.3.3 Dyson-Schwinger-Gleichung für den 4-Gluon-Vertex . . . . .	19
1.4 Die Bethe-Salpeter-Resummation . . . . .	21
1.5 Slavnov-Taylor-Identitäten . . . . .	22
1.6 1-Schleifen-Renormierung und „laufende“ Kopplung . . . . .	26
<b>2 Die erweiterte Störungsreihe und ihr Selbstkonsistenzproblem</b>	<b>29</b>
2.1 Die RG-invariante Massenskala $\Lambda_{QCD}$ . . . . .	29
2.2 Systematische Erweiterung der Basisvertizes . . . . .	30
2.3 Der Selbstkonsistenzmechanismus . . . . .	31
2.4 Ansätze für die Basisvertizes in erster Stufe der rationalen Approximation .	34
2.4.1 Modifizierte Propagatoren . . . . .	35
2.4.2 Ansätze im Geistsektor . . . . .	36
2.4.3 Modifizierte 3-Punkt-Vertizes . . . . .	37
2.4.4 Parametrisierung des 4-Gluon-Vertex . . . . .	40
<b>3 Mandelstam-Pole und „Confinement“</b>	<b>47</b>
3.1 Die Mandelstam-Pole des 4-Gluon-Vertex . . . . .	47
3.2 „Entschärfung“ der inneren Linien . . . . .	49
3.3 Verallgemeinerung für oberflächlich konvergente Vertizes . . . . .	51
3.4 Folgerungen für die nichtperturbativen Modifikationen . . . . .	55
3.5 Erweiterung der Bethe-Salpeter-Resummation . . . . .	56
<b>4 1-Schleifen-Resultate für die Selbstenergien</b>	<b>59</b>
4.1 Das D-S-Funktional der Geist-Selbstenergie . . . . .	59
4.2 Divergente Beiträge der Gluon-Selbstenergie . . . . .	60

4.3	Selbstkonsistenz im transversalen Sektor . . . . .	62
4.4	Selbstkonsistenz der Fermion-Selbstenergie . . . . .	64
<b>5</b>	<b>1-Schleifen-Resultate für den 3-Gluon-Vertex</b>	<b>67</b>
5.1	Feynman-Graphen in erster Iteration . . . . .	67
5.2	Selbstkonsistenz im transversalen Sektor . . . . .	71
5.3	Erste Analyse der S-T-Identität . . . . .	76
<b>6</b>	<b>1-Schleifen-Resultate für den Fermion-Gluon-Vertex</b>	<b>79</b>
6.1	Feynman-Graphen im fermionischen Kanal . . . . .	79
6.2	Selbstkonsistenz im fermionischen Kanal . . . . .	80
6.3	Feynman-Graphen im gluonischen Kanal . . . . .	82
6.4	Selbstkonsistenz im gluonischen Kanal . . . . .	84
6.5	Erste Analyse der S-T-Identität . . . . .	86
6.6	Ergänzung: Kurze Zwischenbilanz . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Das Selbstkonsistenzproblem des 4-Gluon-Vertex</b>	<b>91</b>
7.1	Erste Abspaltung separabler Terme . . . . .	91
7.2	Weitere Feynman-Graphen der ersten Iteration . . . . .	93
7.3	Selbstkonsistenz für $V_{4,T}$ . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Analyse der Selbstkonsistenzgleichungen</b>	<b>101</b>
8.1	Die Skalierungs-Eigenschaft der polynomialen Gleichungen . . . . .	102
8.2	Eine Auswahl spezieller Lösungen . . . . .	105
8.3	Berechnung eichinvarianter Kondensate . . . . .	110
8.4	Das lineare Gleichungssystem . . . . .	112
8.5	Ergänzung: Spezielle Lösungen der rein gluonischen Theorie . . . . .	116
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>125</b>
A.1	Funktionalintegral-Methoden . . . . .	125
A.1.1	Erzeugende Funktionale und Greensche Funktionen . . . . .	125
A.1.2	Dyson-Schwinger-Gleichungen . . . . .	132
A.1.3	BRS-Invarianz und Slavnov-Taylor-Identitäten . . . . .	135
A.2	Algebra der $SU(N_C)$ -Eichgruppe . . . . .	137
A.3	Algebra der euklidischen $\gamma$ -Matrizen . . . . .	139
A.4	Berechnung der UV-Divergenzen . . . . .	139
A.4.1	Eine Subtraktionsmethode . . . . .	139
A.4.2	Verwendung skalenfreier Integrale . . . . .	141
A.4.3	Ausführung der Impulsintegration . . . . .	142
A.5	Wechsel der Parametrisierungen . . . . .	143
A.5.1	Aufhebung der Partialbruchzerlegungen . . . . .	143

A.5.2	Entwicklung der Tensorfunktionen $W_i$ . . . . .	146
<b>B</b>	<b>Die Vakuumkondensate der QCD</b>	<b>151</b>
B.1	Definition der Kondensate . . . . .	151
B.2	Die Bewegungsgleichungs-Kondensate . . . . .	155
B.3	Führende Divergenzen in erster Iteration . . . . .	155
<b>C</b>	<b>1-Schleifen-Resultate für den 4-Gluon-Vertex</b>	<b>159</b>
C.1	Selbstkonsistenzgleichungen . . . . .	159
C.2	„Perturbative“ Divergenzen . . . . .	179
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>184</b>
	<b>Schlußwort</b>	<b>185</b>



# Einleitung

Zur Beschreibung der starken Wechselwirkung hat sich – spätestens mit dem Beweis ihrer Renormierbarkeit [39] – die Quantenchromodynamik (QCD) durchgesetzt; diese nach dem Prinzip der minimalen eichinvarianten Kopplung konstruierte Eichfeldtheorie zur lokalen  $SU(N_C)$ -Symmetriegruppe („Farbgruppe“) enthält neben  $N_F$  Typen von Fermionen („Quark-Flavours“) auch  $N_C^2 - 1$  Eichvektorfelder („Gluonen“), deren Selbstwechselwirkung die wesentlichen Eigenschaften dieser nicht-abelschen Theorie bestimmt.

Hierzu zählen wir vor allem das Verschwinden der effektiven Kopplung bei sehr großen Impulsen (bzw. sehr kleinen Abständen) für eine nicht zu große Zahl von Quark-Flavours – in der Literatur als „Asymptotische Freiheit“ bezeichnet [4] [22] – sowie die Nicht-Existenz von makroskopisch detektierbaren 1-Teilchen-Zuständen zu den grundlegenden Feldern der Theorie. Während die erste Eigenschaft eine störungstheoretische Behandlung typischer Hochenergie-Prozesse wie der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung erlaubt <sup>1</sup>, führt die zweite Eigenschaft auf die sogenannte „Confinement“-Hypothese, nach der asymptotisch detektierbare Teilchen nur als stabile Farbsingulett-Zustände, d. h. „farbneutral“, in Erscheinung treten dürfen, während Zustände in anderen Farbkanälen nur in Gestalt kurzlebiger Anregungen zu finden sind <sup>2</sup>.

In der rein gluonischen Theorie sowie im Rahmen der „Quenching“-Näherung für die Fermionen haben sich vor allem numerische Methoden im Rahmen der Gitter-Regularisierung bewährt <sup>3</sup>. Ein Versuch eines mehr *analytischen* Verständnisses des „Confinement“-Mechanismus in der Kontinuumstheorie muß dagegen unvermeidlich stets von den (nicht eichinvarianten) elementaren Vertex-Funktionen ausgehen, da in sich geschlossene dynamische Gleichungen für Meson- oder „Glue-Ball“-Amplituden, die auf die elementaren Korrelationsfunktionen *keinen* Bezug nehmen, *nicht* existieren.

In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, mit Hilfe der in  $g^2$  nichtanalytischen Massenskala  $\Lambda$  eine nichtperturbative Erweiterung der Störungsreihe zu etablieren [14] [36]. Die Verwendung des Dyson-Schwinger-Integralgleichungssystems für die amputierten, zusammenhängenden und 1-Teilchen-irreduziblen Greenschen Funktionen („Vertizes“) führt in diesem Zusammenhang auf ein Selbstkonsistenzproblem, dessen Lösung fundamentale nichtperturbative Eigenschaften der Theorie wie das Auftreten nicht-verschwindender Vakuumkondensate qualitativ beschreiben kann und auch eine Beschreibung des „Confinements“ erhoffen läßt.

Nachdem die entsprechende Analyse der einfachsten gluonischen Vertex-Funktion, der

---

<sup>1</sup>So läßt sich beispielsweise das einfache Skalenverhalten des Parton-Modells [23] direkt begründen.

<sup>2</sup>Obwohl dieses Verhalten im Rahmen von Jet-Experimenten [4] [23] durchaus qualitativ bestätigt werden konnte, steht ein formaler Beweis der Behauptung auf Seiten der Grundlagenforschung zur Zeit noch aus.

<sup>3</sup>Mit Hilfe von Hochtemperatur-Entwicklungen und Monte-Carlo-Simulationen ließen sich beispielsweise die String-Konstante sowie die Massen von Gluon-Bindungszuständen („Glue-Balls“) berechnen [21].

Gluon-Selbstenergie, in früheren Arbeiten bereits die enge Verbindung des Selbstkonsistenzproblems zu der Divergenzstruktur der Theorie aufgezeigt hat [32] [36], werden wir den Schwerpunkt dieser Arbeit auf die Einbeziehung der weiteren oberflächlich divergenten Grundvertizes und insbesondere des sehr komplizierten 4-Gluon-Vertex legen, wobei die in früheren Arbeiten [11] [32] erzielten Teilresultate überprüft und zum Teil korrigiert werden. Insbesondere tritt hierbei das im Prinzip schon 1973 beobachtete [7] [16] Phänomen der „kompensierenden“ Pole hervor, das die Verwendung eines erweiterten Begriffs der Irreduzibilität nahelegt. Dies führt zu Umordnungen der üblichen Form der Dyson-Schwinger-Gleichungen, die für den recht komplizierten Fall des 4-Gluon-Vertex hier erstmals angegeben werden. Das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist die Aufstellung von „erweiterten Feynman-Regeln“ d. h. die Bestimmung einer nichtperturbativ erweiterten nullten Störungsordnung für die oberflächlich divergenten Vertex-Funktionen bei einer unterschiedlichen Anzahl von Quark-Flavours<sup>4</sup>.

Die Arbeit besitzt im einzelnen folgende Gliederung:

Nach einer Einführung der graphischen Feynman-Regeln werden im ersten Kapitel die funktionalen Dyson-Schwinger-Gleichungen und Slavnov-Taylor-Identitäten für die oberflächlich divergenten Vertex-Funktionen formuliert. Zusätzlich stellen wir die bekannten *störungstheoretischen* 1-Schleifen-Resultate zusammen, die bei Auswertung der Dyson-Schwinger-Funktionale in erster *nichtperturbativer* Iteration d. h. bei Einsetzen der nichtperturbativ modifizierten nullten Ordnung als „Nebenprodukt“ wiederzufinden sind, solange die Ansätze für große Impulsskalen in die übliche Störungsreihe übergehen. Das erste Kapitel umfaßt somit prinzipiell bekanntes Material, das aber erstmalig vollständig und in einer einheitlichen Konvention für  $D$  euklidische Dimensionen zusammengestellt wird.

Die allgemeinen Eigenschaften der erweiterten Störungsreihe sowie ihr an Divergenzen gebundener Selbstkonsistenzmechanismus [36] werden im zweiten Kapitel vorgestellt. Nachdem in weiteren Arbeiten zu diesem Thema [17] [37] bereits Modifikationen in beliebiger Approximationsstufe  $r$  behandelt wurden, liegt unser Schwerpunkt auf den Parametrisierungen des 4-Gluon-Vertex in Stufe  $r = 1$ ; dessen komplizierte Struktur wird dabei erst durch die Auswahl eines reduzierten Satzes von Tensoren, die bezüglich der ersten Iteration ein abgeschlossenes System bilden, handhabbar.

Die Notwendigkeit der Einführung von kompensierenden Mandelstam-Polen im Oktett-Farbkanal der gluonischen sowie im Triplett-Farbkanal der fermionischen Amplituden und ihre Bedeutung werden im dritten Kapitel ausführlich diskutiert. Tatsächlich erfordert eine konsequente Durchführung dieses Konzeptes eine Berücksichtigung der oberflächlich konvergenten Vertex-Funktionen, deren selbstkonsistente Reproduktion im Rahmen des Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblems ebenfalls behandelt wird.

Die nachfolgenden vier Kapitel dienen der Zusammenstellung der 1-Schleifen-Resultate für die Vertex-Funktionen bei Berechnung der ersten nichtperturbativen Iteration auf Stufe  $r = 1$ . Ein Residuenvergleich der divergenten Beiträge mit den Ansätzen führt schließlich auf eine begrenzte Anzahl von polynomialen Selbstkonsistenzgleichungen für die unbestimmten Vertexparameter sowie auf gewisse Störungen der perturbativen Renormierungskonstanten, die einen bei niedriger Stufe  $r$  unvermeidlichen Approximationsfehler darstellen.

Bei der Suche nach speziellen Lösungen der aufgestellten Selbstkonsistenzgleichungen im Rahmen des achten Kapitels zeigt sich zunächst die unerwartete und auch begrifflich

---

<sup>4</sup>Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf masselose Fermionen; die Einbeziehung nichtverschwindender Strommassen wird in [17] ausführlich diskutiert.

bemerkenswerte Tatsache, daß die divergenten Teile der Dyson-Schwinger-Schleifen die Koeffizienten des  $(r = 1)$ -Approximantensystems nicht vollständig festlegen, sondern daß effektiv eine einparametrische Unterbestimmtheit des Selbstkonsistenzproblems verbleibt. Bei der weiteren Analyse erweist sich eine Abspaltung des umfangreichen Teilsystems für den 4-Gluon-Vertex als unverzichtbar und aufgrund der geringen Ankopplung an die übrigen Gleichungen auch durchaus als sinnvoll; allerdings entstehen so zum einen ein noch mehr unterbestimmtes Gleichungssystem, das auf eine Hinzunahme von Nebenbedingungen angewiesen ist, und zum anderen ein stark überbestimmtes System, das nur näherungsweise gelöst werden kann.

Es ist überaus bemerkenswert und angesichts der noch sehr eingeschränkten Form der  $(r = 1)$ -Approximanten völlig nichttrivial, daß erstmals Lösungen des Selbstkonsistenzproblems existieren, in denen alle dimensionslosen Koeffizienten – und damit die euklidischen Basisvertizes selber – *vollständig reell* sind. Dies ist ein erheblicher Fortschritt gegenüber dem noch sehr heuristischen und stark vereinfachten ersten Versuch in [14], wo noch kein vollständig reeller Lösungssatz gefunden werden konnte. Ebenso bemerkenswert ist die Beobachtung, daß in einem nicht unplausiblen Bereich bezüglich jener einparametrischen Unbestimmtheit sogar eine Lösung existiert, in der beide elementaren 2-Punkt-Funktionen komplex-konjugierte Polpaare aufweisen und damit kurzlebige Elementaranregungen beschreiben, was im Rahmen des hier verfolgten Zugangs ein wesentlicher Bestandteil der Beschreibung des „Confinements“ ist.

Für eine Überprüfung der gefundenen Parameterwerte wählen wir abschließend die eichinvarianten Kondensate der Theorie, deren nichtperturbativer Charakter durch ihre polynomiale Abhängigkeit von der Massenskala  $\Lambda$  sichtbar wird. Hierbei stellt schon die qualitative Übereinstimmung führender Beiträge auf niedriger Stufe der rationalen Approximation einen beachtlichen Erfolg dar.

Der mathematische Anhang dieser Arbeit enthält neben einer ausführlichen Darstellung des Funktionalintegral-Formalismus und der üblichen Formelsammlung zur Berechnung der Feynman-Graphen eine Subtraktionsmethode, mit deren Hilfe in der masselosen Theorie divergente Beiträge der Feynman-Diagramme *ohne* die übliche Feynman-Parametrisierung berechnet werden können.

Der zweite Anhang beschäftigt sich in knapper Form mit den Vakuumkondensaten der QCD, die ausführlich in [37] behandelt werden. Dabei stellen wir die divergenten Anteile in der jeweiligen führenden Schleifen-Ordnung zusammen und formulieren zusätzlich Nebenbedingungen, die sich aus den Bewegungsgleichungs-Kondensaten ergeben und prinzipiell zur Fixierung spezieller Lösungen des unterbestimmten Gleichungssystems geeignet sind.

Im dritten Anhang werden abschließend die überaus länglichen Resultate zu dem Selbstkonsistenzproblem des 4-Gluon-Vertex notiert. Wir beschränken uns hierbei auf die kompakte Form sämtlicher Selbstkonsistenzgleichungen, deren Anordnung der zugehörigen Farb- und Lorentz-Struktur entspricht, und die divergenten Anteile der verbleibenden Integrale, die aufgrund ihres Verhaltens im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  als *perturbative* Divergenzen zu behandeln sind.



# Kapitel 1

## Grundlagen der Kontinuums-QCD

### 1.1 Konventionen und Notationen

Wir beginnen mit der Wirkung der Quantenchromodynamik im vierdimensionalen euklidischen Ortsraum [6] [22] [29]:

$$S_E [A, \bar{\chi}, \chi, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \left( \mathcal{L}_V(x) + \mathcal{L}_G(x) + \mathcal{L}_F(x) \right) \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnen

$$\mathcal{L}_V(x) := -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x), \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_G(x) := -\frac{1}{2\xi} \left( \partial^\mu A_a^\mu(x) \right)^2 + \left( \partial^\mu \bar{\chi}_a(x) \right) \mathcal{D}_{ab}^\mu \chi_b(x), \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_F(x) := -\sum_{f=1}^{N_F} \text{tr} \left\{ \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left( i \gamma^\mu \mathcal{D}^{\mu ij} + m_{(f)} \delta^{ij} \right) \psi_{(f)}^j(x) \right\} \quad (1.4)$$

die Lagrangedichten des Yang-Mills-Feldes, der kovarianten Eichfixierung mit den Faddeev-Popov-Geistfeldern sowie der  $N_F$  verschiedenen minimal gekoppelten Fermionfelder (Quark-Flavours) [41]. Der nicht-abelsche Feldstärke-Tensor des Eichfeldes ist gegeben durch

$$G_a^{\mu\nu}(x) := \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + g_0 f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x), \quad (1.5)$$

während die kovarianten Ableitungen im Farbraum der adjungierten Darstellung bzw. der Fundamental-Darstellung durch

$$\mathcal{D}_{ab}^\mu := \delta_{ab} \partial^\mu - g_0 f_{abc} A_c^\mu(x) \quad (1.6)$$

und

$$\mathcal{D}^{\mu ij} := \delta^{ij} \partial^\mu - i g_0 \left( T_a \right)^{ij} A_a^\mu(x) \quad (1.7)$$

definiert sind. Dabei bezeichnet  $g_0$  den nackten Kopplungsparameter, der sich in vier Raum-Zeit-Dimensionen als dimensionslos erweist.

Näheres zu den Strukturkonstanten und den Generatoren der  $SU(N_C)$ -Eichgruppe findet man im mathematischen Anhang dieser Arbeit. Die Diracschen  $\gamma$ -Matrizen im Euklidischen erfüllen die Antikommutator-Relation

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = -2 \delta^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}. \quad (1.8)$$

Die Diracsche Einheitsmatrix wird im folgenden unterdrückt; sie ist im Rahmen der Feynman-Regeln des folgenden Abschnitts und bei den Ansätzen des zweiten Kapitels im Fermionsektor gegebenenfalls zu ergänzen.

Aus dem erzeugenden Funktional

$$Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] := \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - S_E [A, \bar{\chi}, \chi, \bar{\psi}, \psi] - j_E [A, \dots; J, \dots] \right\} \quad (1.9)$$

mit dem Funktional der Quellen

$$j_E [A, \dots; J, \dots] := \int d^4x \left( J_a^\mu(x) A_a^\mu(x) + \bar{\chi}_a(x) \omega_a(x) + \bar{\omega}_a(x) \chi_a(x) + \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr} \left\{ \left( \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \eta_{(f)}^i(x) + \bar{\eta}_{(f)}^i(x) \psi_{(f)}^i(x) \right) \right\} \right) \quad (1.10)$$

lassen sich im Pfadintegral-Formalismus wie üblich die Greenschen Funktionen der Feldtheorie durch funktionales Ableiten nach einzelnen Quellen und anschließendes Nullsetzen aller Quellen gewinnen [22] [27]. Für die zeitgeordnete, fermionische 2-Punkt-Funktion (Ortsraum-Propagator) zum Flavour-Typ  $f$  erhalten wir beispielsweise:

$$S_{(f)}^{ij}(x, y) \equiv \langle \Omega | T[\bar{\psi}_{(f)}^i(x) \psi_{(f)}^j(y)] | \Omega \rangle = \frac{1}{Z_E [0, 0, 0, 0, 0]} \cdot \left( - \frac{\delta}{\delta \eta_{(f)}^i(x)} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{(f)}^j(y)} Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \quad (1.11)$$

Man beachte dabei den zusätzlichen Vorzeichenwechsel, der in dem Grassmann-wertigen Verhalten der Fermionfelder bzw. der zugehörigen Quellen begründet liegt. Für die Definition weiterer erzeugender Funktionale und Greenscher Funktionen im euklidischen Impulsraum sei wieder auf den mathematischen Anhang dieser Arbeit verwiesen.

Bekanntermaßen entwickeln einzelne Greensche Funktionen in vier Dimensionen Ultraviolett(UV)-Divergenzen, die in Verbindung mit einem Regularisierungsverfahren im Rahmen eines Renormierungsprozesses zu subtrahieren sind, um den physikalischen Observablen endliche Werte zuweisen zu können [6] [22]. Gegenstand dieser Arbeit sind die amputierten, zusammenhängenden und 1-Teilchen-irreduziblen Vertex-Funktionen („eigentliche Vertizes“), an denen sich die Divergenzstruktur der Theorie ablesen läßt. Im Rahmen der QCD erhalten wir folgenden Satz von oberflächlich divergenten Vertizes:

$$\Gamma_{sd} := \left\{ \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_2, \Gamma_3, \tilde{\Gamma}_3, \bar{\Gamma}_3, \Gamma_4 \right\} \quad (1.12)$$

Er besteht im einzelnen aus der Gluon-Selbstenergie, der Geist-Selbstenergie und den Fermion-Selbstenergien zu jedem Flavour-Typ

$$\Gamma_2 = -D^{-1}, \tilde{\Gamma}_2 = -\tilde{D}^{-1}, \bar{\Gamma}_2 = \left\{ \bar{\Gamma}_{2(f)} = -S_{(f)}^{-1} \mid f = 1, \dots, N_F \right\} \quad (1.13)$$

( $D$ ,  $\tilde{D}$  und  $S_{(f)}$  bezeichnen die zugehörigen Propagatoren der Felder) sowie dem 3-Gluon-Vertex, dem Geist-Gluon-Vertex, den Fermion-Gluon-Vertizes zu jedem Flavour-Typ

$$\bar{\Gamma}_3 = \left\{ \bar{\Gamma}_{3(f)} \mid f = 1, \dots, N_F \right\} \quad (1.14)$$

und dem 4-Gluon-Vertex. Dieser endliche Satz von Funktionen – im folgenden als „Basisvertizes“ bezeichnet – besitzt Gegenstücke der perturbativen nullten Ordnung („nackte Vertizes“), die sich nach eventuellen Symmetrisierungen direkt an der Wirkung ablesen lassen:

$$\Gamma^{(0)pert} := \left\{ \Gamma_2^{(0)}, \tilde{\Gamma}_2^{(0)}, \bar{\Gamma}_2^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}, \tilde{\Gamma}_3^{(0)}, \bar{\Gamma}_3^{(0)}, \Gamma_4^{(0)} \right\} \quad (1.15)$$

Die übrigen, oberflächlich konvergenten Vertex-Funktionen werden zu einem weiteren (unendlichen) Satz zusammengefaßt:

$$\Gamma_{sc} := \left\{ \tilde{\Gamma}_4, \bar{\Gamma}_4, \tilde{\tilde{\Gamma}}_4, \bar{\bar{\Gamma}}_4, \Gamma_5, \dots \right\} \quad (1.16)$$

Solange nicht die masselose Theorie behandelt wird, sollte auch hier jeder fermionische Vertex als Satz von  $N_F$  verschiedenen Vertex-Funktionen zu den entsprechenden Flavour-Typen verstanden werden.

Die Dynamik der Theorie läßt sich durch die sogenannten Dyson-Schwinger(D-S)-Gleichungen beschreiben, die für die Vertex-Funktionen ein unendliches, hierarchisch gekoppeltes System von nichtlinearen Funktionalgleichungen darstellen:

$$\Gamma_{sd} = \Gamma^{(0)pert} + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_{sd}} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma_{sd}, \Gamma_{sc} \right] \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_{sc}} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma_{sd}, \Gamma_{sc} \right] \quad (1.18)$$

Die vereinfachte Notation vernachlässigt alle Orts- oder Impulsabhängigkeiten und Indexstrukturen dieser Gleichungen, die im Impulsraum die Form von Integralgleichungen annehmen. Ihre speziellen Formen für die Basisvertizes der QCD werden in graphischer Notation im dritten Abschnitt dieses Kapitels eingeführt.

Abschließend formulieren wir die übliche perturbative Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit allein *divergente* Anteile der Dyson-Schwinger-Funktionale berücksichtigt werden müssen, beschränken wir uns hierbei auf die oberflächlich divergenten Vertizes und unterdrücken die Kennzeichnung ( $\Gamma \equiv \Gamma_{sd}$ ). Die Störungsreihen erhält man als Potenzreihen in dem Quadrat des Kopplungsparameters

$$\Gamma^{pert} = \lim_{p \rightarrow 0} \Gamma^{[p]pert} ;$$

$$\Gamma^{[p]pert} = \Gamma^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left( \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \right)^{p'} \Gamma^{(p')pert} \quad (1.19)$$

durch Iteration um die perturbative nullte Ordnung (1.15), wobei  $\Gamma^{(p)pert}$  die endlichen Strahlungskorrekturen der  $p$ -ten Störungsordnung bezeichnen. Der erste Iterationsschritt für die Gleichungen lautet beispielsweise:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma} \left[ \Gamma^{(0)pert} \right] \right\}_{R,\nu} = \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \Gamma^{(1)pert} + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.20)$$

Der Index  $R$  bezeichnet das Renormierungsschema <sup>1</sup>, das aus einem Verfahren zur Regularisierung und einer Subtraktionsvorschrift für die perturbativen Ultraviolett-Divergenzen in den Dyson-Schwinger-Funktionalen besteht. In dimensioneller Regularisierung, die sowohl die Lorentz-Invarianz wie auch die Eichinvarianz der Theorie respektiert, ist man gezwungen, eine Massenskala  $\nu_0$  einzuführen, damit die nackte Kopplung in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen dimensionslos bleibt <sup>2</sup>:

$$g_0 \longrightarrow g_0 \nu_0^\epsilon \quad (1.21)$$

Anschließend wird im Rahmen des Renormierungsprozesses die nackte Kopplung zugunsten einer skalenabhängigen renormierten Kopplung eliminiert ( $\nu$  beliebig!):

$$g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} = g^2(\nu) \nu^{2\epsilon} Z_\alpha(g^2(\nu); \epsilon) \quad (1.22)$$

Die Renormierungskonstante  $Z_\alpha$  ist in der 1-Schleifen-Ordnung durch

$$Z_\alpha(g^2(\nu); \epsilon) = 1 - \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \beta_0 \frac{1}{\epsilon} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.23)$$

gegeben, wobei  $\beta_0$  den ersten Koeffizienten der Renormierungsgruppen-Funktion

$$\beta(g(\nu)) = \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} \quad (1.24)$$

bezeichnet, für die die Störungstheorie in  $D = 4$  Dimensionen folgende Potenzreihe in der renormierten Kopplung liefert [22]:

$$\beta(g(\nu), \epsilon = 0) = -\beta_0 \frac{g^3(\nu)}{(4\pi)^2} - \beta_1 \frac{g^5(\nu)}{(4\pi)^4} + \mathcal{O}(g^7) \quad (1.25)$$

Im Rahmen der  $SU(N_C)$ -Eichtheorie mit  $N_F$  Fermion-Flavours ist der erste Koeffizient der  $\beta$ -Funktion durch

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F \quad (1.26)$$

gegeben und besitzt damit für  $N_C = 3$  und  $N_F \leq 16$  ein positives Vorzeichen, wie es einer asymptotisch freien Theorie entspricht [22]. Wir werden hierauf im letzten Abschnitt dieses Kapitels zurückkommen.

## 1.2 Wirkung und Feynman-Regeln im $D$ -dimensionalen, euklidischen Impulsraum

Das Wirkungs-Funktional der QCD (1.1) läßt sich mit Hilfe der Formeln zur Fourier-Transformation der Felder <sup>3</sup> unter Berücksichtigung der Dimensionsbetrachtung (1.21) im  $D$ -dimensionalen euklidischen Impulsraum formulieren, wobei die zum Teil symmetrisierten Koeffizienten die perturbative nullte Ordnung der Basisvertizes (1.15) im euklidischen Impulsraum darstellen:

<sup>1</sup>In Verbindung mit der dimensionellen Regularisierung wird meist das  $\overline{MS}$ -Schema bevorzugt.

<sup>2</sup>Der Massenfaktor  $\nu_0^\epsilon$  tritt in (1.20) wie in (1.17) und (1.18) nicht explizit auf; er dient dazu, die Massendimension der Impulsintegrale in den D-S-Funktionalen konstant zu halten (vergleiche (1.48)).

<sup>3</sup>Wir unterdrücken die in der Literatur übliche Kennzeichnung von Größen im Impulsraum [22].

$$\begin{aligned}
S_E [ A, \bar{\chi}, \chi, \bar{\psi}, \psi ] &= \\
&- \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_2^{(0) \mu_1 \mu_2} (q) A_{a_1}^{\mu_1} (-q) A_{a_2}^{\mu_2} (q) \\
&- \frac{1}{6} g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_3^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3} (q_1, q_2, -q_1 - q_2) \\
&\quad A_{a_1}^{\mu_1} (q_1) A_{a_2}^{\mu_2} (q_2) A_{a_3}^{\mu_3} (-q_1 - q_2) \\
&- \frac{1}{24} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \Gamma_4^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \\
&\quad A_{a_1}^{\mu_1} (q_1) A_{a_2}^{\mu_2} (q_2) A_{a_3}^{\mu_3} (q_3) A_{a_4}^{\mu_4} (-q_1 - q_2 - q_3) \\
&+ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_2^{(0) a_1 a_2} (q^2) \bar{\chi}_{a_1} (-q) \chi_{a_2} (q) \\
&+ g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_3^{(0) a_1 a_2 a_3 \mu_3} (q_1) \bar{\chi}_{a_1} (q_1) \chi_{a_2} (q_2) A_{a_3}^{\mu_3} (-q_1 - q_2) \\
&+ \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr} \left\{ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_{(f)}^i (-q) \bar{\Gamma}_{2(f)}^{(0) ij} (q) \psi_{(f)}^j (q) \right\} \\
&+ g_0 \nu_0^\epsilon \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr} \left\{ \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_{(f)}^i (q_1) \bar{\Gamma}_3^{(0) ij \mu_3} \right. \\
&\quad \left. \psi_{(f)}^j (q_2) A_{a_3}^{\mu_3} (-q_1 - q_2) \right\} \tag{1.27}
\end{aligned}$$

Die „nackten“ Vertizes werden im folgenden sowohl in analytischer Form als auch mit den zugehörigen graphischen Feynman-Regeln angegeben: Die nackten 2-Punkt-Vertizes oder nackten Selbstenergien stellen das Negativeinverse der entsprechenden nackten Propagatoren dar (vergleiche (1.13)):

$$\Gamma_2^{(0)} = -D^{(0)-1}, \quad \tilde{\Gamma}_2^{(0)} = -\tilde{D}^{(0)-1}, \quad \left\{ \bar{\Gamma}_{2(f)}^{(0)} = -S_{(f)}^{(0)-1} \mid f = 1, \dots, N_F \right\} \tag{1.28}$$

Die nackten Propagatoren sind identisch mit den 2-Punkt-Funktionen der entsprechenden freien Felder und lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned}
D^{(0) \mu\nu}_{ab} (p) &:= \delta_{ab} \left( \delta^{\mu\nu} \frac{1}{p^2} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^4} \right) \\
&\hat{=} \begin{array}{c} \mu, a \qquad \qquad \qquad \nu, b \\ \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \\ \longleftarrow \\ p \end{array} \tag{1.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(0)}_{ab}(p^2) &:= -\delta_{ab} \frac{1}{p^2} \\ &\hat{=} \begin{array}{c} a \qquad \qquad \qquad b \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\ \qquad \qquad \qquad p \end{array} \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} S_{(f)}^{(0)ij}(p) &:= -\delta^{ij} \left( \frac{1}{\not{p} + m_{(f)}} \right) = \delta^{ij} \left( \frac{\not{p} - m_{(f)}}{p^2 + m_{(f)}^2} \right) \\ &\hat{=} \begin{array}{c} i \qquad \qquad \qquad j \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\ \qquad \qquad \qquad p \end{array} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Die übrigen nackten Vertizes lauten in analytischer und graphischer Form:

- Nackter 3-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{(0)\mu\nu\rho}(p, q, r) &:= -i f_{abc} \left( \begin{aligned} &\delta^{\mu\nu} (p - q)^\rho \\ &+ \delta^{\nu\rho} (q - r)^\mu \\ &+ \delta^{\rho\mu} (r - p)^\nu \end{aligned} \right) \\ &\hat{=} \begin{array}{c} \rho, c \\ \text{---} \leftarrow \bullet \text{---} \\ \mu, a \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\ \nu, b \end{array} \end{aligned} \quad (1.32)$$

- Nackter Geist-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_3^{(0)\mu}_{abc}(p) &:= i f_{abc} p^\mu \\ &\hat{=} \begin{array}{c} \mu, c \\ \text{---} \leftarrow \bullet \text{---} \\ \leftarrow \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\ p \qquad \qquad \qquad b \end{array} \end{aligned} \quad (1.33)$$

- Nackter Fermion-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_3^{(0)ij\mu}_a &:= (T_a)^{ij} \gamma^\mu \\ &\hat{=} \begin{array}{c} \mu, a \\ \text{---} \leftarrow \bullet \text{---} \\ \leftarrow \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\ i \qquad \qquad \qquad j \end{array} \end{aligned} \quad (1.34)$$

- Nackter 4-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{(0)\mu\nu\rho\sigma}_{abcd} &:= -f_{abn} f_{cdn} \left( \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} \right) \\ &\quad - f_{acn} f_{dbn} \left( \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} \right) \\ &\quad - f_{adn} f_{bcn} \left( \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} \right) \\ &\hat{=} \begin{array}{c} \mu, a \qquad \qquad \qquad \sigma, d \\ \text{---} \leftarrow \bullet \text{---} \\ \nu, b \qquad \qquad \qquad \rho, c \end{array} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Die vertikalen Striche kennzeichnen die Amputation der äußeren Beine und werden auch bei der nachfolgenden graphischen Notation für die vollen Vertizes verwendet. Man beachte außerdem, daß der nackte Fermion-Gluon-Vertex (1.34) keine Abhängigkeit vom Flavour-Typ und ebenso wie der nackte 4-Gluon-Vertex (1.35) keine Impulsabhängigkeit besitzt.

Wir ergänzen schließlich die graphischen Feynman-Regeln für die vollen Propagatoren und Vertizes:

$$D_{ab}^{\mu\nu}(p) = \delta_{ab} D^{\mu\nu}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \mu, a \qquad \nu, b \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow \\ p \end{array} \quad (1.36)$$

$$\tilde{D}_{ab}(p^2) = \delta_{ab} \tilde{D}(p^2) \hat{=} \begin{array}{c} a \qquad b \\ \text{---} \blacktriangleleft \text{---} \\ \leftarrow \\ p \end{array} \quad (1.37)$$

$$S_{(f)}^{ij}(p) = \delta^{ij} S_{(f)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} i \qquad (f) \qquad j \\ \text{---} \blacktriangleleft \text{---} \\ \leftarrow \\ p \end{array} \quad (1.38)$$

Mit dem Transversal- und dem Longitudinal-Projektor

$$t^{\mu\nu}(p) = \delta^{\mu\nu} - l^{\mu\nu}(p) = \delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (1.39)$$

läßt sich der Gluon-Propagator ebenso wie seine nackte Struktur (1.29) bezüglich seiner Lorentz-Tensorstruktur zerlegen:

$$D^{\mu\nu}(p) = t^{\mu\nu}(p) D_T(p^2) + l^{\mu\nu}(p) D_L(p^2) \quad (1.40)$$

Für die vollen Vertizes mit  $n$  äußeren Beinen und einige spezielle 4-Punkt-Vertizes wählen wir folgende Notation:

$$\Gamma_n^{\mu_1 \dots \mu_n}_{a_1 \dots a_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \hat{=} \begin{array}{c} (1) \qquad \qquad \qquad (n) \\ \text{~~~~~} \qquad \qquad \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ (2) \qquad \qquad \qquad (3) \end{array} \quad (1.41)$$

$$\tilde{\Gamma}_n^{\mu_3 \dots \mu_n}_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) \hat{=} \begin{array}{c} (1) \qquad \qquad \qquad (n) \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ (2) \qquad \qquad \qquad (3) \end{array} \quad (1.42)$$

$$\bar{\Gamma}_{n(f)}^{l_1 l_2 \mu_3 \dots \mu_n}_{a_3 \dots a_n}(-p_1, p_2, \dots, p_n) \hat{=} \begin{array}{c} (1) \qquad \qquad \qquad (n) \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ \text{---} \blacktriangleleft \qquad \text{~~~~~} \\ (2) \qquad \qquad \qquad (3) \end{array} \quad (1.43)$$

$$\tilde{\Gamma}_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 \quad (p_1, p_2, p_3, p_4) \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} \text{(1)} \quad \text{(4)} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{(2)} \quad \text{(3)} \end{array} \quad (1.44)$$

$$\bar{\Gamma}_{4(f)} \quad a_1 a_2 \quad l_3 l_4 \quad (p_1, p_2, -p_3, p_4) \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} \text{(1)} \quad \text{(4)} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{(2)} \quad \text{(3)} \end{array} \quad (1.45)$$

$$\bar{\Gamma}_{4(ff')} \quad l_1 l_2 l_3 l_4 \quad (-p_1, p_2, -p_3, p_4) \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} \text{(1)} \quad \text{(4)} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{(2)} \quad \text{(3)} \end{array} \quad (1.46)$$

Grundsätzlich werden alle Impulse eines Vertex mit  $n$  äußeren Beinen als einlaufend gezählt; unter Berücksichtigung der Impulserhaltung definieren wir daher:

$$\{p\} := \{p_1, p_2, \dots, p_n \mid p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0\} \quad (1.47)$$

Allerdings wird jeder Impuls, der zu einem auslaufenden Fermionbein gehört, mit einem negativen Vorzeichen versehen. Der Grund für diese Konvention wird im dritten Kapitel deutlich werden.

Um die graphische Notation zu vereinfachen, wird die Kennzeichnung der amputierten Beine in Feynman-Diagrammen, die durch Propagatoren verbundene Vertizes enthalten, weggelassen. Bei der Umsetzung der analytischen Form in die graphische Notation impliziert jede geschlossene Schleife ein Impulsintegral der Form

$$\nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \quad (1.48)$$

Die üblichen Symmetriefaktoren für geschlossene Schleifen

- $1/(n!)$  für  $n$  äquivalente innere Linien ,
- $1/2$  für jede „Tadpole“-Schleife ,
- $-1$  für jede geschlossene Geist- oder Fermion-Schleife

werden dagegen ebenso wie Potenzen des nackten Kopplungsparameters in allen Feynman-Diagrammen der nachfolgenden Dyson-Schwinger-Gleichungen explizit angegeben.

### 1.3 Die Dyson-Schwinger-Integralgleichungen für die Basisvertizes

#### 1.3.1 Selbstenergie-Gleichungen

Die exakte Dyson-Schwinger-Gleichung für die Gluon-Selbstenergie bzw. den negativ-inversen Gluon-Propagator lautet in graphischer Notation <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
 - \left( \text{wavy line} \right)^{-1} &= - \left( \text{wavy line} \right)^{-1} \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \left[ \text{wavy line} \text{ with } \Gamma_3 \text{ loop} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \left[ \text{wavy line} \text{ with tadpole} \right] \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \cdot \left[ \text{wavy line} \text{ with } T_4 \text{ loop} \right] \\
 &- g_0^2 \cdot \left[ \text{wavy line} \text{ with } \tilde{\Gamma}_3 \text{ loop} \right] \\
 &- g_0^2 \cdot \sum_{f=1}^{N_F} \left[ \text{wavy line} \text{ with } \bar{\Gamma}_{3(f)} \text{ loop} \right]
 \end{aligned}$$

(1.49)

Bei geschlossenen Fermion-Schleifen ist hier wie im folgenden die Spur über Spinorindizes und Farbindizes der Fundamental-Darstellung zu bilden. Die 4-Gluon-Amplitude  $T_4$  des 2-Schleifen-Terms ist vollkommen bose-symmetrisch und die einzige amputierte,

<sup>4</sup>Die analytische Form dieser Gleichung findet sich im mathematischen Anhang dieser Arbeit. Für die Dyson-Schwinger-Gleichungen der übrigen gluonischen Vertizes verzichten wir auf eine analytische Darstellung und verweisen auf die vorliegenden Feynman-Regeln.



1.3.2 Gleichungen für die 3-Punkt-Vertizes

Während die Integralgleichung für die Gluon-Selbstenergie (1.49) aufgrund der Impulserhaltung effektiv bose-symmetrisch ist, zeichnen die nachfolgenden Gleichungen das von links einlaufende Bein durch seine Ankopplung an einen *nackten* Vertex in jedem Diagramm aus. Die exakte Dyson-Schwinger-Gleichung für den 3-Gluon-Vertex lautet in graphischer Notation:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } \Gamma_3 \text{ (circle with 3 external wavy lines)} = \text{Diagram 2: } \text{Vertex} \text{ (black dot with 3 external wavy lines)} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{Diagram 3: } \mathcal{T}_{4,s} \text{ (loop with 4 wavy lines and 1 external wavy line)} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{Diagram 4: } \Gamma_3 \text{ (circle with 3 external wavy lines, one loop)} \\
 & + 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 3) \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \cdot \text{Diagram 5: } \mathcal{T}_{3,2} \text{ (loop with 3 wavy lines and 2 external wavy lines)} \\
 & - g_0^2 \cdot \text{Diagram 6: } \tilde{\mathcal{T}}_{4,s} \text{ (loop with 4 wavy lines and 1 external wavy line, dashed lines)} \\
 & - g_0^2 \cdot \sum_{f=1}^{N_F} \text{Diagram 7: } \tilde{\mathcal{T}}_{4,s(f)} \text{ (loop with 4 wavy lines and 1 external wavy line, solid lines with } (f) \text{ labels)}
 \end{aligned}$$

(1.53)

Die 4-Punkt-Amplituden  $\mathcal{T}_{4,s}$ ,  $\tilde{\mathcal{T}}_{4,s}$  und  $\bar{\mathcal{T}}_{4,s}$  fassen diejenigen Anteile der zugehörigen amputierten und zusammenhängenden Greenschen Funktionen zusammen, die im „horizontalen“ Kanal die Eigenschaft der 1-Teilchen-Irreduzibilität besitzen, und lauten in der bekannten schematischen Notation:

$$\mathcal{T}_{4,s} := \Gamma_4 + A_{4,u} + A_{4,t} = T_4 - A_{4,s} \quad (1.54)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{4,s} := \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{A}_{4,u} + \tilde{A}_{4,t} = \tilde{T}_4 - \tilde{A}_{4,s} \quad (1.55)$$

$$\bar{\mathcal{T}}_{4,s(f)} := \bar{\Gamma}_{4(f)} + \bar{A}_{4,u(f)} + \bar{A}_{4,t(f)} = \bar{T}_{4(f)} - \bar{A}_{4,s(f)} \quad (1.56)$$

Auch die 1-Teilchen-Austauschgraphen  $\tilde{A}_{4,i}$  und  $\bar{A}_{4,i}$  stellen Kombinationen der Basisvertizes dar, die in schematischer Form im mathematischen Anhang formuliert werden.

Die 5-Gluon-Amplitude  $\mathcal{T}_{3,2}$  des 2-Schleifen-Terms in (1.53) enthält von der vollen 5-Gluon-Amplitude nur Terme, die nach Einsetzen keine 1-Teilchen-reduziblen Graphen liefern, und läßt sich in überschaubarer Form graphisch darstellen:

$$\mathcal{T}_{3,2} = T_5 - T_4 \text{---} \Gamma_3 \quad (1.57)$$

Bei den Dyson-Schwinger-Gleichungen für den Geist-Gluon-Vertex und den Fermion-Gluon-Vertex sind prinzipiell drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, die jeweils verschiedene Beine der Vertizes auszeichnen; im Geistsektor formulieren wir jedoch nur die Gleichung, die das auslaufende Geistbein hervorhebt:

$$\tilde{\Gamma}_3 = \text{tree-level vertex} + g_0^2 \cdot \text{loop diagram} \quad (1.58)$$

Hierbei wird mit der 4-Punkt-Amplitude  $\tilde{\mathcal{T}}_{4,t}$  ein neuer „horizontaler“ Kanal ausgezeichnet, der einer inneren Geistlinie entspricht (vergleiche (1.55)):

$$\tilde{\mathcal{T}}_{4,t} := \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{A}_{4,s} + \tilde{A}_{4,u} = \tilde{T}_4 - \tilde{A}_{4,t} \quad (1.59)$$

Die anderen beiden Gleichungen für den Geist-Gluon-Vertex werden hier nicht im einzelnen aufgeführt, da der gesamte Geistsektor im Rahmen dieser Arbeit nicht modifiziert wird und sich damit die entsprechenden 1-Schleifen-Resultate mit denjenigen der perturbativen Iteration als identisch erweisen.

Im Fermionsektor lautet die erste Form der Dyson-Schwinger-Gleichung zum jeweiligen Flavour-Typ  $f$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{3(f)} &= \text{tree-level vertex} + g_0^2 \cdot \text{loop diagram} \\
 & \quad + g_0^2 \cdot \text{loop diagram} \quad (1.60)
 \end{aligned}$$

Wiederum zeichnet die 4-Punkt-Amplitude  $\bar{T}_{4,t}$  einen neuen „horizontalen“ Kanal aus, der diesmal einer inneren Fermionlinie entspricht (vergleiche (1.56)):

$$\bar{T}_{4,t(f)} := \bar{\Gamma}_{4(f)} + \bar{A}_{4,s(f)} + \bar{A}_{4,u(f)} = \bar{T}_{4(f)} - \bar{A}_{4,t(f)} \quad (1.61)$$

Die entsprechende Gleichung mit entgegengesetzter Pfeilrichtung liefert – wie bei der Fermion-Selbstenergie – keine neuen Informationen, falls die Fermion-Gluon-Vertizes invariant unter Ladungskonjugations-Transformationen sind („ $\mathcal{C}$ -Invarianz“) [17]:

$$\begin{aligned}
 U(\mathcal{C}) \left( \bar{\Gamma}_{3(f)}(-p, q, p - q) \right)^T \left( U(\mathcal{C}) \right)^{-1} &= -\bar{\Gamma}_{3(f)}(q, -p, p - q) \quad ; \\
 U(\mathcal{C}) &:= i \gamma^2 \gamma^0 \quad (1.62)
 \end{aligned}$$

Die dritte Form der Gleichung zeichnet das Gluonbein aus und ist nur bei Iteration um die perturbative nullte Ordnung zu (1.60) identisch:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{3(f)} &= \text{tree-level vertex} + \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{loop diagram} \\
 & \quad + \frac{1}{6} g_0^4 \cdot \text{loop diagram}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - g_0^2 \cdot \text{Diagram 1} \\
& - g_0^2 \cdot \sum_{f'=1}^{N_F} \text{Diagram 2}
\end{aligned}
\tag{1.63}$$

The diagrams in (1.63) are:

- Diagram 1:** A 4-point vertex labeled  $\bar{\bar{\Gamma}}_{4(f)}$  with two incoming and two outgoing fermion lines. A dashed loop with arrows is attached to the vertex.
- Diagram 2:** A 4-point vertex labeled  $\bar{\bar{T}}_{4,s(f'f)}$  with two incoming and two outgoing fermion lines. Two solid loops with arrows, labeled  $(f')$ , are attached to the vertex.

Bei der Bezeichnung der 4-Punkt-Amplituden in (1.63) wurde ausgenutzt, daß aufgrund der Geistzahl- und der Fermionzahl-Erhaltung die Amplitude  $\bar{\bar{T}}_4$  mit dem 4-Punkt-Vertex  $\bar{\bar{\Gamma}}_4$  übereinstimmt. Mit Hilfe der Skelettgraphen-Entwicklungen<sup>6</sup> erhalten wir im einzelnen:

$$\bar{\bar{T}}_{4,s(f)} := \bar{\bar{T}}_{4(f)} - \bar{\bar{A}}_{4,s(f)} = \bar{\bar{\Gamma}}_4 \tag{1.64}$$

$$\bar{\bar{T}}_{4,s(f'f)} := \bar{\bar{T}}_{4(f'f)} - \bar{\bar{A}}_{4,s(f'f)} = \bar{\bar{\Gamma}}_{4(f'f)} - \bar{\bar{A}}_{4,t(f'f)} \tag{1.65}$$

Die Fermionzahl-Erhaltung ist auch dafür verantwortlich, daß in der 4-Fermion-Amplitude  $\bar{\bar{T}}_4$  effektiv nur zwei 1-Teilchen-Austauschgraphen existieren. Das negative Vorzeichen des 1-Gluon-Austauschgraphen  $\bar{\bar{A}}_{4,t(f'f)}$  in (1.65) wird durch die Grassmann-Eigenschaften der fermionischen Feldvariablen im Rahmen des Funktionalintegral-Formalismus verursacht und korrigiert das „falsche“ Vorzeichen des 1-Schleifen-Funktional, falls die Skelettgraphen-Entwicklung eingesetzt wird.

Die 5-Punkt-Amplitude  $\bar{\bar{T}}_{3,2}$  des 2-Schleifen-Terms in (1.63) läßt sich analog zu (1.57) zerlegen und lautet in graphischer Form:

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5}
\tag{1.66}$$

The diagrams in (1.66) are:

- Diagram 3:** A 5-point vertex labeled  $\bar{\bar{T}}_{3,2(f)}$  with three incoming and two outgoing fermion lines.
- Diagram 4:** A 5-point vertex labeled  $\bar{\bar{T}}_{5(f)}$  with three incoming and two outgoing fermion lines.
- Diagram 5:** A 4-point vertex labeled  $T_4$  with two incoming and two outgoing fermion lines, connected to a 3-point vertex labeled  $\bar{\bar{\Gamma}}_{3(f)}$  with one incoming and two outgoing fermion lines by a wavy gluon line.

Ebenso wie bei der Gluon-Selbstenergie werden wir uns auch für die Gleichungen der 3-Punkt-Vertizes (1.53) bzw. (1.63) im Rahmen dieser Arbeit auf die 1-Schleifen-Ordnung beschränken. Allerdings erlangen die Zerlegungen der 5-Punkt-Amplituden (1.57) und (1.66) im Zusammenhang mit den „Kompensierenden Polen“ des dritten Kapitels besondere Bedeutung.

<sup>6</sup>Sämtliche Entwicklungen sind in schematischer Form im mathematischen Anhang zusammengestellt.

1.3.3 Dyson-Schwinger-Gleichung für den 4-Gluon-Vertex

Die Dyson-Schwinger-Gleichung für den 4-Gluon-Vertex – den höchsten oberflächlich divergenten Vertex – verlangt bei weitem den größten Aufwand bei der Bestimmung der 1-Schleifen-Divergenzen. Die exakte Gleichung lautet in graphischer Notation:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4 &= \text{tree-level vertex} \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{tadpole with gluon loop } T_{2,3} \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{tadpole with ghost loop } T_{4,s} \\
 &+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \cdot \text{tadpole with ghost and gluon loops } T_{3,3} \\
 &- g_0^2 \cdot \text{tadpole with ghost and ghost loops } \tilde{T}_{2,3} \\
 &- g_0^2 \cdot \sum_{f=1}^{N_F} \text{tadpole with ghost and fermion loops } \tilde{T}_{2,3(f)}
 \end{aligned}$$

(1.67)

Die 5-Punkt-Amplituden  $\mathcal{T}_{2,3}$ ,  $\tilde{\mathcal{T}}_{2,3}$  und  $\bar{\mathcal{T}}_{2,3}$  sind nicht mit denen aus (1.53) oder (1.63) zu verwechseln, da ein anderer der zehn möglichen Kanäle ausgezeichnet wird. Für die 5-Gluon-Amplitude  $\mathcal{T}_{2,3}$  erhalten wir folgende graphische Zerlegung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{2,3} &= T_5 - \Gamma_3 \text{---} \Gamma_4 \\
 &\quad - T_4 \text{---} \Gamma_3 + 2 \text{ ZYKL. PERM. (345)}
 \end{aligned}
 \tag{1.68}$$

Die anderen beiden 5-Punkt-Amplituden  $\tilde{\mathcal{T}}_{2,3}$  und  $\bar{\mathcal{T}}_{2,3}$  besitzen ähnliche Entwicklungen, die sich wie oben am einfachsten durch Modifikation der zugehörigen  $T_5$ -Amplituden formulieren lassen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{T}}_{2,3} &= \tilde{T}_5 - \tilde{\Gamma}_3 \text{---} \Gamma_4 \\
 &\quad - \tilde{T}_4 \text{---} \Gamma_3 + 2 \text{ ZYKL. PERM. (345)}
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{T}}_{2,3(f)} &= \bar{T}_{5(f)} - \bar{\Gamma}_{3(f)} \text{---} \Gamma_4 \\
 &\quad - \bar{T}_{4(f)} \text{---} \Gamma_3 + 2 \text{ ZYKL. PERM. (345)}
 \end{aligned}
 \tag{1.70}$$

Die Zerlegungen der vollen 5-Punkt-Amplituden nach irreduziblen Vertizes und Propagatoren sind wieder in schematischer Form im mathematischen Anhang zusammengefaßt. Eine Berechnung der 2-Schleifen-Terme in (1.67) läßt sich erneut im Rahmen dieser Arbeit nicht bewältigen. Wir verzichten daher darauf, die Skelettgraphen-Entwicklung der amputierten 6-Gluon-Amplitude  $\bar{\mathcal{T}}_{3,3}$  explizit zu formulieren, und wenden uns kurz der Bethe-Salpeter-Resummation für die 4-Gluon-Amplitude zu.

### 1.4 Die Bethe-Salpeter-Resummation

Alternativ zu den Dyson-Schwinger-Gleichungen, die eines der gleichberechtigten Beine auszeichnen, läßt sich für die 4-Punkt-Funktionen eine Zerlegung nach Beiträgen durchführen, die sich bezüglich der Eigenschaft der 2-Teilchen-Reduzibilität unterscheiden [15] [20]. Diese Methode führt auf die sogenannten „Bethe-Salpeter-Gleichungen“, die zwar ebenfalls eventuelle Bose-Symmetrien nur zum Teil berücksichtigen, aber dafür eventuelle „Crossing“-Symmetrien bezüglich der drei Mandelstam-Variablen respektieren.

Wir formulieren an dieser Stelle exemplarisch die Bethe-Salpeter-Integralgleichung für die in (1.54) eingeführte 4-Gluon-Amplitude  $\mathcal{T}_{4,s}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{4,s} &= K_s \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{Diagram 2} \\
 &- g_0^2 \cdot \text{Diagram 3} \\
 &- g_0^2 \cdot \sum_{f=1}^{N_F} \text{Diagram 4}
 \end{aligned}
 \tag{1.71}$$

Ähnliche Integralgleichungen lassen sich zusätzlich für die übrigen  $\mathcal{T}_4$ -Amplituden aufstellen, so daß ein gekoppeltes Gleichungssystem entsteht. Die Schwierigkeit bei der Auswertung dieses – auf den ersten Blick linearen – Gleichungssystems besteht in der Konstruktion der Bethe-Salpeter-Kerne ( $K_s, \bar{K}_s, \dots$ ), die sämtliche im horizontalen Kanal 1-Teilchen-

und 2-Teilchen-irreduziblen Anteile der zugehörigen 4-Punkt-Amplituden zusammenfassen. Während in der Literatur meist eine unendliche Teilsummiation dieser Anteile („Leiter“-Näherung, „Blasen“-Näherung) vorgenommen wird [12] [20], führt eine weitere Reduzibilitätsanalyse jeweils auf eine Zerlegung, die eventuellen „Crossing“-Symmetrien der Vertizes besser entspricht [8] [18]. Diese lautet exemplarisch für die 4-Gluon-Amplitude in schematischer Notation:

$$\mathcal{T}_{4,s} = K_s + X_s \quad (1.72)$$

$$K_s = M_4 + X_u + X_t + A_u + A_t + \sum B \quad (1.73)$$

Der vollständig bose-symmetrische und „crossing“-symmetrische Kern  $M_4$  besteht aus den in allen drei Kanälen 1-Teilchen- und 2-Teilchen-irreduziblen Anteilen der 4-Gluon-Amplitude  $T_4$  und kann bis auf Terme mit drei oder mehr Schleifen durch den nackten 4-Gluon-Vertex  $\Gamma_4^{(0)_{pert}}$  ersetzt werden. Neben den 1-Teilchen-Austauschgraphen tritt in der Zerlegung (1.73) die Summe aller „Boxgraphen“ auf; diese enthalten sämtliche Anteile, die in zwei verschiedenen Kanälen gleichzeitig 2-Teilchen-reduzibel sind, und spielen für die obige Gleichung die Rolle von Überzählungskorrekturen. Die Kanal-Amplitude  $X_s$  faßt die im  $s$ -Kanal 1-Teilchen-irreduziblen, aber 2-Teilchen-reduziblen Anteile der zugehörigen 4-Punkt-Amplitude zusammen und besitzt dieselbe partielle Bose-Symmetrie im horizontalen Kanal wie der entsprechende Bethe-Salpeter-Kern.

Das Auftreten der „Crossing“-Partner  $X_u$  und  $X_t$  in dem Bethe-Salpeter-Kern  $K_s$  macht die versteckte Nichtlinearität der gekoppelten Gleichungen deutlich, die das eigentliche Problem bei der Auswertung des Bethe-Salpeter-Gleichungssystems darstellt. Wir beschränken uns daher im Rahmen dieser Arbeit auf die Anwendung des Prinzips der „Kompensierenden Pole“ innerhalb des Bethe-Salpeter-Sektors sowie auf einige allgemeine Überlegungen zu dem entsprechenden Selbstkonsistenzproblem.

## 1.5 Slavnov-Taylor-Identitäten

Als Relikt der Eichsymmetrie der klassischen Lagrange-Dichte, die bekanntermaßen durch die Einführung der kovarianten Eichfixierung (1.3) gebrochen wird, besitzt die quantisierte nicht-abelsche Eichtheorie eine Invarianz unter den sogenannten Becchi-Rouet-Stora(BRS)-Transformationen (siehe Anhang A). Die Auswertung der Invarianz des erzeugenden Funktionals unter diesen Transformationen führt auf Beziehungen zwischen den Greenschen Funktionen der Theorie, die man als verallgemeinerte Ward-Identitäten oder Slavnov-Taylor(S-T)-Identitäten bezeichnet [2]. Diese wurden für die QCD zuerst von t’Hooft im Jahre 1971 im Zusammenhang mit der Renormierbarkeit von Yang-Mills-Theorien formuliert [39].

Mit der einfachsten Slavnov-Taylor-Identität

$$p^\mu D_{ab}^{\mu\nu}(p) = \delta_{ab} \xi \frac{p^\nu}{p^2} \quad (1.74)$$

behält der Longitudinal-Anteil des Gluon-Propagators seine störungstheoretische Form nullter Ordnung (siehe (1.40)) bei:

$$D_L(p^2) = \frac{\xi}{p^2} \quad (1.75)$$

Somit tragen allein die transversalen Freiheitsgrade die Dynamik der Theorie, und die Wahl der Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) erweist sich für nachfolgende Rechnungen als plausibel. Sie ermöglicht es, ein geschlossenes Dyson-Schwinger-Problem für Amplituden mit nur transversalen Gluonbeinen aufzustellen, für die die Anzahl der benötigten Tensorstrukturen und invarianten Funktionen sich erheblich reduziert.

Die Slavnov-Taylor-Identität für den (bezüglich des ersten Beins) longitudinal-projizierten 3-Gluon-Vertex lautet:

$$p_1^{\nu_1} \Gamma_3^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{c_1 c_2 c_3}(p_1, p_2, p_3) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_1^2)}{p_1^2} = -\Gamma_{2,T}(p_2) t^{\mu\nu_2}(p_2) \hat{G}^{\mu \nu_3}_{c_2 c_1 c_3}(p_2, p_1, p_3) - \Gamma_{2,T}(p_3) t^{\mu\nu_3}(p_3) \hat{G}^{\mu \nu_2}_{c_3 c_1 c_2}(p_3, p_1, p_2) \quad (1.76)$$

Die Hilfsamplitude  $\hat{G}$  erfüllt die Beziehung

$$-p^\mu \hat{G}^{\mu \nu}_{abc}(p, r, r') = \tilde{\Gamma}_3^{\nu}_{abc}(p, r, r')$$

und läßt sich mit Hilfe des nackten Hilfsvertex

$$\hat{G}^{(0)\mu \nu}_{abc} := -i f_{abc} \delta^{\mu\nu} \hat{=} \begin{array}{c} \nu, c \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu, a \\ \text{---} \\ b \end{array} \quad (1.77)$$

graphisch darstellen:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu, a \\ \text{---} \\ b \end{array} \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu, a \\ \text{---} \\ b \end{array} + g_0^2 \cdot \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu, a \\ \text{---} \\ b \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \nu, c \\ \text{---} \\ b \end{array} \quad (1.78)$$

Die 4-Punkt-Amplitude  $\tilde{\mathcal{T}}_{4,t}$  ist bereits im Zusammenhang mit der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Geist-Gluon-Vertex analysiert worden (siehe (1.59)).

Die Slavnov-Taylor-Identität für den longitudinal-projizierten Geist-Gluon-Vertex lautet:

$$p_3^{\nu_3} \tilde{\Gamma}_3^{\nu_3}_{c_1 c_2 c_3}(p_1, p_2, p_3) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_3^2)}{p_3^2} - p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_3^{\nu_2}_{c_1 c_3 c_2}(p_1, p_3, p_2) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_2^2)}{p_2^2} = \tilde{\Gamma}_2(p_1^2) \hat{F}_{c_1 c_2 c_3}(p_1, p_2, p_3) \quad (1.79)$$

Um die Hilfsamplitude  $\hat{F}$  graphisch darstellen zu können, definieren wir einen weiteren Hilfsvertex:

$$\hat{F}^{(0)}_{abc} := -i f_{abc} \hat{=} \begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ a \\ \text{---} \\ b \end{array} \quad (1.80)$$

Diese Konstruktion stellt formal die „nackte“ Struktur der Hilfsamplitude dar und ist im Gegensatz zu (1.77) *nicht* mit einem fundamentalen Vertex verknüpft, wie schon die fehlende Geistzahl-Erhaltung verdeutlicht. Die Hilfsamplitude  $\hat{F}$  lautet damit in graphischer Gestalt:

$$\hat{F} = \text{tree} + \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{loop} \quad (1.81)$$

Die 4-Punkt-Amplitude  $\tilde{T}'_4$  entsteht aus der 4-Punkt-Amplitude  $\tilde{T}_4$  durch eine Vertauschung zweier Beine <sup>7</sup>

$$\tilde{T}'_4 \text{ }_{a_1 a_2 a_3 a_4} (p_1, p_2, p_3, p_4) = - \tilde{T}_4 \text{ }_{a_1 a_3 a_2 a_4} (p_1, p_3, p_2, p_4) \quad , \quad (1.82)$$

wobei die  $\tilde{T}_4$ -Amplitude – analog zu der Entwicklung der  $\bar{T}_4$ -Amplitude in (1.65) – folgende Zerlegung nach den Basisvertizes besitzt <sup>8</sup>:

$$\tilde{T}_4 := \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{A}_{4,s} - \tilde{A}_{4,t} \quad (1.83)$$

Die Slavnov-Taylor-Identität für den longitudinal-projizierten Fermion-Gluon-Vertex lautet:

$$p_3^{\nu_3} \bar{\Gamma}_{3(f)} \text{ }^{l_1 l_2} \text{ }_{c_3} \nu_3 (-p_1, p_2, p_3) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_3^2)}{p_3^2} = \hat{C}_{(f)} \text{ }^{l_2} \text{ }_{c_3} \text{ }^{l_1} (p_2, p_3, -p_1) \bar{\Gamma}_{2(f)} (p_2) - \bar{\Gamma}_{2(f)} (p_1) \hat{C}'_{(f)} \text{ }^{l_1} \text{ }_{c_3} \text{ }^{l_2} (-p_1, p_3, p_2) \quad (1.84)$$

Mit den nackten Hilfsvertizes

$$\hat{C}^{(0)} \text{ }^i \text{ }_b \text{ }^k := - (T_b)^{ki} \hat{=} \text{diagram} \quad (1.85)$$

$$\hat{C}'^{(0)} \text{ }^i \text{ }_b \text{ }^k := - (T_b)^{ik} \hat{=} \text{diagram} \quad (1.86)$$

lauten die Hilfsamplituden in graphischer Form:

$$\hat{C}_{(f)} = \text{tree} + g_0^2 \cdot \text{loop} \quad (1.87)$$

<sup>7</sup>Der Vorzeichenwechsel liegt in dem Grassmann-wertigen Verhalten der entsprechenden Funktionalableitungen (siehe Anhang A.1) begründet.

<sup>8</sup>Der 1-Teilchen-Austauschgraph  $\tilde{A}_{4,u}$  existiert aus Gründen der Geistzahl-Erhaltung nicht.

$$(1.88)$$

Die Fermion-Geist-Amplitude  $\bar{T}'_4$  ist durch folgende Identität festgelegt:

$$\bar{T}'_{4(f) a_1 a_2}{}^{ji}(p_1, p_2, p_4, -p_3) = -\bar{T}'_{4(f) a_1 a_2}{}^{ij}(p_1, p_2, -p_3, p_4) \quad (1.89)$$

Abschließend formulieren wir (der Vollständigkeit halber) die Slavnov-Taylor-Identität für den (bezüglich des ersten Beins) longitudinal-projizierten 4-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} p_1^{\nu_1} \Gamma_4{}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{c_1 c_2 c_3 c_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_1^2)}{p_1^2} = \\ \Gamma_3{}^{\mu \nu_3 \nu_4}{}_{ac_3 c_4}(p_1 + p_2, p_3, p_4) t^{\mu\nu}(p_1 + p_2) \hat{G}{}^{\nu}{}_{ac_1 c_2}{}^{\nu_2}(-p_1 - p_2, p_1, p_2) \\ + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \\ + \Gamma_{2,T}(p_2) t^{\mu\nu_2}(p_2) \\ \left( \hat{H}{}^{\mu}{}_{c_2 c_1 c_3 c_4}{}^{\nu_3 \nu_4}(p_2, p_1, p_3, p_4) \right. \\ + \hat{G}{}^{\nu}{}_{c_2 a c_4}{}^{\nu_4}(p_2, p_1 + p_3, p_4) \tilde{D}(u) \tilde{\Gamma}_3{}^{\nu_3}{}_{ac_1 c_3}(-p_1 - p_3, p_1, p_3) \\ \left. + \hat{G}{}^{\nu}{}_{c_2 a c_3}{}^{\nu_3}(p_2, p_1 + p_4, p_3) \tilde{D}(t) \tilde{\Gamma}_3{}^{\nu_4}{}_{ac_1 c_4}(-p_1 - p_4, p_1, p_4) \right) \\ + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Die Hilfsamplitude  $\hat{H}$  erfüllt

$$-p^\mu \hat{H}{}^{\mu}{}_{abcd}{}^{\nu\rho}(p, r, r', r'') = \tilde{\Gamma}_4{}^{\nu\rho}{}_{abcd}(p, r, r', r'')$$

und lautet mit (1.77) in graphischer Form:

$$(1.91)$$

Die 5-Punkt-Amplitude  $\tilde{T}'_5$  kann analog zu (1.68) oder (1.69) bezüglich der Vertex-Funktionen und Propagatoren zerlegt werden. Da sich die vorliegende Schleife in (1.91) mit dem üblichen „Power-counting“ als oberflächlich konvergent erweist, soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

## 1.6 1-Schleifen-Renormierung und „laufende“ Kopplung

Die UV-Divergenzen der Greenschen Funktionen, die bei der Auswertung der Dyson-Schwinger-Funktionale in erster *perturbativer* Iteration auftreten, nehmen in dimensioneller Regularisierung mit  $D = 4 - 2\epsilon$  die Form von Polen im Regularisierungsparameter  $\epsilon$  an. Für die Basisvertizes der QCD finden wir in [22] folgende perturbative Divergenzen der 1-Schleifen-Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_2}^{(\nu_1\nu_2)}(a_1a_2)(p; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \delta_{a_1a_2} \left( p^2 \delta^{\nu_1\nu_2} - p^{\nu_1} p^{\nu_2} \right) \\ &\cdot \left( \frac{13N_C}{6} - \frac{N_C}{2} \xi - \frac{2}{3} N_F \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_3}^{(\nu_1\nu_2\nu_3)}(a_1a_2a_3)(\{p\}; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Gamma_3^{(0)}{}_{a_1a_2a_3}{}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\{p\}) \\ &\cdot \left( -\frac{17N_C}{12} + \frac{3N_C}{4} \xi + \frac{2}{3} N_F \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_4}^{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)}(a_1a_2a_3a_4)(\{p\}; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Gamma_4^{(0)}{}_{a_1a_2a_3a_4}{}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\{p\}) \\ &\cdot \left( -\frac{2N_C}{3} - N_C \xi + \frac{2}{3} N_F \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\tilde{\Gamma}_2}(a_1a_2)(p^2; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \tilde{\Gamma}_2^{(0)}{}_{a_1a_2}(p^2) \\ &\cdot \left( \frac{3N_C}{4} + \frac{N_C}{4} \xi \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\tilde{\Gamma}_3}^{(\nu_3)}(a_1a_2a_3)(\{p\}; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \tilde{\Gamma}_3^{(0)}{}_{a_1a_2a_3}{}^{\nu_3}(p_1) \\ &\cdot \left( \frac{N_C}{2} \xi \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\tilde{\Gamma}_{2(f)}}^{(l_1l_2)}(p; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \delta^{l_1l_2} \left( \not{p} \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \xi \right. \\ &\left. + m_{(f)} \left( \frac{3N_C^2 - 3}{2N_C} + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \xi \right) \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\tilde{\Gamma}_{3(f)}}^{(l_1l_2)(\nu_3)}(a_3)(\{p\}; \epsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \tilde{\Gamma}_3^{(0)}{}_{a_3}{}^{l_1l_2\nu_3} \\ &\cdot \left( \frac{3N_C}{4} + \frac{3N_C^2 - 2}{4N_C} \xi \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g_0^4; \epsilon^0) \end{aligned} \quad (1.98)$$

Man erkennt sofort, daß – zumindest in der 1-Schleifen-Ordnung – durch eine einfache Subtraktion divergender und in den Impulsen höchstens polynomialer Beiträge auf Ebene

der Lagrange-Dichte („Counter“-Terme) sämtliche perturbativen Divergenzen beseitigt werden können. Während diese Methode der Subtraktion in *jeder* Schleifen-Ordnung die allgemeine Eigenschaft der Renormierbarkeit schon sicherstellt, wird in der Literatur [6] [22] als Alternative häufig die multiplikative Renormierung der Vertex-Funktionen – bzw. äquivalent dazu der Felder und Parameter der Theorie – gewählt ( $g = g(\nu) \equiv g^{(R)}$ ):

$$A_a^\mu = Z_3^{1/2}(g^2; \epsilon) A_a^{(R)\mu} \quad (1.99)$$

$$\bar{\chi}_a = \tilde{Z}_3^{1/2}(g^2; \epsilon) \bar{\chi}_a^{(R)} \quad (1.100)$$

$$\chi_a = \tilde{Z}_3^{1/2}(g^2; \epsilon) \chi_a^{(R)} \quad (1.101)$$

$$\bar{\psi}_{(f)}^i = Z_2^{1/2}(g^2; \epsilon) \bar{\psi}_{(f)}^{(R)i} \quad (1.102)$$

$$\psi_{(f)}^i = Z_2^{1/2}(g^2; \epsilon) \psi_{(f)}^{(R)i} \quad (1.103)$$

$$g_0 \nu_0^\epsilon = Z_\alpha^{1/2}(g^2; \epsilon) g(\nu) \nu^\epsilon \quad (1.104)$$

$$\xi = Z_3(g^2; \epsilon) \xi^{(R)} \quad (1.105)$$

$$m_{(f)} = Z_m(g^2; \epsilon) m_{(f)}^{(R)} \quad (1.106)$$

Hierbei werden die ursprünglich in der Lagrange-Dichte auftretenden Felder und Parameter als unrenormierte oder „nackte“ Größen und die divergenten Normierungsfaktoren  $Z$  als Renormierungskonstanten der Felder bzw. Parameter bezeichnet. Aufgrund der Universalität des Kopplungsparameters ist trotz verschiedener Wechselwirkungsterme in der Lagrange-Dichte nur eine Kopplungs-Renormierungskonstante (1.104) erforderlich [22]. Die Renormierung des Eichparameters (1.105) ist notwendig, da die perturbative Divergenz der Gluon-Selbstenergie (1.92) eine rein transversale Lorentz-Struktur besitzt, wie es die Slavnov-Taylor-Identität des Gluon-Propagators (1.74) verlangt. Auf ähnliche Weise fängt die Renormierung der Fermionmassen (1.106) die Asymmetrie der perturbativen Divergenz (1.97) bezüglich Impulsanteil und Massenanteil auf.

Die fünf unabhängigen Renormierungskonstanten der  $SU(N_C)$ -Eichtheorie mit der Zahl  $N_F$  von Quark-Flavours sind in der 1-Schleifen-Ordnung direkt an den divergenten Beiträgen der Vertex-Funktionen (1.92 – 1.98) abzulesen und lauten explizit:

$$Z_3(g^2; \epsilon) = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{13N_C}{6} - \frac{N_C}{2} \xi - \frac{2}{3} N_F + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.107)$$

$$\tilde{Z}_3(g^2; \epsilon) = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{N_C}{4} - \frac{N_C}{4} \xi + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.108)$$

$$Z_2(g^2; \epsilon) = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \xi + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.109)$$

$$Z_m(g^2; \epsilon) = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{3N_C^2 - 3}{2N_C} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.110)$$

$$Z_\alpha(g^2; \epsilon) = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.111)$$

Wir erinnern daran, daß die renormierten Parameter sowie die Renormierungskonstanten im Gegensatz zu den nackten Parametern von einer beliebig wählbaren Massenskala  $\nu$  abhängen. Entsprechendes gilt für die renormierten Vertex-Funktionen, deren Verhalten unter diesen Skalen-Transformationen durch die Renormierungsgruppengleichungen beschrieben wird [22] [29]. Durch eine Analyse der zugehörigen Renormierungsgruppen-Funktionen läßt sich (zumindest asymptotisch für große Impulse) die Skalenabhängigkeit der renormierten Parameter bestimmen; so nimmt die effektive Kopplung  $g$  als Lösung der Differentialgleichung (1.24) im Hochenergiebereich folgende Gestalt an [4] [22]:

$$\bar{g}^2(Q^2) \approx \frac{g^2(\nu)}{1 + \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\nu^2}} = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} ; \quad \frac{Q^2}{\Lambda^2} \gg 1 \quad (1.112)$$

Folglich verschwindet die „laufende“ Kopplung  $\bar{g}$  für große Impulsskalen bzw. kleine Abstände („Asymptotische Freiheit“). Im letzten Schritt wurde durch

$$\Lambda(g(\nu); \nu) := \nu \exp \left\{ - \frac{(4\pi)^2}{g^2(\nu)} \frac{1}{2\beta_0} \right\} \quad (1.113)$$

die Massenskala  $\Lambda$  eingeführt, die sich aufgrund ihrer Invarianz unter Renormierungsgruppen(RG)-Transformationen als fundamentaler Parameter für die nichtperturbative Erweiterung der Basisvertices erweisen wird. Trotzdem stellt die Ausbildung invers-logarithmischer Abhängigkeiten von dem dimensionsbehafteten Parameter  $\Lambda$  im Rahmen der Störungsreihe („Dimensionelle Transmutation“) [6] nur einen „schwach nichtperturbativen“ Effekt, d. h. eine Reparametrisierung durch partielle Resummation der formalen Reihenentwicklung nach  $g^2$  dar, wie an der Darstellung der „laufenden“ Kopplung (1.112) abzulesen ist. Der fundamentale Unterschied dieser Entwicklung zu der „stark nichtperturbativen“ Kopplungsstruktur von Größen wie Vakuumkondensaten oder Bindungspolen liegt in deren *polynomialer* oder *rationaler* Abhängigkeit von der Massenskala (1.113), bei der die wesentlich singuläre Kopplungsabhängigkeit voll zum Tragen kommt.

## Kapitel 2

# Die erweiterte Störungsreihe und ihr Selbstkonsistenzproblem

### 2.1 Die RG-invariante Massenskala $\Lambda_{QCD}$

Obwohl „Off-Shell“-Korrelationsfunktionen im allgemeinen sowohl implizit über die „laufende“ Kopplung  $g^2(\nu)$  als auch explizit von der willkürlich wählbaren Massenskala  $\nu$  abhängen werden, dürfen die aus ihnen abgeleiteten physikalischen Observablen (Teilchenmassen, Wirkungsquerschnitte, Zerfallszeiten, ...) diese Skalenabhängigkeit nicht mehr aufweisen („Renormierungsgruppen(RG)-Invarianz“). Diese Eigenschaft führt unter Anwendung der Kettenregel und bei Berücksichtigung der Definition der  $\beta$ -Funktion (1.24) auf folgende Integraldarstellung eines dimensionsbehafteten Parameters <sup>1</sup>:

$$\Lambda_{QCD}^2(g(\nu); \nu; \epsilon) = \nu^2 \exp \left\{ -2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g'; \epsilon)} \right\} \quad (2.1)$$

Diese Massenskala ist zwar invariant unter RG-Transformationen, sie hängt aber über die frei wählbare Integrationsgrenze  $g_1$  <sup>2</sup> vom Renormierungsschema  $R$  ab und ist erst unter Berücksichtigung endlicher Beiträge auf 2-Schleifen-Niveau bestimmbar. Die aktuellsten Werte zu  $\Lambda_{QCD}$  im  $\overline{MS}$ -Schema sind in [30] zusammengefaßt; wir entnehmen daraus als arithmetisches Mittel:

$$\Lambda_{QCD}^{(\overline{MS})} \approx 287 (\pm 31) \text{ MeV} \quad (2.2)$$

Um die Übereinstimmung der beiden Ausdrücke (1.113) und (2.1) auf 1-Schleifen-Niveau zu verifizieren, formulieren wir zunächst die  $\beta$ -Funktion in der regularisierten Theorie ( $\epsilon \neq 0$ ), berechnen dann das Integral in (2.1) und führen anschließend den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  durch. Differenziert man die Gleichung der Kopplungsrenormierung (1.104) nach  $\nu$ , so erhält man folgende Beziehung zwischen der  $\beta$ -Funktion und der Renormierungskonstante  $Z_\alpha$ :

$$\beta(g(\nu); \epsilon) = -g(\nu) \left( \epsilon + \frac{\nu}{Z_\alpha(g^2(\nu); \epsilon)} \frac{dZ_\alpha(g^2(\nu); \epsilon)}{d\nu} \right) \quad (2.3)$$

Diese Gleichung nimmt mit (1.23) in  $D$  Dimensionen die folgende Gestalt an:

---

<sup>1</sup>Die entsprechende Differentialgleichung läßt sich durch Separation der Variablen lösen. Für nähere Details verweisen wir beispielsweise auf [11] oder [17].

<sup>2</sup>Die Kopplung  $g_1$  entspricht dem Wert der laufenden Kopplung an der Stelle  $\nu = \Lambda$ .

$$\beta(g; \epsilon) = -\epsilon g - \beta_0 \frac{g^3}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(g^5) \quad (2.4)$$

Einsetzen von (2.4) in (2.1) liefert unter Mitnahme der beiden führenden Terme:

$$\Lambda^2(g(\nu), \nu; \epsilon) = \nu^2 \left[ A(g_1; \epsilon) \left( 1 + \frac{(4\pi)^2 \epsilon}{\beta_0 g^2(\nu)} \right) \right]^{-1/\epsilon} ;$$

$$A(g_1; \epsilon) \longrightarrow 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Diese Form stellt die korrekte Verallgemeinerung der Gleichung (1.113) für  $\epsilon > 0$  dar. Benutzt man schließlich die Limes-Darstellung der Eulerschen Konstanten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad , \quad (2.6)$$

so erhält man bei Abschalten des Regularisierungsparameters ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) bis auf Korrekturen durch höhere Ordnungen der Kopplung die im vorherigen Kapitel definierte Massenskala (1.113), die bezüglich der Kopplungsabhängigkeit ein nichtanalytisches Verhalten zeigt.

## 2.2 Systematische Erweiterung der Basisvertizes

Obwohl die Beziehung (1.113) letztendlich dazu genutzt werden kann, die renormierte Kopplung zugunsten der RG-invarianten Massenskala zu eliminieren, werden im Rahmen dieser Arbeit  $\Lambda$  und  $g^2$  formal als zwei verschiedene Parameter behandelt und die Vertex-Funktionen wie in der Störungstheorie als formale Potenzreihe in  $g^2(\nu)/(4\pi)^2 = \alpha_s/\pi$  entwickelt. Voraussetzung dafür ist, daß die skalenabhängige Kopplung  $g(\nu)$  für alle Skalen  $\nu$  hinreichend klein ist, so daß eine semikonvergente Entwicklung möglich ist<sup>3</sup>. Da  $\Lambda$  formal von nullter Ordnung ist, d. h. mit allen seinen Ableitungen für  $g^2 \rightarrow 0$  verschwindet, können allerdings die Koeffizienten dieser Entwicklung von  $\Lambda$  abhängen.

Eine systematische Erweiterung der Störungsreihe erhält man durch folgende Doppelsequenz:

$$\Gamma(\{p\}; g(\nu); \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma^{[r,p]}(\{p\}; g(\nu); \nu) ;$$

$$\Gamma^{[r,p]}(\{p\}; g(\nu); \nu) = \Gamma^{[r,0]}(\{p\}; \Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma^{[r,p']}(\{p\}; \Lambda; \nu) \quad (2.7)$$

Hierbei zählt der Index „ $p$ “ weiterhin die Potenzen der Kopplung, und der Index „ $r$ “ bezeichnet die Stufe der globalen Approximation in  $\Lambda$ . Aufgrund ihrer nichtanalytischen Kopplungsabhängigkeit verschwindet  $\Lambda$  für  $g^2 \rightarrow 0$  schneller als jede Potenz der Kopplung, so daß der formale Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  bei endlicher Kopplung sinnvoll ist. Wir fordern damit folgende physikalisch plausiblen Randbedingungen für die nichtperturbativ erweiterten Ansätze:

- Sie sollen bei formalem Abschalten der Massenskala in die perturbativen Gegenstücke übergehen:

$$\Gamma^{[r,p]}(\{p\}; \Lambda = 0; \nu) = \Gamma^{(p)pert}(\{p\}; \nu) \quad (2.8)$$

Dieser Grenzfall wird als „perturbativer Limes“ bezeichnet.

<sup>3</sup>Dies wird durch Gitterrechnungen [19] und phänomenologische Arbeiten [31] durchaus bestätigt.

- Sie sollen die Eigenschaft der „naiven“ asymptotischen Freiheit besitzen, d. h. bei dem Hochskalieren aller äußeren Impulse sollen die nichtperturbativen Approximanten der Ordnung  $p = 0$  in die perturbativen nackten Größen übergehen:

$$\Gamma^{[r,0]}(\{\lambda p\}; \Lambda) \longrightarrow \Gamma^{(0)pert}(\{\lambda p\}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Die asymptotische Freiheit der QCD wird im Hochenergiebereich durch das Verhalten der laufenden Kopplung (1.112) bzw. durch das positive Vorzeichen von  $\beta_0$  sichergestellt.

- Die Impulsabhängigkeit der Vertex-Funktionen soll den Divergenzgrad der Schleifenintegrale im Vergleich zur Störungstheorie nicht erhöhen, um die perturbative Renormierbarkeit zu gewährleisten. Diese Bedingung sichert auch bei Hochskalierung einer *echten Teilmenge* von Impulsen für alle Vertizes das störungstheoretische UV-Verhalten und stellt somit eine Verschärfung der obigen Forderung nach „naiver“ asymptotischer Freiheit dar.

Es zeigt sich, daß die obigen Forderungen die Struktur der Ansätze schon sehr stark einschränken. Die Indexstrukturen erfordern im allgemeinen zunächst eine Zerlegung der Vertizes nach Farbtensoren, Lorentz-Tensoren und Lorentz-invarianten Impulsfunktionen, wobei neben (2.8) die Impulsdimensionen der Vertizes zu beachten sind. Um sowohl die Erhaltung des perturbativen „Power-counting“ als auch die Globalität der Approximation bezüglich der Impulse (als Voraussetzung für deren Verwendbarkeit in Schleifenintegralen) zu gewährleisten, müssen die Ansätze eine *rationale* Impuls- und damit  $\Lambda$ -Abhängigkeit aufweisen; bei mehreren Variablen wird durch den Bezug auf Spektraldarstellungen [14] eine faktorisierende Nennerstruktur nahegelegt. Obwohl diese rationale Form eine Konstruktion der Ansätze auf beliebiger Approximationsstufe erlaubt, erweist sich für nachfolgende Rechnungen eine partialbruchzerlegte Form als vorteilhafter.

## 2.3 Der Selbstkonsistenzmechanismus

Bevor wir die Approximanten der Stufe  $r = 1$  für einzelne Vertizes explizit angeben, soll in diesem Abschnitt kurz auf das nichttriviale Selbstkonsistenzproblem dieser Ansätze im Rahmen der Dyson-Schwinger-Funktionalgleichungen eingegangen werden; es lautet auf beliebiger Stufe  $r$  der Approximation im ersten Iterationsschritt:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_\Gamma \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[r,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \Gamma^{[r,0]} - \Gamma^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (2.10)$$

Die Dyson-Schwinger-Funktionale müssen also die nichtperturbativen Modifikationen der Ansätze bis auf Fehler der Störungsordnung  $g^2$  reproduzieren. Aufgrund des globalen Charakters der Approximation kann dies aber nur eine Übereinstimmung an einer endlichen Anzahl  $n(r)$  von – prinzipiell frei wählbaren – Stellen im Raum der Lorentz-invarianten Impulsvariablen bedeuten. Während in [36] die Zahl der Anpassungsstellen mit der Zahl der nichtperturbativen Parameter in den Ansätzen gleichgesetzt wurde, legt die faktorisierende Nennerstruktur in der partialbruchzerlegten Form der Ansätze folgendes Anpassungsverfahren nahe:

- Da die Schleifen-Integrale der Dyson-Schwinger-Funktionale immer Polfaktoren in den Lorentz-invarianten Impulsvariablen der äußeren Beine herausfaktorisieren, erfordert eine Selbstkonsistenz, bei der nicht lokal unendlich große Fehler auftreten, für verschiedene Vertizes eine Übereinstimmung der Polpositionen bezüglich gleichartiger Beine. Indem die komplizierteren Vertizes ihre Polpositionen an die einfacheren Vertizes „herunterreichen“, besitzen die entsprechenden Parameter der Selbstenergien keine eigenen Bestimmungsgleichungen. Diese fundamentale Unterbestimmtheit des Selbstkonsistenzproblems ist auf jeder Approximationsstufe  $r$  vorhanden und erfordert die Hinzunahme weiterer Bedingungen wie Bewegungsgleichungs-Kondensate oder Slavnov-Taylor-Identitäten, um die Parameter der Polpositionen festzulegen.
- Als weitere Vergleichsdaten wählen wir die Residuen an den Polpositionen. Da die Dyson-Schwinger-Funktionale im allgemeinen nicht die volle Bose-Symmetrie der nichtperturbativ erweiterten Ansätze aufweisen, führt der Residuenvergleich im allgemeinen auf eine Überbestimmtheit des Selbstkonsistenzproblems, die sich für höhere Approximationsstufen immer besser erfüllen läßt. Dieses Problem wird vor allem bei dem 4-Gluon-Vertex signifikant.
- Eine weitere Anpassung eventueller regulärer Teile ist nur bei den Selbstenergien erforderlich, da diese als einzige Vertizes die notwendigen Impulsdimensionen für reguläre Modifikationen der Ansätze d. h. Beiträge  $\propto \Lambda$  oder  $\propto \Lambda^2$  besitzen. Die Wahl der entsprechenden Stützstellen wird hierbei durch die Beibehaltung der perturbativen Renormierbarkeit festgelegt.

Ein Blick auf (2.10) zeigt, daß die Schleifenintegrale der Dyson-Schwinger-Funktionale zusätzlich in der Lage sein müssen, den Vorfaktor  $g_0^2$  zu kompensieren, um Terme der Ordnung  $g^0$  ausbilden zu können. Zur Verifizierung notieren wir zunächst, daß sich bei der Auswertung der 1-Schleifen-Beiträge durch geschicktes Addieren konvergenter Integrale <sup>4</sup> die Struktur der divergenten Anteile stets auf folgende  $\Lambda$ -abhängige Größe reduzieren läßt:

$$\Pi(g^2(\nu); \nu; \epsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \quad (2.11)$$

Benutzt man nun die Kopplungsrenormierung (1.22) mit der 1-Schleifen-Version der Renormierungskonstanten (1.23) sowie die regularisierte Form der Massenskala (2.5), so erweist sich die Kombination (2.11) – bis auf Terme höherer Ordnung in  $g^2$  – als regulär in dem Regularisierungsparameter  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \Pi(g^2(\nu); \nu; \epsilon) &= \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} Z_\alpha(g^2(\nu); \epsilon) \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \left( 1 - \frac{g^2(\nu) \beta_0}{(4\pi)^2 \epsilon} \right) A(g_1; \epsilon) \left( 1 + \frac{(4\pi)^2 \epsilon}{\beta_0 g^2(\nu)} \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4; \epsilon) \\ &= \frac{A(g_1; \epsilon)}{\beta_0} \left( 1 - \frac{g^2(\nu) \beta_0}{(4\pi)^2 \epsilon} \right) \left( \frac{\beta_0 g^2(\nu)}{(4\pi)^2} + \epsilon \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4; \epsilon) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( 1 + \mathcal{O}(g^4; \epsilon) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

---

<sup>4</sup>Siehe die Berechnung der Impulsintegrale im mathematischen Anhang.

Die parallele Produktion von Termen verschiedener Ordnungen in  $g^2$  durch 1-Schleifen-Funktionale läßt eine Entkopplung von Störungsordnung und Schleifenordnung erkennen. Eine Klassifizierung der Resultate wird im folgenden durch die Ordnung nach Potenzen von  $1/\beta_0$  erreicht, was im Rahmen der Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenz der Schleifenzahl  $l$  entspricht.

Tatsächlich ist die Kombination (2.11) aber sowohl *endlich* im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  als auch *exakt kopplungsunabhängig*, wie eine Verwendung der Integraldarstellungen für die Renormierungskonstante  $Z_\alpha$  und die Massenskala  $\Lambda$  zeigt <sup>5</sup>:

$$\Pi(\epsilon) = \frac{1}{\beta_0} \left(1 + \mathcal{O}(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)\right) \quad (2.13)$$

Analysiert man die Herleitung dieser Gleichung im Detail, so beobachtet man das Verschwinden der nackten Kopplung  $g_0$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  bei Aufsummation aller Störungsordnungen [39]. Folglich ist der exakte Mechanismus auf nichtperturbative Beiträge zu beschränken, während im *perturbativen* Zusammenhang nur die Entwicklung der Renormierungskonstanten  $Z_\alpha$  mit – für  $\epsilon \rightarrow 0$  divergenten – Koeffizienten verwendet werden darf [40].

Diese Zweideutigkeit findet sich schon bei der Extraktion der divergenten Beiträge: Im allgemeinen bildet sich auch in der masselosen Theorie außer bei „Tadpole“-Schleifen und Vakuumkondensaten nach Anwendung der üblichen Feynman-Parametrisierung nicht die „reine“  $\Lambda$ -Potenz, wie sie für den  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) benötigt wird, sondern die nichtganze Potenz eines Polynoms  $\mathcal{P}$  in  $\Lambda$  und den möglichen Lorentz-invarianten Impulsvariablen <sup>6</sup>. Um einerseits Korrekturen der nullten Störungsordnung zu erhalten und andererseits die perturbative 1-Schleifen-Renormierung beibehalten zu können, sind zwei Typen von Divergenzen zu unterscheiden bzw. unterschiedlich zu behandeln:

1. **Nichtperturbative Divergenzen** sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) verschwinden und von keinen durch eine endliche Entwicklung nach  $g^2$  dargestellten Größen begleitet sind. Die für den  $1/g^2$ -Mechanismus notwendige „reine“  $\Lambda$ -Potenz ist durch folgende Entwicklung zu erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{P}(p^2; \Lambda^2(\epsilon))}{\nu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) &= \left(\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu}\right)^{-2\epsilon} \left(\frac{\mathcal{P}(p^2; \Lambda^2(\epsilon))}{\Lambda^2(\epsilon)}\right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\ &= \left(\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu}\right)^{-2\epsilon} \left(1 - \epsilon \ln \frac{\mathcal{P}(p^2; \Lambda^2(\epsilon))}{\Lambda^2(\epsilon)}\right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\ &= \left(\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu}\right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da die globale Approximation feste Anpassungsstellen der Form  $p^2 \propto \Lambda^2$  benötigt, reduziert sich der endliche Anteil der Entwicklung (2.14) auf Logarithmen dimensionsloser Parameter, so daß auch die Massenskala  $\Lambda$  nach Anwendung von (2.13) nur noch als ganze Potenz im Vorfaktor der Divergenz auftreten kann.

<sup>5</sup>Für nähere Details siehe [17] oder [36].

<sup>6</sup>Für eine Berücksichtigung nichtverschwindender fermionischer Strommassen verweisen wir auf [17].

2. **Perturbative Divergenzen** bleiben auch im perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) erhalten und liefern Beiträge, die mit den perturbativen Renormierungskonstanten zu vergleichen sind. In diesem Fall entwickeln wir den impulsabhängigen Faktor direkt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathcal{P}(p^2; \Lambda^2(\epsilon))}{\nu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) &= \left( 1 - \epsilon \ln \frac{\mathcal{P}(p^2; \Lambda^2(\epsilon))}{\nu^2} \right) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\ &= \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die gemischten Logarithmen tragen die Impulsabhängigkeit dieser Entwicklung und gehen im formalen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  in die üblichen perturbativen Logarithmen [22] über. Die Berechnung dieser endlichen Anteile kann im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht durchgeführt werden.

Die Klassifizierung der Divergenzstruktur nach ihrem Verhalten im perturbativen Limes eröffnet die Möglichkeit, die divergenten Schleifenintegrale durch eine Subtraktionsmethode zu berechnen und im perturbativen Fall anschließend die  $\Lambda$ -Potenz zu entwickeln. Diese Methode wird im mathematischen Anhang dieser Arbeit detailliert vorgestellt.

Da der  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) eng mit der Divergenzstruktur der Theorie verbunden ist, läßt sich folgende fundamentale Eigenschaft des Selbstkonsistenzproblems konstatieren:

*Das Selbstkonsistenzproblem der modifizierten Ansätze ist in führender Störungsordnung ohne Entkopplungsnäherungen und unabhängig vom Approximationsgrad  $r$  auf die sieben Basisvertizes der Theorie beschränkt.*

Obwohl diese Aussage im Zusammenhang mit den „Kompensierenden Polen“ des dritten Kapitels in geringem Maße modifiziert werden muß, stellt sie doch die Möglichkeit bereit, den nichtperturbativen Charakter der oberflächlich divergenten Greenschen Funktionen in verschiedenen Ordnungen der Schleifenzahl quantitativ zu erfassen. Allerdings ist für eine vollständige Behandlung selbst in 1-Schleifen-Ordnung die – technisch sehr aufwendige – Einbeziehung des 4-Gluon-Vertex unumgänglich, welche in früheren Arbeiten zum Selbstkonsistenzproblem [11] [32] strikt vermieden wurde.

## 2.4 Ansätze für die Basisvertizes in erster Stufe der rationalen Approximation

Wir formulieren nun die nichtperturbativ modifizierten Ansätze für die Basisvertizes, wobei wir uns auf die erste Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ) beschränken und den Schwerpunkt auf die Parametrisierung des 4-Gluon-Vertex legen. Außerdem wählen wir masselose Fermionen ( $m_{(f)} = 0$ ) <sup>7</sup>, so daß auch in den Ansätzen sämtliche nichtperturbativen Massenskalen proportional zu  $\Lambda$  sind und der Flavour-Index im Fermionensektor unterdrückt werden kann. Bei der Konstruktion der nichtperturbativen Modifikationen sind die Impulsdimension des jeweiligen Vertex sowie die Erfüllung der Randbedingungen des vorherigen Abschnitts zu beachten.

---

<sup>7</sup>Die Einbeziehung fermionischer Strommassen aus der Lagrange-Dichte findet sich in [17].

### 2.4.1 Modifizierte Propagatoren

Für den **Gluon-Propagator** setzen wir direkt eine transversale Lorentz-Tensorstruktur an, da aufgrund der zugehörigen S-T-Identität (1.74) die Dynamik der Theorie auf den transversalen Gluonsektor beschränkt bleibt. Außerdem wählen wir in erster Approximationsstufe zwei *komplexe* Polstellen bezüglich  $p^2$ , die im Gegensatz zu reellen zeitartigen Impulsquadraten keine massiven Teilchenpole, sondern kurzlebige Elementaranregungen beschreiben und somit der Forderung nach „Confinement“ entsprechen <sup>8</sup>:

$$D_T^{[1,0] \mu\nu} (p; \Lambda) = \delta_{ab} t^{\mu\nu} (p) D_T^{[1,0]} (p^2; \Lambda^2) \quad ;$$

$$D_T^{[1,0]} (p^2; \Lambda^2) = \frac{p^2 + u_2 \Lambda^2}{(p^2 + u_+ \Lambda^2)(p^2 + u_- \Lambda^2)}$$

$$= \frac{p^2 + u_2 \Lambda^2}{(p^2 + u_1 \Lambda^2)(p^2 + u_2 \Lambda^2) + u_3 \Lambda^4} \quad (2.16)$$

Die beiden komplex-konjugierten Polstellen setzen sich nach dem Wurzelsatz von Vieta folgendermaßen aus den reellen Parametern zusammen:

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \pm i \sqrt{u_3 - \frac{1}{4}(u_1 - u_2)^2} \quad (2.17)$$

Ein nichtverschwindender Imaginärteil wird dabei durch die gluonische „Confinement“-Bedingung

$$u_3 > \frac{1}{4} (u_1 - u_2)^2 \quad (2.18)$$

sichergestellt.

Die **Gluon-Selbstenergie** besitzt als Negativinverses des Gluon-Propagators ebenfalls eine transversale Struktur und lautet:

$$\Gamma_{2,T}^{[1,0] \mu\nu} (p; \Lambda) = \delta_{ab} t^{\mu\nu} (p) \Gamma_{2,T}^{[1,0]} (p^2; \Lambda^2) \quad ;$$

$$\Gamma_{2,T}^{[1,0]} (p^2; \Lambda^2) = - \left( p^2 + u_1 \Lambda^2 + u_3 \Lambda^2 \Pi(p^2; \Lambda^2) \right) \quad (2.19)$$

Dabei wurde der dimensionslose Polfaktor

$$\Pi(p^2; \Lambda^2) := \frac{\Lambda^2}{p^2 + u_2 \Lambda^2} \quad (2.20)$$

verwendet, der auch für die übrigen Ansätze im gluonischen Sektor einen wichtigen „Baustein“ der nichtperturbativen Modifikationen darstellt.

Für den **Fermion-Propagator** der masselosen Theorie setzen wir in erster Approximationsstufe ( $r = 1$ ) zwei Polfaktoren in der Lorentz-invarianten Impulsvariablen  $\not{p}$  an,

---

<sup>8</sup>Für nähere Details siehe [1] oder [36].

die sich wegen  $\not{p} \cdot \not{p} = -p^2$  durch geeignetes Erweitern des Bruches auf zwei Polfaktoren bezüglich  $p^2$  umrechnen lassen:

$$\begin{aligned}
S^{[1,0] ij}(p; \Lambda) &= -\delta^{ij} \frac{\not{p} + w_2 \Lambda}{(\not{p} + w_+ \Lambda)(\not{p} + w_- \Lambda)} \\
&= -\delta^{ij} \frac{\not{p} + w_2 \Lambda}{(\not{p} + w_1 \Lambda)(\not{p} + w_2 \Lambda) + w_3 \Lambda^2} \\
&= \delta^{ij} \frac{(\not{p} + w_2 \Lambda)(\not{p}(w_1 + w_2)\Lambda + p^2 - (w_1 w_2 + w_3)\Lambda^2)}{(p^2 + w_+^2 \Lambda^2)(p^2 + w_-^2 \Lambda^2)}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Für die Quadrate der Polstellen erhalten wir diesmal die Beziehung

$$w_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) - w_3 \pm i(w_1 + w_2)\sqrt{w_3 - \frac{1}{4}(w_1 - w_2)^2}, \tag{2.22}$$

wobei die fermionische „Confinement“-Bedingung

$$w_1 + w_2 \neq 0 \quad ; \quad w_3 > \frac{1}{4}(w_1 - w_2)^2 \tag{2.23}$$

sowohl für die beiden Polstellen selber als auch für deren Quadrate einen nichtverschwindenden Imaginärteil sicherstellt, so daß auch im fermionischen Sektor keine asymptotisch detektierbaren Teilchen beschrieben werden.

Die **Fermion-Selbstenergie** nimmt als Negativinverses des Fermion-Propagators folgende Form an:

$$\bar{\Gamma}_2^{[1,0] ij}(p; \Lambda) = \delta^{ij} \left( \not{p} + w_1 \Lambda + w_3 \Lambda \bar{\Pi}(p; \Lambda) \right) \tag{2.24}$$

Der dimensionslose Polfaktor im fermionischen Sektor

$$\bar{\Pi}(p; \Lambda) := \frac{\Lambda}{\not{p} + w_2 \Lambda} \tag{2.25}$$

stellt das Analogon zu (2.20) im gluonischen Sektor dar; beide werden als „Bausteine“ für nichtperturbative Modifikationen des Fermion-Gluon-Vertex verwendet, was die faktorisierende Nennerstruktur der Ansätze schon bei deren Konstruktion sicherstellt.

## 2.4.2 Ansätze im Geistsektor

In Landau-Eichung erweisen sich die Impulsintegrale des Dyson-Schwinger-Funktional für den **Geist-Gluon-Vertex** als effektiv konvergent, so daß sich bei diesem Vertex keine nichtperturbativen Modifikationen der nullten Störungsordnung selbstkonsistent reproduzieren können<sup>9</sup>. Damit reduziert sich der Ansatz unabhängig von der Approximationsstufe  $r$  auf die entsprechende nackte Struktur (1.33), und wir setzen an:

$$\tilde{\Gamma}_{3,T}^{[1,0] a_1 a_2 a_3 \nu_3}(\{p\}) \equiv \tilde{\Gamma}_{3,T}^{(0) a_1 a_2 a_3 \nu_3}(\{p\})$$

<sup>9</sup>Der im nächsten Kapitel vorgestellte Mechanismus der „Kompensierenden Pole“ erfordert zwar eine genauere Analyse des Selbstkonsistenzproblems; diese führt aber unter Berücksichtigung des Dyson-Schwinger-Funktional der Geist-Selbstenergie zu einem identischen Resultat [9].



$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) &= -i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\nu_1 \mu_1}(p_1) t^{\nu_2 \mu_2}(p_2) t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) \\
&\cdot \left( \begin{aligned}
&\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} \mathcal{F}_3^{[1,0]}(p_1^2, p_2^2; p_3^2; \Lambda^2) \\
&+ \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \mathcal{F}_3^{[1,0]}(p_2^2, p_3^2; p_1^2; \Lambda^2) \\
&+ \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \mathcal{F}_3^{[1,0]}(p_3^2, p_1^2; p_2^2; \Lambda^2)
\end{aligned} \right) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß aufgrund der Impulserhaltung (1.47) nur zwei Impulse linear unabhängig sind, so daß sich auch die Zahl der Lorentz-invarianten Impulsvariablen von 6 auf 3 reduziert. Für die Konstruktion eines explizit bose-symmetrischen Ansatzes erweist sich aber die Verwendung aller drei Impulse als vorteilhafter. Die Lorentz-invariante Impulsfunktion  $\mathcal{F}_3$  besitzt nur eine partielle Permutationssymmetrie unter Vertauschung der ersten beiden Impulse und reduziert sich im perturbativen Limes auf die Zahl 1, um der ersten Randbedingung (2.8) zu genügen. Unter Verwendung der dimensionslosen Polfaktoren zu jeder invarianten Impulsvariablen

$$\Pi_i = \Pi(p_i^2; \Lambda^2) := \frac{\Lambda^2}{p_i^2 + u_2 \Lambda^2} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

lautet die eigentliche rationale Approximante des 3-Gluon-Vertex auf Stufe  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{[1,0]}(p_2^2, p_3^2; p_1^2; \Lambda^2) &:= 1 + x_1 (\Pi_2 + \Pi_3) + x_2 \Pi_2 \Pi_3 + x_4 \Pi_1 \\
&+ x_5 \Pi_1 (\Pi_2 + \Pi_3) + x_7 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Eventuelle Modifikationen in Form von inversen Polfaktoren entwickeln im Zusammenhang mit den „Kompensierenden Polen“ des nächsten Kapitels bei Auswertung der Dyson-Schwinger-Funktionale divergente Integrale, deren Divergenzgrad den perturbativen Grad übersteigt, und werden daher in Erinnerung an die dritte Randbedingung des Abschnitts 2.2 bei sämtlichen Ansätzen unterdrückt.

Abschließend notieren wir die Zerlegung des Ansatzes nach einem der drei Polfaktoren, die eine fundamentale Eigenschaft der Approximanten in dieser Arbeit darstellt:

$$\Gamma_{3,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) = B_{0,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) + \Pi_1 B_{1,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) \quad (2.32)$$

Die entsprechenden Zerlegungen nach einem der anderen beiden Polfaktoren erhält man durch zyklische Vertauschungen der drei Beine. In der partialbruchzerlegten Form (2.31) sind die beiden – bezüglich  $p_1^2$  regulären – Funktionen  $B_{0,T}$  und  $B_{1,T}$  direkt ablesbar und werden daher nicht explizit notiert. Wir ergänzen stattdessen eine weitere Zerlegung der Funktion  $B_{1,T}$  bezüglich des Polfaktors zu  $p_2^2$ , die später im Zusammenhang der „Kompensierenden Pole“ benötigt wird:

$$B_{1,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) = B_{2,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) + \Pi_2 B_{3,T}^{[1,0] \nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(\{p\}; \Lambda) \quad (2.33)$$

Die Impulsfunktionen  $B_{2,T}$  und  $B_{3,T}$  besitzen nur noch Modifikationen bezüglich  $p_3^2$  und lassen sich ebenfalls direkt an der partialbruchzerlegten Form des Ansatzes (2.31) ablesen.

Der Ansatz für den **Fermion-Gluon-Vertex** besitzt eine Farbtensorstruktur, die aufgrund der globalen Eichinvarianz mit der nackten Struktur (1.34) identisch ist. Weiterhin erweist sich aufgrund des matrixwertigen Charakters der verbleibenden Tensorfunktion eine Zerlegung nach Lorentz-Tensoren erster Stufe und invarianten Impulsfunktionen für spätere Rechnungen als unvorteilhaft, und wir setzen analog zu (2.29) eine transversalprojizierte Form an:

$$\bar{\Gamma}_{3,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) = \left(T_{a_3}\right)^{l_1 l_2} t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) \bar{\mathcal{F}}_3^{[1,0] \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \quad (2.34)$$

Die Lorentz-Tensorstruktur der matrixwertigen Impulsfunktion  $\bar{\mathcal{F}}_3$  läßt im allgemeinsten Fall 12 mögliche Strukturen zu [17] [36], die zu einem großen Teil die Transversalprojektion bezüglich des Gluonbeins nicht überleben. Wir unterdrücken erneut Tensorstrukturen, die im Rahmen der „Kompensierenden Pole“ den Divergenzgrad einzelner Feynman-Diagramme erhöhen und somit die dritte Randbedingung an unsere Ansätze verletzen<sup>12</sup>.

In der partialbruchzerlegten Form setzen wir eine Kombination aus den bekannten Polfaktoren für die unterschiedlichen Beine und der Diracschen  $\gamma$ -Matrix an, wobei die Invarianz des Vertex unter Ladungskonjugations-Transformationen (1.62) die Zahl der Parameter weiter reduziert<sup>13</sup> und die entsprechende Impulserhaltung für fermionische Vertizes ( $-p_1 + p_2 + p_3 = 0$ ) zu beachten ist:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_3^{[1,0] \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) &:= \gamma^{\mu_3} + z_{0,1} \left(\bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2\right) + z_{0,4} \bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2 + z_{1,0} \gamma^{\mu_3} \Pi_3 \\ &+ z_{1,1} \left(\bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2\right) \Pi_3 + z_{1,4} \bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2 \Pi_3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Auch der Ansatz des Fermion-Gluon-Vertex läßt sich nach Polfaktoren zerlegen, wobei diesmal drei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) &= \bar{B}_{0,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) + \Pi_3 \bar{B}_{1,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \\ &= \bar{B}'_{0,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) + \bar{\Pi}_1 \bar{B}'_{1,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \\ &= \bar{B}''_{0,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) + \bar{B}''_{1,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \bar{\Pi}_2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Analog zum modifizierten 3-Gluon-Vertex lassen sich auch diesmal weitere Polzerlegungen der Teilfunktionen durchführen; diese lassen sich erneut direkt an (2.35) ablesen. So findet sich z. B. derjenige Anteil, der nur noch Modifikationen bezüglich  $\not{p}_2$  besitzt, als Funktion  $\bar{B}_{3,T}$  in folgender Zerlegung:

$$\bar{B}_{1,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) = \bar{B}_{2,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) + \bar{\Pi}_1 \bar{B}_{3,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \quad (2.37)$$

<sup>12</sup>Dies wird im Abschnitt 3.4 exemplarisch für zwei Impulsstrukturen detaillierter beschrieben.

<sup>13</sup>Diese Symmetrie stellt zusätzlich sicher, daß die unterschiedlichen Auszeichnungen durch die Pfeilrichtung bei der Formulierung der Dyson-Schwinger-Gleichungen im fermionischen Kanal identische Resultate liefern.

Der Anteil, der nur noch die Polstruktur in  $p_3^2$  enthält, wird dagegen mit  $\bar{B}'_{3,T}$  bezeichnet und über die folgende Polzerlegung definiert:

$$\bar{B}'_{1,T}{}^{[1,0]}{}_{l_1 l_2 \mu_3}(\{p\}; \Lambda) = \bar{B}'_{2,T}{}^{[1,0]}{}_{l_1 l_2 \mu_3}(\{p\}; \Lambda) + \bar{B}'_{3,T}{}^{[1,0]}{}_{l_1 l_2 \mu_3}(\{p\}; \Lambda) \bar{\Pi}_2 \quad (2.38)$$

#### 2.4.4 Parametrisierung des 4-Gluon-Vertex

Der 4-Gluon-Vertex besitzt als Farb- und Lorentz-Tensor vierter Stufe die komplizierteste Struktur aller oberflächlich divergenten Vertizes, für die ein Selbstkonsistenzproblem der nichtperturbativ erweiterten nullten Störungsordnung existiert. Obwohl aufgrund der Impulserhaltung nur drei Impulse und damit sechs Lorentz-invariante Impulsvariablen linear unabhängig sind, erweist es sich für die Konstruktion eines vollständig bosesymmetrischen Ansatzes als vorteilhafter, neben den vier Quadraten der äußeren Impulse die drei Mandelstam-Variablen

$$s := (p_1 + p_2)^2 = (-p_3 - p_4)^2 \quad (2.39)$$

$$u := (p_1 + p_3)^2 = (-p_2 - p_4)^2 \quad (2.40)$$

$$t := (p_1 + p_4)^2 = (-p_2 - p_3)^2 \quad (2.41)$$

und damit einen redundanten Satz von Impulsvariablen zu verwenden.

Wir fordern auch für den 4-Gluon-Vertex eine vollständig faktorisierende Nennerstruktur, so daß zunächst eine Partialbruchzerlegung bezüglich der drei Mandelstam-Variablen durchgeführt werden kann:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,T}^{[1,0]}{}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda) &= V_{4,T}^{[1,0]}{}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda) + \frac{R_{s,T}^{[1,0]}{}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda)}{s + u_2 \Lambda^2} \\ &+ \frac{R_{u,T}^{[1,0]}{}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda)}{u + u_2 \Lambda^2} + \frac{R_{t,T}^{[1,0]}{}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda)}{t + u_2 \Lambda^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Zählerstrukturen  $R_{s,T}$ ,  $R_{u,T}$  und  $R_{t,T}$  der Mandelstam-Pole faktorisieren jeweils in zwei Seiten des entsprechenden Kanals<sup>14</sup> und besitzen dieselbe partielle Bose-Symmetrie wie die Kanal-Amplituden des Bethe-Salpeter-Sektors. Ihre konkrete Gestalt in erster Approximationsstufe werden wir erst im dritten Kapitel detaillierter untersuchen.

Wir konstruieren nun einen Ansatz für den reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$ , der sich bei Verwendung der Dyson-Schwinger-Gleichung (1.67) auf 1-Schleifen-Niveau selbstkonsistent reproduzieren läßt. Dazu ist es notwendig, die Vielzahl möglicher Lorentz-Tensoren (43 im total transversalen Sektor) auf eine kleine Anzahl einzuschränken, die bezüglich des Funktionals (1.67) ein abgeschlossenes System bilden. Dies leisten allein die dimensionslosen Kronecker-Strukturen, die die Lorentz-Tensorstruktur des zugehörigen nackten Vertex (1.35) tragen und außerdem in dem Dyson-Schwinger-Funktional des 3-Gluon-Vertex

<sup>14</sup>Dies ist auch der Grund, weshalb Terme mit mehr als einem der drei Nennerfaktoren in  $s$ ,  $u$  und  $t$  von vornherein weggelassen werden können.

(1.53) nur die in (2.27) verwendeten Lorentz-Tensoren dritter Stufe erzeugen, so daß auch diesbezüglich ein abgeschlossenes System entsteht.

Für die Farbstruktur des reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  setzen wir zunächst folgende drei Tensoren vierter Stufe an, die sich durch die Spur über zwei oder vier Generatoren der Eichgruppe darstellen lassen:

$$S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} := \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4} \right\} + \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_4} T_{a_3} T_{a_2} \right\} \quad (2.43)$$

$$S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} := \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_2} \right\} \text{tr} \left\{ T_{a_3} T_{a_4} \right\} \quad (2.44)$$

$$S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} := \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_2} \right\} \text{tr} \left\{ T_{a_3} T_{a_4} \right\} + \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_3} \right\} \text{tr} \left\{ T_{a_4} T_{a_2} \right\} \\ + \text{tr} \left\{ T_{a_1} T_{a_4} \right\} \text{tr} \left\{ T_{a_2} T_{a_3} \right\} \quad (2.45)$$

Mit Hilfe der Spurrelationen (A.63) und (A.65) lassen sich (2.43 – 2.45) durch *linear unabhängige* Farbtensoren ausdrücken, die für die Projektion einzelner Tensorstrukturen im Rahmen des Dyson-Schwinger-Systems besser geeignet sind.

Der vollständig bose-symmetrische und bezüglich aller vier äußeren Beine transversalprojizierte Ansatz für den **reduzierten 4-Gluon-Vertex** lautet schließlich:

$$V_{4,T}^{[1,0]} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 (\{p\}; \Lambda) = t^{\nu_1 \mu_1} (p_1) t^{\nu_2 \mu_2} (p_2) t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) t^{\nu_4 \mu_4} (p_4) \\ \cdot \left( \Gamma_4^{(0)} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 + \sum_{i=1}^{17} \zeta_i W_i^{[1,0]} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 (\{p\}; \Lambda) \right) \quad (2.46)$$

Er enthält neben der nackten Struktur (1.35) 17 vollständig bose-symmetrische und tensorwertige Impulsfunktionen  $W_i$ , die sich aus den dimensionslosen Tensoren und den üblichen dimensionslosen Polfaktoren (2.20) für die vier Quadrate der äußeren Impulse in folgender Form zusammensetzen:

$$W_1^{[1,0]} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 (\{p\}; \Lambda) := S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \right) \\ \cdot \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\ + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.47)$$

$$W_2^{[1,0]} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 (\{p\}; \Lambda) := S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\ \cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\ + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.48)$$

$$W_3^{[1,0]} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 (\{p\}; \Lambda) := S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\ \cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 - 2 \Pi_1 \Pi_3 - 2 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\ + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
W_4^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_5^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_6^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(1)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 - 2 \Pi_1 \Pi_3 - 2 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_7^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_8^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_9^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( -2 \Pi_1 \Pi_2 - 2 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{10}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \tag{2.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{11}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{12}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(2)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \right) \\
&\cdot \left( -2 \Pi_1 \Pi_2 - 2 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{13}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{14}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{15}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{16}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \quad (2.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{17}^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) &:= S_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{(3)} \left( -2 \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \right) \\
&\cdot \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
&+ 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Behandlung des zugehörigen Selbstkonsistenzproblems ist es notwendig, den Ansatz (2.46) nach Farb- und Lorentz-Tensoren sowie Lorentz-invarianten Impulsfunktionen zu zerlegen. Diese Darstellung, der ihre volle Bose-Symmetrie nicht mehr explizit anzusehen ist, erlaubt durch Anwendung geeigneter Projektionstensoren die Trennung einzelner Tensorstrukturen. Allerdings sind dafür *linear unabhängige* Farbtensoren einzuführen, durch die sich die Farbstrukturen (2.43 – 2.45) mit Hilfe der Spurrelationen des Anhangs A.2 darstellen lassen.

Von den 15 möglichen Farbtensoren vierter Stufe, die aus den Kronecker-Strukturen im Farbraum und den Strukturkonstanten der  $SU(3)$  gebildet werden können, sind 8 linear unabhängig [24]; von diesen verbleiben bei Vernachlässigung der symmetrischen Strukturkonstanten aufgrund der Jacobi-Identität fünf linear unabhängige Tensoren. Wir wählen als Basissystem folgende Kombinationen, die die partielle Bose-Symmetrie im  $s$ -Kanal besitzen:

$$C_A \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} := \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \quad (2.64)$$

$$C_B \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} := \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_4 a_2} + \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3} \quad (2.65)$$

$$C_C \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} := \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_4 a_2} - \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3} \quad (2.66)$$

$$C_D \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} := f_{a_1 a_2 m} f_{a_3 a_4 m} = -f_{a_1 a_3 m} f_{a_4 a_2 m} - f_{a_1 a_4 m} f_{a_2 a_3 m} \quad (2.67)$$

$$C_E \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} := f_{a_1 a_3 m} f_{a_4 a_2 m} - f_{a_1 a_4 m} f_{a_2 a_3 m} \quad (2.68)$$

Für die Lorentz-Struktur wählen wir folgende drei Kombinationen

$$L_{0,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} := \frac{1}{D} \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} , \quad (2.69)$$

$$L_{+,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} := \frac{1}{2} \left( \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_2} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) - \frac{1}{D} \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} , \quad (2.70)$$

$$L_{-,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} := \frac{1}{2} \left( \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_2} - \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) , \quad (2.71)$$

die neben einer partiellen Bose-Symmetrie im  $s$ -Kanal auch die Eigenschaft von Projektionsoperatoren besitzen [8]:

$$L_{i,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} \delta^{\mu_3 \nu_2} \delta^{\mu_4 \nu_1} L_{j,s}^{(\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4)} = \delta_{ij} L_{i,s}^{(\mu_1 \mu_2 \nu_3 \nu_4)} \quad \left( \text{für } i, j = 0, +, - \right) \quad (2.72)$$

Durch Entwicklung der tensorwertigen Impulsfunktionen  $W_i$  (siehe Anhang A.4) erhalten wir damit folgende Darstellung des reduzierten 4-Gluon-Vertex:

$$V_{4,T}^{[1,0]} \text{ }_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\{p\}; \Lambda) = \sum_{i=A,\dots,E} \sum_{j=0,+,-} C_i \text{ (} a_1 a_2 a_3 a_4 \text{)} \cdot t^{\nu_1 \mu_1} (p_1) t^{\nu_2 \mu_2} (p_2) t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) t^{\nu_4 \mu_4} (p_4) L_{j,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} \mathcal{F}_4^{[1,0]} \text{ (} p_1^2, \dots, p_4^2; \Lambda^2 \text{)} \quad (2.73)$$

Die Lorentz-invarianten Impulsfunktionen  $\mathcal{F}_4^{(i,j)}$  zum Farbtensor  $C_i$  und zum Lorentz-Tensor  $L_{j,s}$  besitzen dieselben Symmetrie-Eigenschaften wie die zugehörigen Tensoren und lauten unter Verwendung geeigneter Hilfsparameter:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4^{[1,0]} \text{ (} p_1^2, \dots, p_4^2; \Lambda^2 \text{)} &:= \eta_{i,j,0} + \eta_{i,j,1} \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\ &+ \eta_{i,j,2} \left( \Pi_1 + \Pi_2 \right) \left( \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\ &+ \eta_{i,j,3} \left( \Pi_1 - \Pi_2 \right) \left( \Pi_3 - \Pi_4 \right) \\ &+ \eta_{i,j,4} \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_{i,j,5} \left( \Pi_1 \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) + (\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,6} \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Wir notieren folgende Eigenschaften der Hilfsparameter  $\eta_{i,j,k}$ , deren Darstellungen als Linearkombinationen der fundamentalen Vertexparameter  $\zeta_i$  im mathematischen Anhang zu finden sind:

- Die Parameter  $\eta_{i,j,3}$  sind nur für antisymmetrische Kombinationen der Tensoren von Null verschieden; in diesem Fall stellen sie insbesondere den einzigen Beitrag der nichtperturbativen Modifikationen.
- Die Parameter  $\eta_{i,j,0}$  werden durch die Forderung festgelegt, daß der Ansatz (2.73) im perturbativen Limes in die transversal-projizierte nackte Struktur (1.35) übergehen soll. Dies wird durch folgende Wahl nichtverschwindender Beiträge sichergestellt:

$$\eta_{D,-,0} = -3 \tag{2.75a}$$

$$\eta_{E,0,0} = D - 1 = 3 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.75b}$$

$$\eta_{E,+,0} = -1 \tag{2.75c}$$

Abschließend formulieren wir analog zu (2.32) die Zerlegung des Ansatzes nach einem der vier Polfaktoren, dessen Anteile wie üblich an der partialbruchzerlegten Form (2.74) direkt abgelesen werden können:

$$V_{4,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) = E_{0,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) + \Pi_1 E_{1,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) \tag{2.76}$$

Die Funktion  $E_{1,T}$  spielt ebenso wie entsprechende Anteile der modifizierten 3-Punkt-Vertizes eine entscheidende Rolle bei der Einführung der „Kompensierenden Pole“, die Thema des nächsten Kapitels sein werden.



# Kapitel 3

## Mandelstam-Pole und „Confinement“

### 3.1 Die Mandelstam-Pole des 4-Gluon-Vertex

Im zweiten Kapitel wurde schon detailliert beschrieben, wie die selbstkonsistente Reproduktion der modifizierten nullten Störungsordnung im Rahmen der ersten Iteration der Dyson-Schwinger-Funktionale erreicht werden kann, indem man unter Verwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus eine Residuenanpassung der Impulsstruktur vornimmt. Während das Selbstkonsistenzproblem der Selbstenergien damit bereits angegeben werden kann [32] [36], bedarf die Behandlung der übrigen Vertizes zusätzlicher Überlegungen, die schließlich auf einen erweiterten Begriff der 1-Teilchen-Reduzibilität führen werden [9] [17]. Dieses Phänomen wurde bereits im Jahre 1973 von Cornwall und Norton [7] sowie Jackiw und Johnson [16] im Rahmen eines abelschen Modells beobachtet.

Aufgrund der Auszeichnung des ersten Beins in jeder Schleife der Dyson-Schwinger-Funktionale durch einen nackten Vertex ist für Vertizes mit drei oder mehr Beinen zunächst unklar, auf welche Weise nichtperturbative Modifikationen bezüglich dieses ersten Beins in 1-Schleifen-Ordnung reproduziert werden können. Vernachlässigt man zum Beispiel in der D-S-Gleichung des 3-Gluon-Vertex (1.53) die 2-Schleifen-Terme und führt eine Skelettgraphen-Entwicklung der  $\mathcal{T}_{4,s}$ -Amplituden durch, so können Polstrukturen in dem Quadrat des von links einlaufenden Impulses allein aus den zugehörigen 4-Punkt-Vertizes stammen. Damit sollte mindestens einer dieser Vertizes eine nichtperturbative Modifikation der nullten Störungsordnung in Form eines Polterms bezüglich der Mandelstam-Variablen im horizontalen Kanal besitzen; allerdings ist die selbstkonsistente Reproduktion der Mandelstam-Pole selber durch die entsprechenden D-S-Funktionale der 4-Punkt-Vertizes für oberflächlich konvergente Schleifen-Integrale zunächst nicht einsichtig.

Wir vernachlässigen daher in diesem Abschnitt den fermionischen Sektor <sup>1</sup> und beschränken uns auf die Analyse des 4-Gluon-Vertex, dessen volle Bose-Symmetrie die Struktur der Polterme zusätzlich einschränkt. Die Einbeziehung der fermionischen Schleifen sowie die Einführung vergleichbarer Mandelstam-Pole im fermionischen Kanal werden wir im dritten Abschnitt dieses Kapitels vornehmen. Die Zählerstruktur der erforderlichen Polterme – im folgenden als Residuumsfunktionen bezeichnet – faktorisiert aufgrund struktu-

---

<sup>1</sup>Da sämtliche Vertizes mit äußeren Geistbeinen in Landau-Eichung keine nichtperturbativen Modifikationen der nullten Störungsordnung besitzen sollen, spielt der Geistsektor hier keine Rolle.

reller Eigenschaften der entsprechenden Korrelations-Funktionen bezüglich beider Seiten eines Kanals <sup>2</sup>, so daß wir unter Berücksichtigung der partiellen Bose-Symmetrie für den 4-Gluon-Vertex folgende Regularitäts-Zerlegung bezüglich des  $s$ -Kanals erhalten:

$$\Gamma_{4,T}^{[1,0]} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 (\{p\}; \Lambda) = \frac{\Psi_T^{[1,0]} \nu_1 \nu_2 \tau (p_1, p_2; \Lambda) \Psi_T^{[1,0]} \tau \nu_3 \nu_4 (p_3, p_4; \Lambda)}{s + u_2 \Lambda^2} + \text{REG.} \quad (3.1)$$

Die (bezüglich der  $s$ -Variablen) regulären Beiträge enthalten neben dem reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  auch Polterme bezüglich der anderen beiden Mandelstam-Variablen  $u$  und  $t$ , die aus dem Polterm im  $s$ -Kanal durch entsprechende Permutationen der Impulse und Indizes hervorgehen (siehe (2.42)). Die Impulsfunktionen  $\Psi_T$  werden wir, obwohl diese Pole nichts mit physikalischen Bindungszuständen zu tun haben, als „Bethe-Salpeter-Amplituden“ im Farbklett-Kanal bezeichnen, wie es durch die später folgende Analyse der Bethe-Salpeter-Gleichung (1.71) nahegelegt wird.

Um die nullte Störungsordnung der Bethe-Salpeter-Amplituden in erster Stufe der rationalen Approximation näher zu bestimmen, ersetzen wir nun in erster Iteration alle Propagatoren und Vertizes in der 1-Schleifen-Form des D-S-Funktional für den 3-Gluon-Vertex (1.53) durch die Ansätze des zweiten Kapitels und bilden auf beiden Seiten der Gleichung das Residuum an der Stelle  $p_1^2 = -u_2 \Lambda^2$ . Führt man das Fünfeck als neues graphisches Symbol sowohl für den  $B_{1,T}$ -Anteil des 3-Gluon-Vertex (siehe (2.32)) wie auch für die beiden Bethe-Salpeter-Amplituden  $\Psi_T$  ein <sup>3</sup>, so erhalten wir in graphischer Notation folgende Gleichung:

$$\Lambda^2 \cdot \left[ \text{Diagram of } B_{1,T}^{[1,0]} \right] + \mathcal{O}(g^2) \Big|_{p_1^2 = -u_2 \Lambda^2} = \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \left[ \text{Diagram of } \Psi_T^{[1,0]} \text{ loop} \right] \cdot \left[ \text{Diagram of } \Psi_T^{[1,0]} \right] \Big|_{p_1^2 = -u_2 \Lambda^2} \quad (3.2)$$

Der Grund für die Benutzung eines einzigen graphischen Symbols für zwei unterschiedliche Funktionen wird deutlich, falls man bei Vernachlässigung der Fermion-Schleifen sowie der 2-Schleifen-Terme den Residuumsanteil des D-S-Funktional für die Gluon-Selbstenergie (1.49) in erster Iteration mit der obigen Schleife vergleicht. Wegen der in (3.2) verlangten Proportionalität

$$\Psi_T^{[1,0]} = \sqrt{\alpha_G} \cdot B_{1,T}^{[1,0]} \quad ; \quad \alpha_G \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

<sup>2</sup>Die Strukturtheoreme [42] erfordern zunächst nur die Darstellung der Residuumsfunktionen durch Summen faktorisierender Terme; allerdings lassen sich Beiträge, die anderen Farb- oder Lorentz-Kanälen entsprechen, aufgrund einer Normierungsbedingung für die Faktoren [8] vernachlässigen.

<sup>3</sup>In weiteren Arbeiten zu den Mandelstam-Polen [17] [9] wird ein Dreieck als graphisches Symbol gewählt; dies sollte aber keine Verwirrung hervorrufen.

läßt sich nämlich die separable Schleife in (3.2) durch den Residuumsanteil der modifizierten Gluon-Selbstenergie (2.19) ersetzen und wir erhalten folgende Beziehung (ohne Farb- und Lorentz-Indizes):

$$\Lambda^2 B_{1,T}^{[1,0]} = -u_3 \Lambda^2 \alpha_G B_{1,T}^{[1,0]} \quad (3.4)$$

Damit können wir die Proportionalitätskonstante ablesen:

$$\alpha_G = -\frac{1}{u_3} \quad (3.5)$$

Wir stellen fest, daß die Existenz von Mandelstam-Polen in dem 4-Gluon-Vertex eng mit einer nichtverschwindenden Polstruktur der modifizierten Gluon-Selbstenergie (2.19) verknüpft ist ( $u_3 \neq 0$ ). Außerdem erzwingt deren transversale Lorentz-Struktur die vollständige Transversal-Projektion der Bethe-Salpeter-Amplituden, so daß die Residuumsfunktion  $R_{s,T}$  folgende Gestalt annimmt ( $P := p_1 + p_2 = -p_3 - p_4$ ):

$$R_{s,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) = B_{1,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \rho \\ a_1 a_2 m \end{matrix} (p_1, p_2; \Lambda) \left( -\frac{1}{u_3} \right) t^{\rho\sigma} (P) B_{1,T}^{[1,0]} \begin{matrix} \sigma \nu_3 \nu_4 \\ m a_3 a_4 \end{matrix} (p_3, p_4; \Lambda) \quad (3.6)$$

Man beachte, daß der entsprechende Beitrag des 4-Gluon-Vertex im perturbativen Limes *nicht* verschwindet und somit eine Verletzung der Randbedingung des perturbativen Limes vorliegt, die einen auf niedriger Stufe  $r$  nicht vermeidbaren Approximationsfehler darstellt.

In Hinblick auf die graphische Darstellung der D-S-Funktionale in erster Iteration ist es nützlich, eine spezielle graphische Notation für die Mandelstam-Pole der nullten Ordnung, die wir im folgenden auch als „Schatten-Pole“ bezeichnen werden, einzuführen:

$$-\frac{1}{u_3} \frac{\delta_{ab} t^{\mu\nu}(p)}{p^2 + u_2 \Lambda^2} \hat{=} \begin{array}{c} \mu, a \qquad \qquad \nu, b \\ \hline \hline \leftarrow \\ p \end{array} \quad (3.7)$$

Im Gegensatz zu den wohlbekanntem Mandelstam-Polen im Farbsingulett-Kanal, die durch Aufsummation endlicher Störungskorrekturen im Rahmen der üblichen Störungstheorie (z. B. „Leiter“-Summation) entstehen [15] [20] und durchaus gebundene Zustände („Glue-ball-states“) beschreiben können, sind die obigen Residuen im allgemeinen nicht positiv definit und stellen damit ein unphysikalisches Artefakt der nichtperturbativen Modifikationen dar. Allerdings ist für eine physikalische Interpretation der Polterme das Verhalten der vollen 4-Gluon-Amplitude  $T_4$  entscheidend, so daß auch die zugehörigen 1-Teilchen-Austauschgraphen berücksichtigt werden müssen.

### 3.2 „Entschärfung“ der inneren Linien

Ersetzt man bei den 1-Teilchen-Austauschgraphen der 4-Gluon-Amplitude (1.50) in erster Iteration die vollen Gluon-Propagatoren und 3-Gluon-Vertizes durch die entsprechenden Ansätze der modifizierten nullten Ordnung, so tritt in jedem Kanal längs der Austauschlinie neben dem komplexen Polpaar effektiv auch ein reeller Pol in der Mandelstam-Variablen auf, da die Propagator-Nullstelle nur *einen* Polfaktor der modifizierten 3-Gluon-Vertizes herauskürzt. Dieser Pol würde aber in dieser Form ein physikalisches d. h. asymptotisch detektierbares Teilchen der Masse  $u_2 \Lambda^2$  im Farboktett-Kanal parametrisieren und

steht daher in Widerspruch zu der postulierten Form (1.29) des transversalen Gluon-Propagators. Berücksichtigt man jedoch die Mandelstam-Pole des 4-Gluon-Vertex mit (3.5), so wird der reelle Pol wegen

$$\begin{aligned}
& \frac{\Lambda^4}{(p^2 + u_2\Lambda^2)(p^2 + u_+\Lambda^2)(p^2 + u_-\Lambda^2)} - \frac{1}{u_3} \frac{1}{(p^2 + u_2\Lambda^2)} \\
&= \frac{1}{u_3} \frac{1}{(p^2 + u_2\Lambda^2)} \left( \frac{u_3\Lambda^4 - (p^2 + u_1\Lambda^2)(p^2 + u_2\Lambda^2) - u_3\Lambda^4}{(p^2 + u_1\Lambda^2)(p^2 + u_2\Lambda^2) + u_3\Lambda^4} \right) \\
&= -\frac{1}{u_3} \frac{(p^2 + u_1\Lambda^2)}{(p^2 + u_+\Lambda^2)(p^2 + u_-\Lambda^2)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

in der Summe der beiden reduzierbaren Terme gerade kompensiert, und die volle 4-Gluon-Amplitude  $T_4$  besitzt nur noch die echten Propagator-Pole. Aufgrund dieses Verhaltens werden die Mandelstam-Pole in früheren Arbeiten [11] [17] auch als „Kompensierende Pole“ bezeichnet. Diese exakte Kompensation wurde ebenfalls in [7] und [16] erstmals beobachtet. Sie gewinnt in der QCD besondere Bedeutung, da es hier – im Rahmen der  $\Lambda$ -erweiterten Störungsmethode – ein wichtiger Teil der Beschreibung des „Confinements“ ist, daß die Propagatoren ausschließlich *komplex-konjugierte* Polpaare aufweisen, während der bei  $r = 1$  einzige „Schatten-Pol“, bliebe er unkompensiert stehen, eine zur Beschreibung massiver Teilchen geeignete Singularität auf der reellen Achse erzeugen würde.

Um den Kompensations-Mechanismus bei der Formulierung der Feynman-Regeln berücksichtigen zu können, führen wir eine neue Notation für die Summe der beiden reduzierbaren Graphen ein, die wir als „entschärfte“ Linie bezeichnen wollen [35]:

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
&= \text{Diagram 3}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Notation der „punktierten“ Vertizes in (3.9) deutet an, daß nur die  $B_{1,T}$ -Anteile der modifizierten Vertizes von der Subtraktion betroffen sind und somit die Einführung eines neuen „Propagators“ für die entschärfte Linien nicht ausreicht, um die „Schatten-Pole“ in Skelettgraphen-Entwicklungen zu berücksichtigen. Die graphische Darstellung (3.9) zeigt zudem, daß der Begriff der 1-Teichen-Reduzibilität, der als Grundlage für die Skelettgraphen-Entwicklungen der Greenschen Funktionen dient, im Rahmen der nicht-perturbativ erweiterten Störungsreihe unzureichend ist und einer Erweiterung bezüglich der „Schatten-Pole“ bedarf.

### 3.3 Verallgemeinerung für oberflächlich konvergente Vertizes

Eine Einbeziehung der Fermion-Schleifen in den Formalismus der kompensierenden Pole bereitet keine Schwierigkeiten, falls auch für den oberflächlich konvergenten 4-Punkt-Vertex  $\bar{\Gamma}_{4,T}$  eine Polstruktur im gluonischen Kanal angesetzt wird. Berücksichtigt man zusätzlich die D-S-Gleichung im fermionischen Kanal, so ist auch hier eine Polstruktur in der entsprechenden fermionischen Impulsvariablen zu fordern, die mit der bekannten Ladungskonjugation-Symmetrie (1.62) auf folgenden Ansatz führt:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{4,T}^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \nu_3 \nu_4}_{a_3 a_4}(\{p\}; \Lambda) &= \frac{\bar{\Psi}_T^{[1,0] \ l_1 l_2 \ \tau}_m(-p_1, p_2; \Lambda) \Psi_T^{[1,0] \ \tau \nu_3 \nu_4}_{ma_3 a_4}(p_3, p_4; \Lambda)}{(-p_1 + p_2)^2 + u_2 \Lambda^2} \\ &+ \frac{\bar{\Psi}'_T^{[1,0] \ l_1 i \ \nu_3}_{a_3}(-p_1, p_3; \Lambda) \Psi''_T^{[1,0] \ i l_2 \ \nu_4}_{a_4}(p_2, p_4; \Lambda)}{\not{p}_1 - \not{p}_3 + w_2 \Lambda} \\ &+ \frac{\bar{\Psi}'_T^{[1,0] \ l_1 i \ \nu_4}_m(-p_1, p_4; \Lambda) \Psi''_T^{[1,0] \ i l_2 \ \nu_3}_{a_3}(p_2, p_3; \Lambda)}{\not{p}_1 - \not{p}_4 + w_2 \Lambda} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Unter Verwendung der Polzerlegung (2.36) setzen wir diesmal

$$\bar{\Psi}_T^{[1,0]} = \sqrt{\alpha_G} \cdot \bar{B}_{1,T}^{[1,0]} \quad , \quad (3.11)$$

um auch in  $\bar{T}_4$  eine Entschärfung des 1-Gluon-Austauschgraphen vornehmen zu können. Außerdem führt eine kurze Analyse der fermionischen Kanäle auf die Identitäten

$$\bar{\Psi}'_T^{[1,0]} = \sqrt{\alpha_F} \cdot \bar{B}'_{1,T}^{[1,0]} \quad , \quad (3.12)$$

$$\bar{\Psi}''_T^{[1,0]} = \sqrt{\alpha_F} \cdot \bar{B}''_{1,T}^{[1,0]} \quad (3.13)$$

mit einer neuen Proportionalitätskonstanten, die analog zum gluonischen Kanal durch Abspaltung einer Selbstenergie-Schleife bestimmt werden kann:

$$\alpha_F = -\frac{1}{w_3} \quad (3.14)$$

Die Definition eines entsprechenden „Schatten-Pols“ im fermionischen Kanal lautet:

$$-\frac{1}{w_3} \delta^{ij} \frac{-\not{p} + w_2 \Lambda}{p^2 + w_2^2 \Lambda^2} \hat{=} \begin{array}{c} i \qquad \qquad \qquad j \\ \hline \leftarrow \\ p \end{array} \quad (3.15)$$

Erneut ist die Einführung der Mandelstam-Pole im fermionischen Kanal nur bei einer nichtverschwindenden Polstruktur der modifizierten Fermion-Selbstenergie (2.24) sinnvoll ( $w_3 \neq 0$ ); sie verhindert zudem erneut, daß die modifizierte nullte Störungsordnung des 4-Punkt-Vertex (3.10) im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  verschwindet. Für die „Entschärfung“ der 1-Fermion-Austauschgraphen wählen wir diesmal folgende graphische Notation:

Da der  $1/g^2$ -Mechanismus des zweiten Kapitels, der für die selbstkonsistente Reproduktion der modifizierten nullten Störungsordnung zwingend notwendig ist, an divergente Integrale gebunden ist, stellt sich die Frage, wie die Mandelstam-Pole der oberflächlich konvergenten Vertizes zu reproduzieren sind. Dieses Problem ist zu lösen, falls zusätzliche Polstrukturen in den Vertizes mit fünf oder mehr Beinen identifiziert werden, die in Anzahl und Gestalt exakt den möglichen 1-Teilchen-Austauschgraphen der zugehörigen  $T$ -Amplituden entsprechen und deren selbstkonsistente Reproduktion mit derselben Methode behandelt werden kann.

Um das Prinzip zu demonstrieren, wählen wir exemplarisch die Dyson-Schwinger-Gleichung des 4-Punkt-Vertex  $\bar{\Gamma}_4$  im fermionischen Kanal

und führen analog zu (1.68 – 1.70) eine Skelettgraphen-Entwicklung der  $\bar{\Gamma}_5'$ -Amplitude durch. Hierzu setzen wir in  $\bar{\Gamma}_5'$  für jeden 1-Teilchen-Austauschgraphen der vollen  $\bar{\Gamma}_5$ -Amplitude (siehe Anhang A.1) einen entsprechenden Beitrag mit kompensierenden Polen an, deren Präsenz wiederum durch Residuenbildung bezüglich des linken Beins in (3.17) bzw. in den entsprechenden Gleichungen der anderen Kanäle erschlossen werden kann. Somit verbleiben offene Polstrukturen in denjenigen Kanälen, die aufgrund der Reduzibilitäts-Eigenschaft in der Definition von  $\bar{\Gamma}_5'$  herausgenommen wurden<sup>4</sup>, während in den übrigen Kanälen die Entschärfung der inneren Linien zu beobachten ist<sup>5</sup>. Berücksichtigt man nur die separablen Terme, die kompensierende Pole bezüglich einer Mandelstam-Variablen des 4-Punkt-Vertex enthalten, so läßt sich durch

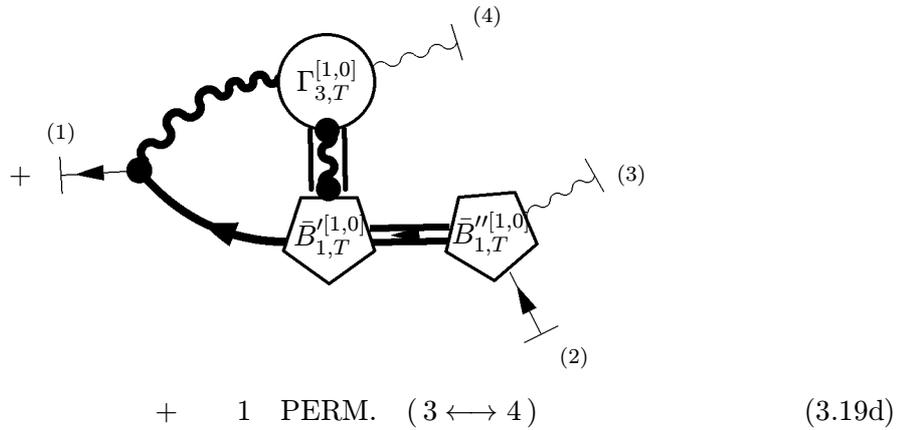
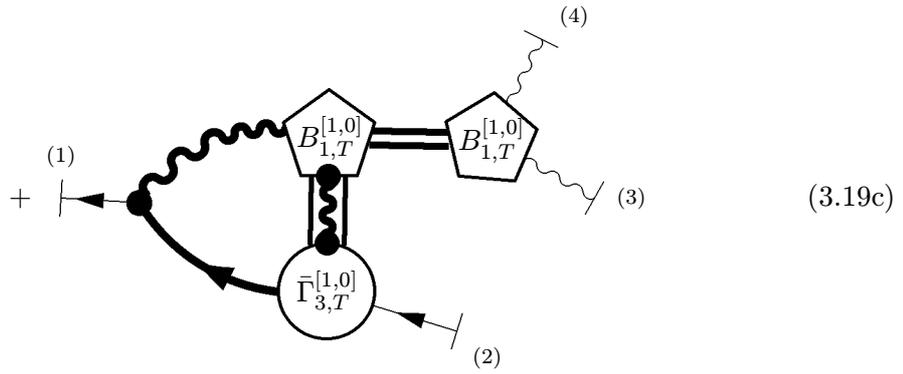
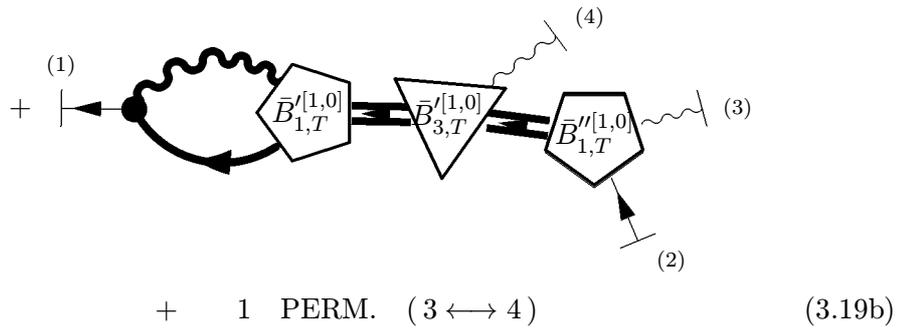
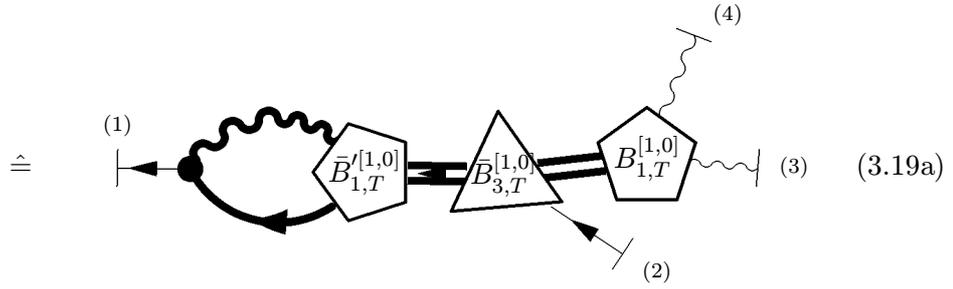
$$\Phi_{\bar{\Gamma}_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)_{pert}}, \Gamma^{[1,0]}] = \Phi_{\bar{P}_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)_{pert}}, \Gamma^{[1,0]}] + \text{KONV.} \quad (3.18)$$

ein divergentes Teilfunktional definieren, das in erster Iteration und in 1-Schleifen-Ordnung folgende Typen von Feynman-Graphen enthält:

<sup>4</sup>Vergleiche (1.68 – 1.70).

<sup>5</sup>Die Feynman-Graphen ohne kompensierende Pole sind wie in der Störungstheorie oberflächlich konvergent, falls die nichtperturbativen Modifikationen – wie in der dritten Randbedingung des Abschnitts 2.2 gefordert – den Divergenzgrad der Schleifen nicht erhöhen.

$$\Phi_{\bar{P}_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] = \sum_{i=a,\dots,f} \Phi_{\bar{P}_4}^{(i)} \binom{(l_1 l_2)}{(a_3 a_4)} (\nu_3 \nu_4) (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon)$$



(3.19e)

(3.19f)

Die „dreieckigen“ Vertizes in den 1-Schleifen-Graphen (3.19a) und (3.19b) beschreiben die Teilfunktionen des modifizierten Fermion-Gluon-Vertex, wie sie in den Polzerlegungen (2.36 – 2.38) eingeführt wurden.

Nach einem Residuenvergleich bezüglich einer der Mandelstam-Variablen faktorisiert jeweils dieselbe Impulsfunktion  $B_{1,T}$  in dem entsprechenden Kanal nach rechts heraus. Damit sind die verbleibenden 1-Schleifen-Terme zu den Residuenanteilen der 1-Schleifen-Funktionale für die 3-Punkt-Vertizes identisch und liefern bis auf Korrekturen der Ordnung  $g^2$  gerade die nichtperturbativen Modifikationen der nullten Störungsordnung für den 4-Punkt-Vertex  $\bar{\Gamma}_4$ . Wir gelangen also zu folgendem fundamentalen Prinzip:

*Die nichtperturbativen Modifikationen der nullten Störungsordnung für die oberflächlich konvergenten Vertizes, die in Form von Polstrukturen in den zugehörigen Mandelstam-Variablen angesetzt werden, lassen sich bereits durch die Lösung des Selbstkonsistenzproblems für die Basisvertizes ohne weitere Zusatzbedingungen selbstkonsistent reproduzieren.*

Somit bleibt die zentrale Aussage des zweiten Kapitels, nach der das Selbstkonsistenzproblem der Ansätze für die modifizierte nullte Störungsordnung auf die Basisvertizes der Theorie beschränkt bleibt, im Kern richtig, sofern die Vertizes im Sinne einer erweiterten, auch die „Schatten-Pole“ einschließenden Irreduzibilität definiert werden. Es werden insbesondere *keine* neuen Feynman-Regeln für die oberflächlich konvergenten Vertizes benötigt. Allerdings erweist es sich als vorteilhaft, in Verbindung mit dem Begriff der erweiterten 1-Teilchen-Reduzibilität analog zum modifizierten 4-Gluon-Vertex (2.42) reduzierte Vertizes einzuführen und so sämtliche Mandelstam-Pole schon bei der Formulierung der Dyson-Schwinger-Funktionale zu berücksichtigen.

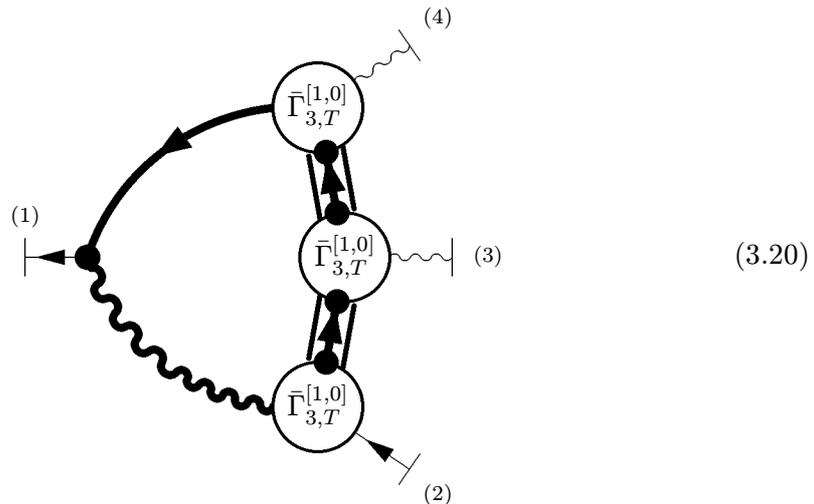
Eine Einbeziehung der 2-Schleifen-Terme in jeder Dyson-Schwinger-Gleichung ist ebenfalls möglich, wie die Formulierung der Mandelstam-Pole in der  $\mathcal{T}_{3,2}$ -Amplitude (1.57) und ein Vergleich des separablen Terms in der ersten Iteration des Dyson-Schwinger-Funktional für den 3-Gluon-Vertex (1.53) mit dem 2-Schleifen-Beitrag der Gluon-Selbstenergie (1.49) exemplarisch zeigen. Wir erinnern jedoch daran, daß im Rahmen dieser Arbeit eine Berechnung der 2-Schleifen-Terme in den D-S-Funktionalen nicht durchgeführt werden kann.

Man beachte, daß die kompensierenden Pole keineswegs „erfunden“ oder „angepaßt“ werden, um die Eliminierung unphysikalischer Pole zu erreichen. Vielmehr werden durch *niedrigere* D-S-Gleichungen, nämlich die der Selbstenergien oder 3-Punkt-Vertizes, bereits ihre Residuen eindeutig festgelegt; daß sie sich dann als „kompensierend“ für die Austauschgraphen erweisen, ist ein nichttriviales Resultat und demonstriert einen Aspekt der inneren Konsistenz des hier betrachteten Verfahrens.

### 3.4 Folgerungen für die nichtperturbativen Modifikationen

Im zweiten Kapitel wurden bei der Formulierung der Ansätze für die modifizierte nullte Störungsordnung eventuelle impulsabhängige Tensorstrukturen des Fermion-Gluon-Vertex sowie inverse Polfaktoren für jeden Vertex mit drei oder mehr Beinen ausgeschlossen, um den Divergenzgrad der Feynman-Diagramme gegenüber der Störungstheorie nicht zu erhöhen. Diese Argumentation gründet sich auf die Beobachtung, daß die Kompensation der reellen Pole während der Entschärfungsprozedur (3.8) mit einem „Verschlucken“ von jeweils einem Polfaktor der beteiligten Vertizes verbunden ist und somit bei der üblichen Impulsabzählung zur Bestimmung des oberflächlichen Divergenzgrades [6] [22] berücksichtigt werden muß.

Um diese Situation zu verdeutlichen, wählen wir exemplarisch eines der vollständig entschärften Diagramme für den 4-Punkt-Vertex  $\bar{\Gamma}_4$ , dessen Impulsintegrale im vorherigen Abschnitt aufgrund der dritten Randbedingung an die nichtperturbativ modifizierten Ansätze als oberflächlich konvergent notiert wurden:



Aus solchen Diagrammen, in denen mehrere entschärfte Linien an Vertizes der modifizierten nullten Störungsordnung koppeln, resultieren die stärksten Einschränkungen an

die nichtperturbativen Modifikationen. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Ansatz des Fermion-Gluon-Vertex; entsprechende Einschränkungen für die Vertizes im gluonischen Sektor lassen sich in ähnlicher Weise begründen.

Zwei weitere Beiträge der ersten Approximationsstufe ( $r = 1$ ) für den Ansatz des Fermion-Gluon-Vertex (2.35), die, obwohl sie eine Transversal-Projektion der äußeren Gluonbeine überleben, im zweiten Kapitel unterdrückt wurden, sind durch folgende Strukturen gegeben ( $-p_1 + p_2 + p_3 = 0$ ):

$$\propto \bar{\Pi}_1 \frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{\Lambda} \bar{\Pi}_2 \Pi_3 \quad ; \quad (3.21)$$

$$\propto \left( \frac{\not{p}_1}{\Lambda} (\bar{\Pi}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \bar{\Pi}_2) + (\bar{\Pi}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \bar{\Pi}_2) \frac{\not{p}_2}{\Lambda} \right) \Pi_3 \quad (3.22)$$

Beide Strukturen entsprechen der Forderung nach Ladungskonjugations-Invarianz (1.62) und besitzen eine ausreichende Anzahl von Polfaktoren, so daß ihr Verschwinden im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  gesichert ist. Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß ein Produkt von zwei fermionischen Polfaktoren zusammen mit der zweiten Tensorstruktur aufgrund der Identität

$$\bar{\Pi}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_2) \bar{\Pi}_2 = \Lambda (\bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2) - 2 w_2 \Lambda \bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2 \quad (3.23)$$

keine neue Struktur darstellt und daher bei der Auswahl möglicher weiterer Impulsstrukturen nicht aufgenommen wurde.

Berücksichtigt man die Subtraktionsvorschrift zur „Entschärfung“ der inneren Fermionlinien, so existieren Beiträge, bei denen eventuell vorhandene fermionische Polfaktoren aus (3.21) und (3.22) in dem mittleren der drei Vertizes innerhalb der Schleife (3.20) „geschluckt“ werden, während eventuelle gluonische Polfaktoren von diesem Vertex aus der Schleife herausfaktorisieren. Folglich sind die beide Beiträge als linear im Integrationsimpuls zu zählen und liefern – im Gegensatz zur Störungstheorie – eine logarithmische Divergenz, die nach den Randbedingungen des Abschnitts 2.2 vermieden werden sollte.

Auch Modifikationen in Form von inversen Polfaktoren sind mit dieser Argumentation im fermionischen Sektor auszuschließen, wie die Identität

$$\not{p}_1 \gamma^\mu \bar{\Pi}_2 = \Lambda \bar{\Pi}_1^{-1} \gamma^\mu \bar{\Pi}_2 - w_2 \Lambda \bar{\Pi}_2 \quad (3.24)$$

zeigt. Im gluonischen Sektor sind Modifikationen dieser Form aufgrund ähnlicher Überlegungen auszuschließen. Wir werden hierauf nicht weiter eingehen, sondern stattdessen abschließend das Konzept der „kompensierenden“ Pole und „entschärften“ Linien auf die Bethe-Salpeter-resummierten Gleichungen anwenden.

### 3.5 Erweiterung der Bethe-Salpeter-Resummation

Die im ersten Kapitel formulierte Bethe-Salpeter-Gleichung (1.71) enthält zunächst weder „Schatten-Pole“ noch „entschärfte“ innere Linien, so daß auch der Begriff der 2-Teilchen-Reduzibilität einer neuen Interpretation bedarf. Dies geschieht mit Hilfe der Einführung von im erweiterten Sinne irreduziblen Bethe-Salpeter-Kernen  $\mathcal{K}_s$  und  $\bar{\mathcal{K}}_s$  <sup>6</sup> sowie der formalen Ersetzung der Propagatoren durch die entsprechenden „entschärften“ Linien und

<sup>6</sup>Diese sind zusätzlich 2-Teilchen-irreduzibel bezüglich zweier „Schatten-Pole“ oder einer Gluonlinie und eines „Schatten-Pols“.

führt auf folgende Gleichung der ersten Iteration <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \mathcal{O}(g^2) = \text{Diagram 2} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{Diagram 3} \\
 & - 2 g_0^2 \cdot \text{Diagram 4} + 1 \text{ PERM. } (3 \leftrightarrow 4) \\
 & - N_F g_0^2 \cdot \text{Diagram 5}
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Die Geist-Gluon-Amplitude  $\tilde{T}_{4,s}$  und der zugehörige Bethe-Salpeter-Kern  $\tilde{K}_s$  in der vollen Bethe-Salpeter-Gleichung (1.71) enthalten in Landau-Eichung nur die perturbative nullte Ordnung in Gestalt der 1-Geist-Austauschgraphen (vergleiche (1.55)), so daß die Geist-Schleife durch insgesamt vier perturbative „Box“-Graphen ersetzt werden kann; das zweifache Auftreten jeder der beiden Permutationen wird dabei durch die Überzählungskorrekturen des Bethe-Salpeter-Kerns  $\mathcal{K}_s$  ausgeglichen.

Entsprechende Gleichungen für die übrigen 4-Punkt-Amplituden enthalten ebenfalls nur entschärfte innere Linien und komplettieren das gekoppelte Gleichungssystem der modifizierten Bethe-Salpeter-Resummation. Man beachte, daß jede der Amplituden neben den entschärften Austauschgraphen in den vertikalen Kanälen noch den kompensierenden Pol im horizontalen (gluonischen) Kanal enthält; dieser liefert aufgrund seiner Faktorisierungs-Eigenschaft eine homogene Gleichung, die als die übliche Gleichung für die Bethe-Salpeter-Amplituden (im Farboktett-Kanal) identifiziert werden kann und gleichzeitig den Residuumsanteil einer resummierten Gleichung für den 3-Gluon-Vertex darstellt.

<sup>7</sup>Wir unterdrücken den Index, der die vollständige Transversal-Projektion der Amplituden kennzeichnet, und ersetzen die Summe über alle Fermion-Flavours durch den Gewichtungsfaktor  $N_F$ .

Die entsprechende Faktorisierungs-Eigenschaft existiert auch im fermionischen Kanal, wodurch eine resummierte Gleichung für den Fermion-Gluon-Vertex in diesem Kanal entsteht.

Obwohl die Bethe-Salpeter-Gleichungen eventuelle Symmetrien der 4-Punkt-Amplituden aufgrund ihrer impliziten „Crossing“-Eigenschaften besser respektieren als die Dyson-Schwinger-Gleichungen, erweist sich eine Auswertung des zugehörigen Selbstkonsistenzproblems als schwierig, da Ansätze für die Bethe-Salpeter-Kerne in nullter Störungsordnung wegen deren geringerer Symmetrie noch komplizierter zu konstruieren wären als diejenigen für den voll bose-symmetrischen  $\Gamma_{4,T}$ -Vertex bzw. den zugehörigen reduzierten  $V_{4,T}$ -Vertex. Wir werden daher die resummierten Gleichungen im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgen.

# Kapitel 4

## 1-Schleifen-Resultate für die Selbstenergien

Wir beginnen nun damit, die modifizierten Dyson-Schwinger(D-S)-Funktionale in erster Iteration zu berechnen und die Selbstkonsistenzgleichungen aufzustellen, die durch Anwendung des Selbstkonsistenzmechanismus (2.13) und einen Vergleich mit den nichtperturbativ erweiterten Ansätzen entstehen. Dazu werden im folgenden die vollen Propagatoren und Vertex-Funktionen durch ihre Gegenstücke der ersten Approximationsstufe ersetzt und anschließend die Impulsintegrale in dimensioneller Regularisierung berechnet. Hierbei wählen wir die Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ), wie es durch die Slavnov-Taylor-Identität für den Gluon-Propagator (1.74) nahegelegt wird, und beschränken uns auf die divergenten Anteile der 1-Schleifen-Integrale, da der Selbstkonsistenzmechanismus (2.13) vollständig an die Divergenzen gebunden ist. Aufgrund der rationalen Impulsstruktur der nichtperturbativ erweiterten Ansätze sind die Standardtechniken der Störungstheorie (Feynman-Parametrisierung, Symmetrische Integration,...) anwendbar [22] [28], so daß auf Details zu den Rechnungen verzichtet werden kann.

### 4.1 Das D-S-Funktional der Geist-Selbstenergie

Bevor wir das Selbstkonsistenzproblem der Gluon-Selbstenergie rekapitulieren, sollen der Vollständigkeit halber die Resultate des Geistsektors in Landau-Eichung kurz notiert werden. Eine Analyse des D-S-Funktional für den Geist-Gluon-Vertex (1.53) zeigt, daß sich auf dem 1-Schleifen-Niveau wegen des geringen Divergenzgrades für  $\xi = 0$  keine Divergenzen ausbilden <sup>1</sup>. Somit sind eventuelle Modifikationen des Geist-Gluon-Vertex nicht selbstkonsistenzfähig, und der Vertex ist in erster Iteration der Funktionale durch seine (transversal-projizierte) perturbative nullte Ordnung zu ersetzen.

Es bleibt zu prüfen, ob die Ersetzung des vollen Geist-Propagators durch den nackten Geist-Propagator (2.21) innerhalb des hierarchisch gekoppelten Dyson-Schwinger-Systems konsistent ist. Dazu berechnen wir die divergenten Beiträge der Geist-Selbstenergie in erster Iteration und stellen fest, ob sich neben der perturbativen 1-Schleifen-Divergenz weitere nichtperturbative Divergenzen ausbilden, die bei Benutzung des  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) Korrekturterme zur nullten Störungsordnung darstellen würden.

Das Dyson-Schwinger-Funktional der Geist-Selbstenergie reduziert sich in erster Itera-

---

<sup>1</sup>Für Details siehe [9].



Das Funktional aus (1.49) enthält unter Vernachlässigung der 2-Schleifen-Terme in erster Iteration folgende vier Feynman-Graphen ( $p \equiv p_2 = -p_1$ ):

$$\Phi_{\Gamma_2}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] = \sum_{i=a,\dots,d} \Phi_{\Gamma_2}^{(i)} \left( \begin{smallmatrix} \nu_1 \nu_2 \\ a_1 a_2 \end{smallmatrix} \right) (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon)$$

$$\hat{=} \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (4.3a)} \quad (4.3a)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (4.3b)} \quad (4.3b)$$

$$- \text{Diagram (4.3c)} \quad (4.3c)$$

$$- N_F \cdot \text{Diagram (4.3d)} \quad (4.3d)$$

Die Verwendung des transversal-projizierten nackten Geist-Gluon-Vertex (2.26) in der Geist-Schleife (4.3c) gewährleistet die transversale Lorentz-Tensorstruktur im perturbativen Limes; weiterhin erscheint vor der Fermion-Schleife (4.3d) wie in (3.25) der Faktor  $N_F$  anstelle der Summe über alle Flavour-Typen.

Eine Auswertung der Impulsintegrale mit den üblichen perturbativen Methoden liefert in Landau-Eichung folgende divergenten Beiträge für die obigen vier Feynman-Graphen ( $N_C = 3$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_2}^{(a)} \left( \begin{smallmatrix} \nu_1 \nu_2 \\ a_1 a_2 \end{smallmatrix} \right) (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \delta_{a_1 a_2} t^{\nu_1 \nu_2} (p) \\ &\cdot \left[ \frac{25}{4} p^2 + (9x_1 - 9u_1) \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_4 \right) p^2 + (9x_5 - 9x_4 u_1) \Lambda^2 \right) \Pi(p^2; \Lambda^2) \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\Phi_{\Gamma_2}^{(b)} \begin{matrix} (\nu_1 \nu_2) \\ (a_1 a_2) \end{matrix} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = \delta_{a_1 a_2} \delta^{\nu_1 \nu_2} \frac{27}{4} u_1 \Lambda^2 \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (4.4b)$$

$$\Phi_{\Gamma_2}^{(c)} \begin{matrix} (\nu_1 \nu_2) \\ (a_1 a_2) \end{matrix} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = \delta_{a_1 a_2} t^{\nu_1 \nu_2}(p) \frac{1}{4} p^2 \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (4.4c)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_2}^{(d)} \begin{matrix} (\nu_1 \nu_2) \\ (a_1 a_2) \end{matrix} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \delta_{a_1 a_2} t^{\nu_1 \nu_2}(p) N_F \\ &\cdot \left[ -\frac{2}{3} p^2 + \left( 2z_{0,4} - 2z_{0,1}(w_1 - w_2) + 2w_3 \right) \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{2}{3} z_{1,0} p^2 + \left( 2z_{1,4} - 2z_{1,1}(w_1 - w_2) + 2z_{1,0} w_3 \right) \Lambda^2 \right) \Pi(p^2; \Lambda^2) \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (4.4d)$$

Tatsächlich enthält das Resultat der „Tadpole“-Schleife (4.4b) wegen

$$\delta^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}(p) + l^{\mu\nu}(p)$$

auch einen Longitudinal-Anteil, der eine Störung der S-T-Identität (1.74) auf 1-Schleifen-Niveau darstellt. Da aber Longitudinal-Anteile der Lorentz-Tensoren in den Ansätzen der 3-Punkt-Vertizes nicht berücksichtigt werden, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf den transversalen Sektor der Gluon-Selbstenergie.

### 4.3 Selbstkonsistenz im transversalen Sektor

Das Selbstkonsistenzproblem der transversalen Gluon-Selbstenergie lautet nach (2.10) in erster Iteration und erster Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ):

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_2, T} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]} \right] \right\}_{R, \nu} = \Gamma_{2, T}^{[1,0]} - \Gamma_{2, T}^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (4.5)$$

Das vollständige Dyson-Schwinger-Funktional läßt sich nach einer Transversal-Projektion der äußeren Beine <sup>3</sup> folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned} t^{\mu_1 \nu_1}(p) \Phi_{\Gamma_2, T} \begin{matrix} (\nu_1 \nu_2) \\ (a_1 a_2) \end{matrix} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) t^{\nu_2 \mu_2}(p) &= \delta_{a_1 a_2} t^{\mu_1 \mu_2}(p) \\ &\cdot \left( \mathcal{I}_{0, T}(p^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi(p^2; \Lambda^2) \mathcal{I}_{1, T}(p^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ein Vergleich mit der transversal-projizierten Summe der obigen 1-Schleifen-Divergenzen (4.4a – 4.4d) liefert für die beiden skalaren, quadratisch divergenten Integrale der Zerlegung (4.6) folgende Resultate:

<sup>3</sup>Aufgrund der Impulserhaltung ist hier eigentlich nur ein Transversal-Projektor erforderlich. Dies trifft für die übrigen Vertizes nicht mehr zu.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0,T}(p^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \left( \frac{13}{2} - \frac{2}{3} N_F \right) p^2 + \left( 9x_1 - 9u_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + N_F \left( 2z_{0,4} - 2z_{0,1}(w_1 - w_2) + 2w_3 \right) \right) \Lambda^2 \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,T}(p^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_4 - \frac{2}{3} N_F z_{1,0} \right) p^2 + \left( 9x_5 - 9x_4 u_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + N_F \left( 2z_{1,4} - 2z_{1,1}(w_1 - w_2) + 2z_{1,0} w_3 \right) \right) \Lambda^2 \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das erste Integral enthält die perturbative 1-Schleifen-Divergenz, die aber erst nach Aufstellung der Selbstkonsistenzgleichungen extrahiert werden soll. Nach Multiplikation mit dem Kopplungsfaktor  $g_0^2/(4\pi)^2$  erhalten wir bei einem Vergleich der Residuen beider Seiten von (4.5) an der Stelle  $p^2 = -u_2 \Lambda^2$  die Selbstkonsistenzgleichung

$$-u_3 \Lambda^4 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \mathcal{I}_{1,T}(p^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \Big|_{p^2 = -u_2 \Lambda^2}, \quad (4.9)$$

die sich wegen (2.13) bei Abschalten des Regularisierungsparameters ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) weiter auswerten läßt:

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{15}{2} x_1 u_2 - \frac{5}{4} x_4 u_2 - 9x_5 + 9x_4 u_1 \right. \\ &\quad \left. + N_F \left( -\frac{2}{3} z_{1,0} u_2 - 2z_{1,0} w_3 + 2z_{1,1}(w_1 - w_2) - 2z_{1,4} \right) \right) \end{aligned}$$

(4.10)

Für eine Anpassung des verbleibenden regulären Teils führen wir zunächst folgende Zerlegung mit einem beliebig wählbaren, dimensionslosen Parameter  $v$  durch:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_{0,T}(p^2) + \Pi(p^2; \Lambda^2) \mathcal{I}_{1,T}(p^2) \\ &= \underbrace{\mathcal{I}_{0,T}(p^2) + \Pi(p^2; \Lambda^2) \left( \mathcal{I}_{1,T}(p^2) - \mathcal{I}_{1,T}(-u_2 \Lambda^2) \right)}_{=: \mathcal{J}_{0,T}(p^2)} + \Pi(p^2; \Lambda^2) \mathcal{I}_{1,T}(-u_2 \Lambda^2) \\ &= \underbrace{\mathcal{J}_{0,T}(p^2) - \mathcal{J}_{0,T}(-v \Lambda^2)}_{=: \mathcal{K}_{0,T}(p^2)} + \mathcal{J}_{0,T}(-v \Lambda^2) + \Pi(p^2; \Lambda^2) \mathcal{I}_{1,T}(-u_2 \Lambda^2) \end{aligned} \quad (4.11)$$



Eine Auswertung der Impulsintegrale liefert analog zur Gluon-Selbstenergie sowohl reguläre Terme als Polstrukturen bezüglich der Lorentz-invarianten Impulsvariablen für fermionische Linien. Die entsprechende Zerlegung des Dyson-Schwinger-Funktional lautet:

$$\Phi_{\Gamma_2}^{(l_1 l_2)}(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = \delta^{l_1 l_2} \left( \bar{\mathcal{I}}_0(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) + \bar{\Pi}(p; \Lambda) \bar{\mathcal{I}}_1(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \quad (4.17)$$

Die beiden linear divergenten Impulsintegrale  $\bar{\mathcal{I}}_0$  und  $\bar{\mathcal{I}}_1$  besitzen dabei mit  $\xi = 0$  und  $N_C = 3$  folgende divergenten Anteile:

$$\bar{\mathcal{I}}_0(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = (4w_1 - 4z_{0,1}) \Lambda \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (4.18)$$

$$\bar{\mathcal{I}}_1(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = (4z_{0,1}w_1 - 4z_{0,4}) \Lambda \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (4.19)$$

Wir stellen fest, daß die divergenten Anteile der Integrale im Gegensatz zur Gluon-Selbstenergie diesmal überhaupt keine Impulsabhängigkeit mehr besitzen. Dies entspricht der Tatsache, daß die perturbative Renormierungskonstante der Selbstenergie masseloser Fermionen (1.97) in Landau-Eichung verschwindet, und es erleichtert die Analyse des Selbstkonsistenzproblems. Nach Multiplikation mit dem Kopplungsfaktor  $g_0^2/(4\pi)^2$  liefert ein Residuenvergleich mit dem nichtperturbativ erweiterten Ansatz des zweiten Kapitels (2.24) die Selbstkonsistenzgleichung

$$w_3 \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda \bar{\mathcal{I}}_1(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \Big|_{\not{p} = -w_2 \Lambda}, \quad (4.20)$$

die sich bei Abschalten des Regularisierungsparameters ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) wegen (2.13) auf die folgende einfache Gleichung reduziert:

$$w_3 = \frac{1}{\beta_0} (4z_{0,1}w_1 - 4z_{0,4})$$

(4.21)

Die Anpassung des regulären Anteils an einer beliebigen Stelle  $\not{p} = -\bar{v}\Lambda$  läßt sich in diesem Fall direkt ausführen; die Selbstkonsistenzgleichung

$$w_1 \Lambda = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \bar{\mathcal{I}}_0(p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \Big|_{\not{p} = -\bar{v}\Lambda} \quad (4.22)$$

ist von der Wahl der Anpassungsstelle  $\bar{v}$  völlig unabhängig und nimmt wegen (2.13) für  $\epsilon \rightarrow 0$  folgende einfache Gestalt an:

$$w_1 = \frac{1}{\beta_0} (4w_1 - 4z_{0,1})$$

(4.23)

Damit ist das Selbstkonsistenzproblem der modifizierten Selbstenergien bzw. Propagatoren auf 1-Schleifen-Niveau abgeschlossen, und wir können uns den Dyson-Schwinger-Funktionalen der modifizierten 3-Punkt-Vertizes zuwenden.





$$+ \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (5.1b)} \quad (5.1b)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (5.1c)} + 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 3) \quad (5.1c)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (5.1d)} + 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 3) \quad (5.1d)$$

$$- \text{Diagram (5.1e)} + 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 3) \quad (5.1e)$$

$$- N_F \cdot \text{Diagram (5.1f)} \quad (5.1f)$$

$$- N_F \cdot \text{Diagram (5.1g)} + 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 3) \quad (5.1g)$$

Die beiden Permutationen von (5.1c) liefern identische Beiträge, was sich am einfachsten durch Vertauschung der inneren Linien und Ausnutzung der Bose-Symmetrie des nackten 3-Gluon-Vertex verifizieren läßt. Für die perturbative Geist-Schleife wird die graphische Notation des transversal-projizierten Geist-Gluon-Vertex (2.26) benutzt, und die Fermion-Schleifen besitzen wie in (4.3d) den Gewichtungsfaktor  $N_F$ .

Wir verzichten erneut auf Details zu den Berechnungen der Schleifen-Integrale und formulieren nur die divergenten Beiträge der obigen Feynman-Graphen ( $N_C = 3$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_3}^{(a)} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= t^{\nu_1 \mu_1}(p_1) t^{\nu_2 \mu_2}(p_2) t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) \\ &\cdot \left( \left( -\frac{15}{2} x_1 + \frac{5}{4} x_4 \right) \frac{p_1^2}{\Lambda^2} - 9x_5 + 9x_4 u_1 \right) \frac{1}{u_3} \Pi_1 B_{1,T}^{[1,0]} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda) \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{5.2a}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_3}^{(b)} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\nu_2 \mu_2}(p_2) t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) \\ &\cdot \left[ \left( p_1^{\mu_2} \delta^{\mu_3 \nu_1} - p_1^{\mu_3} \delta^{\nu_1 \mu_2} \right) \left( -\frac{45}{8} + \left( \frac{45}{16} \zeta_1 - \frac{15}{16} \zeta_7 \right) (\Pi_2 + \Pi_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{45}{16} \zeta_2 + \frac{45}{16} \zeta_3 - \frac{15}{16} \zeta_8 - \frac{15}{16} \zeta_9 \right) \Pi_2 \Pi_3 \right) \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \tag{5.2b}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_3}^{(c)} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\nu_2 \mu_2}(p_2) t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) \\ &\cdot \left[ (p_2 - p_3)^{\nu_1} \delta^{\mu_2 \mu_3} \left( -\frac{3}{2} + \frac{1}{u_3} \left( x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 x_4 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{4} x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_1 x_5 - \frac{1}{4} x_4 x_5 \right) \right) (\Pi_2 + \Pi_3) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{3}{2} x_4^2 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_2 x_5 - 2x_5^2 \right) \right) \Pi_2 \Pi_3 \right) \\ &+ p_1^{\nu_1} \delta^{\mu_2 \mu_3} \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_5 + \frac{1}{4} x_4 x_5 \right) (\Pi_2 - \Pi_3) \\ &+ p_1^{\mu_2} \delta^{\mu_3 \nu_1} \left( 3 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 3x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2} x_1 x_5 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right) \Pi_2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 3x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1x_5 \right) \right) \Pi_3 \\
& + \left( 3x_4^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_2x_5 + \frac{5}{2}x_5^2 \right) \right) \Pi_2\Pi_3 \\
& + p_1^{\mu_3} \delta^{\nu_1\mu_2} \left( -3 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_4 \right) \right. \\
& \quad - \left( 3x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1x_5 \right) \right) \Pi_2 \\
& \quad - \left( 3x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2}x_1x_5 - \frac{1}{2}x_4x_5 \right) \right) \Pi_3 \\
& \quad \left. - \left( 3x_4^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_2x_5 + \frac{5}{2}x_5^2 \right) \right) \Pi_2\Pi_3 \right) \\
& \quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2c}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Gamma_3}^{(d)} \binom{\nu_1\nu_2\nu_3}{a_1a_2a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) & = i f_{a_1a_2a_3} \\
& \cdot \left[ t^{\nu_2\mu_2}(p_2) \left( p_2^{\nu_1} \delta^{\mu_2\nu_3} - p_2^{\nu_3} \delta^{\nu_1\mu_2} \right) \left( \frac{45}{8} + \left( \frac{9}{2}x_1 + \frac{9}{8}x_4 \right) \Pi_2 \right) \right. \\
& \quad \left. + t^{\nu_3\mu_3}(p_3) \left( p_3^{\nu_2} \delta^{\mu_3\nu_1} - p_3^{\nu_1} \delta^{\nu_2\mu_3} \right) \left( \frac{45}{8} + \left( \frac{9}{2}x_1 + \frac{9}{8}x_4 \right) \Pi_3 \right) \right] \\
& \quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2d}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Gamma_3}^{(e)} \binom{\nu_1\nu_2\nu_3}{a_1a_2a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) & = i f_{a_1a_2a_3} t^{\nu_1\mu_1}(p_1) t^{\nu_2\mu_2}(p_2) t^{\nu_3\mu_3}(p_3) \\
& \cdot \left( (p_2 - p_3)^{\mu_1} \delta^{\mu_2\mu_3} + (p_3 - p_1)^{\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_1} + (p_1 - p_2)^{\mu_3} \delta^{\mu_1\mu_2} \right) \frac{1}{8} \\
& \quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2e}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Gamma_3}^{(f)} \binom{\nu_1\nu_2\nu_3}{a_1a_2a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) & = t^{\nu_1\mu_1}(p_1) t^{\nu_2\mu_2}(p_2) t^{\nu_3\mu_3}(p_3) N_F \\
& \cdot \left( \frac{2}{3}z_{1,0} \frac{p_1^2}{\Lambda^2} - 2z_{1,4} + 2z_{1,1}(w_1 - w_2) - 2z_{1,0}w_3 \right) \frac{1}{u_3} \Pi_1 B_{1,T}^{[1,0]} \binom{\nu_1\nu_2\nu_3}{a_1a_2a_3} (\{p\}; \Lambda) \\
& \quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2f}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Gamma_3}^{(g)} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\nu_2 \mu_2}(p_2) t^{\nu_3 \mu_3}(p_3) N_F \\
&\cdot \left[ \left( (p_2 - p_3)^{\nu_1} \delta^{\mu_2 \mu_3} + (p_3 - p_1)^{\mu_2} \delta^{\mu_3 \nu_1} + (p_1 - p_2)^{\mu_3} \delta^{\nu_1 \mu_2} \right) \right. \\
&\cdot \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{0,1}^2 - \left( \frac{2}{3} z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} \right) (\Pi_2 + \Pi_3) \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \frac{2}{3} z_{1,0}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{1,1}^2 \right) \Pi_2 \Pi_3 \right) \right] \\
&\cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.2g}$$

Man beachte, daß die Summe der Fermion-Schleifen keine Beiträge mit einer symmetrischen Farbstruktur ( $\propto d_{abc}$ ) ausbildet, so daß sich die entsprechende Einschränkung der Ansätze als konsistent erweist. Wie erwartet besitzen die verschiedenen Beiträge – mit Ausnahme der (rein perturbativen) Geist-Schleife – keine volle Bose-Symmetrie, sondern allenfalls eine partielle Permutationssymmetrie bezüglich der rechten beiden Beine. Ob dies allerdings zu einer Überbestimmung im Rahmen des Selbstkonsistenzproblems im transversalen Sektor führt, wird der nächste Abschnitt zeigen.

## 5.2 Selbstkonsistenz im transversalen Sektor

Das Selbstkonsistenzproblem für den 3-Gluon-Vertex lautet im transversalen Sektor mit der schematischen Notation des zweiten Kapitels:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_3, T} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]} \right] \right\}_{R, \nu} = \Gamma_{3, T}^{[1,0]} - \Gamma_{3, T}^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \tag{5.3}$$

Das vollständig transversal-projizierte Dyson-Schwinger-Funktional soll also die nichtperturbativen Modifikationen des Ansatzes (2.29) bis auf endliche Terme der Ordnung  $g^2$  reproduzieren. Nach Durchführung der Transversal-Projektionen erhalten wir für die Summe der 1-Schleifen-Beiträge (5.2a – 5.2g) unter Berücksichtigung der Impulserhaltung folgende Zerlegung nach Lorentz-Tensoren und Polstrukturen:

$$\begin{aligned}
&t^{\rho_1 \nu_1}(p_1) t^{\rho_2 \nu_2}(p_2) t^{\rho_3 \nu_3}(p_3) \Phi_{\Gamma_3, T} \binom{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \\
&= t^{\rho_1 \mu_1}(p_1) t^{\rho_2 \mu_2}(p_2) t^{\rho_3 \mu_3}(p_3) \\
&\cdot \left[ -\frac{1}{u_3 \Lambda^2} B_{1, T}^{[1,0]} \binom{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{a_1 a_2 a_3} (\{p\}; \Lambda) \Pi_1 \mathcal{I}_{1, T}(p_1^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
&\quad + i f_{a_1 a_2 a_3} \left( (p_2 - p_3)^{\mu_1} \delta^{\mu_2 \mu_3} \left( \mathcal{I}_{2, T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + (\Pi_2 + \Pi_3) \mathcal{I}_{3, T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \Pi_2 \Pi_3 \mathcal{I}_{4, T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1^{\mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_1} \left( \mathcal{I}_{5,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi_2 \mathcal{I}_{6,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
& \quad \left. + \Pi_3 \mathcal{I}_{7,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi_2 \Pi_3 \mathcal{I}_{8,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \\
& + p_1^{\mu_3} \delta^{\mu_1 \mu_2} \left( - \mathcal{I}_{5,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) - \Pi_2 \mathcal{I}_{7,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
& \quad \left. - \Pi_3 \mathcal{I}_{6,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) - \Pi_2 \Pi_3 \mathcal{I}_{8,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \left. \right] \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Neben dem bekannten Integral  $\mathcal{I}_{1,T}$  (4.8) treten in dieser Zerlegung sieben weitere Integrale auf, deren divergente Anteile folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( \frac{17}{4} + \frac{1}{u_3} \left( x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 x_4 \right) - \frac{2}{3} N_F + \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} N_F z_{0,1}^2 \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{3,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( \frac{9}{4} x_1 - \frac{15}{16} x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{4} x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_1 x_5 - \frac{1}{4} x_4 x_5 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} N_F z_{1,0} + \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} N_F z_{0,1} z_{1,1} \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{4,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( - \frac{3}{2} x_4^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_2 x_5 - 2 x_5^2 \right) - \frac{2}{3} N_F z_{1,0}^2 + \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} N_F z_{1,1}^2 \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{5,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( - \frac{17}{2} - \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_4 \right) + \frac{4}{3} N_F - \frac{1}{w_3} \frac{4}{3} N_F z_{0,1}^2 \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{6,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( 3 x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{7}{2} x_1 x_5 - \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) + \frac{45}{16} \zeta_1 - \frac{15}{16} \zeta_7 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} N_F z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{4}{3} N_F z_{0,1} z_{1,1} \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{7,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( -\frac{9}{2}x_1 + \frac{15}{8}x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1x_5 \right) + \frac{45}{16}\zeta_1 - \frac{15}{16}\zeta_7 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3}N_F z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{4}{3}N_F z_{0,1}z_{1,1} \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{8,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( 3x_4^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2}x_2x_5 + \frac{5}{2}x_5^2 \right) + \frac{45}{16}\zeta_2 + \frac{45}{16}\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{15}{16}\zeta_8 - \frac{15}{16}\zeta_9 + \frac{4}{3}N_F z_{1,0}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{4}{3}N_F z_{1,1}^2 \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Nach Residuenbildung an der Stelle  $p_1^2 = -u_2\Lambda^2$  faktorisiert die Funktion  $B_{1,T}$  auf beiden Seiten von (5.3) heraus und die selbstkonsistente Reproduktion dieser Funktion wird schon durch die bekannte Selbstkonsistenzgleichung der Gluon-Selbstenergie (4.10) sichergestellt <sup>1</sup>.

Für die Selbstkonsistenz des  $B_{0,T}$ -Anteils ist aufgrund der Impulsabhängigkeit des Integrals  $\mathcal{I}_{1,T}$  analog zur Anpassung der regulären Funktion der Gluon-Selbstenergie der Beitrag der bei  $p_1^2 = -u_2\Lambda^2$  regulären Restterme von (5.2a) und (5.2f) zu beachten, den wir exemplarisch für eine Impulsstruktur des ersten Lorentz-Tensors formulieren <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
&\Pi_2\Pi_3 \mathcal{I}_{4,T} + \frac{x_7}{u_3\Lambda^2} \Pi_1\Pi_2\Pi_3 \mathcal{I}_{1,T}(p_1^2) \\
&= \Pi_2\Pi_3 \left( \underbrace{\mathcal{I}_{4,T} + \frac{x_7}{u_3\Lambda^2} \Pi_1 \left( \mathcal{I}_{1,T}(p_1^2) - \mathcal{I}_{1,T}(-u_2\Lambda^2) \right)}_{=: \mathcal{J}_{4,T}} + \frac{x_7}{u_3\Lambda^2} \Pi_1 \mathcal{I}_{1,T}(-u_2\Lambda^2) \right)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Zerlegung ist die Tatsache, daß sich wegen der linearen Struktur des Integrals  $\mathcal{I}_{1,T}$  bezüglich  $p_1^2$  die Impulsabhängigkeit der Divergenz von  $\mathcal{J}_{4,T}$  exakt herauskürzt und somit wie bei der Fermion-Selbstenergie ein weiterer Residuenvergleich bezüglich der anderen beiden Impulsquadrate keine Subtraktion der obigen Form mehr benötigt. Dies trifft auch auf sämtliche andere Impulsstrukturen zu, so daß für die Aufstellung der entsprechenden Selbstkonsistenzgleichungen die Wahl der Anpassungsstellen keine Rolle spielt.

Ein Residuenvergleich des 1-Schleifen-Funktionalen mit dem  $B_{0,T}$ -Anteil der nichtperturbativ erweiterten nullten Ordnung (2.32) liefert nach Multiplikation mit dem Kopplungsfaktor  $g_0^2/(4\pi)^2$  folgende fünf Selbstkonsistenzgleichungen <sup>3</sup>:

<sup>1</sup>Diese Argumentation erzwang in dem Abschnitt 3.1 gerade die Einführung der Mandelstam-Pole.

<sup>2</sup>Die Abhängigkeiten der Integrale von der Massenskala  $\Lambda$  sowie vom Regularisierungsparameter  $\epsilon$  sind hierbei ohne Bedeutung.

<sup>3</sup>Wir unterdrücken von nun ab die Kennzeichnung der Stellen im Raum der Lorentz-invarianten Impulsvariablen.

$$-x_2 \Lambda^4 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^4 \mathcal{J}_{4,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (5.13)$$

$$2x_5 \Lambda^4 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^4 \mathcal{J}_{8,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (5.14)$$

$$-x_1 \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \mathcal{J}_{3,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (5.15)$$

$$2x_4 \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \mathcal{J}_{6,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (5.16)$$

$$2x_1 \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \mathcal{J}_{7,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (5.17)$$

Diese Gleichungen ergeben nach Anwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  folgende Bedingungen für die dimensionslosen Parameter:

$$x_2 = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{3}{2} x_4^2 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_2 x_5 - 2x_5^2 - \frac{15}{2} x_1 x_7 + \frac{5}{4} x_4 x_7 \right) + N_F \left( \frac{1}{u_3} \frac{2}{3} z_{1,0} x_7 + \frac{2}{3} z_{1,0}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{1,1}^2 \right) \right)$$

(5.18)

$$x_5 = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{3}{2} x_4^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{4} x_2 x_5 + \frac{5}{4} x_5^2 + \frac{15}{2} x_1 x_7 - \frac{5}{4} x_4 x_7 \right) + \frac{45}{32} (\zeta_2 + \zeta_3) - \frac{15}{32} (\zeta_8 + \zeta_9) + N_F \left( \frac{1}{u_3} \frac{2}{3} z_{1,0} x_7 + \frac{2}{3} z_{1,0}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{1,1}^2 \right) \right)$$

(5.19)

$$x_1 = \frac{1}{\beta_0} \left( -\frac{9}{4} x_1 + \frac{15}{16} x_4 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{4} x_1 x_2 - 9x_1 x_5 + x_4 x_5 \right) + N_F \left( \frac{1}{u_3} \frac{2}{3} z_{1,0} x_5 + \frac{2}{3} z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} \right) \right)$$

(5.20)

$$x_4 = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{3}{2} x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{37}{4} x_1 x_5 - \frac{3}{2} x_4 x_5 \right) + \frac{45}{32} \zeta_1 - \frac{15}{32} \zeta_7 + N_F \left( \frac{1}{u_3} \frac{2}{3} z_{1,0} x_5 + \frac{2}{3} z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} \right) \right)$$

(5.21)

$$x_1 = \frac{1}{\beta_0} \left( -\frac{9}{4}x_1 + \frac{15}{16}x_4 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{31}{4}x_1x_2 + \frac{5}{4}x_1x_5 - \frac{5}{4}x_2x_4 \right) + \frac{45}{32}\zeta_1 - \frac{15}{32}\zeta_7 + N_F \left( \frac{1}{u_3} \frac{2}{3}z_{1,0}x_2 + \frac{2}{3}z_{1,0} - \frac{1}{w_3} \frac{2}{3}z_{0,1}z_{1,1} \right) \right)$$

(5.22)

Neben diesen nichtperturbativen Beiträgen existieren zwei Restintegrale, die aufgrund der fehlenden Bose-Symmetrie unterschiedliche divergente Anteile besitzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( \frac{17}{4} - \frac{2}{3}N_F + \frac{1}{u_3} \left( x_1^2 + 8x_1x_4 - \frac{5}{4}x_4^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{u_3} \frac{2}{3}N_F z_{1,0}x_4 + \frac{1}{w_3} \frac{2}{3}N_F z_{0,1}^2 \right) \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{5,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( -\frac{17}{2} + \frac{4}{3}N_F + \frac{1}{u_3} \left( -\frac{37}{2}x_1^2 + 3x_1x_4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u_3} \frac{4}{3}N_F z_{1,0}x_1 - \frac{1}{w_3} \frac{4}{3}N_F z_{0,1}^2 \right) \\ &\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Im Gegensatz zu dem Restintegral der Gluon-Selbstenergie lassen sich beide Divergenzen *nicht* durch eine geeignete Wahl der Anpassungsstellen auf die reine perturbative Form bringen. Die parameterabhängigen Anteile stammen ausschließlich aus Feynman-Graphen, die einen kompensierenden Pol im horizontalen Kanal oder eine „entschärfte“ innere Linie in den vertikalen Kanälen besitzen, und stellen Störungen der perturbativen Renormierungskonstanten für den 3-Gluon-Vertex dar (vergleiche (1.93)). Der Grund hierfür liegt in dem schon erwähnten Umstand, daß die entsprechenden Terme auf niedriger Stufe  $r$  nicht den richtigen perturbativen Limes besitzen können. Es ist allerdings zu erwarten, daß auf höheren Stufen der Approximation immer mehr Parameter der nichtperturbativen Modifikationen zu den an Zahl konstant bleibenden Nebenbedingungen beitragen werden und somit ein Verschwinden der Störungen immer leichter zu bewerkstelligen sein wird.

Abschließend kommen wir auf das Problem der Überbestimmung durch die mangelnde Bose-Symmetrie des Dyson-Schwinger-Funktional zurück: Die zweifach vorhandene Selbstkonsistenzgleichung für den Parameter  $x_1$  wird gerade dadurch ausgeglichen, daß der Parameter  $x_7$  als einziger Parameter der nichtperturbativen Modifikationen des 3-Gluon-Vertex nur in dem zugehörigen  $B_{1,T}$ -Anteil (siehe (2.32)) auftritt, der bereits über das Selbstkonsistenzproblem der Gluon-Selbstenergie reproduziert werden kann. Damit besitzt der Parameter  $x_7$  keine eigene Selbstkonsistenzgleichung; er geht allenfalls bei der Auswertung der „entschärften“ Feynman-Graphen in das Gleichungssystem ein.

### 5.3 Erste Analyse der S-T-Identität

Das Auftreten eines nackten Vertex in jedem Beitrag des 1-Schleifen-Funktionalen ermöglicht trotz vollständig transversal-projizierter Ansätze eine erste Analyse der S-T-Identität des 3-Gluon-Vertex (1.76). Dazu führen wir neben der Transversal-Projektion bezüglich der rechten beiden Beine eine Longitudinal-Projektion bezüglich des linken Beins durch und erhalten diesmal folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
& p_1^{\nu_1} t^{\rho_2 \nu_2} (p_2) t^{\rho_3 \nu_3} (p_3) \Phi_{\Gamma_{3,L}}^{(\nu_1 \nu_2 \nu_3)} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \\
&= i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\rho_2 \mu_2} (p_2) t^{\rho_3 \mu_3} (p_3) \\
&\quad \cdot \left[ (p_2^2 - p_3^2) \delta^{\mu_2 \mu_3} \left( \mathcal{I}_{2,T} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) + (\Pi_2 + \Pi_3) \mathcal{I}_{3,T} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \Pi_2 \Pi_3 \mathcal{I}_{4,T} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + p_1^{\mu_2} p_1^{\mu_3} (\Pi_2 - \Pi_3) \left( \mathcal{I}_{6,T} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) - \mathcal{I}_{7,T} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + p_1^2 \delta^{\mu_2 \mu_3} (\Pi_2 - \Pi_3) \mathcal{I}_{9,L} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right]
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Wir notieren zunächst, daß eventuelle Polstrukturen im Quadrat des ersten Impulses wegen der zugehörigen transversalen Lorentz-Struktur eliminiert werden. Die Impulsstruktur der letzten Zeile kommt durch einen Beitrag des gluonischen „Dreiecks“-Graphen (5.1c) zustande, der bei der Transversal-Projektion des vorherigen Abschnitts eliminiert wurde. Der divergente Anteil des zugehörigen Integrals  $\mathcal{I}_{9,L}$  lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{9,L} (\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( -\frac{9}{4} x_1 - \frac{9}{16} x_4 + \frac{1}{u_3} \left( x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_5 + \frac{1}{4} x_4 x_5 \right) \right) \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Berücksichtigt man zusätzlich die – entsprechend projizierte – nackte Struktur des 3-Gluon-Vertex (1.32), so läßt sich die Zerlegung (5.25) mit der – entsprechend projizierten – Slavnov-Taylor-Identität (1.76) vergleichen, die für unmodifizierte Geist-Vertizes in 1-Schleifen-Ordnung folgende Form annimmt <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
& p_1^{\nu_1} t^{\rho_2 \nu_2} (p_2) t^{\rho_3 \nu_3} (p_3) \Gamma_{3,L}^{(\nu_1 \nu_2 \nu_3)} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \\
&= -i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\rho_2 \nu_2} (p_2) t^{\rho_3 \nu_3} (p_3) \delta^{\nu_2 \nu_3}
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>In Landau-Eichung kann die Hilfsamplitude  $\hat{G}$  ebenfalls durch ihre nackte Struktur ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{4} + \mathcal{O}(g^2; \epsilon^0) \right) \right. \\
& \quad \cdot (p_2^2 - p_3^2) \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( -\frac{13}{2} + \frac{2}{3} N_F \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right) \\
& \quad \left. + u_3 \Lambda^2 (\Pi_2 - \Pi_3) \right] + \mathcal{O}(g_0^4)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wurden die perturbativen Divergenzen der 2-Punkt-Vertizes sowie die nichtperturbativ erweiterte Struktur der Gluon-Selbstenergie eingesetzt. Bilden wir das Produkt der beiden perturbativen Renormierungskonstanten und subtrahieren die nackte Struktur, so stimmt das Resultat mit dem perturbativen Anteil des Integrals  $\mathcal{I}_{2,T}$  in (5.25) überein (vergleiche (5.5)).

Eventuelle Polstrukturen bezüglich  $p_1^2$  treten auch in (5.27) nicht auf, was durch fehlende Modifikationen im Geistsektor verursacht wird. Ein Vergleich der Tensorstrukturen zwischen (5.25) und (5.27) liefert sofort folgende einfache Bedingung für die Integrale

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \left( \mathcal{I}_{6,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) - \mathcal{I}_{7,T}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) = 0 \quad , \tag{5.28}$$

die im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  auf folgende Gleichung für die Parameter der nichtperturbativen Modifikationen führt:

$$\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{9}{2} x_1 + \frac{9}{8} x_4 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_1 x_2 - x_1 x_5 + \frac{1}{2} x_4 x_5 \right) \right) = 0 \tag{5.29}$$

Für einen Vergleich der übereinstimmenden Tensorstruktur  $\delta^{\nu_2 \nu_3}$  liegt es nahe, erneut einen Residuenvergleich an den üblichen Stellen der Impulsvariablen durchzuführen. Dazu sind folgende Identitäten der Impulsstrukturen nützlich:

$$(p_2^2 - p_3^2) \Pi_2 \Pi_3 = -\Lambda^2 (\Pi_2 - \Pi_3) \tag{5.30}$$

$$(p_2^2 - p_3^2) (\Pi_2 + \Pi_3) = -\Lambda^2 \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_3} - \frac{\Pi_3}{\Pi_2} \right) \tag{5.31}$$

Man beachte, daß die neue Impulsstruktur in (5.31) nur auf einer Seite der S-T-Identität erscheint, da der Ansatz (2.31) inverse Polfaktoren nicht berücksichtigt. Unter Verwendung der beiden Identitäten liefert ein Residuenvergleich an der Stelle  $p_2^2 = -u_2 \Lambda^2$  oder  $p_3^2 = -u_2 \Lambda^2$  diesmal eine Bedingung an die Parameter, die im Gegensatz zum Selbstkonsistenzproblem des transversalen Sektors diejenigen Stellen, auf die die anderen beiden Impulsquadrate gesetzt werden, *explizit* enthält. Somit läßt sich durch eine geeignete Wahl dieser Stellen die Bedingung für beliebige Parameterkombinationen immer erfüllen. Entsprechendes gilt für die Störung der perturbativen Divergenz, so daß einzig die Gleichung (5.29) im Rahmen der Lösung des gekoppelten Selbstkonsistenzproblems zu einer Einschränkung der Lösungsmannigfaltigkeit genutzt werden könnte.

Es ist klar, daß der hier vorgenommene Test der S-T-Identität über die Longitudinal-Projektion nackter Vertizes in einer nichtresummierten D-S-Gleichung der seiner Natur

nach „pessimistischste“ ist und bei *jeder* (z. B. auch einer rein numerischen) Behandlung dieser Gleichung gewisse Fehler liefern wird, denn die Longitudinal-Anteile der nichtperturbativ erweiterten Vertizes, die für die Erfüllung der Identität hauptsächlich zuständig sind und die bei nicht-Landauscher Eichfixierung auch mitberechnet werden müssten, erhalten hierbei überhaupt keine Gelegenheit, in Aktion zu treten. Es ist dies einer der Punkte, bei denen man sich durch die Verwendung der Bethe-Salpeter-resummierten Gleichungen den größten Fortschritt erhoffen darf.



Jedes der drei Diagramme enthält genau einen der kompensierenden Pole des 4-Punkt-Vertex  $\bar{\Gamma}_4$ , wobei sich in den vertikalen Kanälen analog zum 3-Gluon-Vertex in Verbindung mit den beiden zugehörigen 1-Teilchen-Austauschgraphen „entschärfte“ innere Linien ausbilden.

Eine Auswertung der obigen Diagramme mit üblichen perturbativen Methoden führt in der Landau-Eichung auf folgende divergente Beiträge ( $N_C = 3$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\Gamma}_3}^{I(a)} \binom{(l_1 l_2) (\nu_3)}{(a_3)} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) \\ &\cdot \left( 4z_{0,1} w_1 - 4z_{0,4} \right) \frac{1}{w_3} \bar{\Pi}_1 \bar{B}'_{1,T} \binom{l_1 l_2 \mu_3}{a_3} (\{p\}; \Lambda) \\ &\cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (6.2a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\Gamma}_3}^{I(b)} \binom{(l_1 l_2) (\nu_3)}{(a_3)} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left( T_{a_3} \right)^{l_1 l_2} t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) \gamma^{\mu_3} \\ &\cdot \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,0} x_1 + \left( \frac{9}{4} z_{0,1} - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,1} x_1 \right) \bar{\Pi}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{9}{4} x_4 - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,0} x_5 \right) \Pi_3 + \left( \frac{9}{4} z_{0,1} x_4 - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,1} x_5 \right) \bar{\Pi}_2 \Pi_3 \right) \\ &\cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (6.2b)$$

$$\Phi_{\bar{\Gamma}_3}^{I(c)} \binom{(l_1 l_2) (\nu_3)}{(a_3)} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (6.2c)$$

Die Tatsache, daß der divergente Anteil des „abelschen“ Diagramms (6.2c) wie in der Störungstheorie in Landau-Eichung verschwindet, ist vergleichbar mit dem Verhalten der Vertex-Renormierungskonstanten in der QED, deren Divergenz sich als proportional zum Eichparameter erweist [22]. Für die übrigen divergenten Beiträge liegt bereits eine transversale Lorentz-Tensorstruktur vor, so daß für die nachfolgende Analyse des Selbstkonsistenzproblems im fermionischen Kanal keine weitere Projektion mehr notwendig ist.

## 6.2 Selbstkonsistenz im fermionischen Kanal

Das Selbstkonsistenzproblem für den Ansatz (2.34) lautet in schematischer Notation:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\bar{\Gamma}_3, T}^I \left[ \Gamma^{(0)_{pert}}, \Gamma^{[1,0]} \right] \right\}_{R, \nu} = \bar{\Gamma}_{3, T}^{[1,0]} - \bar{\Gamma}_{3, T}^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (6.3)$$

Die Indizierung „I“ des Funktionals kennzeichnet den fermionischen Kanal und wurde bereits bei der Formulierung der 1-Schleifen-Beiträge verwendet. Die Summe der divergenten Anteile (6.2a – 6.2c) läßt sich analog zum 3-Gluon-Vertex nach Polstrukturen zerlegen, wobei wegen (1.8) die Reihenfolge der matrixwertigen Faktoren zu beachten ist:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\bar{\Gamma}_3}^I \begin{matrix} (l_1 l_2) (\nu_3) \\ (a_3) \end{matrix} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) \\
\cdot \left[ \frac{1}{w_3 \Lambda} \bar{\Pi}_1 \bar{B}'_{1,T} \begin{matrix} [1,0] \\ l_1 l_2 \mu_3 \\ a_3 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) \bar{\mathcal{I}}_1 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
&+ (T_{a_3})^{l_1 l_2} \gamma^{\mu_3} \left( \bar{\mathcal{I}}_2 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \bar{\Pi}_2 \bar{\mathcal{I}}_3 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
&\quad \left. \left. + \Pi_3 \bar{\mathcal{I}}_4 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \bar{\Pi}_2 \Pi_3 \bar{\mathcal{I}}_5 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Neben dem bekannten Integral  $\bar{\mathcal{I}}_1$  (4.19) der Fermion-Selbstenergie wurden vier weitere Integrale benutzt, deren divergente Anteile folgendermaßen lauten:

$$\bar{\mathcal{I}}_2 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,0} x_1 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{6.5}$$

$$\bar{\mathcal{I}}_3 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} z_{0,1} - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,1} x_1 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{6.6}$$

$$\bar{\mathcal{I}}_4 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} x_4 - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,0} x_5 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{6.7}$$

$$\bar{\mathcal{I}}_5 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} z_{0,1} x_4 - \frac{1}{u_3} \frac{9}{4} z_{1,1} x_5 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{6.8}$$

Nach Residuenbildung an der Stelle  $\not{p}_1 = -w_2 \Lambda$  kürzt sich diesmal die Funktion  $\bar{B}'_{1,T}$  auf beiden Seiten der Gleichung (6.3) heraus, und die erste Selbstkonsistenzgleichung der Fermion-Selbstenergie (4.21) sichert bereits die Reproduktion aller Terme, die Polstrukturen in der Impulsvariablen  $\not{p}_1$  besitzen.

Da der divergente Anteil des zugehörigen Integrals  $\bar{\mathcal{I}}_1$  (4.19) ebenso wie die der übrigen Integrale (6.5 – 6.8) keine Impulsabhängigkeiten aufweist, wird die Subtraktionsmethode des vorherigen Kapitels (5.12) im fermionischen Kanal des Fermion-Gluon-Vertex nicht benötigt. Ein direkter Koeffizientenvergleich bezüglich der Impulsstrukturen des  $\bar{B}'_{0,T}$ -Anteils entspricht damit einem weiteren Residuenvergleich und führt auf drei weitere Selbstkonsistenzgleichungen:

$$z_{1,1} \Lambda^3 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^3 \bar{\mathcal{I}}_5 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \tag{6.9}$$

$$z_{1,0} \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \bar{\mathcal{I}}_4 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \tag{6.10}$$

$$z_{0,1} \Lambda = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda \bar{\mathcal{I}}_3 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \tag{6.11}$$





$$\begin{aligned}
\Phi_{\bar{\Gamma}_3}^{II(c)} \binom{(l_1 l_2)}{(a_3)} \binom{(\nu_3)}{(\nu_3)} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= t^{\nu_3 \mu_3} (p_3) N_F \\
&\cdot \left( \frac{2}{3} z_{1,0} \frac{p_1^2}{\Lambda^2} - 2z_{1,4} + 2z_{1,1}(w_1 - w_2) - 2z_{1,0} w_3 \right) \frac{1}{u_3} \Pi_3 \bar{B}_{1,T}^{[1,0] l_1 l_2 \mu_3} (\{p\}; \Lambda) \\
&\cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{6.16c}$$

$$\Phi_{\bar{\Gamma}_3}^{II(d)} \binom{(l_1 l_2)}{(a_3)} \binom{(\nu_3)}{(\nu_3)} (p; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^0) \tag{6.16d}$$

Wir stellen fest, daß das entschärfte abelsche Diagramm (6.15d) erneut nur endliche Beiträge besitzt. Außerdem ist das entschärfte nicht-abelsche „Dreiecks“-Diagramm (6.15b) trotz entsprechend projizierter Ansätze diesmal *nicht* von sich aus transversal-projiziert; diese Situation ist vergleichbar mit der des 3-Gluon-Vertex und ermöglicht wiederum eine erste Analyse der S-T-Identität (1.84) durch eine Longitudinal-Projektion der 1-Schleifen-Beiträge bezüglich des Gluonbeins.

## 6.4 Selbstkonsistenz im gluonischen Kanal

Zunächst formulieren wir das Selbstkonsistenzproblem im gluonischen Kanal in der üblichen schematischen Notation:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\bar{\Gamma}_{3,T}}^{II} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \bar{\Gamma}_{3,T}^{[1,0]} - \bar{\Gamma}_{3,T}^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \tag{6.17}$$

Die Indizierung „II“ für die Kennzeichnung des gluonischen Kanals wurde bereits bei der Formulierung der 1-Schleifen-Beiträge verwendet. Die Summe der divergenten Anteile (6.16a – 6.16d) läßt sich analog zum 3-Gluon-Vertex nach Polstrukturen zerlegen:

$$\begin{aligned}
t^{\rho_3 \nu_3} (p_3) \Phi_{\bar{\Gamma}_{3,T}}^{II} \binom{(l_1 l_2)}{(a_3)} \binom{(\nu_3)}{(\nu_3)} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= t^{\rho_3 \mu_3} (p_3) \\
&\cdot \left[ - \frac{1}{u_3 \Lambda^2} \bar{B}_{1,T}^{[1,0] l_1 l_2 \mu_3} (\{p\}; \Lambda) \Pi_3 \mathcal{I}_{1,T} (p_3^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
&+ (T_{a_3})^{l_1 l_2} \left( \gamma^{\mu_3} \bar{\mathcal{I}}_6 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) + (\bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2) \bar{\mathcal{I}}_7 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2 \bar{\mathcal{I}}_8 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Wie üblich fällt der Anteil, der mit dem Integral  $\mathcal{I}_{1,T}$  der Gluon-Selbstenergie (4.8) verknüpft ist, nach Residuenbildung bezüglich  $p_3^2$  aus der Gleichung heraus. Die divergenten Anteile der übrigen drei Integrale in (6.18) sind für die Selbstkonsistenz des  $\bar{B}_{0,T}$ -Anteils verantwortlich und lauten im einzelnen:

$$\bar{\mathcal{I}}_6(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{0,1}^2 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (6.19)$$

$$\bar{\mathcal{I}}_7(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} z_{0,1} - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{1,1} z_{0,4} \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (6.20)$$

$$\bar{\mathcal{I}}_8(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( \frac{9}{4} z_{0,1}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{0,4}^2 \right) \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (6.21)$$

Die weitere Vorgehensweise zur Herleitung der Selbstkonsistenzgleichungen im gluonischen Kanal entspricht der Behandlung des 3-Gluon-Vertex, wobei die Zerlegung des Fermion-Gluon-Vertex nach dem gluonischen Polfaktor in (2.36) bei der Residuenbildung verwendet werden muß. Nach Einführung neuer Integrale durch die bekannte Subtraktionsvorschrift (5.12), z. B.

$$\bar{\mathcal{J}}_8 := \bar{\mathcal{I}}_8 + \frac{z_{1,4}}{u_3 \Lambda^2} \Pi_3 \left( \mathcal{I}_{1,T}(p_3^2) - \mathcal{I}_{1,T}(-u_2 \Lambda^2) \right), \quad (6.22)$$

erhalten wir die folgenden beiden Gleichungen:

$$z_{0,4} \Lambda^2 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^2 \bar{\mathcal{J}}_8(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (6.23)$$

$$z_{0,1} \Lambda = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda \bar{\mathcal{J}}_7(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (6.24)$$

Die Anwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) liefert im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  zwei weitere Selbstkonsistenzgleichungen:

$$z_{0,4} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{9}{4} z_{0,1}^2 - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{0,4}^2 - \frac{z_{1,4}}{u_3} \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_4 - N_F \frac{2}{3} z_{1,0} \right) \right)$$

(6.25)

$$z_{0,1} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{9}{4} z_{0,1} - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{0,1} z_{0,4} - \frac{z_{1,1}}{u_3} \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_4 - N_F \frac{2}{3} z_{1,0} \right) \right)$$

(6.26)

Im perturbativen Limes verbleibt das Integral  $\bar{\mathcal{J}}_6$  mit folgendem divergenten Beitrag:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}_6(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = & \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{w_3} \frac{9}{4} z_{0,1}^2 - \frac{z_{1,0}}{u_3} \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_4 - N_F \frac{2}{3} z_{1,0} \right) \right) \\ & \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Störung der perturbativen Renormierungskonstanten (1.93) ist verschieden von dem Resultat des fermionischen Kanals (6.5) und läßt sich ebenfalls auf höheren Stufen der rationalen Approximation besser zum Verschwinden bringen.

Bemerkenswerterweise stimmt die Zahl der Selbstkonsistenzgleichungen für den Fermion-Gluon-Vertex bei Berücksichtigung *beider* Kanäle mit der Anzahl nichtperturbativer Parameter überein, obwohl der Parameter  $z_{0,1}$  zwei unterschiedliche Gleichungen besitzt. Dies hängt damit zusammen, daß die Impulsstruktur des Parameters  $z_{1,4}$  bezüglich jedes Kanals schon durch die entsprechenden Propagator-Gleichungen selbstkonsistent reproduziert werden kann. Ob dieser Mechanismus allerdings auch im Zusammenhang des 4-Gluon-Vertex die fehlende Bose-Symmetrie des Funktionals ausgleichen kann, bleibt abzuwarten.

## 6.5 Erste Analyse der S-T-Identität

Eine Longitudinal-Projektion der 1-Schleifen-Beiträge im gluonischen Kanal liefert eine Zerlegung, die Polstrukturen bezüglich  $p_3^2$  nicht mehr enthält:

$$p_3^{\nu_3} \Phi_{\Gamma_{3,L}}^{II} \stackrel{(l_1 l_2)}{(a_3)} (\nu_3) (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = (T_{a_3})^{l_1 l_2} \cdot \left[ \begin{aligned} & \not{p}_3 \bar{\mathcal{I}}_6 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) + (\bar{\Pi}_1 \not{p}_3 + \not{p}_3 \bar{\Pi}_2) \bar{\mathcal{I}}_7 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \\ & + \bar{\Pi}_1 \not{p}_3 \bar{\Pi}_2 \bar{\mathcal{I}}_8 (\Lambda(\epsilon); \epsilon) \end{aligned} \right] \quad (6.28)$$

Die S-T-Identität des Fermion-Gluon-Vertex nimmt mit der perturbativen 1-Schleifen-Divergenz der Geist-Selbstenergie (1.95) und dem Ansatz der ersten Approximationsstufe für die Fermion-Selbstenergie (2.24) folgende Form an <sup>2</sup>:

$$p_3^{\nu_3} \bar{\Gamma}_{3,L} \stackrel{(l_1 l_2)}{(a_3)} (\nu_3) (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) = - (T_{a_3})^{l_1 l_2} \cdot \left[ \begin{aligned} & (\not{p}_2 - \not{p}_1) \left( 1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{4} + \mathcal{O}(g^2; \epsilon^0) \right) \\ & + w_3 \Lambda (\bar{\Pi}_2 - \bar{\Pi}_1) \end{aligned} \right] + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (6.29)$$

Aufgrund der Impulserhaltung ( $-p_1 + p_2 + p_3 = 0$ ) gelten folgende Identitäten für die Polstrukturen der fermionischen Impulsvariablen:

$$\bar{\Pi}_1 \not{p}_3 \bar{\Pi}_2 = -\Lambda (\bar{\Pi}_1 - \bar{\Pi}_2) \quad (6.30)$$

$$\bar{\Pi}_1 \not{p}_3 + \not{p}_3 \bar{\Pi}_2 = \Lambda (\bar{\Pi}_1 \bar{\Pi}_2^{-1} - \bar{\Pi}_1^{-1} \bar{\Pi}_2) \quad (6.31)$$

Führt man einen Residuenvergleich zwischen (6.28) und (6.29) an der Stelle  $\not{p}_1 = -w_2 \Lambda$  durch, so ist aufgrund der neuen Impulsstruktur in (6.31) erneut wichtig, auf welche Stelle

<sup>2</sup>Die Hilfsamplituden in (1.84) besitzen in der Landau-Eichung erneut keine divergenten Beiträge und können durch ihre nackten Strukturen ersetzt werden.

die Impulsvariable  $\not{p}_2$  gesetzt wird<sup>3</sup>. Bei einer geeigneten Wahl dieser Stelle ist es nämlich analog dem 3-Gluon-Vertex *stets* möglich, sowohl die nichtperturbativen Modifikationen an die S-T-Identität anzupassen als auch die Störung der perturbativen Divergenz in der 1-Schleifen-Ordnung zum Verschwinden zu bringen.

Ein alternativer Weg zur Behandlung der S-T-Identität im Fermionsektor wurde in [17] eingeschlagen, wo ein direkter Koeffizientenvergleich bezüglich verschiedener Impulsstrukturen zu zwei unterschiedlichen Nebenbedingungen sowie zu einer anderen Störung der perturbativen Renormierungskonstanten führt. In diesem Fall gehen die Anpassungsstellen wie im Selbstkonsistenzproblem des transversalen Sektors nicht in die entsprechenden Gleichungen ein, so daß diese zu einer Auswahl spezieller Lösungen des unterbestimmten Selbstkonsistenzproblems genutzt werden können. Allerdings benötigt man zur Anwendung dieses Verfahrens im Rahmen des Selbstkonsistenzproblems die Subtraktionsvorschrift (4.11) zur Anpassung regulärer Beiträge *nicht*, so daß in diesem Fall viele Selbstkonsistenzgleichungen eine neue Gestalt annehmen. Aus diesem Grund werden wir im Rahmen dieser Arbeit auf die alternative Behandlung und damit überhaupt auf die Einbeziehung der S-T-Identitäten bei der Auswahl spezieller Lösungen verzichten.

## 6.6 Ergänzung: Kurze Zwischenbilanz

Bevor wir uns dem Selbstkonsistenzproblem des 4-Gluon-Vertex zuwenden, fassen wir an dieser Stelle einige wichtige Eigenschaften der polynomialen Selbstkonsistenzgleichungen der Selbstenergien und 3-Punkt-Vertizes zusammen, die bei der Bestimmung spezieller Lösungen im Rahmen des achten Kapitels eine entscheidende Rolle spielen werden. So kann zunächst bestätigt werden, was bereits bei der Beschreibung des Anpassungsverfahrens im Rahmen des Abschnitts 2.3 formuliert wurde: Indem die höheren Vertizes ihre Polpositionen an die niedrigen Vertizes „herunterreichen“, stimmen zwar sämtliche Polpositionen der nichtperturbativen Modifikationen (bezüglich gleichartiger Beine) überein; gleichzeitig existieren aber *keine eigenen* Bestimmungsgleichungen für die zugehörigen Parameter  $u_2$  und  $w_2$ , wodurch das fundamentale Problem eines Informationsdefizits bei alleiniger Verwendung der Dyson-Schwinger-Integralgleichungen deutlich wird. Eine Verbesserung dieser Situation ist auch bei Verwendung der Bethe-Salpeter-resummierten Gleichungen nicht zu erwarten, obwohl deren Funktionale alle Impulsstrukturen der modifizierten Vertizes in *symmetrischer* Weise reproduzieren können.

Das Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblem der verallgemeinerten Feynman-Regeln für die Selbstenergien und 3-Punkt-Vertizes liefert also insgesamt  $2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 14$  gekoppelte nichtlineare Gleichungen für  $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$  Vertexparameter, wobei die Ankopplung an die verallgemeinerte Feynman-Regel des 4-Gluon-Vertex nur durch einen schmalen „Flaschenhals“ in Gestalt der beiden folgenden Parameter-Kombinationen erfolgt:

$$Z_1(\{\zeta\}) := \frac{45}{32} \zeta_1 - \frac{15}{32} \zeta_7 \quad (6.32)$$

$$Z_2(\{\zeta\}) := \frac{45}{32} \zeta_2 + \frac{45}{32} \zeta_3 - \frac{15}{32} \zeta_8 - \frac{15}{32} \zeta_9 \quad (6.33)$$

Somit existiert effektiv eine vierparametrische Unterbestimmtheit des Gleichungssystems, die zur Bestimmung spezieller Lösungen für die Vertexparameter die Verwendung von

<sup>3</sup>Offensichtlich liefert eine Residuenbildung bezüglich der anderen Impulsvariablen  $\not{p}_2$  aus Symmetriegründen dieselben Resultate, wobei die Anpassungsstelle von  $\not{p}_1$  eingeht.

*Zusatzinformationen* erforderlich macht. Zwei solche Bedingungen werden nach obiger Argumentation *stets* benötigt; zwei weitere kommen hinzu, sofern man sich von der sehr komplizierten Selbstkonsistenzrechnung für den 4-Gluon-Vertex „abkoppeln“ möchte. Es bieten sich hierzu zunächst die Störungen der perturbativen Renormierungskonstanten an, deren Anzahl sich bei Berücksichtigung beider Kanäle des Fermion-Gluon-Vertex mit dem Unterbestimmtheitsgrad des Gleichungssystems deckt. Allerdings wurde bereits in Abschnitt 6.2 erkannt, daß die Forderung nach einem exakten Verschwinden der Störung in (6.5) nur durch das Verschwinden der relevanten Parameter  $x_1$  oder  $z_{1,0}$  zu erfüllen ist; beide Lösungen führen schließlich zu der trivialen Lösung d. h. dem Verschwinden aller nichtperturbativen Modifikationen im fermionischen Sektor.

Für eine Überprüfung der entsprechenden Bedingungen im gluonischen Sektor beschränken wir uns auf die rein gluonische Theorie ( $N_F = 0$ )<sup>4</sup> und notieren wegen (5.23) und (5.24) als notwendige Bedingungen für die Parameter:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 8 x_1 x_4 - \frac{5}{4} x_4^2 &\stackrel{!}{=} 0 \\ -\frac{37}{2} x_1^2 + 3 x_1 x_4 &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung der zweiten Gleichung nach  $x_4$  führt auf

$$x_4 \stackrel{!}{=} \frac{37}{6} x_1 \quad ;$$

setzt man dies aber in die erste Gleichung ein, so folgt

$$x_1 \cdot \left( -\frac{403}{144} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

und damit das Verschwinden beider Parameter:

$$x_1 = x_4 \stackrel{!}{=} 0 \tag{6.34}$$

Durch (6.34) wird gleichzeitig erreicht, daß die kompensierenden Pole, die für das Auftreten der Störungen überhaupt verantwortlich sind, im perturbativen Limes verschwinden und somit auch der Ansatz des 4-Gluon-Vertex (2.42) diese Eigenschaft besitzt. Allerdings zeigt eine detaillierte Analyse des entsprechend ausgewerteten Gleichungssystems, daß diese Einschränkung – sogar die Forderung nach einem Verschwinden des Parameters  $x_1$  *allein* – letztendlich auf die triviale Lösung führt, die bei der Einführung der kompensierenden Pole bereits ausgeschlossen werden mußte.

Eine weniger „scharfe“ Bedingung erhält man durch die Forderung nach einer Symmetrisierung der perturbativen Renormierungskonstanten. Diese Forderung wird auf höheren Stufen der rationalen Approximation ebenfalls asymptotisch zu erfüllen sein; sie führt auf eine quadratische Gleichung für den Quotienten der beiden Parameter, die zwei reelle Lösungen folgender Gestalt besitzt ( $x'_4 := x_4/x_1$ ):

$$x'_4 = 1 \quad \vee \quad x'_4 = \frac{33}{5} \tag{6.35}$$

Diese Symmetrisierungs-Bedingung genügt allerdings nicht, um die Unterbestimmtheit des polynomialen Gleichungssystems vollständig auszugleichen<sup>5</sup>, so daß selbst bei ihrer Verwendung weitere Zusatzinformationen benötigt werden. Diese sind beispielsweise durch

<sup>4</sup>Eine genauere Analyse zeigt, daß für  $N_F \neq 0$  qualitativ dieselben Resultate zu erwarten sind.

<sup>5</sup>Die Einbeziehung der entsprechenden Bedingung im Fermionsektor im Fall von  $N_F \neq 0$  ändert diese Situation nicht.

die verschiedenen Bewegungsgleichungs-Kondensate der Theorie gegeben, deren Bedingungen an die Parameter der nichtperturbativ erweiterten Ansätze im Rahmen des zweiten Anhangs formuliert werden. Diese Wahl ist besonders vorteilhaft, da die zugehörigen Identitäten die Polpositionen  $u_2$  und  $w_2$  *explizit* enthalten <sup>6</sup>. Eine detailliertere Analyse der Selbstkonsistenzgleichungen im achten Kapitel wird schließlich zeigen, daß eine solche Eigenschaft der Nebenbedingungen tatsächlich *unumgänglich* ist, sofern im Rahmen einer Theorie mit masselosen Fermionen spezielle Lösungen des Selbstkonsistenzproblems gefunden werden sollen.

---

<sup>6</sup>Für eine solche Eigenschaft müssen die zugrundeliegenden Feynman-Graphen mindestens einen quadratischen Divergenzgrad besitzen, da allein höher divergente Impulsintegrale in der Lage sind, die Parameter der Nennerfaktoren in den Zähler zu transportieren. Dies wird in der Landau-Eichung außer durch die Schleifen der Gluon-Selbstenergie nur durch die Schleifen der Vakuumkondensate geleistet.



## Kapitel 7

# Das Selbstkonsistenzproblem des 4-Gluon-Vertex

Bei der Analyse des Selbstkonsistenzproblems für die nichtperturbativ modifizierte nullte Ordnung des 4-Gluon-Vertex (2.42) gehen wir analog der Behandlung der 3-Punkt-Vertizes vor und formulieren zunächst graphisch die 1-Schleifen-Beiträge des zugehörigen Dyson-Schwinger-Funktional (1.67) in erster Iteration. Hierbei lassen sich zwei Gruppen von Feynman-Graphen unterscheiden:

$$\Phi_{\Gamma_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] = \Phi_{P_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] + \Phi_{V_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] \quad (7.1)$$

Der erste Teil dieser Zerlegung besteht aus allen Anteilen, die eine innere Linie der Form (3.7) mit einem Polfaktor bezüglich einer der drei Mandelstam-Variablen der 4-Punkt-Funktion enthalten; dieses Teilfunktional ist für die selbstkonsistente Reproduktion der kompensierenden Pole in (2.42) verantwortlich und wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels behandelt. Das zweite Teilfunktional bildet dagegen die Grundlage für das anschließende Selbstkonsistenzproblem des reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$ , das diesmal die Gestalt eines *linearen* Gleichungssystems in den Vertexparametern  $\zeta_i$  annimmt.

Eine zusätzliche Analyse der S-T-Identität (1.90) ist analog dem 3-Gluon-Vertex über eine Longitudinal-Projektion der Summe aller 1-Schleifen-Beiträge zwar möglich; auf sie wird aber aufgrund der komplizierten Tensorstruktur in dieser Arbeit verzichtet.

### 7.1 Erste Abspaltung separabler Terme

Von der durchaus langwierigen Analyse des Terms  $\Phi_{P_4}^{(l=1)}$  diskutieren wir hier aus Platzgründen nur das Endstadium, wobei sich die Verwendung der graphischen Elemente, die im dritten Kapitel eingeführt wurden, als besonders hilfreich erweist. Berücksichtigt man sämtliche Mandelstam-Pole der 5-Punkt-Vertizes  $\Gamma_5$  und  $\bar{\Gamma}_5$  – ihre Existenz läßt sich analog dem dritten Kapitel wiederum bereits aus den entsprechenden Vier- und Drei-Punkt-Gleichungen erschließen –, so enthalten die Skelettgraphen-Entwicklungen der zugehörigen  $\mathcal{T}_5$ -Amplituden (1.68 – 1.70) ebenso wie die Entwicklung der  $\mathcal{T}_{4,s}$ -Amplitude (1.54) sowohl separable Terme als auch entschärfte 1-Teilchen-Austauschgraphen. In erster nichtperturbativer Iteration erhalten wir folgende 1-Schleifen-Beiträge:

$$\Phi_{P_4}^{(l=1)} [\Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]}] = \sum_{i=a,\dots,f} \Phi_{P_4}^{(i)} \begin{matrix} (\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4) \\ (a_1 a_2 a_3 a_4) \end{matrix} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon)$$

$$\begin{aligned} \cong & \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (1)} + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} & (7.2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (1)} + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} & (7.2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \text{Diagram (1)} + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} & (7.2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (1)} + 5 \text{ PERM. (234)} & (7.2d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N_F \cdot \text{(1)} \cdot \text{Diagram (7.2e)} \\
& + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} \quad (7.2e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N_F \cdot \text{(1)} \cdot \text{Diagram (7.2f)} \\
& + 5 \text{ PERM. (234)} \quad (7.2f)
\end{aligned}$$

In den beiden Graphen (7.2b) und (7.2e), die jeweils *zwei* reduzible Stellen in Gestalt kompensierender Pole besitzen, wird erneut die graphische Notation des dritten Kapitels für den  $B_{3,T}$ -Anteil in der Zerlegung der  $B_{1,T}$ -Funktion (2.33) verwendet <sup>1</sup>.

Jeweils eine von drei Permutationen der obigen Feynman-Graphen überlebt eine Residuenbildung bezüglich einer der drei Mandelstam-Variablen, so daß die zugehörige Funktion  $B_{1,T}$  nach rechts herausfaktoriert. Ein Vergleich mit den 1-Schleifen-Beiträgen des 3-Gluon-Vertex (5.1a – 5.1g) identifiziert die verbleibenden Graphen als diejenigen Terme, die nach der Residuenbildung dieser Beiträge bezüglich eines der rechten beiden Beine entstehen und den entsprechenden  $B_{0,T}$ -Anteil des nichtperturbativ modifizierten 3-Gluon-Vertex reproduzieren. Somit wird die selbstkonsistente Reproduktion der Mandelstam-Pole in dem Ansatz für den 4-Gluon-Vertex (2.42) wie bei den oberflächlich konvergenten Vertizes schon durch die Selbstkonsistenzgleichungen der Gluon-Selbstenergie und des 3-Gluon-Vertex geleistet. Dies ist durchaus einsichtig, da der Ansatz für die Residuumsfunktionen (3.6) bekanntermaßen keine neuen Parameter enthält und folglich keine eigenen Selbstkonsistenzgleichungen erfordern sollte.

## 7.2 Weitere Feynman-Graphen der ersten Iteration

Nach Abspaltung der separablen Terme verbleiben in der 1-Schleifen-Ordnung sieben weitere Typen von Feynman-Graphen, die für das Selbstkonsistenzproblem des reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  eine Rolle spielen. Hinzu kommen verschiedene Permutationen der

<sup>1</sup>Man beachte, daß die graphische Notation der „Dreiecke“ in anderen Arbeiten zu den kompensierenden Polen [17] [36] die entsprechenden  $B_{1,T}$ -Anteile selber darstellt.



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cdot \text{Diagram (7.3d)} \\
 & + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} \tag{7.3d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{Diagram (7.3e)} \\
 & + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} \tag{7.3e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{Diagram (7.3f)} \\
 & + 2 \text{ ZYKL. PERM. (234)} \tag{7.3f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - N_F \cdot \text{Diagram (7.3g)} \tag{7.3g}
 \end{aligned}$$

(4)

(3)

(2)

$$- N_F \cdot \text{Diagram} + 5 \text{ PERM. } (234) \tag{7.3h}$$

Für die perturbative Geist-Schleife wurde erneut die Notation (2.26) verwendet, um die fehlende Transversal-Projektion der Schleife bezüglich des ersten Beins zu betonen. Die Permutations-Algebra sichert zwar für jeden 1-Schleifen-Term die schon früher erwähnte „Crossing“-Symmetrie; diese stellt aber im Vergleich zu der vollen Bose-Symmetrie des nichtperturbativ erweiterten Ansatzes (2.46) eine wesentliche Einschränkung dar.

Aufgrund der schwachen logarithmischen Divergenz der Impulsintegrale erweist sich die im Anhang vorgestellte Subtraktionsmethode bei der Berechnung der 1-Schleifen-Divergenzen als besonders nützlich; leider sprengt die Formulierung der einzelnen divergenten Anteile der 1-Schleifen-Beiträge (7.3a – 7.3h) den Rahmen dieser Arbeit. Diese werden aber – in Landau-Eichung und für  $N_C = 3$  – für den interessierten Leser in [10] zusammengestellt. Wir beschränken uns hier auf die Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften der Resultate:

- Die Kontraktion der Farbtensoren liefert jeweils auch Beiträge zu den drei Kronecker-Strukturen im Farbraum der adjungierten Darstellung, die bei Aufsummation aller Terme im Gegensatz zur Störungstheorie *nicht* verschwinden. Insbesondere geschieht dies *auch*, falls entsprechende Strukturen in dem Ansatz für  $V_{4,T}$  (2.46) vernachlässigt werden, so daß eine Beschränkung auf die antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f_{abc}$  keine konsistente Wahl gewesen wäre. Weiterhin entwickelt die Summe aller 1-Schleifen-Beiträge keine Farbstrukturen, die die symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  enthalten <sup>2</sup>; also bilden die fünf linear unabhängigen Farbtensoren (2.64 – 2.68) bezüglich der ersten Iteration der gekoppelten Dyson-Schwinger-Gleichungen ein abgeschlossenes System.
- Neben eventuellen Transversal-Projektoren bleibt die Lorentz-Tensorstruktur der Resultate ebenfalls auf die dimensionslosen Kronecker-Strukturen beschränkt, so daß trotz Unterdrückung einer großen Anzahl von Lorentz-Tensoren in dem Ansatz für  $V_{4,T}$  (2.46) in erster Iteration der Dyson-Schwinger-Gleichungen bezüglich der Lorentz-Tensoren ein abgeschlossenes System entsteht. Als Basistensoren für

<sup>2</sup>Ein Blick auf die Spur-Relation (A.65) für die geschlossene Fermion-Schleife zeigt, daß dieses Resultat durchaus nichttrivial ist.

die Formulierung der 1-Schleifen-Resultate bieten sich die bekannten Kombinationen (2.69 – 2.71) an, die aufgrund ihrer Projektions-Eigenschaften bei der Trennung verschiedener Tensorstrukturen nützlich sind.

- Der Mangel an Bose-Symmetrie – verursacht durch die Auszeichnung des von links einlaufenden Beins – erzeugt zum Teil neue Kombinationen der Polfaktoren bzw. Impulsstrukturen mit eingeschränkter Symmetrie, die – ebenso wie die Jacobi-Identität der Farbtensoren in (2.67) – die Verwendung der ursprünglichen Form des Ansatzes für  $V_{4,T}$  (2.46) bei einem Residuenvergleich erschwert. Aus diesem Grund wurde im zweiten Kapitel die Zerlegung des Ansatzes nach linear unabhängigen Tensoren sowie Lorentz-invarianten Impulsfunktionen durchgeführt.

### 7.3 Selbstkonsistenz für $V_{4,T}$

Das Selbstkonsistenzproblem des reduzierten d. h. bezüglich der Mandelstam-Variablen regulären 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  im vollständig transversalen Sektor lautet in der bekannten schematischen Notation:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{V_{4,T}} \left[ \Gamma^{(0)pert}, \Gamma^{[1,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = V_{4,T}^{[1,0]} - \Gamma_{4,T}^{(0)} + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (7.4)$$

Die weitere Herleitung der Selbstkonsistenzgleichungen für die Vertexparameter  $\zeta_i$  entspricht der Behandlung der 3-Punkt-Vertizes und erfordert nach einer Transversal-Projektion bezüglich des linken Beins zunächst die übliche Zerlegung der 1-Schleifen-Resultate nach Tensor- und Impulsstrukturen:

$$\begin{aligned} & t^{\rho_1\nu_1}(p_1) t^{\rho_2\nu_2}(p_2) t^{\rho_3\nu_3}(p_3) t^{\rho_4\nu_4}(p_4) \Phi_{V_{4,T}} \binom{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)}{(a_1a_2a_3a_4)} (\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \\ &= t^{\rho_1\mu_1}(p_1) t^{\rho_2\mu_2}(p_2) t^{\rho_3\mu_3}(p_3) t^{\rho_4\mu_4}(p_4) \\ & \cdot \left[ - \frac{1}{u_3\Lambda^2} E_{1,T}^{[1,0]} \binom{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{a_1a_2a_3a_4} (\{p\}; \Lambda) \Pi_1 \mathcal{I}_{1,T}(p_1^2; \Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\ & + \sum_{i=A,\dots,E} \sum_{j=0,+,-} C_i \binom{(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)}{(a_1a_2a_3a_4)} L_{j,s} \\ & \cdot \left( \mathcal{I}_{i,j,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi_2 \mathcal{I}_{i,j,1}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right. \\ & + (\Pi_3 + \Pi_4) \mathcal{I}_{i,j,2}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + (\Pi_3 - \Pi_4) \mathcal{I}_{i,j,3}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \\ & + \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) \mathcal{I}_{i,j,4}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi_2 (\Pi_3 - \Pi_4) \mathcal{I}_{i,j,5}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \\ & \left. \left. + \Pi_3\Pi_4 \mathcal{I}_{i,j,6}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) + \Pi_2\Pi_3\Pi_4 \mathcal{I}_{i,j,7}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Nach Residuenbildung an der Stelle  $p_1^2 = -u_2\Lambda^2$  kürzt sich diesmal die Funktion  $E_{1,T}$  auf beiden Seiten der Gleichung (7.4) heraus, so daß die selbstkonsistente Reproduktion der Polstrukturen in  $p_1^2$  wie gewohnt durch die erste Selbstkonsistenzgleichung der

Gluon-Selbstenergie (4.10) gesichert ist. Die Zerlegung (7.5) enthält außerdem zu jeder Kombination der Farbtensoren  $C_i$  und Lorentz-Tensoren  $L_{j,s}$  acht verschiedene Integrale, wobei die – bezüglich Vertauschung des dritten und vierten Beins – antisymmetrischen Impulsstrukturen nur für partiell bose-antisymmetrische Kombinationen der Tensoren (z. B.  $C_A$  mit  $L_{-,s}$ ) nichtverschwindende Beiträge besitzen; für diese Kombinationen stellen sie insbesondere die einzigen Beiträge dar, so daß die effektive Zahl der Integrale schließlich  $8 \cdot 6 + 7 \cdot 2 = 62$  beträgt.

Eine vollständige Herleitung sämtlicher Selbstkonsistenzgleichungen sprengt den Rahmen dieser Arbeit; wir wählen daher an dieser Stelle exemplarisch eine Impulsstruktur des Farbtensors  $C_A$  und des Lorentz-Tensors  $L_{0,s}$  aus, um die weitere Vorgehensweise zu demonstrieren. Der divergente Anteil des Integrals  $\mathcal{I}_{A,0,7}$  lautet beispielsweise ( $N_C = 3$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A,0,7}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = & \left( 27x_4^3 + \frac{45}{4}x_4\zeta_2 + \frac{9}{4}x_4\zeta_3 + 18x_4\zeta_6 - \frac{27}{2}x_4\zeta_8 + 27x_4\zeta_9 \right. \\ & - 27x_4\zeta_{12} + \frac{27}{2}x_4\zeta_{14} - \frac{27}{2}x_4\zeta_{17} - \frac{1}{u_3} \left( 54x_4x_5^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{45}{4}x_5\zeta_4 - \frac{27}{2}x_5\zeta_{10} + \frac{27}{2}x_5\zeta_{15} \right) + \frac{1}{u_3^2} 27x_5^2x_7 \right) \\ & \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Rückwirkung des Polanteils führt mittels der bekannten Subtraktionsmethode (5.12) auf das neue Integral

$$\mathcal{J}_{A,0,7} := \mathcal{I}_{A,0,7} + \frac{\eta_{A,0,6}}{u_3\Lambda^2} \Pi_1 \left( \mathcal{I}_{1,T}(p_1^2) - \mathcal{I}_{1,T}(-u_2\Lambda^2) \right) , \quad (7.7)$$

das schließlich nach Projektion der zugehörigen Tensoren und einem Residuenvergleich mit dem umformulierten Ansatz (2.73) auf folgende Selbstkonsistenzgleichung führt:

$$\eta_{A,0,5} \Lambda^6 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Lambda^6 \mathcal{J}_{A,0,7}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) \quad (7.8)$$

Für die endgültige Form der Bedingung an die Parameter der nichtperturbativ erweiterten Ansätze benötigen wir neben dem  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13) die Darstellungen der Hilfsparameter  $\eta_{i,j,k}$  durch die fundamentalen Vertexparameter  $\zeta_i$ , die dem mathematischen Anhang zu entnehmen sind. Wir verwenden für (7.8) die Identitäten

$$\eta_{A,0,5} = -\frac{3}{2}\zeta_{10} + \frac{3}{2}\zeta_{15} , \quad (7.9)$$

$$\eta_{A,0,6} = -\frac{3}{2}\zeta_{11} + \frac{3}{2}\zeta_{16} \quad (7.10)$$

und multiplizieren die Gleichung (7.8) mit  $u_3^2$  und dem ersten Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion, um eine vollständig polynomiale Gestalt zu erhalten. In Hinblick auf die spätere Matrix-Notation der Selbstkonsistenzgleichungen isolieren wir außerdem die Inhomogenität und erhalten folgende Gleichung für die Parameter der nichtperturbativ erweiterten Ansätze:

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{4} u_3^2 x_4 \left( 5 \zeta_2 + \zeta_3 + 8 \zeta_6 - 6 \zeta_8 + 12 \zeta_9 - 12 \zeta_{12} + 6 \zeta_{14} - 6 \zeta_{17} \right) - \frac{45}{4} u_3 x_5 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{10} - \zeta_{15} \right) + \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{11} - \zeta_{16} \right) \\
& = -27 u_3^2 x_4^3 + 54 u_3 x_4 x_5^2 - 27 x_5^2 x_7
\end{aligned}$$

(7.11)

Sämtliche 54 Gleichungen des 4-Gluon-Vertex, die durch den üblichen Residuenvergleich der Impulsstrukturen entstehen, sind in dieser Form im Anhang C aufgelistet; sie stellen ein stark überbestimmtes, lineares Gleichungssystem für die Vertexparameter  $\zeta_i$  dar, das selbst bei bekannten Parametern der Propagatoren und 3-Punkt-Vertizes keinesfalls exakt erfüllt werden kann, sondern stattdessen mit Hilfe einer Optimierungs-Methode zu behandeln ist.

Analog zu den 3-Punkt-Vertizes existieren zusätzlich acht divergente Beiträge, die im perturbativen Limes *nicht* verschwinden und zum Teil die vollständig bose-symmetrische Divergenz der perturbativen Renormierungskonstanten (1.94) enthalten. Deren Störungen, die auf erster Stufe der rationalen Approximation durchaus noch die gleiche Größenordnung aufweisen können, sind an den divergenten Anteilen der Integrale  $\mathcal{J}_{i,j,0}$  mit

$$\mathcal{J}_{i,j,0} := \mathcal{I}_{i,j,0} + \frac{\eta_{i,j,1}}{u_3 \Lambda^2} \Pi_1 \left( \mathcal{I}_{1,T}(p_1^2) - \mathcal{I}_{1,T}(-u_2 \Lambda^2) \right) , \quad (7.12)$$

abzulesen; eine vollständige Auflistung aller perturbativen Divergenzen für den reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  findet sich in dem Anhang C.2 im Anschluß an die Formulierung der Selbstkonsistenzgleichungen.



# Kapitel 8

## Analyse der Selbstkonsistenzgleichungen

Wir beginnen nun mit der Suche nach speziellen Lösungen des gekoppelten Selbstkonsistenzproblems, d. h. nach diskreten Kombinationen *reeller* Parameterwerte, die sämtliche Selbstkonsistenzgleichungen simultan erfüllen. Die divergenten Beiträge von Ordnung  $g^2$ , die im perturbativen Limes nicht verschwinden und somit Störungen der perturbativen Renormierungskonstanten darstellen, werden in Erinnerung an die Zwischenbilanz des sechsten Kapitels im folgenden nicht berücksichtigt. Da für höhere Stufen der rationalen Approximation die Anzahl dieser Divergenzen konstant bleibt und gleichzeitig immer mehr nichtperturbative Parameter zu den Störungen beitragen, ist deren Verschwinden auf Stufe  $r = 1$  sicher noch nicht exakt zu fordern. Wir werden aber die entsprechenden Zahlenwerte – zumindest für die 3-Punkt-Vertizes – nach Berechnung der Parameterwerte kontrollieren.

Der schmale „Flaschenhals“ bezüglich der Ankopplung des reduzierten 4-Gluon-Vertex innerhalb des nichtlinearen Gleichungssystems der Selbstenergien und 3-Punkt-Vertizes eröffnet die Möglichkeit, deren Selbstkonsistenzproblem zunächst separat zu lösen und anschließend die Gleichungen des 4-Gluon-Vertex – mit festgelegten übrigen Parametern – als lineares System bzw. als Matrix-Gleichung (mit konstanten Koeffizienten) für die Parameter  $\zeta_i$  zu behandeln. Während die Fixierung von Lösungen des *unterbestimmten* nichtlinearen Systems auf die Hinzunahme von Nebenbedingungen (z. B. in Form von Bewegungsgleichungs-Kondensaten) angewiesen ist, läßt sich eine (eindeutige) Optimallösung des *stark überbestimmten* linearen Gleichungssystems durch eine Minimierung der Summe aller Fehlerquadrate gewinnen. Dabei ist zu kontrollieren, inwieweit die Festlegung der Kopplungs-Kombinationen  $Z_1$  und  $Z_2$  durch spezielle Lösungen des nichtlinearen Systems die Werte der Vertexparameter  $\zeta_i$  beeinflusst.

Eine Überprüfung der Parameterwerte durch experimentelle Daten erweist sich im Rahmen der hier verwendeten Näherungen als schwierig; allerdings lassen sich mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden renormierungsgruppen(RG)-invariante Beiträge der Ordnung  $g^0$  von eichinvarianten Vakuumkondensaten ermitteln<sup>1</sup> und mit halb-empirischen Werten aus QCD-Summenregeln [25] vergleichen. Dabei ist aber aufgrund der niedrigen Approximationsstufe unserer Ansätze nur eine qualitative Übereinstimmung zu erwarten.

---

<sup>1</sup>Die hierfür notwendige Berechnung der divergenten Beiträge in führender Schleifen-Ordnung ist zum großen Teil in [37] zu finden; die entsprechenden Resultate sind in vervollständigter (und teilweise korrigierter) Form im zweiten Anhang unserer Arbeit zusammengestellt.

## 8.1 Die Skalierungs-Eigenschaft der polynomialen Gleichungen

Wir fassen die Selbstkonsistenzgleichungen der Selbstenergien und 3-Punkt-Vertizes noch einmal zusammen. Aus dem Selbstkonsistenzproblem der Selbstenergien erhalten wir nach Multiplikation mit  $\beta_0$  die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_1 &= -\frac{33}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_4 + \frac{9}{4}u_1 \\ &+ N_F \left( -2w_3 + 2(w_1 - w_2)z_{0,1} - 2z_{0,4} + \frac{2}{3}z_{1,0} \right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 &= \frac{15}{2}u_2x_1 - \frac{5}{4}u_2x_4 - 9x_5 + 9u_1x_4 \\ &+ N_F \left( -\frac{2}{3}u_2z_{1,0} - 2w_3z_{1,0} + 2(w_1 - w_2)z_{1,1} - 2z_{1,4} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\beta_0 w_1 = 4w_1 - 4z_{0,1} \quad (8.3)$$

$$\beta_0 w_3 = 4w_1z_{0,1} - 4z_{0,4} \quad (8.4)$$

Man beachte, daß im Gegensatz zu der Behandlung massiver Fermionen [17] das Resultat der geschlossenen Fermion-Schleife aus dem Funktional der Gluon-Selbstenergie nicht als Nebenbedingung, sondern direkt als Teil der Selbstkonsistenzgleichung in Erscheinung tritt. Die entsprechenden Beiträge sind – wie auch bei allen anderen geschlossenen Fermion-Schleifen – an einem Vorfaktor in Gestalt der Flavour-Zahl  $N_F$  zu erkennen. Wir erinnern noch einmal daran, daß die Parameter der Polpositionen  $u_2$  und  $w_2$  zwar in den gluonischen Gleichungen (8.1) und (8.2) auftreten, aber keine eigenen Bestimmungsgleichungen besitzen.

Da uns nur nichttriviale Lösungen mit nichtverschwindenden Parametern  $u_3$  und  $w_3$  interessieren, multiplizieren wir die übrigen Selbstkonsistenzgleichungen mit beiden Parametern und erhalten – nach zusätzlicher Multiplikation mit  $\beta_0$  – zehn weitere Gleichungen in rein polynomialer Gestalt:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 x_2 &= \frac{3}{2}u_3 w_3 x_4^2 + \frac{1}{2}w_3 x_2 x_5 - 2w_3 x_5^2 - \frac{15}{2}w_3 x_1 x_7 + \frac{5}{4}w_3 x_4 x_7 \\ &+ N_F \left( \frac{2}{3}w_3 z_{1,0} x_7 + \frac{2}{3}u_3 w_3 z_{1,0}^2 - \frac{2}{3}u_3 z_{1,1}^2 \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 x_1 &= -\frac{9}{4}u_3 w_3 x_1 + \frac{15}{16}u_3 w_3 x_4 + \frac{1}{4}w_3 x_1 x_2 - 9w_3 x_1 x_5 + w_3 x_4 x_5 \\ &+ N_F \left( \frac{2}{3}w_3 z_{1,0} x_5 + \frac{2}{3}u_3 w_3 z_{1,0} - \frac{2}{3}u_3 z_{0,1} z_{1,1} \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 x_5 &= \frac{3}{2}u_3 w_3 x_4^2 - \frac{1}{4}w_3 x_2 x_5 - \frac{5}{4}w_3 x_5^2 - \frac{15}{2}w_3 x_1 x_7 + \frac{5}{4}w_3 x_4 x_7 \\ &+ u_3 w_3 Z_2 + N_F \left( \frac{2}{3}w_3 z_{1,0} x_7 + \frac{2}{3}u_3 w_3 z_{1,0}^2 - \frac{2}{3}u_3 z_{1,1}^2 \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 x_1 &= -\frac{9}{4}u_3 w_3 x_1 + \frac{15}{16}u_3 w_3 x_4 - \frac{31}{4}w_3 x_1 x_2 - \frac{5}{4}w_3 x_1 x_5 + \frac{5}{4}w_3 x_2 x_4 \\ &+ u_3 w_3 Z_1 + N_F \left( \frac{2}{3}w_3 z_{1,0} x_2 + \frac{2}{3}u_3 w_3 z_{1,0} - \frac{2}{3}u_3 z_{0,1} z_{1,1} \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 x_4 &= \frac{3}{2} u_3 w_3 x_4 - \frac{37}{4} w_3 x_1 x_5 + \frac{3}{2} w_3 x_4 x_5 \\ &+ u_3 w_3 Z_1 + N_F \left( \frac{2}{3} w_3 z_{1,0} x_5 + \frac{2}{3} u_3 w_3 z_{1,0} - \frac{2}{3} u_3 z_{0,1} z_{1,1} \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\beta_0 u_3 z_{1,1} = \frac{9}{4} u_3 z_{0,1} x_4 - \frac{9}{4} z_{1,1} x_5 \quad (8.10)$$

$$\beta_0 u_3 z_{1,0} = \frac{9}{4} u_3 x_4 - \frac{9}{4} z_{1,0} x_5 \quad (8.11)$$

$$\beta_0 u_3 z_{0,1} = \frac{9}{4} u_3 z_{0,1} - \frac{9}{4} z_{1,1} x_1 \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 z_{0,4} &= \frac{9}{4} u_3 w_3 z_{0,1}^2 - \frac{9}{4} u_3 z_{0,4}^2 - \frac{15}{2} w_3 x_1 z_{1,4} \\ &+ \frac{5}{4} w_3 x_4 z_{1,4} + N_F \frac{2}{3} w_3 z_{1,0} z_{1,4} \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u_3 w_3 z_{0,1} &= \frac{9}{4} u_3 w_3 z_{0,1} - \frac{9}{4} u_3 z_{0,1} z_{0,4} - \frac{15}{2} w_3 x_1 z_{1,1} \\ &+ \frac{5}{4} w_3 x_4 z_{1,1} + N_F \frac{2}{3} w_3 z_{1,0} z_{1,1} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Die beiden Parameterkombinationen  $Z_1$  und  $Z_2$ , die aus der Ankopplung des 4-Gluon-Vertex resultieren, wurden bereits in Abschnitt 6.6 definiert und erhöhen den Unterbestimmtheitsgrad des gekoppelten nichtlinearen Gleichungssystems; wir werden später bei der Auswahl spezieller Lösungen hierauf zurückkommen.

Bereits in [17] wurde erkannt, daß für nichtverschwindende fermionische Parameter aus den fermionischen Gleichungen (8.10) und (8.12) eine Gleichung gewonnen werden kann, die nur noch gluonische Parameter enthält:

$$\beta_0 u_3 + \frac{9}{4} x_5 = - \frac{81}{16 \beta_0 - 36} x_1 x_4 \quad (8.15)$$

Diese Gleichung existiert in der gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) nicht; aber auch für masselose Fermionen hilft sie – im Gegensatz zu der Behandlung massiver Fermionen in [17] – bei der Lösungsfindung nicht weiter, da die Entkopplung der fermionischen und gluonischen Gleichungen aufgrund der Beiträge geschlossener Fermion-Schleifen nicht möglich ist.

Eine detaillierte Analyse der gluonischen Gleichungen für  $N_F = 0$  zeigt, daß durch folgende Reskalierung der Parameter im gluonischen Sektor der Parameter  $x_1$  vollständig eliminiert werden kann:

$$\begin{aligned} u'_1 &:= u_1/x_1 & x'_2 &:= x_2/x_1^2 & x'_7 &:= x_7/x_1^3 \\ u'_2 &:= u_2/x_1 & x'_4 &:= x_4/x_1 & Z'_1 &:= Z_1/x_1 \\ u'_3 &:= u_3/x_1^2 & x'_5 &:= x_5/x_1^2 & Z'_2 &:= Z_2/x_1^2 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Man beachte, daß durch die Ersetzung der Parameter allein die triviale Lösung des Selbstkonsistenzproblems ausgeschlossen wird; dies ist mit der Tatsache zu vergleichen, daß die

– für die Selbstkonsistenz notwendige – Identifizierung kompensierender Pole im dritten Kapitel nur für nichtverschwindende Polstrukturen der Selbstenergien möglich ist, und macht einmal mehr deutlich, daß  $\Gamma_4$  und die oberflächlich konvergenten Vertizes im formalen „perturbativen“ Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) für niedrige  $r$  nicht die richtige perturbative Form annehmen.

Die Notwendigkeit der Reskalierung von  $Z_1$  und  $Z_2$  zeigt außerdem, daß auch die Parameter  $\zeta_i$  aus dem Ansatz des reduzierten 4-Gluon-Vertex (2.46) von der Reskalierung betroffen sein müssen. Die entsprechende Definition neuer Parameter soll aber auf den dritten Abschnitt dieses Kapitels verschoben werden, in dem auch das zugehörige lineare Gleichungssystem diskutiert wird.

Unter der Voraussetzung, daß nur nach *reellen* Lösungen des Selbstkonsistenzproblems gesucht wird, deutet ein Blick auf die erste Selbstkonsistenzgleichung der Gluon-Selbstenergie (8.1) bereits an, daß für  $N_F \neq 0$  eine Reskalierung der fermionischen Parameter nur durch Verwendung des reellen Faktors  $\sqrt{|x_1|}$  möglich sein wird. Dazu ist allerdings eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von  $x_1$  erforderlich:

1. Für positive Skalierungs-Parameter ( $x_1 > 0$ ) lassen sich die fermionischen Parameter direkt durch halbzahlige Potenzen von  $x_1$  skalieren:

$$\begin{aligned}
 w'_1 &:= w_1/\sqrt{x_1} & z'_{0,4} &:= z_{0,4}/x_1 \\
 w'_2 &:= w_2/\sqrt{x_1} & z'_{1,0} &:= z_{1,0}/x_1 \\
 w'_3 &:= w_3/x_1 & z'_{1,1} &:= z_{1,1}/\sqrt{x_1}^3 \\
 z'_{0,1} &:= z_{0,1}/\sqrt{x_1} & z'_{1,4} &:= z_{1,4}/x_1^2
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Die modifizierten Selbstkonsistenzgleichungen für die gestrichenen Parameter sind in diesem Fall allein durch die formale Ersetzung  $x_1 \rightarrow 1$  zu erhalten.

2. Für ein negatives Vorzeichen des Skalierungs-Parameters ( $x_1 < 0$ ) dagegen erzwingt die Forderung nach reellen Lösungen die Verwendung des Betrages von  $x_1$ . Eine mögliche Definition von neuen gestrichenen Parametern, die eine Eliminierung des Skalierungs-Parameters aus sämtlichen nichtlinearen Gleichungen ermöglicht, lautet diesmal:

$$\begin{aligned}
 w'_1 &:= w_1/\sqrt{-x_1} & z'_{0,4} &:= -z_{0,4}/x_1 \\
 w'_2 &:= w_2/\sqrt{-x_1} & z'_{1,0} &:= z_{1,0}/x_1 \\
 w'_3 &:= -w_3/x_1 & z'_{1,1} &:= -z_{1,1}/\sqrt{-x_1}^3 \\
 z'_{0,1} &:= z_{0,1}/\sqrt{-x_1} & z'_{1,4} &:= -z_{1,4}/x_1^2
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Man beachte, daß die obigen Skalierungs-Bedingungen auf Grundlage der fermionischen Gleichungen (8.10 – 8.14) hergeleitet werden, die bei Verwendung der obigen Parameter allein durch die formale Ersetzung  $x_1 \rightarrow 1$  zu modifizieren sind. In den Gleichungen der Gluon-Selbstenergie (8.1 – 8.2) – und nur hier – sind dagegen zusätzlich einige Vorzeichen zu ändern, wodurch effektiv zwei neue Gleichungen für die gestrichenen Parameter entstehen:

$$\begin{aligned} \beta_0 u'_1 &= -\frac{33}{2} + \frac{5}{4}x'_4 + \frac{9}{4}u'_1 \\ &\quad + N_F \left( 2w'_3 - 2(w'_1 - w'_2)z'_{0,1} + 2z'_{0,4} + \frac{2}{3}z'_{1,0} \right) \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 u'_3 &= \frac{15}{2}u'_2 - \frac{5}{4}u'_2x'_4 - 9x'_5 + 9u'_1x'_4 \\ &\quad + N_F \left( -\frac{2}{3}u'_2z'_{1,0} + 2w'_3z'_{1,0} - 2(w'_1 - w'_2)z'_{1,1} + 2z'_{1,4} \right) \end{aligned} \quad (8.20)$$

Es liegen also effektiv zwei verschiedene Gleichungssysteme vor, die unterschiedlichen Vorzeichen des Skalierungs-Parameters  $x_1$  entsprechen und durchaus unterschiedliche Lösungen besitzen können. Welches der beiden Systeme bei der Suche nach „Confinement“-zeigenden Lösungen zu bevorzugen ist, wird die Hinzunahme von Nebenbedingungen im Rahmen des nächsten Abschnitts zeigen.

Eine zusätzliche Freiheit bei der Wahl der Skalierung ist durch das unbestimmte Vorzeichen der Wurzel gegeben; diese Fragestellung ist mit der Beobachtung verknüpft, daß mit dem Parametersatz

$$\left\{ u'_1, u'_2, u'_3, w'_1, w'_2, w'_3, x'_2, x'_4, x'_5, x'_7, Z'_1, Z'_2, z'_{0,1}, z'_{0,4}, z'_{1,0}, z'_{1,1}, z'_{1,4} \right\} \quad (8.21)$$

auch der Parametersatz

$$\left\{ u'_1, u'_2, u'_3, -w'_1, -w'_2, w'_3, x'_2, x'_4, x'_5, x'_7, Z'_1, Z'_2, -z'_{0,1}, z'_{0,4}, z'_{1,0}, -z'_{1,1}, z'_{1,4} \right\} \quad (8.22)$$

eine Lösung darstellt, und kann durch eine Vorzeichen-Analyse des reskalierten RG-invarianten Beitrags für das (experimentell negative) Fermion-Antifermion-Kondensat masseloser Fermionen (siehe Anhang B) beantwortet werden.

Die fundamentale Bedeutung der Skalierungsinvarianz ist darin zu finden, daß die Berechnung divergenter Beiträge das Renormierungsschema nicht festlegt und somit auch die schemata-abhängige Massenskala  $\Lambda$  nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt werden kann. In dem vorliegenden Fall bedeutet dies, daß sich sämtliche massebehafteten nichtperturbativen Größen als Vielfaches von

$$\Lambda' := \sqrt{|x_1|} \Lambda$$

darstellen lassen. Der dimensionslose Skalierungsfaktor der Massenskala ist somit direkt mit dem frei wählbaren Skalierungs-Parameter  $x_1$  verknüpft und kann im Rahmen der Dyson-Schwinger-Gleichungen erst mit der Berechnung endlicher Beiträge in der 2-Schleifen-Ordnung fixiert werden.

## 8.2 Eine Auswahl spezieller Lösungen

Das polynomiale Gleichungssystem für die reskalierten Parameter enthält – unabhängig von den Vorzeichen des Skalierungs-Parameters sowie der Wurzel seines Betrages – effektiv 14 gekoppelte Gleichungen für insgesamt 17 unbestimmte Parameter und somit eine

dreiparametrische Unterbestimmtheit. Diese muß durch Hinzunahme geeigneter Nebenbedingungen verringert werden, damit die Fixierung spezieller Lösungen des Selbstkonsistenzproblems erfolgreich sein kann.

Bereits im Rahmen der Zwischenbilanz des sechsten Kapitels wurde angedeutet, daß die Nebenbedingungen, die sich durch Auswertung führender Divergenzen der Bewegungsgleichungs-Kondensate <sup>2</sup> ergeben, hierzu besonders geeignet sind, da sie die unbestimmten Polpositionen der Ansätze  $u_2$  und  $w_2$  *explizit* enthalten. Tatsächlich zeigt eine detaillierte Analyse des Gleichungssystems, daß die vier Selbstenergie-Parameter  $u_1, u_2, w_1$  und  $w_2$  effektiv nur aus zwei Gleichungen (nämlich den beiden Gleichungen der Gluon-Selbstenergie) bestimmt werden können. Somit führt die Wahl von Zusatzbedingungen, die *keinen* dieser vier Parameter enthalten, letztendlich auf eine Überbestimmtheit der verbleibenden Gleichungen, die den Versuch der simultanen Erfüllung aller Selbstkonsistenzgleichungen schon im Ansatz zunichte macht <sup>3</sup>.

Da die Bewegungsgleichungs-Kondensate ihrer Natur nach 1-Schleifen-Terme mit 2-Schleifen-Termen (und im Fall des Gluonfeldes zusätzlich mit 3-Schleifen-Termen) verknüpfen, scheint ihre Einbeziehung auf den ersten Blick mit der Vernachlässigung fundamentaler 2-Schleifen-Terme in den Dyson-Schwinger-Funktionalen nicht konsistent zu sein. Die resultierenden Nebenbedingungen für das Geistfeld (B.27) und die Fermionfelder (B.28) vergleichen aber nur Beiträge *aufeinanderfolgender* Ordnungen in  $1/\beta_0$  und nehmen somit eine „strukturell identische“ Form wie die Selbstkonsistenzgleichungen an. Folglich entspricht die Vernachlässigung fundamentaler 3-Schleifen-Terme in dem 4-Gluon-Kondensat (B.12) den im Rahmen der Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenz verwendeten Näherungen; die dritte Nebenbedingung (B.29) aus dem Bewegungsgleichungs-Kondensat des Eichfeldes kann also prinzipiell zur endgültigen Fixierung der Parameterwerte verwendet werden.

Im folgenden reduzieren wir das polynomiale Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Startparameter auf eine *einzig*e Polynom-Gleichung höheren Grades für *einen* der Vertexparameter sowie eine Reihe (gebrochen-rationaler) Gleichungen, die die übrigen Parameter in Abhängigkeit von diesem Parameter bestimmen. Die Lösungsmenge der Polynom-Gleichung besteht im allgemeinen aus einem *diskreten* Satz reeller Zahlen und komplex-konjugierter Zahlenpaare. Während die komplexen Lösungen aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems nicht zu reellen Lösungen superponiert werden können und somit als unphysikalisch auszuschließen sind, wird die Bedeutung der reellen Lösungen durch die Eigenschaften der (eventuell komplexen) Propagator-Polstellen bestimmt, die nach Berechnung aller Vertexparameter für die diskreten Lösungen in reskaliert Form ebenfalls angegeben werden können:

$$u'_\pm = \frac{1}{2}(u'_1 + u'_2) \pm i \sqrt{\mathcal{C}_{cong}} \quad ; \quad (8.23)$$

$$\mathcal{C}_{cong} := u'_3 - \frac{1}{4}(u'_1 - u'_2)^2 \quad (8.24)$$

$$w'^2_\pm = \frac{1}{2}(w'^2_1 + w'^2_2) - w'_3 \pm (w'_1 + w'_2) i \sqrt{\mathcal{C}_{conf}} \quad ; \quad (8.25)$$

---

<sup>2</sup>Siehe Anhang B.2.

<sup>3</sup>Dieselbe Situation ist auch dafür verantwortlich, daß eine Fixierung der Kopplungs-Kombinationen  $Z'_1$  und  $Z'_2$  sowie ein anschließendes iteratives Verfahren über das „lineare“ Gleichungssystem der Vertexparameter  $\zeta'_i$  nicht erfolgreich sein kann.

$$\mathcal{C}_{conf} := w'_3 - \frac{1}{4}(w'_1 - w'_2)^2 \quad (8.26)$$

Für jeden der beiden Sektoren lassen sich im einzelnen folgende Fälle unterscheiden:

- Ist die Diskriminante  $\mathcal{C}_{cong}$  bzw.  $\mathcal{C}_{conf}$  positiv, so besitzen die beiden zugehörigen Polstellen nichtverschwindende Imaginäranteile und beschreiben kurzlebige Elementaranregungen. Dieser Fall entspricht der erhofften „Confinement“-Situation in dem entsprechenden Sektor.
- Für eine negative Diskriminante besitzen die beiden zugehörigen Polstellen reellen Charakter und bestimmen durch ihre Vorzeichen die physikalischen Eigenschaften der Lösung:
  1. Eine *positive* Polstelle entspricht einem Pol im Minkowskischen und beschreibt ein physikalisches, asymptotisch detektierbares Teilchen mit positiver Masse. Obwohl diese Situation der empirischen Beobachtung des „Confinements“ widerspricht, muß sie doch als legitime Lösung des Selbstkonsistenzproblems akzeptiert werden; sie bedarf allerdings zur Spezifizierung der physikalischen Eigenschaften des zugehörigen Teilchens weiterer Stabilitäts-Betrachtungen, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen.
  2. Eine *negative* Polstelle entspricht einem Pol im Euklidischen und parametrisiert ein Tachyon d. h. ein Teilchen mit imaginärer Masse, das allgemein als unphysikalisches Phänomen gewertet wird.

Wir werden jede Lösung, die *mindestens eine* negativ-reelle Propagator-Polstelle enthält, als unphysikalisch zurückstellen. Der für uns interessante Bereich spezieller Lösungen ist derjenige, in dem sowohl im gluonischen wie auch im fermionischen Sektor positive Diskriminanten und somit – trotz vollständig reeller Vertexparameter – zwei Paare komplex-konjugierter Polpositionen vorliegen.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen berechnen wir nun in Abhängigkeit von dem (zunächst positiven) Startparameter  $w'_1$  unter Berücksichtigung der beiden Nebenbedingungen (B.27) und (B.28) sämtliche reskalierte Parameter, indem mit Hilfe des Algebra-Programms „MAPLE“ [5] für verschiedene Vorzeichen des Skalierungs-Parameters  $x_1$  die entsprechenden Gleichungssysteme auf jeweils eine Polynom-Gleichung zehnten Grades für den Parameter  $w'_3$  reduziert werden, dessen diskrete Lösungen zur Bestimmung der übrigen gestrichenen Parameter verwendet werden. Mit diesen testen wir die Eigenschaften der Propagator-Polstellen, um schließlich geeignete spezielle Lösungen auszuwählen.

Es zeigt sich zunächst, daß im Fall  $x_1 < 0$  sowohl für  $N_F = 2$  als auch für  $N_F = 6$  *keine reellen* Lösungen existieren und somit die Skalierung der fermionischen Parameter ausschließlich auf den Fall  $x_1 > 0$  (8.17) beschränkt bleiben kann. In Abhängigkeit von dem (zunächst positiven) Startparameter  $w'_1$  besteht die entsprechende Lösungsmannigfaltigkeit für *beide* Werte von  $N_F$  entweder aus zehn komplexen Lösungen oder aus vier Paaren komplex-konjugierter Lösungen sowie einer positiven und einer negativen Lösung für den Parameter  $w'_3$ . Während sich bei der Auswertung für die negative Lösung zeigt, daß immer mindestens eine negativ-reelle Polstelle im fermionischen Sektor vorliegt, ist das Verhalten der Propagator-Polstellen bei Wahl der positiven Lösung unterschiedlich und für verschiedene Bereiche des Startparameters der nachfolgenden Tabelle zu entneh-

men <sup>4</sup> (Bei Verwendung der alternativen Lösung (8.22) sind natürlich die entsprechenden *negativen*  $w'_1$ -Bereiche zu wählen.):

	$0.3 < w'_1 < 0.4$	$0.4 < w'_1 < 0.5$	$0.5 < w'_1 < 0.9$	$0.9 < w'_1 < 1.1$	$1.1 < w'_1 < 1.2$
$u'_+$	$< 0$	komplex		$< 0$	$< 0$
$u'_-$	$> 0$	konjugiert		$< 0$	$< 0$
$w_+^2$	$> 0$	$> 0$	komplex		$> 0$
$w_-^2$	$> 0$	$> 0$	konjugiert		$> 0$

Tabelle 8.1: Qualitatives Verhalten der Propagator-Polstellen für verschiedene Bereiche des Startparameters  $w'_1$  ( $N_F = 0$ ). Außerhalb des angegebenen Intervalls existieren nur komplexe Lösungen des Parameters  $w'_3$ .

Die beiden „Confinement“-Ungleichungen (2.18) und (2.23) sind demnach nur in einem schmalen Intervall des Startparameters  $w'_1$  erfüllt; gleichzeitig ist die Nebenbedingung (B.29) für *keinen* Wert von  $w'_1$  erfüllbar, so daß ein Approximationsfehler *nullter Ordnung* in der Erfüllung des Bewegungsgleichungs-Kondensats für das Eichfeld in Kauf genommen werden muß, sofern man mit einer Lösung rechnen möchte, die nur komplexe Propagator-Pole liefert. Wir geben stattdessen eine typische Lösung mit einem  $w'_1$ -Wert etwa in der Mitte des Überlappungsbereichs von Tabelle 8.1 und mit derjenigen Vorzeichenwahl an, die später das richtige Vorzeichen des Fermionkondensats der Massendimension drei (B.2) liefern wird. Da der Parameter  $w'_2$  in diesem „Double-Confinement“-Bereich nur schwach variiert und in derselben Größenordnung wie  $w'_1$  liegt, wählen wir der Einfachheit halber die Lösung mit  $w'_1 = w'_2$  <sup>5</sup>. Die zugehörigen reellen Zahlenwerte der Vertex-Koeffizienten sind der Tabelle 8.2 zu entnehmen.

Neben den Zahlenwerten für die Vertexparameter sind in dieser Tabelle zusätzlich die zugehörigen Störungen der beiden perturbativen Renormierungskonstanten für die 3-Punkt-Vertizes angegeben, die nach Durchführung der Reskalierung nur noch gestrichene Parameter enthalten und folgendermaßen definiert sind:

$$P_{fa} := -\frac{9}{4} \frac{z'_{1,0}}{u'_3} \quad (8.27a)$$

$$P_{fb} := -\frac{9}{4} \frac{z'^2_{0,1}}{w'_3} - \frac{15}{2} \frac{z'_{1,0}}{u'_3} + \frac{5}{4} \frac{x'_4 z'_{1,0}}{u'_3} + N_F \frac{2}{3} \frac{z'^2_{1,0}}{u'_3} \quad (8.27b)$$

$$P_{ga} := \frac{1}{u'_3} + 8 \frac{x'_4}{u'_3} - \frac{5}{4} \frac{x'^2_4}{u'_3} - N_F \frac{2}{3} \frac{x'_4 z'_{1,0}}{u'_3} + N_F \frac{2}{3} \frac{z'^2_{0,1}}{w'_3} \quad (8.27c)$$

$$P_{gb} := \frac{37}{4} \frac{1}{u'_3} - \frac{3}{2} \frac{x'_4}{u'_3} - N_F \frac{2}{3} \frac{z'_{1,0}}{u'_3} + N_F \frac{2}{3} \frac{z'^2_{0,1}}{w'_3} \quad (8.27d)$$

<sup>4</sup>Wir wählen exemplarisch den Fall  $N_F = 2$ ; der Fall  $N_F = 6$  liefert qualitativ dieselben Resultate.

<sup>5</sup>Diese Wahl sichert übrigens für positive Parameter  $w'_3$  bereits die Erfüllung der fermionischen „Confinement“-Ungleichung (2.23).

$N_F = 2$		$N_F = 6$	
$w'_1$	-0.6749	$w'_1$	-0.5036
$w'_2$	-0.6749	$w'_2$	-0.5036
$w'_3$	0.1202	$w'_3$	0.0479
$z'_{0,1}$	0.9561	$z'_{0,1}$	0.3777
$z'_{0,4}$	-0.9356	$z'_{0,4}$	-0.2741
$z'_{1,0}$	-0.4282	$z'_{1,0}$	-0.5583
$z'_{1,1}$	-0.4094	$z'_{1,1}$	-0.2108
$z'_{1,4}$	0.2242	$z'_{1,4}$	0.0885
$u'_1$	-0.3604	$u'_1$	-0.5142
$u'_2$	-0.4884	$u'_2$	0.2207
$u'_3$	0.1299	$u'_3$	0.2644
$x'_2$	-8.7433	$x'_2$	-14.5259
$x'_4$	8.9088	$x'_4$	10.8613
$x'_5$	-3.2607	$x'_5$	-5.9675
$x'_7$	-6.2711	$x'_7$	-11.7466
$Z'_1$	157.908	$Z'_1$	163.848
$Z'_2$	156.224	$Z'_2$	204.759
$C_{conf}$	0.1202	$C_{conf}$	0.0479
$C_{cong}$	0.1258	$C_{cong}$	0.1294
$P_{fa}$	7.4167	$P_{fa}$	4.7500
$P_{fb}$	-27.2206	$P_{fb}$	-14.8093
$P_{ga}$	158.093	$P_{ga}$	121.648
$P_{gb}$	17.1284	$P_{gb}$	6.2831

Tabelle 8.2: Für  $N_F = 2$  und  $N_F = 6$  wurden die Werte derjenigen Parameter zusammengestellt, die mit  $u_1'^2 = u_3'$  und  $w_1' = w_2'$  das Bewegungsgleichungs-Kondensat für masselose Fermionen zum Verschwinden bringen und zusätzlich sowohl im gluonischen wie auch im fermionischen Sektor „Confinement“ zeigen. Die Definitionen der perturbativen Störungen  $P_i$  sind im Abschnitt 8.2 zu finden.

Die Zahlenwerte der Defektterme (8.27a – 8.27d) liegen in der Größenordnung der gluonischen Parameter selbst und stören somit die perturbativen 1-Schleifen-Resultate (1.93) bzw. (1.98) erheblich; dies war aber auf erster Stufe der rationalen Approximation nicht anders zu erwarten.

Abschließend geben wir die vier komplexen Propagator-Polstellen für beide Werte der Flavour-Zahl an:

	$N_F = 2$	$N_F = 6$
$w'_1$	-0.06749	-0.05036
$w'_+$	$0.4245 + i 0.3547$	$0.1468 + i 0.3597$
$w'_-$	$0.4245 - i 0.3547$	$0.1468 - i 0.3597$
$w'^2_+$	$0.3353 - i 0.4679$	$0.2057 - i 0.2205$
$w'^2_-$	$0.3353 + i 0.4679$	$0.2057 + i 0.2205$

Tabelle 8.3: Zahlenwerte der Propagator-Polstellen für die ausgewählten speziellen Lösungen.

### 8.3 Berechnung eichinvarianter Kondensate

Die Renormierungsgruppen-Invarianz des eichinvarianten Gluon-Kondensats  $\mathcal{C}_{4V}$  (B.3) sowie des renormierten Fermion-Kondensats der Massendimension drei

$$\mathcal{C}_{F1} := \frac{g^2(\nu)}{4\pi} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{(ren)} \quad (8.28)$$

führt unter Berücksichtigung der Skalierungs-Eigenschaft des ersten Abschnitts auf folgende Definition dimensionsloser Kondensat-Parameter:

$$\mathcal{C}_{4V}(\Lambda) = c \cdot \Lambda^4 = c' \cdot x_1^2 \cdot \Lambda^4 \quad (8.29)$$

$$\mathcal{C}_{F1}(\Lambda) = \bar{c} \cdot \Lambda^3 = \bar{c}' \cdot x_1^{3/2} \cdot \Lambda^3 \quad (8.30)$$

Die gestrichelten Parameter  $c'$  und  $\bar{c}'$  lassen sich mit den Resultaten des Anhangs B – bis auf Korrekturen der Ordnung  $g^2$  – durch die Vertexparameter der nichtperturbativ erweiterten Ansätze ausdrücken; sie sollen in diesem Abschnitt für die vorgestellten speziellen Lösungen berechnet werden.

Weiterhin erweist sich die Definition des folgenden dimensionslosen Quotienten als besonders nützlich:

$$\mathcal{C}_{gf} := \frac{(\pi \cdot \mathcal{C}_{4V})^3}{(\mathcal{C}_{F1})^4} = \frac{\pi^3 c'^3}{\bar{c}'^4} \quad (8.31)$$

In dieser Kombination der eichinvarianten Kondensate kürzen sich mit den Potenzen der Massenskala  $\Lambda$  auch die Potenzen des Skalierungsparameters  $x_1$  heraus, so daß effektiv

eine *skalunenabhängige* Größe entsteht; wir sind somit auch ohne Festlegung eines Renormierungsschemas in der Lage, die halb-empirischen Zahlenwerte der eichinvarianten Kondensate mit den Resultaten der ersten nichtperturbativen Iteration zu vergleichen. Man beachte, daß die gerade Potenz des Fermion-Kondensats in (8.31) stets ein positives Vorzeichen des Nenners sicherstellt und daher das Vorzeichen des Zählers bzw. des Gluon-Kondensats mit dem des gesamten Quotienten übereinstimmt. Die Überprüfung des Kondensat-Parameters  $c'$  (8.29) kann also im folgenden durch die Berechnung des Quotienten (8.31) ersetzt werden.

Um das halb-empirische Resultat für das Fermion-Kondensat (B.2) quantitativ berücksichtigen zu können, ist eine Auswertung der „laufenden“ Kopplung (1.112) bei einer Skala von 1 GeV notwendig<sup>6</sup>. Diese liefert schließlich für das eichinvariante und renormierungsgruppeninvariante Kondensat der beiden leichtesten Fermionen:

$$\mathcal{C}_{F1(exp)} := \frac{g^2(\nu)}{4\pi} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{(exp)} \approx -0.0023 (\pm 0.001) \text{ GeV}^3 \quad (8.32)$$

Nimmt man das empirische Resultat des eichinvarianten Gluon-Kondensats (B.4) hinzu, so erhält man folgenden Zahlenwert für den dimensionslosen Kondensat-Quotienten (8.31):

$$\mathcal{C}_{gf(exp)} \approx 5.4 \cdot 10^6 \quad (8.33)$$

Wir überprüfen nun, ob sich diese Zahlenwerte für die beiden vorgestellten speziellen Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems (siehe Tabelle 8.2) reproduzieren lassen. Obwohl sich das Bewegungsgleichungs-Kondensat für das Gluonfeld bei der Fixierung spezieller Lösungen als wenig nützlich erwiesen hat, läßt es sich bei der Berechnung des eichinvarianten Gluon-Kondensats durchaus verwenden: Nach Eliminierung des *exakten* 4-Gluon-Kondensats (B.12) enthält das eichinvariante Kondensat nämlich effektiv keine 3-Schleifen-Terme mehr (siehe (B.15)) und kann bis auf Korrekturen der Ordnung  $g^2$  durch die Parameter der Ansätze ausgedrückt werden (vergleiche (B.30)).

Nach Einsetzen der Parameterwerte aus Tabelle 8.2 erhalten wir für die verschiedenen Flavour-Zahlen folgende Zahlenwerte für die dimensionslosen Kondensat-Parameter:

	$N_F = 2$	$N_F = 6$
$w'_1$	-0.06749	-0.05036
$\bar{c}'$	-0.006333	-0.007541
$\mathcal{C}_{gf}$	$1.095 \cdot 10^3$	$-7.995 \cdot 10^3$

Tabelle 8.4: Zahlenwerte der dimensionslosen Kondensat-Parameter aus (8.30) und (8.31) für die ausgewählten speziellen Lösungen.

<sup>6</sup>Unzweckmäßigerweise werden in der Literatur [25] [38] die eichinvarianten Fermion-Kondensate im Gegensatz zu dem eichinvarianten Gluon-Kondensat *ohne* den Kopplungsfaktor definiert, so daß a priori schon in führender Ordnung skalenabhängige Größen vorliegen.

Wir erkennen zunächst, warum für beide Werte von  $N_F$  ein negativer Startparameter  $w'_1$  gewählt wurde; dieser liefert in beiden Fällen das korrekte Vorzeichen des eichinvarianten Fermion-Kondensats und legt somit die Wahl des Parametersatzes (8.21) oder (8.22) bzw. das Vorzeichen der Wurzel  $\sqrt{|x_1|}$  fest, wie schon im Abschnitt 8.1 angekündigt wurde.

Die Zahlenwerte für den dimensionslosen Kondensat-Parameter  $C_{gf}$  unterscheiden sich zwar von dem halb-empirischen Resultat (8.33) um mehrere Zehnerpotenzen; es ist aber klar, daß sich in einem Quotienten solch hoher Massendimension alle Fehler erheblich potenzieren. Wesentlich mehr Aussagekraft besitzt dagegen sein Vorzeichen; für eine höhere Anzahl masseloser (identischer) Fermionen erhalten wir nämlich das *falsche* Vorzeichen, das sich nach (8.31) auf das Resultat des eichinvarianten Gluon-Kondensats überträgt. Es zeigt sich also, daß die Wahl der Flavour-Zahl  $N_F = 2$  bei masselosen Fermionen der *realistischen* Situation von 6 Fermion-Flavours mit unterschiedlich großen Massen wesentlich besser entspricht <sup>7</sup>.

Selbstverständlich ließe sich durch eine Festlegung des Renormierungsschemas und der damit verbundenen Fixierung der Massenskala der Skalierungsparameter  $x_1$  aus den obigen Resultaten bestimmen. Da aber im Rahmen masseloser Fermionen und der üblichen Vernachlässigung höherer Störungsordnungen keine exakte Übereinstimmung zu den halb-empirischen Zahlenwerten aus QCD-Summenregeln zu erwarten ist, werden wir diese Idee nicht weiter verfolgen und uns stattdessen der Lösung des verbleibenden linearen Gleichungssystems zuwenden.

## 8.4 Das lineare Gleichungssystem

Das zweite Gleichungssystem aus dem Selbstkonsistenzproblem des reduzierten 4-Gluon-Vertex enthält insgesamt 54 Gleichungen für die 17 Vertexparameter  $\zeta_i$ , falls wie vorher die Störungen der perturbativen Renormierungskonstanten nicht berücksichtigt werden. Diese starke Überbestimmtheit – resultierend aus der mangelnden Bose-Symmetrie des Dyson-Schwinger-Funktional – läßt anstelle einer exakten Lösung nur eine Minimierung der Summe aller Fehlerquadrate zu, so daß die im letzten Abschnitt durchgeführte Fixierung der Kopplungskombinationen in natürlicher Weise einbezogen werden kann.

Eine konsequente Erweiterung der Reskalierungs-Prozedur, die auch in den Selbstkonsistenzgleichungen des 4-Gluon-Vertex den Parameter  $x_1$  eliminiert, führt zunächst auf folgende Definition neuer Vertexparameter  $\zeta'_i$ :

$$\begin{array}{lll}
 \zeta'_1 & := & \zeta_1/x_1 & \zeta'_7 & := & \zeta_7/x_1 & \zeta'_{13} & := & \zeta_{13}/x_1 \\
 \zeta'_2 & := & \zeta_2/x_1^2 & \zeta'_8 & := & \zeta_8/x_1^2 & \zeta'_{14} & := & \zeta_{14}/x_1^2 \\
 \zeta'_3 & := & \zeta_3/x_1^2 & \zeta'_9 & := & \zeta_9/x_1^2 & \zeta'_{15} & := & \zeta_{15}/x_1^3 \\
 \zeta'_4 & := & \zeta_4/x_1^3 & \zeta'_{10} & := & \zeta_{10}/x_1^3 & \zeta'_{16} & := & \zeta_{16}/x_1^4 \\
 \zeta'_5 & := & \zeta_5/x_1^4 & \zeta'_{11} & := & \zeta_{11}/x_1^4 & \zeta'_{17} & := & \zeta_{17}/x_1^2 \\
 \zeta'_6 & := & \zeta_6/x_1^2 & \zeta'_{12} & := & \zeta_{12}/x_1^2 & & & 
 \end{array} \tag{8.34}$$

---

<sup>7</sup>Bekanntermaßen liegen die Massen des  $u$ -Quarks und des  $d$ -Quarks im Bereich weniger MeV [23] [30] und lassen sich gegenüber den üblichen Werten für die Massenskala  $\Lambda$  im  $\overline{MS}$ -Schema (2.2) in guter Näherung vernachlässigen.

Damit lassen sich auch die Kopplungs-Bedingungen, die im Abschnitt 6.6 eingeführt wurden, in reskalierten Form angeben:

$$\frac{45}{32} \zeta'_1 - \frac{15}{32} \zeta'_7 = Z'_1 \quad (8.35)$$

$$\frac{45}{32} \zeta'_2 + \frac{45}{32} \zeta'_3 - \frac{15}{32} \zeta'_8 - \frac{15}{32} \zeta'_9 = Z'_2 \quad (8.36)$$

Die neuen Selbstkonsistenzgleichungen für die reskalierten Parameter sind aus den Gleichungen des Anhangs C durch die formale Ersetzung  $x_1 \rightarrow 1$  zu erhalten und werden nicht explizit notiert. Stattdessen wählen wir – unter Einbeziehung der beiden reskalierten Kopplungsbedingungen (8.35) und (8.36) – eine schematische Darstellung, die durch Einführung der Koeffizienten-Matrix

$$\mathcal{M} \equiv (m_{i,j}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{56,1} & \cdots & m_{56,17} \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

sowie ihrer Transponierten

$$\mathcal{M}^+ \equiv (\tilde{m}_{i,j}) = (m_{j,i}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,56} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{17,1} & \cdots & m_{17,56} \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

und der Vektoren

$$\vec{\mathbf{b}} \equiv (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{56} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\zeta}' \equiv (\zeta'_j) = \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{17} \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

auf folgende Matrix-Notation des inhomogenen  $56 \times 17$ -Gleichungssystems führt:

$$\mathcal{M} \cdot \vec{\zeta}' = \vec{\mathbf{b}} \quad \text{bzw.} \quad m_{i,j} \zeta'_j = b_i \quad (8.40)$$

Aus der Selbstkonsistenzgleichung (7.11) lesen wir exemplarisch folgende Identitäten der Matrix-Koeffizienten ab:

$$\begin{aligned} m_{1,1} &:= 0 \\ m_{1,2} &:= \frac{45}{4} u_3'^2 x_4' \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die erste Komponente der Inhomogenität  $\vec{\mathbf{b}}$  ist ebenfalls anhand von (7.11) zu identifizieren und lautet

$$b_1 := -27 u_3'^2 x_4'^3 + 54 u_3' x_4' x_5'^2 - 27 x_5'^2 x_7' \quad ,$$

während die letzten beiden Komponenten durch die Kopplungsparameter gegeben sind:

$$\begin{aligned} b_{55} &:= Z'_1 \\ b_{56} &:= Z'_2 \end{aligned}$$

Das oben beschriebene Optimierungsproblem, das schließlich die Fixierung der Werte für die Vertexparameter  $\zeta'_i$  erlaubt, läßt sich in der schematischen Index-Notation formulieren:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \zeta'_l} \left( (m_{i,j} \zeta'_j - b_i)(m_{i,k} \zeta'_k - b_i) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \zeta'_l} \left( m_{i,j} m_{i,k} \zeta'_j \zeta'_k - 2 m_{i,j} \zeta'_j b_i + b_i b_i \right) \\
&= m_{i,j} m_{i,k} \left( \delta_{j,l} \zeta'_k + \zeta'_j \delta_{k,l} \right) - 2 m_{i,j} \delta_{j,l} b_i \\
&= 2 \tilde{m}_{l,i} m_{i,k} \zeta'_k - 2 m_{i,l} b_i
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Die Minimisierung der Summe aller Fehlerquadrate bezüglich der unbestimmten Parameter  $\zeta'_i$  führt also aufgrund des linearen Charakters der Gleichungen auf eine neue inhomogene Matrix-Gleichung der Form

$$\mathcal{M}^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \vec{\zeta}' = \mathcal{M}^+ \cdot \vec{\mathbf{b}} \tag{8.42}$$

mit einer  $17 \times 17$ -Matrix  $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M}^+ \cdot \mathcal{M}$ , die für festgelegte reskalierte Parameter der Selbstenergien und 3-Punkt-Vertizes nur konstante Koeffizienten besitzt und bei maximalem Rang ( $r(\tilde{\mathcal{M}}) = 17$ ) invertierbar ist.

Wir bestimmen nun den optimierten Satz der reskalierten Vertexparameter  $\zeta'_i$ , indem wir die Parameterwerte der speziellen Lösungen des vorherigen Abschnitts in den Koeffizienten der Matrix  $\tilde{\mathcal{M}}$  und den Komponenten des Vektors  $\vec{\mathbf{b}}$  einsetzen. Tatsächlich liefert die Berechnung des Rangs von  $\tilde{\mathcal{M}}$  mit Hilfe des Algebra-Programms „MAPLE“ die Invertierbarkeit der Matrix-Gleichung (8.42) und somit eine eindeutige „Least-Squares“-Lösung für die unbestimmten Parameter  $\zeta'_i$ . Die resultierenden Zahlenwerte sind bei verschiedenen Gewichtungen  $W$  der beiden reskalierten Kopplungs-Bedingungen (8.35) und (8.36) in Tabelle 8.5 zusammengestellt.

Zusätzlich führen wir in dieser Tabelle die *neuen* Zahlenwerte der Kopplungsparameter  $Z'_1$  und  $Z'_2$  auf, die sich durch Einsetzen der berechneten Werte für die Vertexparameter  $\zeta'_i$  in die Kopplungskombinationen (8.35) und (8.36) ergeben.

Es zeigt sich dabei, daß die exakte Erfüllung der Kopplungs-Bedingungen innerhalb des überbestimmten linearen Gleichungssystems die Zahlenwerte der Parameter  $\zeta'_i$  sehr stark beeinflußt, während die Unterschiede zwischen einer schwachen und einer gleichberechtigten Gewichtung der Bedingungen unbedeutend sind. Somit stellt die Abkopplung des effektiv linearen Selbstkonsistenzproblems im Rahmen einer nichtverschwindenden Anzahl masseloser Fermionen doch eine starke Einschränkung der Gesamtlösung dar. Die Zahlenwerte der  $\zeta'$ -Parameter sind zum Teil betragsmäßig sehr groß; doch sollte man beachten, daß diese Erscheinung sich besonders dort ausbildet, wo nach (8.34) mit einer höheren Potenz von  $x_1$  skaliert wurde (insbesondere bei  $\zeta'_{16}$ ), so daß dieser Effekt zu einem erheblichen Teil von dieser Skalierung herrühren dürfte.

Die einheitliche Behandlung *aller* Selbstkonsistenzgleichungen als Optimierungsproblem für insgesamt  $6 + 10 + 17 = 33$  Parameter, die mit den bereitstehenden Hilfsmitteln nicht durchgeführt werden konnte, sollte zusätzlich auch die divergenten Beiträge der fundamentalen 2-Schleifen-Terme in den Dyson-Schwinger-Funktionalen berücksichtigen, auf die im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wurde.

	$N_F = 2$			$N_F = 6$		
	$W = 1/1000$	$W = 1$	$W = 1000$	$W = 1/1000$	$W = 1$	$W = 1000$
$\zeta'_1$	-191.739	-181.479	56.2195	-162.879	-158.395	60.5494
$\zeta'_2$	-118.442	-98.0392	646.666	56.1321	72.5280	911.678
$\zeta'_3$	-98.8281	-113.830	-513.112	-260.760	-269.951	-703.615
$\zeta'_4$	274.080	297.854	611.964	199.928	213.792	695.742
$\zeta'_5$	-2837.96	-2747.89	962.884	-6502.38	-6323.37	3583.49
$\zeta'_6$	-48.2587	-37.5470	271.1234	1.2436	8.5357	358.073
$\zeta'_7$	179.889	172.266	-168.189	96.4822	91.4220	-167.849
$\zeta'_8$	-298.257	-319.204	-803.838	-456.819	-469.268	-1084.82
$\zeta'_9$	11.7260	35.7455	871.2742	178.758	199.116	1272.24
$\zeta'_{10}$	1340.19	1318.44	64.7678	2673.53	2627.97	31.2436
$\zeta'_{11}$	-1757.13	-1757.48	438.547	-7741.63	-7604.152	1291.27
$\zeta'_{12}$	-21.5360	-26.1411	-202.038	-82.5615	-86.2333	-303.839
$\zeta'_{13}$	92.9743	76.2778	-510.038	-10.2021	-19.5077	-499.099
$\zeta'_{14}$	197.552	190.679	84.6651	365.021	360.755	177.952
$\zeta'_{15}$	395.443	367.789	-561.855	338.076	309.404	-1175.19
$\zeta'_{16}$	5870.69	5445.99	-7481.85	18850.6	18172.3	-15866.7
$\zeta'_{17}$	-332.807	-317.696	209.801	-439.776	-425.1024	363.677
$Z'_1$	-353.956	-335.954	157.897	-274.275	-265.597	163.872
$Z'_2$	-171.225	-165.070	156.199	-157.417	-150.992	204.738

Tabelle 8.5: Für  $N_F = 2$  und  $N_F = 6$  sind die Werte der Parameter  $\zeta'_i$  bei verschiedenen Gewichtungen  $W$  der ausgewerteten Kopplungs-Bedingungen (8.35) und (8.36) zusammengestellt. Die Zahlenwerte der Kopplungsparameter entsprechen nicht den Resultaten des nichtlinearen Systems in Tabelle 8.2, sondern den zugehörigen Kombinationen der berechneten Vertexparameter  $\zeta'_i$ .

## 8.5 Ergänzung: Spezielle Lösungen der rein gluonischen Theorie

In der rein gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) bleiben die reskalierten gluonischen Parameter unter sich, so daß das resultierende nichtlineare Gleichungssystem der Gluon-Selbstenergie und des 3-Gluon-Vertex völlig analog der Theorie mit massiven Fermionen behandelt werden kann<sup>8</sup>. Es existieren in diesem Fall 7 gekoppelte polynomiale Gleichungen für insgesamt 9 reskalierte Parameter, die entweder aus den Ansätzen im gluonischen Sektor stammen oder die Ankopplung des 4-Gluon-Vertex parametrisieren. Die zweifache Unterbestimmtheit des Gleichungssystems kann im Prinzip durch die beiden Bewegungsgleichungskondensate der gluonischen Theorie behoben werden.

Wählt man allerdings unter Berücksichtigung der Nebenbedingung  $u_1'^2 = u_3'$  den Parameter  $x_4'$  als Startparameter und berechnet anschließend sowohl die linke Seite der reskalierten gluonischen „Confinement“-Ungleichung ( $\mathcal{C}_{cong} > 0$ ) als auch die reskalierte Nebenbedingung (B.29), die durch das Bewegungsgleichungs-Kondensat des Gluonfeldes bei Vernachlässigung der 3-Schleifen-Beiträge geliefert wird, so läßt sich diese Gleichung für beliebige Werte des Startparameters  $x_4'$  nicht erfüllen. Wir verzichten daher wieder auf die Einbeziehung der Nebenbedingung (B.29) und verwenden stattdessen zur Fixierung einer Lösung die Symmetrisierungs-Bedingung der perturbativen Renormierungskonstanten des 3-Gluon-Vertex, die im Rahmen der Zwischenbilanz des sechsten Kapitels diskutiert wurde. Für  $x_4' = 1$  liegt die resultierende Lösung nämlich im gluonischen „Confinement“-Bereich, wie der Tabelle 8.6 zu entnehmen ist. Berechnet man zusätzlich diejenigen Lösungen, die die Grenzen des „Confinement“-Bereichs markieren, so läßt sich beobachten, daß – mit Ausnahme der beiden Propagator-Parameter  $u_1'$  und  $u_3'$  – alle reskalierten Parameter einen großen Wertebereich ausschöpfen.

Wir erwähnen zusätzlich, daß ebenso wie die Bedingung des Bewegungsgleichungskondensats für das Eichfeld (B.29) auch die reskalierte Nebenbedingung (5.29), die als einzige Information aus einer Analyse der Slavnov-Taylor-Identitäten verwendet werden könnte, innerhalb des gesamten „Confinement“-Bereichs nicht erfüllt werden kann und somit zu der Fixierung einer speziellen Lösung in diesem Bereich nicht geeignet ist. Wir erinnern jedoch daran, daß diese Bedingung auf die eingeschränkte Tensorstruktur der Ansätze und die Wahl der nicht-resummierten D-S-Gleichungen zurückzuführen und daher in *jedlichem* Näherungsverfahren schwer zu erfüllen ist.

Setzen wir bei  $N_F = 0$  die Parameterwerte der speziellen Lösung für  $x_4' = 1$  in die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems ein, so besitzt die Matrix  $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M}^+ \cdot \mathcal{M}$  erneut den maximalen Rang, und die Invertierung der Matrix-Gleichung führt wieder – bei verschiedenen Gewichtungen  $W$  der Kopplungs-Bedingungen – auf eindeutige „Lösungen“ für die Parameter  $\zeta_i'$ , die in Tabelle 8.7 zusammengestellt sind. Außerdem sind in dieser Tabelle zur Kontrolle wieder die „neuen“ (d. h. berechneten) reskalierten Kopplungsparameter  $Z_1'$  und  $Z_2'$  hinzugefügt, so daß wie bei der masselosen Theorie der Einfluß des Gewichtungsfaktors  $W$  analysiert werden kann.

Es fällt auf, daß für  $N_F = 0$  die Größenordnungen der Zahlenwerte der Parameter  $\zeta_i'$  im Vergleich zu den Resultaten des Abschnitts 8.2 sehr viel besser den übrigen Parameterwerten angepaßt sind. Außerdem sind im Gegensatz zu einer nichtverschwindenden Anzahl masseloser Fermionen die Parameterwerte für die beiden stärkeren Gewichtungen

---

<sup>8</sup>Siehe hierfür [17].

		$P_{ga} = P_{gb}$	
$u'_1$	-2.3720	-1.7429	-1.6980
$u'_2$	-7.1159	0.8456	1.6978
$u'_3$	5.6264	3.0376	2.8831
$x'_2$	-31.7005	-6.1825	-4.3701
$x'_4$	-3.4040	1.0000	1.3142
$x'_5$	-8.0966	-4.8682	-4.6503
$x'_7$	174.9865	28.6053	19.2876
$Z'_1$	-52.9968	-2.9207	0.7447
$Z'_2$	285.1184	16.0374	-3.4218
$C_{cong}$	0.0002	1.3625	0.0003
$u'_+$	$-4.744 + i 0.0145$	$-0.4486 + i 1.1673$	$-0.0001 + i 0.0169$
$u'_-$	$-4.744 - i 0.0145$	$-0.4486 - i 1.1673$	$-0.0001 - i 0.0169$
$c'$	-0.0954	-0.0515	-0.0489
$P_{ga}$	7.2366	-2.5514	-3.2447
$P_{gb}$	-2.5515	-2.5514	-2.5246

Tabelle 8.6: Für einige spezielle Lösungen der rein gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) sind die Zahlenwerte der reskalierten gluonischen Parameter sowie die Resultate der perturbativen Störungen (8.27c) bzw. (8.27d) und des dimensionslosen Kondensat-Parameters (8.29) zusammengestellt; die äußeren Spalte der Tabelle parametrisieren die Grenzen des „Confinement“-Bereichs.

	$W = 1/1000$	$W = 1$	$W = 1000$
$\zeta'_1$	-0.2229	-0.4321	0.8136
$\zeta'_2$	-6.8643	9.2853	6.4385
$\zeta'_3$	-0.3040	-4.7889	-4.7327
$\zeta'_4$	132.3066	-54.8335	-57.3463
$\zeta'_5$	-1314.646	255.0831	350.0480
$\zeta'_6$	6.2161	-2.5121	-3.0570
$\zeta'_7$	-0.7949	6.3977	8.6717
$\zeta'_8$	5.3198	-21.4961	-30.0268
$\zeta'_9$	8.0694	1.2747	0.9310
$\zeta'_{10}$	-139.5799	56.7495	96.0221
$\zeta'_{11}$	1471.244	-110.0688	-328.1418
$\zeta'_{12}$	-6.0505	-0.5179	-0.0597
$\zeta'_{13}$	3.5874	2.5948	3.3542
$\zeta'_{14}$	31.1524	0.4610	-4.2119
$\zeta'_{15}$	-329.6524	-19.1494	13.7393
$\zeta'_{16}$	2686.741	123.9739	-121.6670
$\zeta'_{17}$	0.8333	-8.7435	-9.0603
$Z'_1$	0.0592	-3.6065	-2.9207
$Z'_2$	-16.3566	15.8018	16.0374

Tabelle 8.7: Für die rein gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) sind die Zahlenwerte der reskalierten Vertexparameter  $\zeta'_i$  sowie der neu berechneten Kopplungskombinationen  $Z'_1$  und  $Z'_2$  bei verschiedenen Gewichtungen  $W$  der Kopplungsbedingungen (8.35) und (8.36) zusammengestellt.

$W = 1$  und  $W = 1000$  sehr ähnlich, so daß die Fixierung der Kopplungsparameter durch das nichtlineare System für die rein gluonische Theorie durchaus zu vertreten ist.

Abschließend formulieren wir für  $x'_4 = 1$  den renormierungsgruppen-invarianten Beitrag des eichinvarianten Gluon-Kondensats, dessen Darstellung durch die Kondensate der Massendimension vier (B.15) nach Verwendung des *exakten* Bewegungsgleichungs-Kondensats für das Eichfeld auch in der rein gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) keine fundamentalen 2-Schleifen-Terme mehr enthält und bei Berücksichtigung der zweiten Bedingung  $u_1^2 = u_3$  folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{4V}(\Lambda) &:= \frac{1}{4\pi^2} \left( 4 V2_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) + 4 V3_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) + 4 V4_{(ren)}^{(l=3)}(\Lambda) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left( 2 V2_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) + V3_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) - GV_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) \right) \\
&\stackrel{(u_1^2=u_3)}{=} \frac{1}{4\pi^2} V3_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) \\
&= \frac{x_1^2 \Lambda^4}{4\pi^2 \beta_0} \left( -108 u_1^2 - 108 x'_5 + 198 u'_1 \right. \\
&\quad \left. + 93 u'_1 x'_4 + 90 u'_2 - 15 u'_2 x'_4 \right) + \mathcal{O}(g^2) \\
&\approx -0.0515 \cdot x_1^2 \Lambda^4 + \mathcal{O}(g^2)
\end{aligned} \tag{8.43}$$

Der letzte Schritt beinhaltet die Einsetzung der Parameterwerte für  $x'_4 = 1$ . Somit konnte für  $N_F = 0$  die dimensionslose Proportionalitätskonstante  $c'$  aus (8.29) in führender Schleifen-Ordnung bestimmt werden; allerdings besitzt sie – wie für  $N_F = 6$  in der masselosen Theorie – im Vergleich zu dem experimentellen Wert (B.4) ein falsches Vorzeichen. Dies zeigt, daß die realistische Situation von sechs Fermion-Flavours mit unterschiedlichen Massen für eine Überprüfung empirischer Zahlenwerte nicht zu vermeiden ist.



# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen, eine nichtperturbativ erweiterte nullte Störungsordnung der Vertex-Funktionen der QCD mit Hilfe eines Selbstkonsistenzproblems im Rahmen der zugehörigen gekoppelten Dyson-Schwinger-Integralgleichungen zu bestimmen. Dabei erwies sich ein modifizierter Begriff der 1-Teilchen-Reduzibilität und die damit verbundene Einführung *reduzierter* Vertex-Funktionen bei vier oder mehr Beinen als nützlich, wodurch der Selbstkonsistenz-Mechanismus wegen seiner engen Verknüpfung mit divergenten Integralen auf die sieben oberflächlich divergenten Vertex-Funktionen beschränkt blieb.

Es wurden im einzelnen auf erster Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ) sämtliche 1-Schleifen-Divergenzen in erster nichtperturbativer Iteration der Dyson-Schwinger-Funktionale berechnet, was insbesondere für den 4-Gluon-Vertex eine sehr umfangreiche Aufgabe darstellte. Die Resultate führten über einen Residuenvergleich mit den entsprechenden Ansätzen der modifizierten nullten Störungsordnung zu einem Satz gekoppelter, polynomialer Gleichungen für die unbestimmten Vertexparameter. Nach einer Abspaltung des stark überbestimmten Gleichungssystems für den reduzierten 4-Gluon-Vertex und einer Reskalierung sämtlicher Vertexparameter konnten – für eine unterschiedliche Anzahl von Quark-Flavours – spezielle Lösungen angegeben werden, die zusätzlich sowohl die Bedingungen aus den Bewegungsgleichungs-Kondensaten für die Geist- und Fermionfelder als auch die beiden „Confinement“-Ungleichungen im gluonischen wie im fermionischen Sektor erfüllen <sup>9</sup>.

Das Bewegungsgleichungs-Kondensat des Eichfeldes wurde zur Fixierung einzelner Lösungen nicht verwendet, da eine Vernachlässigung seiner fundamentalen 3-Schleifen-Terme auf eine Nebenbedingung führte, die nur für *komplexe* Werte einzelner Vertexparameter zu erfüllen war <sup>10</sup>. Eine Alternative bezüglich der Verwendung des Bewegungsgleichungs-Kondensats für das Gluonfeld lag darin, durch eine Ersetzung des *exakten* 4-Gluon-Kondensats die 3-Schleifen-Terme in dem eichinvarianten Gluon-Kondensat vollständig zu eliminieren, so daß unter Berücksichtigung der Skalierungsfreiheit RG-invariante Beiträge der eichinvarianten Vakuumkondensate für die speziellen Lösungen berechnet werden konnten. Durch einen Vergleich der Resultate mit halb-empirischen Zahlenwerten aus QCD-Summenregeln ließ sich qualitativ eine Überprüfung fundamentaler *nichtperturbativer* Observablen durchführen.

Abschließend wurde mit Hilfe der Minimierung der Summe aller Fehlerquadrate eine *eindeutige* Lösung des verbliebenen (effektiv linearen) Gleichungssystems für die Ko-

---

<sup>9</sup>Daß solche Lösungen existieren, ist durchaus ein nichttriviales Resultat.

<sup>10</sup>Die Berechnung der führenden Divergenzen  $\propto 1/\epsilon^3$  der 3-Schleifen-Graphen ist im Prinzip mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden möglich; sie geht aber wegen ihres Umfangs über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

effizienten des 4-Gluon-Vertex bestimmt, wobei eine starke Gewichtung der Kopplungsbedingungen, die aufgrund ihrer linearen Struktur ohne Schwierigkeiten in das stark überbestimmte System integriert werden konnten, die korrekte Ankopplung an das separat behandelte Gleichungssystem sicherstellte.

Folgende wichtige Beobachtungen und Erkenntnisse sind zu konstatieren:

Im Gegensatz zu den Resultaten früherer Arbeiten [14] [27], die im Rahmen einer rein gluonischen Theorie ( $N_F = 0$ ) mit vereinfachten Ansätzen ( $u_1 = u_2 = 0$ ) sowie der vollständigen Abkopplung des 4-Gluon-Vertex ( $Z_1 = Z_2 = 0$ ) gerechnet haben und in denen außerdem der Mechanismus der kompensierenden Pole noch nicht berücksichtigt wurde, existieren tatsächlich vollständig *reelle* Lösungen des Selbstkonsistenzproblems. Dies ist – unabhängig von der Wahl geeigneter Zusatzinformationen – bereits ein nicht-triviales Resultat und deutet an, daß von einer Verbesserung der Ansätze in Form einer höheren Stufe der rationalen Approximation oder einer verallgemeinerten Tensorstruktur (vor allem des 4-Gluon-Vertex) wesentliche Fortschritte erwartet werden können.

Während die selbstkonsistente Reproduktion der „erweiterten Feynman-Regeln“ im wesentlichen durch die Anwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus [14] möglich wird, ist für eine Beibehaltung der störungstheoretischen Renormierbarkeit das Verschwinden der nichtperturbativen Modifikationen im perturbativen Limes unverzichtbar. Allerdings ist im allgemeinen keine *multiplikative* Renormierung der Vertex-Funktionen mehr zu erwarten; stattdessen ist die Beseitigung „perturbativer“ UV-Divergenzen durch die *Subtraktion* lokaler „Counter“-Terme vorzunehmen<sup>11</sup>, die für die erste nichtperturbative Iteration in schematischer Notation folgende Gestalt annimmt [14]:

$$\Gamma^{(r,0)}(R) = Z_\Gamma(g^2(\nu)) \cdot \Gamma^{(0)pert} + \left( \Gamma^{(r,0)} - \Gamma^{(0)pert} \right)$$

Mit Ausnahme der Selbstenergie-Renormierungskonstanten  $Z_{\Gamma_2}$  und  $Z_{\bar{\Gamma}_2}$  zeigen sämtliche Renormierungskonstanten der Vertex-Funktionen nichtverschwindende Störungen der bekannten perturbativen Divergenzen. Diese Beiträge lassen sich als Relikt der kompensierenden Pole verstehen, die für niedrige  $r$  als einzige Bestandteile der nichtperturbativen Modifikationen den perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) überleben. Ein Verschwinden der Störungen sollte auf höheren Stufen der rationalen Approximation *asymptotisch* zu erreichen sein, da bei konstanter Anzahl der Störungen immer mehr Vertexparameter zu ihnen beitragen. Eine Lösung des Selbstkonsistenzproblems ist allerdings bei Verwendung der hier ausschließlich betrachteten „gewöhnlichen“ d. h. nicht-resummierten D-S-Gleichungen schon auf Stufe  $r = 3$  nahezu hoffnungslos, da bereits bei Beschränkung auf die 3-Punkt-Vertizes in diesem Fall 48 Gleichungen für 78 Vertexparameter vorliegen. Eine detaillierte Analyse zeigt, daß bei Erhöhung der Approximationsstufe  $r$  die Anzahl der Vertexparameter mit  $r^3$  anwächst, während die Anzahl der Selbstkonsistenzgleichungen nur mit  $r^2$  ansteigt [17]. Die Ursache der zunehmenden Unterbestimmtheit ist ebenfalls im Mechanismus der kompensierenden Pole zu finden; dieser ist nämlich dafür verantwortlich, daß Teile der Ansätze bereits durch die Selbstkonsistenzgleichungen der Selbstenergien reproduziert werden können und daher als Lieferanten von Selbstkonsistenz-Bedingungen ausfallen.

Diese Unterbestimmtheit ist strikt von derjenigen zu unterscheiden, die durch das Fehlen eigener Bestimmungsgleichungen für die Selbstenergie-Parameter  $u_2$  und  $w_2$  zustande

---

<sup>11</sup>Dies trifft im übrigen bereits auf die in vielerlei Hinsicht verwandte Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) zu [14] [37].

kommt, und läßt sich im Prinzip durch eine Verwendung der Bethe-Salpeter-resummierten Dyson-Schwinger-Gleichungen vermeiden; allerdings steht zur Zeit eine zufriedenstellende Parametrisierung der Bethe-Salpeter-Kerne noch aus<sup>12</sup>. Außerdem sollte in diesem Fall konsequenterweise die eigentliche Bethe-Salpeter-Gleichung (1.71) im Rahmen des Selbstkonsistenzproblems für die 4-Gluon-Amplitude gewählt werden, deren Auswertung wesentliche technische Schwierigkeiten mit sich bringt<sup>13</sup>.

Eine weitere Möglichkeit für eine Verbesserung der vorliegenden Resultate liegt in der Einbeziehung der fundamentalen 2-Schleifen-Terme, deren führende Divergenzen  $\propto 1/\epsilon^2$  mittels einer zweifachen Anwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus durchaus Korrekturen zur nullten Störungsordnung liefern können. Zwar sind solche Beiträge durch einen weiteren Faktor  $1/\beta_0$  unterdrückt; eine erste Analyse der Tensorstruktur weist aber darauf hin, daß die zugehörigen Kontraktionen diesen Faktor tatsächlich ausgleichen können<sup>14</sup>. Es ist zudem als technischer Aspekt zu beachten, daß eine Berücksichtigung fundamentaler 2-Schleifen-Graphen in den Dyson-Schwinger-Gleichungen eine stärkere Ankopplung des 4-Gluon-Vertex an das unterbestimmte übrige Selbstkonsistenzproblem verursacht, so daß eventuell die Abkopplung des stark überbestimmten Systems für den 4-Gluon-Vertex nicht mehr zu vertreten ist. Offen bleibt auch die Frage, inwieweit die fundamentalen 2-Schleifen-Terme der Dyson-Schwinger-Funktionale den „iterativen“ 2-Schleifen-Termen, die durch Einsetzen der 1-Schleifen-Funktionale entstehen, vorzuziehen sind, da beide formal von derselben Ordnung bezüglich des Entwicklungsfaktors  $1/\beta_0$  sind.

Von der Vielzahl möglicher Anwendungsbereiche für die nichtperturbativ erweiterten Feynman-Regeln wurden in dieser Arbeit allein die nichtverschwindenden RG-invarianten Beiträge einiger Vakuumkondensate behandelt. Die Berechnung von S-Matrixelementen im hadronischen Sektor wird erst dann möglich<sup>15</sup>, wenn zusätzlich Ansätze für Hadron-Quark-Vertizes oder Hadron-Gluon-Vertizes – bzw. die entsprechenden Bethe-Salpeter-Amplituden – bereitgestellt werden, die mit den hier berechneten elementaren Vertizes konsistent sind. Obwohl die selbstkonsistente Reproduktion einer modifizierten *nullten* Störungsordnung in diesen Fällen nicht möglich ist [8] [9], sind Bethe-Salpeter-Amplituden der Ordnung  $g^2$ , die mittels einer Teilsummation der erweiterten Störungsreihe entstehen, durchaus zu erwarten. Mit diesem Thema werden sich nachfolgende Arbeiten beschäftigen.

---

<sup>12</sup>In [17] wurde das modifizierte Selbstkonsistenzproblem der 3-Punkt-Vertizes im Bethe-Salpeter-resummierten Fall auf Stufe  $r = 1$  bereits aufgestellt. Hierbei wurden die Bethe-Salpeter-Kerne aber allein durch die 1-Teilchen-Austauschgraphen in den vertikalen Kanälen approximiert.

<sup>13</sup>Ein erster Versuch, der die Einbeziehung von Modellen mit separablen Kernen beinhaltet, ist in [18] zu finden.

<sup>14</sup>Dies wird durch die Nebenbedingungen der Bewegungsgleichungs-Kondensate in Anhang B bestätigt.

<sup>15</sup>Wie es die „Confinement“-Hypothese verlangt, verschwinden S-Matrixelemente für die elementaren Bausteine der Theorie, d. h. Quarks und Gluonen, automatisch, wenn sie nach den üblichen Reduktionsformeln durch Residuenbildung an nichtamputierten, verbundenen Greenschen Funktionen berechnet werden [14].



# Anhang A

## Mathematischer Anhang

### A.1 Funktionalintegral-Methoden

#### A.1.1 Erzeugende Funktionale und Greensche Funktionen

Aus dem erzeugenden Funktional (1.9) läßt sich wie üblich [22] [28] durch

$$W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \quad (\text{A.1})$$

das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen  $G_n^{(con)}$  bilden. Hieraus entsteht durch die übliche Legendre-Transformation das erzeugende Funktional der amputierten, zusammenhängenden und 1-Teilchen-irreduziblen Vertex-Funktionen, das mit (1.10) folgende Gestalt annimmt:

$$\Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}] = W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] + j_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}; J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \quad (\text{A.2})$$

Die neuen Variablen  $\hat{A}, \dots, \hat{\psi}$  werden als „effektive“ Felder bezeichnet und sind bei Abschalten aller Quellen identisch mit den entsprechenden 1-Punkt-Funktionen, die durch eine geeignete Normierung des erzeugenden Funktionals (1.9) zum Verschwinden gebracht werden können.

Im Funktionalableitungs-Formalismus [22] [26] erhalten wir für die vollen Propagatoren im  $D$ -dimensionalen euklidischen Impulsraum folgende Ausdrücke:

$$\left. \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{b_2}^{\nu_2}(p_2) \delta J_{b_1}^{\nu_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) D_{b_1 b_2}^{\nu_1 \nu_2}(p_2) \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \omega_{b_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{b_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} = - (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{D}_{b_1 b_2}(p_2^2) \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta_{(f)}^{l_2}(p_2) \delta \bar{\eta}_{(f)}^{l_1}(-p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} = - (2\pi)^{-D} \delta^D(-p_1 + p_2) S_{(f)}^{l_1 l_2}(p_2) \quad (\text{A.5})$$

Für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen beschränken wir uns exemplarisch auf folgende sechs Typen:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta J_{b_1}^{\nu_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \dots + p_n) G_n^{(con)} \nu_1 \dots \nu_n (p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta J_{b_3}^{\nu_3}(p_3) \delta \omega_{b_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{b_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & - (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}_n^{(con)} \nu_3 \dots \nu_n (p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta J_{b_3}^{\nu_3}(p_3) \delta \eta_{(f)}^{l_2}(p_2) \delta \bar{\eta}_{(f)}^{l_1}(-p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & - (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(-p_1 + \dots + p_n) \bar{G}_{n(f)}^{(con)} l_1 l_2 \nu_3 \dots \nu_n (-p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^4 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \omega_{b_4}(p_4) \delta \bar{\omega}_{b_3}(p_3) \delta \omega_{b_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{b_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & (2\pi)^{-3D} \delta^D(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \tilde{\tilde{G}}_4^{(con)} (p_1, p_2, p_3, p_4) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^4 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta^{l_4}(p_4) \delta \bar{\eta}^{l_3}(-p_3) \delta \eta^{l_2}(p_2) \delta \bar{\eta}^{l_1}(-p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & (2\pi)^{-3D} \delta^D(-p_1 + p_2 - p_3 + p_4) \bar{\bar{G}}_{4(ff')}^{(con)} l_1 l_2 l_3 l_4 (-p_1, p_2, -p_3, p_4) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^4 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta^{l_4}(p_4) \delta \bar{\eta}^{l_3}(-p_3) \delta \omega_{b_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{b_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ = & (2\pi)^{-3D} \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 + p_4) \bar{\bar{G}}_{4(f)}^{(con)} l_3 l_4 (p_1, p_2, -p_3, p_4) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Die zugehörigen amputierten, zusammenhängenden und 1-Teilchen-irreduziblen Vertex-Funktionen lassen sich über das erzeugende Funktional  $\Gamma_E$  bilden. Potenzen des nackten (massebehafteten) Kopplungsparameters werden dabei explizit notiert, um den korrekten Übergang zu den nackten Vertizes in der Wirkung (1.27) zu gewährleisten und somit zu einer natürlichen Formulierung der Dyson-Schwinger-Gleichungen zu gelangen. Die sechs interessanten Typen von Vertex-Funktionen werden im einzelnen durch folgende Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals (A.2) definiert:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^n \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta \hat{A}_{b_1}^{\nu_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \dots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{n-2} \Gamma_n^{\nu_1 \dots \nu_n}_{b_1 \dots b_n}(p_1, \dots, p_n)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^n \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta \hat{A}_{b_3}^{\nu_3}(p_3) \delta \hat{\chi}_{b_2}(p_2) \delta \hat{\chi}_{b_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & - (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \dots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{n-2} \tilde{\Gamma}_n^{\nu_3 \dots \nu_n}_{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}(p_1, \dots, p_n)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^n \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{b_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta \hat{A}_{b_3}^{\nu_3}(p_3) \delta \hat{\psi}^{l_2}(p_2) \delta \hat{\psi}^{l_1}(-p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & - (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(-p_1 + \dots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{n-2} \bar{\Gamma}_{n(f)}^{l_1 l_2 \nu_3 \dots \nu_n}_{b_3 \dots b_n}(-p_1, \dots, p_n)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_{b_4}(p_4) \delta \hat{\chi}_{b_3}(p_3) \delta \hat{\chi}_{b_2}(p_2) \delta \hat{\chi}_{b_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & (2\pi)^{-3D} \delta^D(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \tilde{\Gamma}_4^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}_{b_1 b_2 b_3 b_4}(p_1, p_2, p_3, p_4)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^{l_4}(p_4) \delta \hat{\psi}^{l_3}(-p_3) \delta \hat{\psi}^{l_2}(p_2) \delta \hat{\psi}^{l_1}(-p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & (2\pi)^{-3D} \delta^D(-p_1 + p_2 - p_3 + p_4) (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \bar{\Gamma}_{4(ff')}^{l_1 l_2 l_3 l_4}(-p_1, p_2, -p_3, p_4)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 \Gamma_E [\hat{A}, \hat{\chi}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^{l_4}(p_4) \delta \hat{\psi}^{l_3}(-p_3) \delta \hat{\chi}_{b_2}(p_2) \delta \hat{\chi}_{b_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
= & (2\pi)^{-3D} \delta^D(p_1 + p_2 - p_3 + p_4) (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \bar{\Gamma}_{4(f)}^{l_3 l_4}_{b_1 b_2}(p_1, p_2, -p_3, p_4)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Während die Reihenfolge der Funktionalableitungen bei der Definition bose-symmetrischer Vertizes keine Rolle spielt, beinhaltet die Definition von Vertizes mit Geist- oder Fermionenbeinen eine feste Reihenfolge bezüglich dieser Beine. Ein Vorzeichenwechsel bei einer Vertauschung der zugehörigen Funktionalableitungen berücksichtigt das antikommutative Verhalten der entsprechenden Felder bzw. Quellen und tritt an die Stelle der Unterscheidung zwischen „Links“-Ableitungen und „Rechts“-Ableitungen für Grassmann-Variablen, wie sie in anderen Arbeiten [28] [29] bevorzugt werden <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Man beachte auch, daß wir im Gegensatz zu jenen Arbeiten die Reihenfolge der Feldoperatoren bei fermionischen Funktionen den Kondensat-Konventionen angepaßt haben.

Aufgrund allgemeiner Eigenschaften der Legendre-Transformation [22] lassen sich folgende Identitäten der Funktionalableitungen aufstellen:

$$\frac{\delta W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta J_a^\mu(-p)} = -(2\pi)^{-D} \hat{A}_a^\mu(p) \quad ; \quad \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(p)} = (2\pi)^{-D} J_a^\mu(-p) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\delta W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \omega_a(-p)} = (2\pi)^{-D} \hat{\chi}_a(p) \quad ; \quad \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(p)} = (2\pi)^{-D} \omega_a(-p) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\delta W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\omega}_a(-p)} = -(2\pi)^{-D} \hat{\chi}_a(p) \quad ; \quad \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(p)} = -(2\pi)^{-D} \bar{\omega}_a(-p) \quad (\text{A.20})$$

Die entsprechenden Identitäten im Fermionsektor können mittels der formalen Ersetzung der Geistfelder bzw. Geistquellen durch die Fermionfelder bzw. Fermionquellen erhalten werden; sie werden aber in diesem Abschnitt nicht benötigt.

Nach (A.18 – A.20) sind die effektiven Felder ihrerseits als Funktionale der Quellen aufzufassen (et vice versa). Diese Eigenschaft führt auf die folgenden Identitäten für die Funktionalableitungen („Funktionale Kettenregeln“)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \hat{A}_a^\mu(p)} &= (2\pi)^D \int d^D q \left( \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(p) \delta \hat{A}_b^\nu(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta J_b^\nu(q)} \right. \\ &\quad + \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(p) \delta \hat{\chi}_b(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \omega_b(q)} \\ &\quad \left. - \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(p) \delta \hat{\chi}_b(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_b(q)} + \dots \right) \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_a(p)} &= (2\pi)^D \int d^D q \left( \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(p) \delta \hat{\chi}_b(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \omega_b(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(p) \delta \hat{A}_b^\mu(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta J_b^\mu(q)} + \dots \right) \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_a(p)} &= (2\pi)^D \int d^D q \left( \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_b(-q) \delta \hat{\chi}_a(p)} \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_b(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(p) \delta \hat{A}_b^\mu(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta J_b^\mu(q)} + \dots \right) \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Wir berücksichtigen nur diejenigen Beiträge, die bei den nachfolgenden Herleitungen der einfachsten Dyson-Schwinger-Gleichungen und Slavnov-Taylor-Identitäten benötigt werden.

Durch Anwendung der funktionalen Kettenregeln lassen sich die zusammenhängenden Greenschen Funktionen nach den amputierten und 1-Teilchen-irreduziblen Vertex-Funktionen sowie den vollen Propagatoren entwickeln („Skelettgraphen-Entwicklung“); dies wird im folgenden exemplarisch für die beiden einfachsten Entwicklungen im gluonischen Sektor vorgeführt. Wir erhalten im Funktionalableitungs-Formalismus [22] zunächst:

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu_1\mu_2} \delta_{a_1 a_2} \delta^D(p_1 - p_2) &= \frac{\delta \hat{A}_{a_1}^{\mu_1}(p_1)}{\delta \hat{A}_{a_2}^{\mu_2}(p_2)} \\
&= (2\pi)^D \int d^D q \left( \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{a_2}^{\mu_2}(p_2) \delta \hat{A}_b^{\nu}(-q)} \cdot \frac{\delta \hat{A}_{a_1}^{\mu_1}(p_1)}{\delta J_b^{\nu}(q)} + \dots \right) \\
&= (2\pi)^D \int d^D q \left( \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{a_2}^{\mu_2}(p_2) \delta \hat{A}_b^{\nu}(-q)} \cdot \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_b^{\nu}(q) \delta J_{a_1}^{\mu_1}(-p_1)} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Hierbei wurden Terme vernachlässigt, die aufgrund der Geistzahl- oder Fermionzahl-Erhaltung erst zu komplizierteren Skelettgraphen-Entwicklungen beitragen. Nach Nullsetzen der Quellen lassen sich die „Momente“ der erzeugenden Funktionale mit (A.3) bzw. (A.12) ersetzen und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu_1\mu_2} \delta_{a_1 a_2} \delta^D(p_1 - p_2) &= - \int d^D q \delta^D(p_2 - q) \Gamma_2^{\nu\mu_2} \delta^D(p_1 + q) D^{\mu_1\nu}_{a_1 b}(-p_1) \\
&= - \delta_{a_1 a_2} \delta^D(p_1 - p_2) D^{\mu_1\nu}(p_2) \Gamma_2^{\nu\mu_2}(p_2)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Folglich stellt der gluonische 2-Punkt-Vertex („Gluon-Selbstenergie“) das Negativinverse des Gluon-Propagators dar.

Durch weitere Anwendung des funktionalen Differential-Operators  $\delta/\delta \hat{A}_{a_3}^{\mu}(p_3)$  auf die funktionale Differentialgleichung (A.24) erhalten wir mit Hilfe der funktionalen Produktregel folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^D q \left( \frac{\delta^3 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \hat{A}_{a_2}^{\mu_2}(p_2) \delta \hat{A}_b^{\nu}(-q)} \cdot \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_b^{\nu}(q) \delta J_{a_1}^{\mu_1}(-p_1)} \right. \\
&\quad + \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{a_2}^{\mu_2}(p_2) \delta \hat{A}_b^{\nu}(-q)} \cdot (2\pi)^D \int d^D q' \frac{\delta^2 \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \hat{A}_c^{\rho}(-q')} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\delta^3 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_c^{\rho}(q') \delta J_b^{\nu}(q) \delta J_{a_1}^{\mu_1}(-p_1)} \right. \\
&\quad \left. + \dots \right)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Die resultierende Gleichung für die zusammenhängende Greensche Funktion  $G_3^{(con)}$  lautet nach Nullsetzen der Quellen und Verwendung der Bedingung (A.25):

$$G_3^{(con)} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \begin{matrix} \nu_1 \nu_2 \nu_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{matrix} (p_1, p_2, p_3) = -g_0 \nu^\epsilon D^{\nu_1 \mu_1} (p_1) D^{\nu_2 \mu_2} (p_2) D^{\nu_3 \mu_3} (p_3) \cdot \Gamma_3 \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \\ a_1 a_2 a_3 \end{matrix} (p_1, p_2, p_3) \quad (\text{A.27})$$

Die Eigenschaft der 1-Teilchen-Reduzibilität kommt erst bei Greenschen Funktionen mit vier oder mehr Beinen ins Spiel. Wir verzichten auf die Formulierung der entsprechenden Entwicklungen im Funktionalableitungs-Formalismus und fassen stattdessen sämtliche Skelettgraphen-Entwicklungen, die im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden, in schematischer Form (d. h. ohne Farb- und Lorentz-Indizes) zusammen <sup>3</sup>:

$$G_2^{(con)} (p_1, p_2) = D(p_2) = -(\Gamma_2)^{-1} (p_2) \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{G}_2^{(con)} (p_1, p_2) = \tilde{D}(p_2^2) = -(\tilde{\Gamma}_2)^{-1} (p_2^2) \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{G}_2^{(con)} (-p_1, p_2) = S(p_2) = -(\bar{\Gamma}_2)^{-1} (p_2) \quad (\text{A.30})$$

$$G_3^{(con)} (p_1, p_2, p_3) = -g_0 \nu_0^\epsilon D(p_1) D(p_2) D(p_3) \Gamma_3 (p_1, p_2, p_3) \quad (\text{A.31})$$

$$\tilde{G}_3^{(con)} (p_1, p_2, p_3) = -g_0 \nu_0^\epsilon \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) \tilde{\Gamma}_3 (p_1, p_2, p_3) \quad (\text{A.32})$$

$$\bar{G}_3^{(con)} (-p_1, p_2, p_3) = -g_0 \nu_0^\epsilon S(-p_1) S(p_2) D(p_3) \bar{\Gamma}_3 (-p_1, p_2, p_3) \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} G_4^{(con)} (p_1, p_2, p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} D(p_1) D(p_2) D(p_3) D(p_4) T_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \tilde{G}_4^{(con)} (p_1, p_2, p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) D(p_4) \tilde{T}_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \bar{G}_4^{(con)} (-p_1, p_2, p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} S(-p_1) S(p_2) D(p_3) D(p_4) \bar{T}_4 (-p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \tilde{\tilde{G}}_4^{(con)} (p_1, p_2, p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) \tilde{D}(p_3^2) \tilde{D}(p_4^2) \tilde{\tilde{T}}_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \bar{\bar{G}}_4^{(con)} (p_1, p_2, -p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) S(-p_3) S(p_4) \bar{\tilde{T}}_4 (p_1, p_2, -p_3, p_4) \\ \bar{\bar{\bar{G}}}_4^{(con)} (-p_1, p_2, -p_3, p_4) &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} S(-p_1) S(p_2) S(-p_3) S(p_4) \bar{\bar{\tilde{T}}}_4 (-p_1, p_2, -p_3, p_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) &:= \Gamma_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) + \Gamma_3 (p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3 (p_3, p_4) \\ &\quad + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (234) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) &:= \tilde{\Gamma}_4 (p_1, p_2, p_3, p_4) + \tilde{\Gamma}_3 (p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3 (p_3, p_4) \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_3 (p_1, p_3) \tilde{D}((p_1 + p_3)^2) \tilde{\Gamma}_3 (p_2, p_4) \\ &\quad + 1 \text{ PERM. } (3 \leftrightarrow 4) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

---

<sup>3</sup>Da in dieser Arbeit nur masselose (identische) Fermionen behandelt werden, kann der Flavour-Index im folgenden unterdrückt werden.

$$\begin{aligned}
\bar{T}_4(-p_1, p_2, p_3, p_4) &:= \bar{\Gamma}_4(-p_1, p_2, p_3, p_4) + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_2) D(-p_1 + p_2) \Gamma_3(p_3, p_4) \\
&\quad + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_3) S(-p_1 + p_3) \bar{\Gamma}_3(p_2, p_4) \\
&\quad + 1 \text{ PERM. } (3 \leftrightarrow 4)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{T}}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &:= \tilde{\bar{\Gamma}}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) + \tilde{\bar{\Gamma}}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \tilde{\bar{\Gamma}}_3(p_3, p_4) \\
&\quad - 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 4)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\tilde{T}}_4(p_1, p_2, -p_3, p_4) &:= \bar{\tilde{\Gamma}}_4(p_1, p_2, -p_3, p_4) + \bar{\tilde{\Gamma}}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \bar{\tilde{\Gamma}}_3(-p_3, p_4)
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{T}}_4(-p_1, p_2, -p_3, p_4) &:= \bar{\bar{\Gamma}}_4(-p_1, p_2, -p_3, p_4) + \bar{\bar{\Gamma}}_3(-p_1, p_2) D(-p_1 + p_2) \bar{\bar{\Gamma}}_3(-p_3, p_4) \\
&\quad - 1 \text{ PERM. } (2 \leftrightarrow 4)
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
G_5^{(con)}(p_1, p_2, \dots, p_5) &= -g_0^3 \nu_0^{3\epsilon} D(p_1) D(p_2) D(p_3) D(p_4) D(p_5) T_4(p_1, p_2, \dots, p_5) \\
\tilde{G}_5^{(con)}(p_1, p_2, \dots, p_5) &= -g_0^3 \nu_0^{3\epsilon} \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) D(p_4) D(p_5) \tilde{T}_5(p_1, p_2, \dots, p_5) \\
\bar{G}_5^{(con)}(-p_1, p_2, \dots, p_5) &= -g_0^3 \nu_0^{3\epsilon} S(-p_1) S(p_2) D(p_3) D(p_4) D(p_5) \bar{T}_5(-p_1, p_2, \dots, p_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5(p_1, p_2, \dots, p_5) &:= \Gamma_5(p_1, p_2, \dots, p_5) + \Gamma_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_4(p_1 + p_2, p_3, p_4, p_5) \\
&\quad + 9 \text{ PERM. } (2\ 3\ 4\ 5) \\
&\quad + \Gamma_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3(p_1 + p_2, p_3, p_4 + p_5) \\
&\quad \quad \cdot D(p_4 + p_5) \Gamma_3(p_4, p_5) \\
&\quad + 14 \text{ PERM. } (2\ 3\ 4\ 5)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_5(p_1, p_2, \dots, p_5) &:= \tilde{\Gamma}_5(p_1, p_2, \dots, p_5) + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_4(p_1 + p_2, p_3, p_4, p_5) \\
&\quad + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_3) \tilde{D}\left((p_1 + p_3)^2\right) \tilde{\Gamma}_4(p_1 + p_3, p_2, p_4, p_5) \\
&\quad + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (3\ 4\ 5) \\
&\quad + \Gamma_3(p_3, p_4) D(p_3 + p_4) \tilde{\Gamma}_4(p_1, p_2, p_3 + p_4, p_5) \\
&\quad + 5 \text{ PERM. } (3\ 4\ 5) \\
&\quad + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3(p_1 + p_2, p_3, p_4 + p_5) \\
&\quad \quad \cdot D(p_4 + p_5) \Gamma_3(p_4, p_5) \\
&\quad + 2 \text{ ZYKL. PERM. } (3\ 4\ 5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_3) \tilde{D}\left((p_1 + p_3)^2\right) \tilde{\Gamma}_3(p_1 + p_3, p_2, p_4 + p_5) \\
& \quad \cdot D(p_4 + p_5) \Gamma_3(p_4, p_5) \\
& + 5 \text{ PERM. (345)} \\
& + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_3) \tilde{D}\left((p_1 + p_3)^2\right) \tilde{\Gamma}_3(p_1 + p_3, p_2 + p_4, p_5) \\
& \quad \cdot \tilde{D}\left((p_2 + p_4)^2\right) \tilde{\Gamma}_3(p_2, p_4) \\
& + 5 \text{ PERM. (345)}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_5(-p_1, p_2, \dots, p_5) & := \bar{\Gamma}_5(-p_1, p_2, \dots, p_5) + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_2) D(-p_1 + p_2) \\
& \quad \cdot \Gamma_4(-p_1 + p_2, p_3, p_4, p_5) \\
& + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_3) S(-p_1 + p_3) \bar{\Gamma}_4(-p_1 + p_3, p_2, p_4, p_5) \\
& + 2 \text{ ZYKL. PERM. (345)} \\
& + \Gamma_3(p_3, p_4) D(p_3 + p_4) \bar{\Gamma}_4(-p_1, p_2, p_3 + p_4, p_5) \\
& + 5 \text{ PERM. (345)} \\
& + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_2) D(-p_1 + p_2) \Gamma_3(-p_1 + p_2, p_3, p_4 + p_5) \\
& \quad \cdot D(p_4 + p_5) \Gamma_3(p_4, p_5) \\
& + 2 \text{ ZYKL. PERM. (345)} \\
& + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_3) S(-p_1 + p_3) \bar{\Gamma}_3(-p_1 + p_3, p_2, p_4 + p_5) \\
& \quad \cdot D(p_4 + p_5) \Gamma_3(p_4, p_5) \\
& + 5 \text{ PERM. (345)} \\
& + \bar{\Gamma}_3(-p_1, p_3) S(-p_1 + p_3) \bar{\Gamma}_3(-p_1 + p_3, p_2 + p_4, p_5) \\
& \quad \cdot S(p_2 + p_4) \bar{\Gamma}_3(p_2, p_4) \\
& + 5 \text{ PERM. (345)}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Die zugehörigen  $\mathcal{T}$ -Funktionen zeichnen einen der Mandelstam-Kanäle dadurch aus, daß in ihrer Definition die 1-Teilchen-reduziblen Beiträge („1-Teilchen-Austauschgraphen“) in dem entsprechenden Kanal herausgenommen werden. Dies geschieht im Hauptteil dieser Arbeit an der jeweiligen Stelle ihres Auftretens durch eine geeignete graphische Darstellung oder in einer vergleichbaren schematischen Notation.

### A.1.2 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Grundlegend für die Herleitung der Dyson-Schwinger-Integralgleichungen im Funktionalintegral-Formalismus ist die Forderung, daß wie üblich das Integral über eine partielle Ableitung bei geeigneten Randbedingungen des Integranden verschwindet. Dies formulieren

wir exemplarisch im Geistsektor, wobei durch die erste Funktionalableitung dasjenige Bein ausgezeichnet wird, das später in einen nackten Vertex einlaufen wird:

$$0 = \frac{1}{Z_E [0, 0, 0, 0, 0]} \cdot \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta \bar{\chi}_{b_1}(p_1)} \exp \left\{ - S_E [A, \bar{\chi}, \chi, \bar{\psi}, \psi] - j_E [A, \dots; J, \dots] \right\} \quad (\text{A.43})$$

Bevor wir die entsprechende Invarianz des Exponenten formulieren, notieren wir die folgenden Ersetzungsvorschriften, die mit Hilfe der Kettenregeln hergeleitet werden können und letztendlich die Irreduzibilitäts-Eigenschaften der Vertex-Funktionen sicherstellen:

$$A_a^\mu(p) \longrightarrow \hat{A}_a^\mu(p) + (2\pi)^{2D} \int d^D q \left( \frac{\delta^2 W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta J_a^\mu(-p) \delta J_b^\nu(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \hat{A}_b^\nu(q)} + \frac{\delta^2 W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta J_a^\mu(-p) \delta \bar{\omega}_b(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_b(q)} + \dots \right) \quad (\text{A.44})$$

$$\chi_a(p) \longrightarrow \hat{\chi}_a(p) + (2\pi)^{2D} \int d^D q \left( \frac{\delta^2 W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\omega}_a(-p) \delta J_b^\nu(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \hat{A}_b^\nu(q)} + \frac{\delta^2 W_E [J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\omega}_a(-p) \delta \bar{\omega}_b(-q)} \cdot \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_b(q)} + \dots \right) \quad (\text{A.45})$$

Damit ergibt sich aus (A.43) folgende funktionale Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{\delta S [A, \dots, \psi]}{\delta \bar{\chi}_{b_1}(p_1)} \Bigg|_{\substack{A \rightarrow \hat{A} + \dots \\ \chi \rightarrow \hat{\chi} + \dots}} + (2\pi)^{-D} \omega_{b_1}(-p_1) \right) \cdot 1 \\ &= (2\pi)^{-D} \tilde{\Gamma}_2^{(0)}{}_{b_1 a_2}(p_1^2) \hat{\chi}_{a_2}(-p_1) \\ &\quad + g_0 \nu_0^\epsilon (2\pi)^{-2D} \int d^D q \tilde{\Gamma}_3^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}{}^{\mu_3}(p_1) \hat{\chi}_{a_2}(q) \hat{A}_{a_3}^{\mu_3}(-p_1 - q) \\ &\quad + g_0 \nu_0^\epsilon \int d^D q \tilde{\Gamma}_3^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}{}^{\mu_3}(p_1) \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(-q) \delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_1 + q)} \\ &\quad + \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_{b_1}(p_1)} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Diese Identität kann als „Master-Gleichung“ für die Dyson-Schwinger-Gleichungen im Geistkanal bezeichnet werden; durch die weitere Anwendung der funktionalen Differential-Operatoren

$$- \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_{b_2}(p_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta}{\delta \hat{A}_{b_3}^{\nu_3}(p_3)} \left( - \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_{b_2}(p_2)} \right) \quad (\text{A.47})$$

und Abschalten der Quellen lassen sich die Funktionalableitungen der erzeugenden Funktionale durch die entsprechenden Greenschen Funktionen ersetzen und so die Integralgleichungen für die Geist-Selbstenergie  $\bar{\Gamma}_2$  und den Geist-Gluon-Vertex  $\bar{\Gamma}_3$  herleiten. Diese lauten schließlich nach Abspaltung der  $\delta$ -Funktion für die Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 \quad b_1 b_2 \quad (p^2) &= \tilde{\Gamma}_2^{(0)} \quad b_1 b_2 \quad (p^2) \\ + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} &\tilde{\Gamma}_3^{(0)} \quad b_1 a_1 a_2 \quad \mu \quad (-p) \quad D^{\mu\tau} \left( \frac{p}{2} - q \right) \tilde{D} \left( \left( \frac{p}{2} + q \right)^2 \right) \\ &\cdot \tilde{\Gamma}_3 \quad a_1 b_2 a_2 \quad \tau \quad \left( -\frac{p}{2} - q, p, -\frac{p}{2} + q \right) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_3 \quad b_1 b_2 b_3 \quad \nu_3 \quad (p_1, p_2, p_3) &= \tilde{\Gamma}_3^{(0)} \quad b_1 b_2 b_3 \quad \nu_3 \quad (p_1) \\ + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} &\tilde{\Gamma}_3^{(0)} \quad b_1 a_1 a_2 \quad \mu \quad (p_1) \quad D^{\mu\tau} \left( \frac{p_1}{2} - q \right) \tilde{D} \left( \left( \frac{p_1}{2} + q \right)^2 \right) \\ &\cdot \tilde{T}_4 \quad a_1 b_2 b_3 a_2 \quad \nu_3 \tau \quad \left( \frac{p_1}{2} + q, p_2, p_3, \frac{p_1}{2} - q \right) \\ - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} &\tilde{\Gamma}_3^{(0)} \quad b_1 a_1 a_2 \quad \mu \quad (p_1) \quad D^{\mu\tau} \left( \frac{p_1}{2} - q \right) \tilde{D} \left( \left( \frac{p_1}{2} + q \right)^2 \right) \\ &\cdot \tilde{\Gamma}_3 \quad a_1 a_3 a_2 \quad \tau \quad \left( \frac{p_1}{2} + q, -p_1, \frac{p_1}{2} - q \right) \tilde{D} (p_1^2) \\ &\cdot \tilde{\Gamma}_3 \quad a_3 b_2 b_3 \quad \nu_3 \quad (p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Die beiden Schleifen in (A.49) werden üblicherweise durch die Definition einer  $\mathcal{T}_4$ -Amplitude zusammengefaßt (vergleiche (1.59)).

Die Herleitung der übrigen Dyson-Schwinger-Gleichungen im gluonischen oder fermionischen Kanal geht völlig analog vor sich; wir beschränken uns hier auf die analytische Darstellung der Gluon-Selbstenergie, die wie alle anderen Gleichungen im gluonischen Kanal aufgrund des nackten 4-Gluon-Vertex auch fundamentale 2-Schleifen-Terme sowie geschlossene Fermion-Schleifen besitzt:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 \quad \nu_1 \nu_2 \quad (p) &= \Gamma_2^{(0)} \quad \nu_1 \nu_2 \quad (p) \\ + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} &\Gamma_3^{(0)} \quad \nu_1 \mu_1 \mu_2 \quad \left( -p, \frac{p}{2} + q, \frac{p}{2} - q \right) \quad D^{\mu_2 \tau_2} \left( \frac{p}{2} - q \right) \quad D^{\mu_1 \tau_1} \left( \frac{p}{2} + q \right) \\ &\cdot \Gamma_3 \quad \tau_2 \tau_1 \nu_2 \quad \left( -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q, p \right) \\ + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} &\Gamma_4^{(0)} \quad \nu_1 \nu_2 \tau_1 \tau_2 \quad D^{\tau_1 \tau_2} (q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_4^{(0)} \begin{matrix} \nu_1 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \\ b_1 a_1 a_2 a_3 \end{matrix} D^{\mu_1 \tau_1}(q_1) D^{\mu_2 \tau_2}(q_2) \\
& \quad \cdot D^{\mu_3 \tau_3}(p - q_1 - q_2) T_4 \begin{matrix} \tau_3 \tau_2 \tau_1 \nu_2 \\ a_3 a_2 a_1 b_2 \end{matrix} (-p + q_1 + q_2, -q_2, -q_1, p) \\
& - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_3^{(0)} \begin{matrix} \nu_1 \\ a_1 a_2 b_1 \end{matrix} \left(\frac{p}{2} + q\right) \tilde{D} \left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2\right) \tilde{D} \left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2\right) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}_3 \begin{matrix} \nu_2 \\ a_2 a_1 b_2 \end{matrix} \left(-\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q, p\right) \\
& - N_F g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{tr} \left\{ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\Gamma}_3^{(0)} \begin{matrix} ij \\ \nu_1 \\ b_1 \end{matrix} S \left(-\frac{p}{2} - q\right) \right. \\
& \quad \left. \cdot \bar{\Gamma}_3 \begin{matrix} ji \\ \nu_2 \\ b_2 \end{matrix} \left(-\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q, p\right) S \left(\frac{p}{2} - q\right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Die Feynman-Regeln im euklidischen Impulsraum, die im ersten Kapitel der Arbeit zusammengestellt werden, führen schließlich auf die kompakten graphischen Darstellungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen [14] [27].

### A.1.3 BRS-Invarianz und Slavnov-Taylor-Identitäten

Die Invarianz der klassischen Wirkung (1.1) unter den Becchi-Rouet-Stora(BRS)-Transformationen der Felder

$$\begin{aligned}
\delta A_a^\mu(p) & = \left(g_0 \nu_0^\epsilon\right)^{-1} p^\mu \chi_a(p) \delta\lambda \\
& \quad - i f_{abc} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \chi_b(q) A_c^\mu(p - q) \delta\lambda
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\delta \bar{\chi}_a(p) = - \left(\xi g_0 \nu_0^\epsilon\right)^{-1} p^\mu A_a^\mu(p) \delta\lambda \tag{A.52}$$

$$\delta \chi_a(p) = \frac{1}{2} i f_{abc} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \chi_b(q) \chi_c(p - q) \delta\lambda \tag{A.53}$$

$$\delta \bar{\psi}^j(p) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\psi}^i(q) (T_a)^{ij} \chi_a(p - q) \delta\lambda \tag{A.54}$$

$$\delta \psi^i(p) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (T_a)^{ij} \chi_a(q) \psi^j(p - q) \delta\lambda \tag{A.55}$$

wird in [22] unter Ausnutzung der klassischen Bewegungsgleichungen sowie der Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten ausführlich beschrieben. In der quantisierten Theorie führt diese Eigenschaft auf die entsprechende Invarianz des Quellterms (1.10), die nach Ersetzung der Feldvariationen und Anwendung der Kettenregeln (A.44 – A.45) folgende Gestalt einer funktionalen Differentialgleichung für die erzeugenden Funktionale bzw. deren „Momente“ annimmt:

$$\begin{aligned}
0 = & \left(g_0 \nu_0^\epsilon\right)^{-1} (2\pi)^D \int d^D q \, q^\mu \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(q)} \hat{\chi}_a(q) \\
& - i f_{abc} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(q_1)} \hat{\chi}_b(q_2) \hat{A}_c^\mu(q_1 - q_2) \\
& - i f_{abc} (2\pi)^{2D} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{A}_a^\mu(q_1)} \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_b^\mu(-q_2) \delta \bar{\omega}_c(q_2 - q_1)} \\
& + \left(\xi g_0 \nu_0^\epsilon\right)^{-1} (2\pi)^D \int d^D q \, q^\mu \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(q)} \hat{A}_a^\mu(q) \\
& - \frac{1}{2} i f_{abc} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(q_1)} \hat{\chi}_b(q_2) \hat{\chi}_c(q_1 - q_2) \\
& - \frac{1}{2} i f_{abc} (2\pi)^{2D} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\chi}_a(q_1)} \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\omega}_b(-q_2) \delta \bar{\omega}_c(q_2 - q_1)} \\
& + N_F \cdot \text{tr} \left\{ \int d^D q_1 \int d^D q_2 \hat{\psi}^i(q_1) (T_a)^{ij} \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^j(q_2)} \hat{\chi}_a(q_1 - q_2) \right\} \\
& - N_F \cdot \text{tr} \left\{ (2\pi)^{2D} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^i(q_2)} (T_a)^{ij} \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta^j(-q_1) \delta \bar{\omega}_a(q_2 - q_1)} \right\} \\
& - N_F \cdot \text{tr} \left\{ \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^i(q_1)} (T_a)^{ij} \hat{\psi}^j(q_1 - q_2) \hat{\chi}_a(q_2) \right\} \\
& - N_F \cdot \text{tr} \left\{ (2\pi)^{2D} \int d^D q_1 \int d^D q_2 \frac{\delta \Gamma_E [\hat{A}, \dots, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}^i(q_1)} (T_a)^{ij} \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{\delta^2 W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}^j(q_1 - q_2) \delta \bar{\omega}_a(q_2)} \right\}
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Diese Identität kann als „Master-Gleichung“ für die üblichen Slavnov-Taylor-Identitäten angesehen werden, wie eine weitere Anwendung funktionaler Differential-Operatoren auf (A.56) zeigt.

Wir beschränken uns erneut nur auf die Herleitung der einfachsten S-T-Identität, die sich mit Hilfe des Operators

$$\frac{\delta}{\delta \hat{A}_{b_2}^{\nu_2}(p_2)} \left( - \frac{\delta}{\delta \hat{\chi}_{b_1}(p_1)} \right) \tag{A.57}$$

sowie anschließendem Nullsetzen der Quellen ergibt. Berücksichtigt man die Forderung nach Geistzahl- und Fermionzahl-Erhaltung bei jedem Vertex, so tragen in diesem Fall

nur drei Summanden aus (A.56) bei und liefern nach Ersetzung der Funktionalableitungen durch die entsprechenden Greenschen Funktionen sowie Abspaltung der  $\delta$ -Funktion für die Impulserhaltung folgende Identität:

$$\begin{aligned}
0 &= p_1^\mu \Gamma_2^{\mu\nu_2}(p_2) \\
&\quad - i f_{b_2bc} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D^{\nu_2\tau}(-q) \tilde{D}((p_2+q)^2) \\
&\quad \quad \cdot \tilde{\Gamma}_3^{\tau c b_1 \bar{b}}(p_2+q, p_1, -q) \\
&\quad - \frac{1}{\xi} p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_2^{\mu\nu_2}(p_1^2)
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Die Summe der ersten beiden Terme läßt sich durch Verwendung der Integralgleichung für die Geist-Selbstenergie (A.48) vereinfachen und wir erhalten:

$$0 = \frac{1}{p_1^2} p_1^\mu \Gamma_2^{\mu\nu_2}(p_2) \tilde{\Gamma}_2(p_2^2) - \frac{1}{\xi} p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_2(p_1^2) \tag{A.59}$$

Mit Hilfe der Impulserhaltung folgt schließlich die Beibehaltung der perturbativen Feynman-Regel für den longitudinalen Anteil der Gluon-Selbstenergie ( $p \equiv p_2 = -p_1$ ):

$$\frac{p^\mu p^{\nu_2}}{p^2} \Gamma_2^{\mu\nu_2}(p) = -\frac{1}{\xi} p^2 \tag{A.60}$$

Die übrigen S-T-Identitäten der Basisvertizes benötigen die Definition einiger Hilfsamplituden, die sich mit den Feynman-Regeln des ersten Kapitels graphisch darstellen lassen. Die exakte Herleitung dieser Gleichungen sprengt allerdings den Umfang dieser Arbeit, so daß wir uns mit der Zusammenstellung der Resultate im Abschnitt 1.5 begnügen.

## A.2 Algebra der $SU(N_C)$ -Eichgruppe

Die Gruppe  $SU(N_C)$  ist definiert durch die Menge aller unitären  $N_C \times N_C$ -Matrizen, deren Determinante den Wert +1 besitzt. Es bezeichnen  $T_a$  für  $a \in \{1, 2, \dots, N_C^2 - 1\}$  die zugehörigen Generatoren, die mittels der Kommutator-Relationen

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{A.61}$$

eine Lie-Algebra mit den total-antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f_{abc}$  bilden. Sie sind sowohl spurfrei als auch hermitisch und wirken im Raum der Fundamental-Darstellung der Lie-Gruppe, gemäß der sich die Fermion-Felder transformieren.

Äquivalent zu der Einführung der total-symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  durch die entsprechenden Antikommutator-Relationen ist die Beziehung [24]

$$(T_a)^{ij} (T_b)^{jk} = \frac{1}{2N_C} \delta_{ab} \delta^{ik} + \frac{1}{2} d_{abc} (T_c)^{ik} + \frac{i}{2} f_{abc} (T_c)^{ik}, \tag{A.62}$$

welche die Grundlage für weitere Spur-Relationen bildet, die im Zusammenhang mit geschlossenen Fermion-Schleifen benötigt werden <sup>4</sup>:

$$\text{tr} \left\{ T_a T_b \right\} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (\text{A.63})$$

$$\text{tr} \left\{ T_a T_b T_c \right\} = \frac{1}{4} d_{abc} + \frac{i}{4} f_{abc} \quad (\text{A.64})$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ T_a T_b T_c T_d \right\} &= \frac{1}{8N_C} \left( \delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ad}\delta_{bc} \right) \\ &+ \frac{1}{12} f_{acn} f_{dbn} + \frac{1}{6} f_{adn} f_{bcn} \\ &+ \frac{i}{8} \left( d_{abn} f_{cdn} - d_{acn} f_{dbn} + d_{adn} f_{bcn} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Weiterhin werden für die gemischten Schleifen des Fermion-Sektors folgende Kontraktionen bezüglich der Indizes der adjungierten Darstellung benötigt:

$$\left( T_a \right)^{ij} \left( T_a \right)^{jk} = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \delta^{ik} \quad (\text{A.66})$$

$$\left( T_b \right)^{ij} \left( T_a \right)^{jk} \left( T_b \right)^{kl} = -\frac{1}{2N_C} \left( T_a \right)^{il} \quad (\text{A.67})$$

$$\left( T_a \right)^{ij} \left( T_b \right)^{jk} f_{abc} = \frac{i N_C}{2} \left( T_c \right)^{ik} \quad (\text{A.68})$$

Eine geeignete Formulierung der Farb-Kontraktionen im Geist-Gluon-Sektor geschieht durch die Einführung von  $(N_C^2 - 1) \times (N_C^2 - 1)$ -Matrizen im Farbraum der adjungierten Darstellung, gemäß der sich die Eichfelder der Theorie transformieren:

$$\left( F_a \right)_{bc} := -i f_{abc} \quad ; \quad \text{tr} \left\{ F_a \right\} = 0 \quad (\text{A.69})$$

Nach [24] erhalten wir für Farb-Kontraktionen in der adjungierten Darstellung folgende Identitäten:

$$\text{tr} \left\{ F_a F_b \right\} = N_C \delta_{ab} \quad (\text{A.70})$$

$$\text{tr} \left\{ F_a F_b F_c \right\} = \frac{i N_C}{2} f_{abc} \quad (\text{A.71})$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ F_a F_b F_c F_d \right\} &= \frac{3}{4} \left( \delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ad}\delta_{bc} \right) \\ &+ \frac{N_C}{6} f_{acn} f_{dbn} + \frac{N_C}{3} f_{adn} f_{bcn} \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Auf Spur-Relationen, die die symmetrischen Strukturkonstanten enthalten, verzichten wir in diesem Anhang, da die nichtperturbativ erweiterten Ansätze dieser Arbeit diese Größen nicht berücksichtigen.

---

<sup>4</sup>Die Spur-Relation (A.63) wird auch als „Normierung“ der Generatoren bezeichnet.

### A.3 Algebra der euklidischen $\gamma$ -Matrizen

Ausgehend von der fundamentalen Antikommutator-Relation der Diracschen  $\gamma$ -Matrizen in  $D = 4 - 2\epsilon$  euklidischen Dimensionen

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = -2 \delta^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}$$

erhalten wir folgende Identitäten für kontrahierte Produkte:

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = -D \cdot \mathbf{1} \quad (\text{A.73})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (D-2) \gamma^\nu \quad (\text{A.74})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -(D-4) \gamma^\nu \gamma^\rho + 4 \delta^{\nu\rho} \cdot \mathbf{1} \quad (\text{A.75})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = (D-4) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + 2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (\text{A.76})$$

Weiterhin gelten für Produkte einer geraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen entsprechende Spur-Relationen, die bei der Auswertung geschlossener Fermion-Schleifen verwendet werden:

$$\text{tr} \{ \mathbf{1} \} = 4 \quad (\text{A.77})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = -4 \delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.78})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4 (\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}) \quad (\text{A.79})$$

Außerdem sind sämtliche  $\gamma$ -Matrizen definitionsgemäß spurfrei

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \} = 0 \quad , \quad (\text{A.80})$$

und die Spur über eine ungerade Anzahl verschwindet identisch:

$$\text{tr} \{ \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \} = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.81})$$

Kombinationen von Skalarprodukten der Form  $\not{a} \cdot \not{b} \dots$  und Spuren über diese Produkte lassen sich mit Hilfe der obigen Formeln ebenfalls berechnen, so daß die zugehörigen Identitäten nicht im einzelnen formuliert werden müssen.

## A.4 Berechnung der UV-Divergenzen

### A.4.1 Eine Subtraktionsmethode

Setzt man die nichtperturbativ modifizierten Ansätze in erster erweiterter Iteration in die Schleifen-Integrale der D-S-Funktionale ein, so lassen sich die resultierenden UV-divergenten Impulsintegrale aufgrund der rationalen Impulsstruktur der Integranden mit den üblichen Methoden wie Feynman-Parametrisierung und Symmetrischer Integration behandeln. Man gelangt auf diese Weise zu sphärisch symmetrischen Impulsintegralen, die einer Lösung durch die folgende Standardformel der dimensionellen Regularisierung zugänglich sind [6] [22]:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + M)^beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(\beta)} M^{\alpha - \beta + D/2} \quad (\text{A.82})$$

Tatsächlich wächst die Zahl der Feynman-Parameter mit der Zahl der inneren Linien stark an, so daß vor allem im Rahmen der Behandlung des 4-Gluon-Vertex eine Alternative zu der Feynman-Parametrisierung wünschenswert wäre. Wir stellen daher im folgenden eine Subtraktionsmethode vor, mit deren Hilfe sich zumindest die *divergenten* Anteile der Impulsintegrale auf einfache Weise bestimmen lassen. Es sei aber betont, daß dieses Verfahren auf das Verschwinden fermionischer Strommassen in der Lagrange-Dichte (1.4) angewiesen ist <sup>5</sup> und in dieser Form nur bei der Berechnung von 1-Schleifen-Divergenzen verwendet werden darf. Weiterhin beschränken wir uns zunächst auf logarithmisch divergente Integrale; höhere Divergenzgrade werden im zweiten Teil dieses Abschnitts unter Zuhilfenahme skalenfreier Integrale behandelt.

Im allgemeinen Fall entstehen bei der Auswertung der D-S-Funktionale im  $D$ -dimensionalen Impulsraum Integrale von folgendem Typ:

$$\mathcal{I}^{(\mu_1\mu_2\dots\mu_m)}(\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) := \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g(\{p\}, q; \Lambda(\epsilon))} \quad (\text{A.83})$$

Die Nennerfunktion  $g$  des Integranden ist dabei durch ein Polynom in den möglichen Skalarprodukten der Impulse und in  $\Lambda^2$  gegeben und bestimmt durch ihre führende Ordnung bezüglich des Integrationsimpulses den Divergenzgrad des Integrals. Im Falle einer logarithmischen Divergenz besitzt sie die Impulsdimension  $4 + m$  ( $m$  gerade) und zeigt folgendes Verhalten bezüglich  $q$ :

$$g_1(\{p\}, q; \Lambda(\epsilon)) = (q^2)^{2+m/2} + \mathcal{O}(q^{3+m}) \quad (\text{A.84})$$

Der Fall der logarithmischen Divergenz bei ungeraden  $m$  läßt sich durch geeignetes Erweitern des Integranden auf die obige Situation zurückführen und bedarf somit keiner zusätzlichen Formulierung.

Wir manipulieren nun den Integranden des allgemeinen **logarithmisch divergenten** Integrals, um den divergenten Anteil des Integrals isolieren zu können:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g_1(\{p\}, q; \Lambda(\epsilon))} - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} \\ & \quad + \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} \\ = & \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g_1(\{p\}, q; \Lambda(\epsilon)) (q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} \left( (q^2)^{2+m/2} + \mathcal{O}(q^{2+m}) \right. \\ & \quad \left. - (q^2)^{2+m/2} - \mathcal{O}(q^{3+m}) \right) \\ & \quad + \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} \\ = & \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} + \text{KONV.} \quad (\text{A.85}) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Für die Komplikationen, die durch die Einbeziehung massiver Fermionen zustande kommen, sei auf [17] verwiesen.

Wir sind also in der Lage, die komplizierte Nennerstruktur des Integranden durch eine geschickte Subtraktion konvergenter Integrale zu vereinfachen. Dieses Verfahren läßt sich sofort auf **linear divergente** Integrale verallgemeinern, deren Nennerfunktion bei ungeradem  $m$  folgendes Verhalten bezüglich des Integrationsimpulses zeigt:

$$g_2(\{p\}, q; \Lambda(\epsilon)) = (q^2)^{(3+m)/2} + \mathcal{O}(q^{2+m}) \quad (\text{A.86})$$

Durch eine geeignete Verschiebung des Integrationsimpulses läßt sich die zweitführende Ordnung in (A.86) stets eliminieren, so daß mit der ersten Regel der symmetrischen Integration

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m} f(q^2) = 0 \quad (\text{für } m \text{ ungerade}) \quad (\text{A.87})$$

die führende Ordnung des Zählers keinen Beitrag liefert und somit effektiv nur logarithmisch divergente Integrale vorliegen.

#### A.4.2 Verwendung skalenfreier Integrale

Auch **quadratisch divergente** Integrale lassen sich auf logarithmisch divergente Integrale zurückführen; allerdings wird hierfür die fundamentale Eigenschaft des **Verschwindens skalenfreier Integrale** im Rahmen der dimensionellen Regularisierung benötigt <sup>6</sup>:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2)^{m/2+\alpha}} \stackrel{!}{=} 0 \quad ; \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{A.88})$$

Da der quadratische Divergenzgrad nur bei der Analyse der Gluon-Selbstenergie sowie bei der Berechnung von Vakuumkondensaten auftritt, läßt sich der Satz äußerer Impulse im folgenden auf eine einzige Impulsvariable reduzieren. Bei der Entwicklung der Nennerfunktion eines quadratisch divergenten Integrals sind allerdings die ersten drei Ordnungen bezüglich des Integrationsimpulses zu berücksichtigen <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} g_3(p, q; \Lambda(\epsilon)) &= (q^2)^{1+m/2} + M_1(p; \Lambda(\epsilon)) (q^2)^{m/2} \\ &\quad + M_2(p; \Lambda(\epsilon)) p^{\tau_1} p^{\tau_2} q^{\tau_1} q^{\tau_2} (q^2)^{-1+m/2} \\ &\quad + \mathcal{O}(q^{-1+m}) \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Die Manipulation des Integranden durch die Subtraktion eines skalenfreien Integrals mit der entsprechenden Index-Struktur und Impulsdimension führt wegen (A.88) diesmal auf folgende Darstellung des allgemeinen quadratisch divergenten Integrals:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g_3(p, q; \Lambda(\epsilon))} &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2)^{1+m/2}} \\ &\quad + \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{(q^2)^{1+m/2}} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Eventuelle Infrarot-Divergenzen, die für  $\alpha \geq 2$  auftreten, spielen im Rahmen des quadratischen Divergenzgrades keine Rolle.

<sup>7</sup>Eine geeignete Translation von  $q$  erlaubt wieder die Eliminierung der Ordnung  $q^{1+m}$ .

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g_3(p, q; \Lambda(\epsilon)) (q^2)^{1+m/2}} \left( \begin{aligned} &(q^2)^{1+m/2} - (q^2)^{1+m/2} \\ &- M_1(p; \Lambda(\epsilon)) (q^2)^{m/2} \\ &- M_2(p; \Lambda(\epsilon)) p^{\tau_1} p^{\tau_2} q^{\tau_1} q^{\tau_2} (q^2)^{-1+m/2} \\ &- \mathcal{O}(q^{-1+m}) \end{aligned} \right) \\
&= - M_1(p; \Lambda(\epsilon)) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m}}{g_3(p, q; \Lambda(\epsilon)) q^2} \\
&\quad - M_2(p; \Lambda(\epsilon)) p^{\tau_1} p^{\tau_2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m} q^{\tau_1} q^{\tau_2}}{g_3(p, q; \Lambda(\epsilon)) q^4} + \text{KONV.}
\end{aligned} \tag{A.90}$$

Die resultierenden logarithmisch divergenten Integrale lassen sich mit den bekannten Methoden behandeln, wobei Teile der Nennerfunktion  $g_3$  als Vorfaktoren  $M_1$  und  $M_2$  auftreten. Man beachte, daß die Verringerung des Divergenzgrades nur auf Kosten einer komplizierteren Tensorstruktur des Integranden zu erreichen ist und konvergente Anteile der Integrale im Laufe der Entwicklung vernachlässigt werden.

Auch kubische und quartische Divergenzen, die allein bei der Analyse von Vakuumkondensaten auftreten, lassen sich durch eine schrittweise Anwendung des vorgestellten Verfahrens auf logarithmische Divergenzen reduzieren<sup>8</sup>. Da die Berechnung der führenden Schleifen-Ordnungen von Kondensaten der Massendimension vier in [37] ausführlich diskutiert wird, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Zusammenstellung der entsprechenden Resultate im zweiten Teil des Anhangs.

### A.4.3 Ausführung der Impulsintegration

Für eine Berechnung des logarithmisch divergenten Impulsintegrals in (A.85) wird zunächst die zweite Formel der symmetrischen Integration benötigt [6]:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_m} f(q^2) &= \\
\frac{S_m^{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m)}}{D(D+2) \dots (D+m-2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (q^2)^{m/2} f(q^2) &\quad (\text{für } m \text{ gerade})
\end{aligned} \tag{A.91}$$

Während  $f$  eine beliebige nichtsinguläre Funktion in  $q^2$  darstellt, bezeichnet  $S_m$  für  $m \geq 2$  den totalsymmetrischen Lorentz-Tensor  $m$ -ter Stufe, der über folgende rekursive Darstellung definiert werden kann:

<sup>8</sup>In diesem Fall ist aufgrund des Fehlens äußerer Impulse sogar die Berechnung führender 2-Schleifen-Divergenzen mit Hilfe einer vergleichbaren Subtraktionsmethode möglich [35].

$$S_2^{(\mu_1\mu_2)} := \delta^{\mu_1\mu_2} \quad (\text{A.92})$$

$$S_4^{(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)} := \delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} + \delta^{\mu_1\mu_3} \delta^{\mu_2\mu_4} + \delta^{\mu_1\mu_4} \delta^{\mu_2\mu_3} \quad (\text{A.93})$$

$$S_m^{(\mu_1\mu_2\dots\mu_m)} := \sum_{k=2}^m \delta^{\mu_1\mu_k} S_{m-2}^{(\mu_2\mu_3\dots\mu_{k-1}\mu_{k+1}\dots\mu_{m-1}\mu_m)} \quad (\text{A.94})$$

Das verbleibende skalare Impulsintegral in (A.91) läßt sich mit der Standardformel (A.82) lösen und liefert:

$$\begin{aligned} \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^{m/2}}{(q^2 + \Lambda^2(\epsilon))^{2+m/2}} &= \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{\Gamma(m/2 + 2 - \epsilon) \Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2 - \epsilon) \Gamma(m/2 + 2)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Die Entwicklung des Faktors  $(4\pi)^\epsilon$  zeigt, auf welche Weise auch eine freie Proportionalitätskonstante der Massenskala im Nenner des Integranden den endlichen Anteilen „zugeschlagen“ werden kann. Die Berechnung der *divergenten* Anteile führt also nach (A.95) trotz verschiedener Werte von  $m$  auf identische Resultate, falls die nachfolgenden Eigenschaften der Gamma-Funktion verwendet werden [6]:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (\text{A.96})$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.97})$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad ; \quad (\text{A.98})$$

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right) \approx 0,5772$$

Die  $\Lambda$ -Abhängigkeit des Vorfaktors in (A.95) macht deutlich, daß der divergente Anteil eines *beliebigen* logarithmisch divergenten Integrals nach Multiplikation mit  $g_0^2$  stets durch die fundamentale Größe  $\Pi(\epsilon)$  (2.13) ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} g_0^2 \cdot \mathcal{I}^{(\mu_1\mu_2\dots\mu_m)}(\{p\}; \Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \\ \frac{S_m^{(\mu_1\mu_2\dots\mu_m)}}{D(D+2)\dots(D+m-2)} \Pi(\epsilon) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) &+ \text{KONV.} \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

## A.5 Wechsel der Parametrisierungen

### A.5.1 Aufhebung der Partialbruchzerlegungen

In diesem Abschnitt werden die im zweiten Kapitel formulierten Ansätze der Vertizes von ihrer partialbruchzerlegten Form auf eine gebrochen-rationale Form mit faktorisierender Nennerstruktur umgerechnet; somit wird zusätzlich Anschluß an die Parametrisierung der

Ansätze in früheren Arbeiten [36] [37] gewonnen. Wir beginnen mit der Lorentz-invarianten Impulsfunktion des 3-Gluon-Vertex (2.31):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{[1,0]}(p_1^2; p_2^2, p_3^2; \Lambda^2) &:= 1 + x_1 (\Pi_2 + \Pi_3) + x_2 \Pi_2 \Pi_3 + x_4 \Pi_1 \\
&\quad + x_5 \Pi_1 (\Pi_2 + \Pi_3) + x_7 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \\
&= \frac{1}{p_1^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_2^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2} \\
&\quad \cdot \left( p_1^2 p_2^2 p_3^2 \right. \\
&\quad + p_2^2 p_3^2 (u_2 + x_4) \Lambda^2 \\
&\quad + p_1^2 (p_2^2 + p_3^2) (u_2 + x_1) \Lambda^2 \\
&\quad + (p_2^2 + p_3^2) (u_2^2 + x_1 u_2 + x_4 u_2 + x_5) \Lambda^4 \\
&\quad + p_1^2 (u_2^2 + 2x_1 u_2 + x_2) \Lambda^4 \\
&\quad \left. + (u_2^3 + 2x_1 u_2^2 + x_4 u_2^2 + x_2 u_2 + 2x_5 u_2 + x_7) \Lambda^6 \right) \\
&= \frac{1}{p_1^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_2^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2} \\
&\quad \cdot \left( \sum_{m_1, m_2, m_3} c_{m_1, m_2, m_3} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3-m_1-m_2-m_3} \right)
\end{aligned} \tag{A.100}$$

Die Transformationsformeln zwischen den beiden Parametersätzen sowie die Symmetrieeigenschaften der Parameter  $c_{m_1, m_2, m_3}$  lassen sich in (A.100) direkt ablesen. Deren Indizes nehmen nur die Werte 0 oder 1 an, da Strukturen mit inversen Polfaktoren bei der Konstruktion des Ansatzes aus bekannten Gründen nicht berücksichtigt werden.

Bei der matrixwertigen Impulsfunktion des Fermion-Gluon-Vertex (2.35) ist wegen der Antikommutator-Relation (1.8) die Reihenfolge der fermionischen Polfaktoren bzw. Impulsvariablen zu beachten. Wir erhalten diesmal:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}_3^{[1,0] \mu_3}(\{p\}; \Lambda) &:= \gamma^{\mu_3} + z_{0,1} (\bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2) + z_{0,4} \bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2 + z_{1,0} \gamma^{\mu_3} \Pi_3 \\
&\quad + z_{1,1} (\bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2) \Pi_3 + z_{1,4} \bar{\Pi}_1 \gamma^{\mu_3} \bar{\Pi}_2 \Pi_3 \\
&= \frac{1}{\not{p}_1 + w_2 \Lambda} \left( \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 p_3^2 \right. \\
&\quad \left. + \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 (u_2 + z_{1,0}) \Lambda^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \right) p_3^2 \left( w_2 + z_{0,1} \right) \Lambda \\
& + \left( \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} + \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \right) \left( u_2 w_2 + u_2 z_{0,1} + w_2 z_{1,0} + z_{1,1} \right) \Lambda^3 \\
& + \gamma^{\mu_3} p_3^2 \left( w_2^2 + 2w_2 z_{0,1} + z_{0,4} \right) \Lambda^2 \\
& + \gamma^{\mu_3} \left( u_2 w_2^2 + 2u_2 \bar{u}_2 z_{0,1} + w_2^2 z_{1,0} + u_2 z_{0,4} + 2w_2 z_{1,1} + z_{1,4} \right) \Lambda^4 \Big) \\
& \qquad \qquad \qquad \cdot \frac{1}{\not{p}_2 + w_2 \Lambda} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2} \\
= & \frac{1}{\not{p}_1 + w_2 \Lambda} \left( \sum_{m,n,n'} \bar{c}_{m,n,n'} (\not{p}_1)^{n'} \gamma^{\mu_3} (\not{p}_2)^n (p_3^2)^m \Lambda^{4-2m-n-n'} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad \cdot \frac{1}{\not{p}_2 + w_2 \Lambda} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2}
\end{aligned} \tag{A.101}$$

Die Symmetrie-Eigenschaften der Parameter  $\bar{c}_{m,n,n'}$  ( $m, n, n' \in \{0, 1\}$ ) entsprechen der Forderung nach  $\mathcal{C}$ -Invarianz des Fermion-Gluon-Vertex und sind in früheren Arbeiten zu der Beschreibung der Fermionsektors nachzulesen [17] [36].

Für die Lorentz-invariante Impulsfunktion des reduzierten 4-Gluon-Vertex  $V_{4,T}$  (2.74) zum Farbtensor  $C_i$  und zum Lorentz-Tensor  $L_{j,s}$  lautet die Umrechnung der partialbruchzerlegten Form auf die gebrochen-rationale Form mit faktorisierender Nennerstruktur:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_4^{[1,0]}(p_1^2, \dots, p_4^2; \Lambda^2) & := \eta_{i,j,0} + \eta_{i,j,1} \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,2} \left( \Pi_1 + \Pi_2 \right) \left( \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,3} \left( \Pi_1 - \Pi_2 \right) \left( \Pi_3 - \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,4} \left( \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,5} \left( \Pi_1 \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) + (\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
& + \eta_{i,j,6} \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \\
= & \frac{1}{p_1^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_2^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_4^2 + u_2 \Lambda^2} \\
& \cdot \left( p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 \eta_{i,j,0} \right. \\
& + \left( p_1^2 p_2^2 (p_3^2 + p_4^2) + (p_1^2 + p_2^2) p_3^2 p_4^2 \right) \left( u_2 \eta_{i,j,0} + \eta_{i,j,1} \right) \Lambda^2 \\
& \left. + \left( p_1^2 p_2^2 + p_3^2 p_4^2 \right) \left( u_2^2 \eta_{i,j,0} + 2u_2 \eta_{i,j,1} + \eta_{i,j,4} \right) \Lambda^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_4^2 \right) \left( u_2^2 \eta_{i,j,0} + 2u_2 \eta_{i,j,1} + \eta_{i,j,2} + \eta_{i,j,3} \right) \Lambda^4 \\
& + \left( p_1^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 \right) \left( u_2^2 \eta_{i,j,0} + 2u_2 \eta_{i,j,1} + \eta_{i,j,2} - \eta_{i,j,3} \right) \Lambda^4 \\
& + \left( p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \right) \left( u_2^3 \eta_{i,j,0} + 3u_2^2 \eta_{i,j,1} + 2u_2 \eta_{i,j,2} + u_2 \eta_{i,j,4} + \eta_{i,j,5} \right) \Lambda^6 \\
& + \left( u_2^4 \eta_{i,j,0} + 4u_2^3 \eta_{i,j,1} + 4u_2^2 \eta_{i,j,2} + 2u_2^2 \eta_{i,j,4} + 4u_2 \eta_{i,j,5} + \eta_{i,j,6} \right) \Lambda^8 \Big) \\
= & \frac{1}{p_1^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_2^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_3^2 + u_2 \Lambda^2} \frac{1}{p_4^2 + u_2 \Lambda^2} \\
& \cdot \left( \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} c_{m_1, m_2, m_3, m_4}^{(i,j)} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (p_4^2)^{m_4} (\Lambda^2)^{4-m_1-m_2-m_3-m_4} \right)
\end{aligned} \tag{A.102}$$

Die Symmetrie-Eigenschaften der Parameter  $c_{m_1, m_2, m_3, m_4}^{(i,j)}$ <sup>9</sup> entsprechen der partiellen Bose-Symmetrie im  $s$ -Kanal, die bereits im ersten Kapitel in Verbindung mit der Bethe-Salpeter-Resummation auftrat.

### A.5.2 Entwicklung der Tensorfunktionen $W_i$

Im Rahmen des Selbstkonsistenzproblems für den reduzierten 4-Gluon-Vertex wird die Darstellung der 47 Hilfsparameter  $\eta_{i,j,k}$  als Linearkombinationen der 17 fundamentalen Parameter  $\zeta_i$  benötigt. Grundlage dieses linearen Gleichungssystems ist die Entwicklung der tensorwertigen Impulsfunktionen  $W_i$  nach den linear unabhängigen Farb- und Lorentz-Tensoren des zweiten Kapitels, die wir exemplarisch für die erste Funktion (2.47) angeben:

$$\begin{aligned}
W_1^{[1,0]} \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} (\{p\}; \Lambda) & := \left( C_D (a_1 a_2 a_3 a_4) \left( \frac{3}{2} L_{-,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} \right) \right. \\
& \quad \left. - C_E (a_1 a_2 a_3 a_4) \left( \frac{D-1}{2} L_{0,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} - \frac{1}{2} L_{+,s}^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} \right) \right) \\
& \quad \cdot \left( \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right)
\end{aligned} \tag{A.103}$$

Während die Lorentz-Tensoren dieser Entwicklung in (2.69 – 2.71) definiert werden, sind die Spur-Relationen, die für die Umrechnung der Farbstruktur benötigt werden, in einem früheren Abschnitt dieses Anhangs zu finden. Berücksichtigt man alle 17 Entwicklungen und setzt  $D = 4$ , was wegen  $\epsilon = 2 - D/2$  der Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $\epsilon$  entspricht, so führt ein Koeffizientenvergleich nach Tensoren und invarianten Impulsfunktionen auf folgende 47 linearen Gleichungen<sup>10</sup>:

<sup>9</sup>Die unteren Indizes nehmen erneut nur die Werte 0 und 1 an.

<sup>10</sup>Alle weiteren Parameter  $\eta_{i,j,k}$ , die nicht explizit aufgeführt werden, verschwinden aus Symmetriegründen.

$$\begin{aligned}
\eta_{A,0,1} &= -\frac{3}{2}\zeta_7 + \frac{3}{2}\zeta_{13} \\
\eta_{A,0,2} &= -\frac{3}{4}\zeta_3 - \frac{3}{2}\zeta_8 - \frac{3}{2}\zeta_9 + \frac{3}{2}\zeta_{12} + \frac{3}{2}\zeta_{14} + \frac{3}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{A,0,4} &= \frac{3}{2}\zeta_3 - \frac{3}{2}\zeta_8 + 3\zeta_9 - 3\zeta_{12} + \frac{3}{2}\zeta_{14} - \frac{3}{2}\zeta_{17} \\
\eta_{A,0,5} &= -\frac{3}{2}\zeta_{10} + \frac{3}{2}\zeta_{15} \\
\eta_{A,0,6} &= -\frac{3}{2}\zeta_{11} + \frac{3}{2}\zeta_{16} \\
\eta_{A,+,1} &= -\frac{1}{2}\zeta_7 + \frac{1}{2}\zeta_{13} \\
\eta_{A,+,2} &= \frac{1}{4}\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_8 + \frac{1}{2}\zeta_9 + \frac{1}{2}\zeta_{12} + \frac{1}{2}\zeta_{14} - \frac{1}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{A,+,4} &= -\frac{1}{2}\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_8 - \zeta_9 - \zeta_{12} + \frac{1}{2}\zeta_{14} + \frac{1}{2}\zeta_{17} \\
\eta_{A,+,5} &= \frac{1}{2}\zeta_{10} + \frac{1}{2}\zeta_{15} \\
\eta_{A,+,6} &= \frac{1}{2}\zeta_{11} + \frac{1}{2}\zeta_{16} \\
\eta_{A,-,3} &= \frac{3}{4}\zeta_3 - \frac{3}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{B,0,1} &= \frac{3}{4}\zeta_7 + \frac{3}{2}\zeta_{13} \\
\eta_{B,0,2} &= -\frac{3}{4}\zeta_3 + \frac{3}{4}\zeta_8 - \frac{3}{8}\zeta_9 - \frac{3}{4}\zeta_{12} + \frac{3}{2}\zeta_{14} + \frac{3}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{B,0,4} &= \frac{3}{2}\zeta_3 + \frac{3}{4}\zeta_8 + \frac{3}{4}\zeta_9 + \frac{3}{2}\zeta_{12} + \frac{3}{2}\zeta_{14} - \frac{3}{2}\zeta_{17} \\
\eta_{B,0,5} &= \frac{3}{4}\zeta_{10} + \frac{3}{2}\zeta_{15} \\
\eta_{B,0,6} &= \frac{3}{4}\zeta_{11} + \frac{3}{2}\zeta_{16} \\
\eta_{B,+,1} &= -\frac{1}{4}\zeta_7 + \frac{1}{2}\zeta_{13} \\
\eta_{B,+,2} &= \frac{1}{4}\zeta_3 - \frac{1}{4}\zeta_8 + \frac{1}{8}\zeta_9 - \frac{1}{4}\zeta_{12} + \frac{1}{2}\zeta_{14} - \frac{1}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{B,+,4} &= -\frac{1}{2}\zeta_3 - \frac{1}{4}\zeta_8 - \frac{1}{4}\zeta_9 + \frac{1}{2}\zeta_{12} + \frac{1}{2}\zeta_{14} + \frac{1}{2}\zeta_{17} \\
\eta_{B,+,5} &= -\frac{1}{4}\zeta_{10} + \frac{1}{2}\zeta_{15} \\
\eta_{B,+,6} &= -\frac{1}{4}\zeta_{11} + \frac{1}{2}\zeta_{16} \\
\eta_{B,-,3} &= \frac{3}{4}\zeta_3 + \frac{9}{8}\zeta_9 - \frac{3}{4}\zeta_{17} \\
\eta_{C,0,3} &= -\frac{9}{8}\zeta_9 - \frac{9}{4}\zeta_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{C,+3} &= \frac{3}{8}\zeta_9 - \frac{3}{4}\zeta_{12} \\
\eta_{C,-1} &= -\frac{3}{4}\zeta_7 \\
\eta_{C,-2} &= -\frac{3}{4}\zeta_8 + \frac{3}{8}\zeta_9 \\
\eta_{C,-4} &= -\frac{3}{4}\zeta_8 - \frac{3}{4}\zeta_9 \\
\eta_{C,-5} &= -\frac{3}{4}\zeta_{10} \\
\eta_{C,-6} &= -\frac{3}{4}\zeta_{11} \\
\eta_{D,0,3} &= \frac{9}{4}\zeta_3 + \frac{9}{2}\zeta_6 \\
\eta_{D,+3} &= -\frac{3}{4}\zeta_3 + \frac{3}{2}\zeta_6 \\
\eta_{D,-1} &= \frac{3}{2}\zeta_1 \\
\eta_{D,-2} &= \frac{3}{2}\zeta_2 - \frac{3}{4}\zeta_3 \\
\eta_{D,-4} &= \frac{3}{2}\zeta_2 + \frac{3}{2}\zeta_3 \\
\eta_{D,-5} &= \frac{3}{2}\zeta_4 \\
\eta_{D,-6} &= \frac{3}{2}\zeta_5 \\
\eta_{E,0,1} &= -\frac{3}{2}\zeta_1 \\
\eta_{E,0,2} &= -\frac{3}{2}\zeta_2 - \frac{3}{4}\zeta_3 + \frac{3}{2}\zeta_6 \\
\eta_{E,0,4} &= -\frac{3}{2}\zeta_2 + \frac{3}{2}\zeta_3 - 3\zeta_6 \\
\eta_{E,0,5} &= -\frac{3}{2}\zeta_4 \\
\eta_{E,0,6} &= -\frac{3}{2}\zeta_5 \\
\eta_{E,+1} &= \frac{1}{2}\zeta_1 \\
\eta_{E,+2} &= \frac{1}{2}\zeta_2 + \frac{1}{4}\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_6 \\
\eta_{E,+4} &= \frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{1}{2}\zeta_3 - \zeta_6 \\
\eta_{E,+5} &= \frac{1}{2}\zeta_4 \\
\eta_{E,+6} &= \frac{1}{2}\zeta_5
\end{aligned}$$

$$\eta_{E,-,3} = -\frac{3}{4}\zeta_3$$

Wir ergänzen schließlich die verschiedenen Darstellungen der vollständig bose-symmetrischen und impulsunabhängigen nullten Störungsordnung für den 4-Gluon-Vertex, deren Definition (1.35) die lineare Abhängigkeit der Farbtensoren aufgrund der Jacobi-Identität (siehe (2.67)) noch nicht berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{(0)} \begin{matrix} \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 \\ a_1a_2a_3a_4 \end{matrix} &= f_{a_1a_3m} f_{a_4a_2m} \left( \delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} + \delta^{\mu_1\mu_3} \delta^{\mu_2\mu_4} - 2\delta^{\mu_1\mu_4} \delta^{\mu_2\mu_3} \right) \\ &\quad - f_{a_1a_4m} f_{a_2a_3m} \left( \delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} - 2\delta^{\mu_1\mu_3} \delta^{\mu_2\mu_4} + \delta^{\mu_1\mu_4} \delta^{\mu_2\mu_3} \right) \\ &= C_{D(a_1a_2a_3a_4)} \left( -3 L_{-,s}^{(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)} \right) \\ &\quad + C_{E(a_1a_2a_3a_4)} \left( (D-1) L_{0,s}^{(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)} - L_{+,s}^{(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)} \right) \end{aligned} \tag{A.104}$$

Wir lesen für die verbleibenden Hilfsparameter  $\eta_{i,j,0}$ , die den perturbativen Anteil des reduzierten 4-Gluon-Vertex beschreiben (vergleiche (2.46) bzw. (2.73)), folgende Zahlenwerte ab:

$$\begin{array}{ll} \eta_{A,0,0} = 0 & \eta_{C,-,0} = 0 \\ \eta_{A,+,0} = 0 & \eta_{D,-,0} = -3 \\ \eta_{B,0,0} = 0 & \eta_{E,0,0} = D-1 \\ \eta_{B,+,0} = 0 & \eta_{E,+,0} = -1 \end{array}$$



# Anhang B

## Die Vakuumkondensate der QCD

### B.1 Definition der Kondensate

Grundlage der Vakuumkondensate sind die Erwartungswerte zusammengesetzter Operatoren bzgl. des nichtstörungstheoretischen Vakuumzustandes  $|\Omega\rangle$  an gleichen Raum-Zeit-Punkten. Bildet man z. B. bei dem zeitgeordneten Erwartungswert (1.11) die Spur über die offenen Index-Strukturen und führt im euklidischen Ortsraum den formalen Limes  $x \rightarrow y$  durch, so läßt sich unter Berücksichtigung der Translationsinvarianz das unrenormierte Fermion-Kondensat der Massendimension drei über die Fourier-Darstellung definieren:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{(f)} \equiv \lim_{x \rightarrow y} \text{tr} \left\{ \langle \Omega | T[\bar{\psi}_{(f)}^i(x) \psi_{(f)}^j(y)] | \Omega \rangle \right\} := \text{tr} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_{(f)}^{ij}(k) \right\} \quad (\text{B.1})$$

Für dieses eichinvariante Kondensat erwartet man auch im Grenzfall masseloser Quarks einen nichtverschwindenden Wert. In [25] findet man für die sehr leichten  $u$ -Quarks und  $d$ -Quarks aus QCD-Summenregeln bei einer Skala von 1 GeV:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{(exp)} \approx - 0.0114 (\pm 0.004) \text{ GeV}^3 \quad (\text{B.2})$$

Analog zu (B.1) läßt sich das eichinvariante Gluon-Kondensat  $\langle GG \rangle$  aus dem Quadrat des Feldstärke-Tensors (1.5) bilden. Da die zeitgeordneten Produkte von Feldoperatoren im Ortsraum aufgrund ihrer Distributions-Eigenschaften im formalen Übergang  $x \rightarrow y$  ein singuläres Verhalten zeigen, ist neben der perturbativen Renormierung von Feldoperatoren und Kopplungsparametern im allgemeinen eine Renormierung zusammengesetzter Operatoren (COR) erforderlich. Die Zuweisung endlicher Werte hängt dabei von der Renormierungsvorschrift ab und wird in der Literatur unterschiedlich gehandhabt <sup>1</sup>. Wir werden im Rahmen dieses Anhangs die Kennzeichnung „(ren)“ verwenden, um alle Renormierungsschritte zusammenzufassen, die in führender Störungsordnung zu endlichen Werten für die Kondensate führen. Tatsächlich erweist sich hierfür im folgenden die perturbative Kopplungsrenormierung (1.104) als völlig ausreichend, da die divergenten Beiträge der Kondensate mit dem  $1/g^2$ -Mechanismus des zweiten Kapitels (2.13) behandelt werden können.

---

<sup>1</sup>Für nähere Einzelheiten siehe [37].

Fundamentale Bedeutung erlangen die renormierten eichinvarianten Kondensate der QCD durch ihren Zusammenhang mit der Spuranomalie des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors, die ein Maß für die Brechung der Skaleninvarianz als Quantisierungseffekt darstellt [37]. Aus ihrer Invarianz unter Renormierungsgruppen-Transformationen folgt unter Berücksichtigung der führenden  $g$ -Abhängigkeiten der Renormierungsgruppen-Funktionen, daß in führender Störungsordnung allein das Produkt jedes Kondensats mit dem Quadrat der renormierten Kopplung eine Renormierungsgruppeninvariante darstellt. Wir definieren also als eichinvariantes, renormiertes und in führender Störungsordnung RG-invariantes Gluon-Kondensat <sup>2</sup>:

$$\mathcal{C}_{4V} := \frac{g^2(\nu)}{4\pi^2} \left\langle G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \right\rangle_{(ren)} \quad (\text{B.3})$$

In [25] [38] findet man für (B.3) bei einer realistischen Zahl von sechs Fermionen mit unterschiedlichen Massen folgendes halb-empirisches Resultat:

$$\mathcal{C}_{4V(exp)} \approx 0.017 (\pm 0.004) \text{ GeV}^4 \quad (\text{B.4})$$

Dabei folgt aus der Forderung nach Renormierungsgruppeninvarianz, daß sich (B.3) als zahlenwertiges Vielfaches der Massenskala  $\Lambda_{QCD}$  ausdrücken lassen muß:

$$\mathcal{C}_{4V} = c \Lambda^4$$

Die dimensionslose Zahl  $c$  enthält damit die gesamte nichttriviale Information über das Gluon-Kondensat und kann – zumindest prinzipiell – in dieser Arbeit berechnet werden. Außerdem wird deutlich, daß ein Mechanismus existieren muß, der ein Quadrat der inversen Kopplung zu produzieren gestattet. Genau dies leisten die Methoden des zweiten Kapitels, falls das unrenormierte Gluon-Kondensat (siehe (B.13)) schon bei seiner Definition mit dem Quadrat der nackten Kopplung multipliziert wird.

Wir definieren entsprechend ein neues Fermion-Kondensat der Massendimension drei, das sich bei perturbativer 1-Schleifen-Renormierung in führender Störungsordnung als RG-invariant erweisen wird <sup>3</sup>:

$$F1 := g_0^2 \cdot \langle \bar{\psi} \psi \rangle \hat{=} g_0^2 \cdot \text{[Diagramm einer 1-Schleife]} \quad (\text{B.5})$$

Man beachte, daß im Rahmen der rein gluonischen oder der masselosen Theorie störungstheoretisch nur verschwindende Kondensate zu erwarten sind, da sich bei Anwendung der rein perturbativen Feynman-Regeln alle Impulsintegrale als skalenfrei erweisen und nach den Axiomen der dimensionellen Regularisierung keine Beiträge liefern. Diese Situation ändert sich grundlegend durch Einführung der nichtperturbativen Massenskala  $\Lambda$ . Demnach ist die Ausbildung endlicher, nichtverschwindender Vakuumkondensate als nichtperturbativer Effekt zu verstehen, der seine Ursache in der nichttrivialen Struktur des QCD-Vakuumszustandes findet.

<sup>2</sup>Die Wahl des Vorfaktors ist der üblichen Konvention [25] angepaßt.

<sup>3</sup>Der Flavour-Index  $f$  kann für masselose Fermionen erneut vernachlässigt werden.

Das Ziel der folgenden Überlegungen zu den Kondensaten ist, die eichinvarianten Kondensate durch die Parameter der nichtperturbativ erweiterten Ansätze des zweiten Kapitels auszudrücken. Zu diesem Zweck führen wir zunächst die Lorentz- und farbinvarianten Kondensate der Massendimension vier ein, die sich mittels des in (B.1) beschriebenen Verfahrens direkt aus der Lagrangedichte der Theorie ergeben. Diese lassen sich analog dem Fermion-Kondensat (B.5) definieren und zusätzlich graphisch veranschaulichen:

- Abelsches Gluon-Kondensat:

$$V2 := g_0^2 \cdot \left\langle \frac{1}{4} (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)^2 \right\rangle \hat{=} \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \text{[Diagram: A circular loop with a wavy, scalloped boundary, representing a gluon loop.]}$$
 (B.6)

- Geist-Kondensat:

$$G2 := g_0^2 \cdot \left\langle (\partial^\mu \bar{\chi}_a)(\partial^\mu \chi_a) \right\rangle \hat{=} g_0^2 \cdot \text{[Diagram: A circular loop with a dashed boundary and two solid dots on the left side, representing a ghost loop.]}$$
 (B.7)

- Fermion-Kondensat:

$$F2 := g_0^2 \cdot \left\langle i \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right\rangle \hat{=} g_0^2 \cdot \text{[Diagram: A circular loop with a solid boundary and two solid dots on the left side, representing a fermion loop.]}$$
 (B.8)

- 3-Gluon-Kondensat:

$$V3 := g_0^2 \cdot \left\langle \frac{1}{2} g_0 f_{abc} (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) A_b^\mu A_c^\nu \right\rangle$$

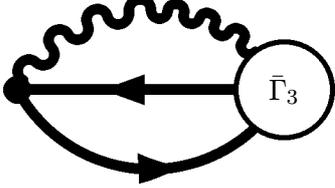
$$\hat{=} -\frac{1}{6} g_0^4 \cdot \text{[Diagram: A circular loop with a wavy boundary and a small circle labeled \Gamma_3 attached to the right side, representing a 3-gluon condensate.]}$$
 (B.9)

- Geist-Gluon-Kondensat:

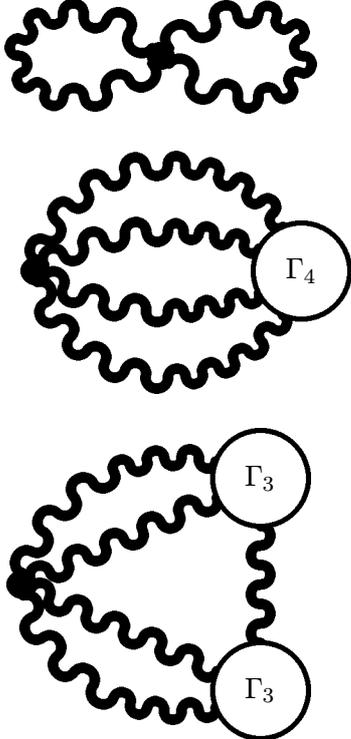
$$GV := g_0^2 \cdot \left\langle g_0 f_{abc} (\partial^\mu \bar{\chi}_a) A_b^\mu \chi_c \right\rangle$$

$$\hat{=} g_0^4 \cdot \text{[Diagram: A circular loop with a wavy boundary on top and a dashed boundary on the bottom, with a small circle labeled \tilde{\Gamma}_3 attached to the right side, representing a ghost-gluon condensate.]}$$
 (B.10)

- Fermion-Gluon-Kondensat:

$$\begin{aligned}
 FV & := g_0^2 \cdot \langle g_0 \bar{\psi} T_a \gamma^\mu A_a^\mu \psi \rangle \\
 & \hat{=} g_0^4 \cdot \text{Diagram} \quad (B.11)
 \end{aligned}$$


- 4-Gluon-Kondensat:

$$\begin{aligned}
 V4 & := g_0^2 \cdot \langle \frac{1}{4} g_0^2 f_{abn} f_{cdn} A_a^\mu A_b^\nu A_c^\mu A_d^\nu \rangle \\
 & \hat{=} -\frac{1}{8} g_0^4 \cdot \text{Diagram 1} \\
 & \quad -\frac{1}{24} g_0^6 \cdot \text{Diagram 2} \\
 & \quad -\frac{1}{8} g_0^6 \cdot \text{Diagram 3} \quad (B.12)
 \end{aligned}$$


Die drei unterschiedlichen Terme des 4-Gluon-Kondensats kommen durch die übliche Zerlegung der vollen Greenschen Funktion  $G_4$  nach nichtzusammenhängenden, 1-Teilchen-reduziblen und 1-Teilchen-irreduziblen Anteilen zustande, wobei in erster nichtperturbativer Iteration analog den D-S-Funktionalen beobachtet werden kann, wie die drei Mandelstam-Pole des 4-Gluon-Vertex (siehe (3.1)) durch drei identische Permutationen die „Entschärfung“ der inneren Gluonlinie zwischen den beiden modifizierten 3-Gluon-Vertizes sicherstellen.

Das unrenormierte eichinvariante Gluon-Kondensat setzt sich nach (1.5) aus den oben definierten Kondensaten folgendermaßen zusammen:

$$g_0^2 \cdot \langle G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \rangle = 4V2 + 4V3 + 4V4 \quad (B.13)$$

## B.2 Die Bewegungsgleichungs-Kondensate

Multipliziert man die klassischen Bewegungsgleichungen [22] [29] mit den entsprechenden Feldern und bildet den Erwartungswert der entstandenen zusammengesetzten Operatoren bezüglich des nichtstörungstheoretischen Vakuumzustandes sowie die Spur über die offene Index-Struktur, so erhält man Identitäten zwischen den im ersten Abschnitt definierten Kondensaten [37]. Das entsprechende Bewegungsgleichungs-Kondensat für das Eichfeld lautet <sup>4</sup>:

$$2V2 + 3V3 + 4V4 + GV + N_F \cdot FV = 0 \quad (\text{B.14})$$

Diese Beziehung kann dazu genutzt werden, das schwer zu handhabende 4-Gluon-Kondensat in dem eichinvarianten Gluon-Kondensat (B.13) zu eliminieren:

$$g_0^2 \cdot \langle G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \rangle = 2V2 + V3 - GV - N_F \cdot FV \quad (\text{B.15})$$

Die übrigen beiden Bewegungsgleichungs-Kondensate für das Geistfeld und die Fermionfelder lauten:

$$G2 + GV = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$F2 + FV = 0 \quad (\text{B.17})$$

Prinzipiell stellen alle drei Bewegungsgleichungs-Kondensate nach Berechnung der divergenten Beiträge in erster nichtperturbativer Iteration nichtlineare Gleichungen zwischen den Parametern der erweiterten Ansätze bereit, die dazu dienen können, aus dem unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystem des Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblems einzelne Lösungen zu extrahieren.

## B.3 Führende Divergenzen in erster Iteration

In diesem Abschnitt sollen nun die führenden Divergenzen in niedrigster Schleifenordnung für die oben definierten Kondensate zusammengestellt werden. Dazu werden in erster Iteration die vollen Propagatoren und Vertizes – analog der Behandlung der Dyson-Schwinger-Funktionale – durch ihre nichtperturbativ erweiterten Ansätze ersetzt und anschließend die ultraviolett-divergenten Impulsintegrale in dimensioneller Regularisierung berechnet. Die Modifikation des Fermion-Propagators auf Stufe  $r = 1$  (2.21) ergibt so für das Fermion-Kondensat der Massendimension drei (B.5) folgenden Ausdruck:

$$F1^{(l=1)}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) = \left( 12w_1^3 - 24w_1w_3 - 12w_2w_3 \right) \cdot \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^{3-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad (\text{B.18})$$

Die vorhandene Divergenzstruktur erlaubt die Anwendung des  $1/g^2$ -Mechanismus (2.13), und wir erhalten im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  folgendes endliches Resultat:

$$F1_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^3}{\beta_0} \left( 12w_1^3 - 24w_1w_3 - 12w_2w_3 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.19})$$

---

<sup>4</sup>Die Summe über die Quark-Flavours reduziert sich für masselose Quarks wieder auf den Faktor  $N_F$ .

In analoger Weise lassen sich auch die übrigen 2-Punkt-Kondensate behandeln. Die Resultate in führender Schleifen-Ordnung ( $l = 1$ ) lauten:

$$V2_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{\beta_0} \left( 12 u_1^2 - 12 u_3 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.20})$$

$$G2_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$F2_{(ren)}^{(l=1)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{\beta_0} \left( -12 w_1^4 + 36 w_1^2 w_3 + 24 w_1 w_2 w_3 + 12 w_2^2 w_3 - 12 w_3^2 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.22})$$

Für die 3-Punkt-Kondensate erhalten wir in führender Schleifen-Ordnung ( $l = 2$ ) folgende Ausdrücke [37]:

$$V3_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{\beta_0^2} \left( -183 u_1^2 + 75 u_3 - 108 x_5 + 198 u_1 x_1 + 93 u_1 x_4 + 90 u_2 x_1 - 15 u_2 x_4 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.23})$$

$$GV_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{\beta_0^2} \left( -3 u_1^2 + 3 u_3 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} FV_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) = & \frac{\Lambda^4}{\beta_0^2} \left( 8 u_1^2 - 8 u_3 + 24 u_1 w_3 + 48 w_1^4 - 96 w_1^2 w_3 - 48 w_1 w_2 w_3 \right. \\ & + z_{0,1} \left( -24 u_1 w_1 + 24 u_1 w_2 - 96 w_1^3 - 48 w_1^2 w_2 \right. \\ & \quad \left. \left. - 48 w_1 w_2^2 + 144 w_1 w_3 + 48 w_2 w_3 \right) \right. \\ & + z_{0,4} \left( 24 u_1 + 48 w_1^2 + 48 w_1 w_2 + 48 w_2^2 - 48 w_3 \right) \\ & + z_{1,0} \left( -8 u_1 - 8 u_2 - 24 w_3 \right) \\ & + z_{1,1} \left( 24 w_1 - 24 w_2 \right) \\ & \left. + z_{1,4} \left( -24 \right) \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.25}) \end{aligned}$$

Um das Bewegungsgleichungs-Kondensat des Eichfeldes zur Bestimmung einzelner Lösungen des Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblems heranziehen zu können, dürfen keine Parameter des reduzierten 4-Gluon-Vertex außer den Kombinationen (6.32) und (6.33) in dieser Bedingung auftreten<sup>5</sup>. Dies wird insbesondere durch eine Vernachlässigung der 3-Schleifen-Terme in (B.12) erreicht, die in Hinblick auf die Unterdrückung der 2-Schleifen-Terme in der Auswertung der Dyson-Schwinger-Funktionale durchaus vertretbar ist. Der verbleibende 2-Schleifen-Beitrag zur nullten Störungsordnung lautet:

$$V4_{(ren)}^{(l=2)}(\Lambda) = \frac{\Lambda^4}{\beta_0^2} \left( \frac{81}{2} u_1^2 \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad (\text{B.26})$$

---

<sup>5</sup>Anderenfalls ist die entsprechende Gleichung als Teil des überbestimmten Gleichungssystems für die Vertexparameter  $\zeta_i$  zu behandeln.

Wir sind nun in der Lage, die aus den Bewegungsgleichungen stammenden Bedingungen für die Parameter anzugeben. Wir beginnen mit der Gleichung für die Geistfelder (B.16) und erkennen, daß das Verschwinden des Geist-Kondensats (B.21) – verursacht durch die fehlende Modifizierung des Geist-Propagators in der Landau-Eichung – das Verschwinden des Geist-Gluon-Kondensats (B.24) in erster nichtperturbativer Iteration erzwingt. Dies läßt sich neben der trivialen Lösung ( $u_1 = u_3 = 0$ ), die allerdings im Rahmen der kompensierenden Pole des dritten Kapitels ausgeschlossen wurde, nur durch folgende einfache Forderung an die Parameter des nichtperturbativ modifizierten Gluon-Propagators erreichen:

$$u_1^2 \stackrel{!}{=} u_3 \quad (\text{B.27})$$

Diese Beziehung ist mit der Forderung nach „Confinement“-zeigenden Lösungen (2.18) durchaus konsistent; allerdings verschwindet damit interessanterweise das abelsche Gluon-Kondensat, das in früheren Arbeiten [11] [14] als erste Näherung für das eichinvariante Gluon-Kondensat verwendet wurde.

Das Bewegungsgleichungs-Kondensat der Fermionfelder (B.17) erfordert außerdem folgende Identität der Vertexparameter:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_0} \left( 3 w_1^4 - 12 w_1^2 w_3 - 6 w_1 w_2 w_3 - 3 w_2^2 w_3 + 3 w_3^2 \right) \\ & \stackrel{!}{=} \frac{1}{\beta_0^2} \left( 2 u_1^2 - 2 u_3 + 6 u_1 w_3 + 12 w_1^4 - 24 w_1^2 w_3 - 12 w_1 w_2 w_3 \right. \\ & \quad \left. + z_{0,1} \left( -6 u_1 w_1 + 6 u_1 w_2 - 24 w_1^3 - 12 w_1^2 w_2 \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. - 12 w_1 w_2^2 + 36 w_1 w_3 + 12 w_2 w_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + z_{0,4} \left( 6 u_1 + 12 w_1^2 + 12 w_1 w_2 + 12 w_2^2 - 12 w_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + z_{1,0} \left( -2 u_1 - 2 u_2 - 6 w_3 \right) \right. \\ & \quad \left. + z_{1,1} \left( 6 w_1 - 6 w_2 \right) \right. \\ & \quad \left. + z_{1,4} \left( -6 \right) \right) \quad (\text{B.28}) \end{aligned}$$

Das Bewegungsgleichungs-Kondensat des Eichfeldes (B.14) führt bei Vernachlässigung der 3-Schleifen-Terme des 4-Gluon-Kondensats auf folgende Gleichung der ersten Iteration:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_0} \left( -24 u_1^2 + 24 u_3 \right) \\ & \stackrel{!}{=} \frac{1}{\beta_0^2} \left( -390 u_1^2 + 228 u_3 - 324 x_5 + 594 u_1 x_1 \right. \\ & \quad \left. + 279 u_1 x_4 + 270 u_2 x_1 - 45 u_2 x_4 \right) \\ & \quad + \frac{N_F}{\beta_0^2} \left( 8 u_1^2 - 8 u_3 + 24 u_1 w_3 + 48 w_1^4 - 96 w_1^2 w_3 - 48 w_1 w_2 w_3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_{0,1} \left( - 24 u_1 w_1 + 24 u_1 w_2 - 96 w_1^3 - 48 w_1^2 w_2 \right. \\
& \quad \left. - 48 w_1 w_2^2 + 144 w_1 w_3 + 48 w_2 w_3 \right) \\
& + z_{0,4} \left( 24 u_1 + 48 w_1^2 + 48 w_1 w_2 + 48 w_2^2 - 48 w_3 \right) \\
& + z_{1,0} \left( - 8 u_1 - 8 u_2 - 24 w_3 \right) \\
& + z_{1,1} \left( 24 w_1 - 24 w_2 \right) \\
& + z_{1,4} \left( - 24 \right) \left. \right) \tag{B.29}
\end{aligned}$$

Der RG-invariante Term nullter Ordnung des eichinvarianten Gluon-Kondensats (B.3), dessen 3-Schleifen-Beiträge durch Verwendung des *exakten* Bewegungsgleichungs-Kondensats für das Eichfeld vollständig eliminiert werden konnten, läßt sich nach Einsetzen der beiden Bedingungen (B.27) und (B.28) folgendermaßen durch die Vertexparameter der ersten Approximationsstufe ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{4V}(\Lambda) & = \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \left( \frac{N_F}{\beta_0} \left( - 12 w_1^4 + 36 w_1^2 w_3 + 24 w_1 w_2 w_3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 12 w_2^2 w_3 - 12 w_3^2 \right) \right. \\
& \quad + \frac{1}{\beta_0^2} \left( - 108 u_1^2 - 108 x_5 + 198 u_1 x_1 \right. \\
& \quad \left. + 93 u_1 x_4 + 90 u_2 x_1 - 15 u_2 x_4 \right) \\
& \quad \left. + \mathcal{O}(g^2) \right) \tag{B.30}
\end{aligned}$$

## Anhang C

# 1-Schleifen-Resultate für den 4-Gluon-Vertex

### C.1 Selbstkonsistenzgleichungen

$C_A$ - $L_{0,s}$ -Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{9}{4} u_3^2 x_4 \left( 5 \zeta_2 + \zeta_3 + 8 \zeta_6 - 6 \zeta_8 + 12 \zeta_9 - 12 \zeta_{12} + 6 \zeta_{14} - 6 \zeta_{17} \right) - \frac{45}{4} u_3 x_5 \zeta_4 \\ & + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{10} - \zeta_{15} \right) + \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{11} - \zeta_{16} \right) \\ & = -27 u_3^2 x_4^3 + 54 u_3 x_4 x_5^2 - 27 x_5^2 x_7 \end{aligned}$$

(C.1)

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} u_3^2 x_4 \zeta_1 + \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{16} u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 + \frac{27}{4} u_3 x_1 \zeta_4 \\ & + \left( \frac{27}{8} u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{8} u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 - 2 \zeta_9 + 2 \zeta_{12} - \zeta_{14} + \zeta_{17} \right) \\ & + \left( \frac{99}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} - \zeta_{15} \right) \\ & = -\frac{27}{2} u_3^2 x_4^2 + 36 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{9}{2} u_3 x_5^2 - 9 x_2 x_5^2 - 18 x_1 x_5 x_7 \\ & + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{2}{3} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{2}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right) \end{aligned}$$

(C.2)

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{2} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_1 - 3 \zeta_7 + 3 \zeta_{13} \right) - 9 u_3 x_5 \zeta_2 + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \frac{9}{4} u_3 x_1 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{27}{16} u_3^2 + \frac{63}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{4} u_3 x_5 \right) \left( 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} - 2 \zeta_{14} - \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} - \zeta_{15} \right) \\
& = -\frac{45}{2} u_3^2 x_4^2 + 36 u_3 x_1 x_4 x_5 + 27 u_3 x_5^2 - 9 x_2 x_5^2 - 18 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.3)

$$\begin{aligned}
& -\frac{27}{4} u_3 x_5 \zeta_1 - \frac{9}{2} u_3 x_1 \zeta_2 - \left( \frac{27}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \frac{9}{4} u_3 x_1 \zeta_6 \\
& + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_7 - \zeta_{13} \right) + \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_8 - 2 \zeta_9 \right. \\
& \left. + 2 \zeta_{12} - \zeta_{14} + \zeta_{17} \right) \\
& = -\frac{9}{2} u_3^2 x_4 + 18 u_3 x_1^2 x_4 + 27 u_3 x_1 x_5 - 9 x_1^2 x_7 - 18 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{2}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{2}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{2}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.4)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - 9 u_3 x_1 \zeta_2 + \left( \frac{63}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 \\
& + \frac{63}{8} u_3 x_1 \zeta_6 + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{8} u_3^2 \right) \left( \zeta_7 - \zeta_{13} \right) \\
& + \left( \frac{99}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} - 2 \zeta_{14} - \zeta_{17} \right) \\
& = -\frac{9}{2} u_3^2 x_4 + 18 u_3 x_1^2 x_4 + 18 u_3 x_1 x_5 - 9 x_1^2 x_7 - 18 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.5)

**C<sub>A</sub>-L<sub>+,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} u_3^2 x_4 \left( 15 \zeta_2 - 13 \zeta_3 + 24 \zeta_6 - 2 \zeta_8 + 4 \zeta_9 + 4 \zeta_{12} - 2 \zeta_{14} - 2 \zeta_{17} \right) - \frac{15}{4} u_3 x_5 \zeta_4 \\
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{1}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{10} + \zeta_{15} \right) - \left( \frac{15}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{11} + \zeta_{16} \right) \\
& = -9 u_3^2 x_4^3 + 18 u_3 x_4 x_5^2 - 9 x_5^2 x_7
\end{aligned}$$

(C.6)

$$\begin{aligned}
& \frac{7}{2} u_3^2 x_4 \zeta_1 - \left( \frac{3}{16} u_3^2 + \frac{7}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_2 + \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{16} u_3^2 - \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \frac{1}{4} u_3 x_1 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{13}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^2 \right) \left( \zeta_8 - 2 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} + \zeta_{14} + \zeta_{17} \right) \\
& - \left( \frac{13}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} + \zeta_{15} \right) \\
& = -\frac{17}{2} u_3^2 x_4^2 + 12 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{11}{2} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 - 6 x_1 x_5 x_7 \\
& + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{2}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{2}{9} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{2}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{2}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.7)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} u_3^2 x_4 \left( 4 \zeta_1 - \zeta_7 - \zeta_{13} \right) + \left( \frac{3}{8} u_3^2 - 2 u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 \\
& - \frac{7}{4} u_3 x_1 \zeta_4 + \left( \frac{15}{16} u_3^2 + \frac{11}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_6 - \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{1}{4} u_3^2 \right) \left( 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 \right. \\
& \left. + 2 \zeta_{12} + 2 \zeta_{14} - \zeta_{17} \right) - \left( \frac{15}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} + \zeta_{15} \right) \\
& = -\frac{11}{2} u_3^2 x_4^2 + 12 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{5}{2} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 - 6 x_1 x_5 x_7 \\
& + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{1}{9} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{1}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{1}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.8)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{4} u_3^2 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{1}{4} u_3 x_1 \left( 14 \zeta_2 - 13 \zeta_6 \right) \\
& + \left( 2 u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{1}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_7 + \zeta_{13} \right) \\
& - \left( \frac{15}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_8 - 2 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} + \zeta_{14} + \zeta_{17} \right) \\
& = -\frac{3}{2} u_3^2 x_4 + 6 u_3 x_1^2 x_4 + 5 u_3 x_1 x_5 - 3 x_1^2 x_7 - 6 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{2}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{2}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{2}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{2}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.9)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{16} u_3^2 - \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 16 \zeta_2 - 11 \zeta_6 \right) \\
& - \left( \frac{21}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^2 \right) \left( \zeta_7 + \zeta_{13} \right) \\
& - \left( \frac{13}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 + 2 \zeta_{12} + 2 \zeta_{14} - \zeta_{17} \right) \\
& = -\frac{3}{2} u_3^2 x_4 + 6 u_3 x_1^2 x_4 + 8 u_3 x_1 x_5 - 3 x_1^2 x_7 - 6 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{1}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{1}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{1}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.10)

**C<sub>A</sub>-L<sub>-s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} u_3^2 x_4 \zeta_1 - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_2 + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{16} u_3^2 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 + \frac{3}{2} u_3 x_1 \zeta_4 \\
& - \left( \frac{9}{16} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_6 - \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 \zeta_{17} \\
& = -3 u_3^2 x_4^2 + 3 u_3 x_5^2 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.11)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_1 + \frac{3}{2} u_3 x_1 \zeta_2 - \left( \frac{39}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 \\
& - \frac{15}{8} u_3 x_1 \zeta_6 + \left( \frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = 3 u_3 x_1 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.12)

**C<sub>B</sub>-L<sub>0,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{4} u_3^2 x_4 \left( 5 \zeta_2 - 3 \zeta_3 + 8 \zeta_6 - 2 \zeta_8 + 4 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} + \zeta_{14} - 2 \zeta_{17} \right) - \frac{45}{4} u_3 x_5 \zeta_4 \\
& - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_{10} - \left( \frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{11} + 2 \zeta_{16} \right) \\
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{15} \\
& = -27 u_3^2 x_4^3 + 54 u_3 x_4 x_5^2 - 27 x_5^2 x_7
\end{aligned}$$

(C.13)

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{2} u_3^2 x_4 \zeta_1 + \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{16} u_3^2 \right) \zeta_3 - \frac{27}{4} u_3 x_1 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{27}{8} u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 - \frac{9}{4} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_7 - \zeta_{13} \right) - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) \\
& - \left( \frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} + 2 \zeta_{15} \right) \\
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{27}{2} u_3^2 x_4^2 + 36 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{9}{2} u_3 x_5^2 - 9 x_2 x_5^2 - 18 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{2}{3} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{2}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.14)

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8} u_3^2 x_4 \left( 8 \zeta_1 - 2 \zeta_7 + \zeta_{13} \right) - 9 u_3 x_5 \zeta_2 + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \frac{9}{4} u_3 x_1 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{27}{16} u_3^2 + \frac{63}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_6 - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_8 + \left( \frac{3}{8} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_9 \\
& - \left( \frac{27}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{10} + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} \\
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} - \left( \frac{99}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{15} \\
& - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{45}{2} u_3^2 x_4^2 + 36 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{27}{2} u_3 x_5^2 - 9 x_2 x_5^2 - 18 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.15)

$$\begin{aligned}
& -\frac{27}{4} u_3 x_5 \zeta_1 - \frac{9}{4} u_3 x_1 \left( 2 \zeta_2 - \zeta_6 \right) - \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 \\
& - \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 \zeta_7 - \left( \frac{9}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) \\
& - \left( \frac{27}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{16} u_3^2 \right) \zeta_{13} \\
& + \left( 9 u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{9}{2} u_3^2 x_4 + 18 u_3 x_1^2 x_4 + 27 u_3 x_1 x_5 - 9 x_1^2 x_7 - 18 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{2}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{2}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{2}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.16)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{9}{8} u_3 x_1 \left( 8 \zeta_2 - 7 \zeta_6 \right) + \left( \frac{9}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 \\
& - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \left( \frac{27}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_8 \\
& + \left( \frac{81}{16} u_3 x_1 - \frac{15}{32} u_3 x_4 - \frac{1}{4} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_9 + \left( \frac{9}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{12} \\
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} - \left( \frac{99}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{14} \\
& - \left( \frac{27}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{9}{2} u_3^2 x_4 + 18 u_3 x_1^2 x_4 + 18 u_3 x_1 x_5 - 9 x_1^2 x_7 - 18 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.17)

**C<sub>B</sub>-L<sub>+,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} u_3^2 x_4 \left( 15 \zeta_2 - \zeta_3 + 24 \zeta_6 - 14 \zeta_8 + 28 \zeta_9 - 26 \zeta_{12} + 13 \zeta_{14} - 14 \zeta_{17} \right) - \frac{15}{4} u_3 x_5 \zeta_4 \\
& + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{7}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_{10} + \left( \frac{15}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{11} - 2 \zeta_{16} \right) \\
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{13}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{15} \\
& = -9 u_3^2 x_4^3 + 18 u_3 x_4 x_5^2 - 9 x_5^2 x_7
\end{aligned}$$

(C.18)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} u_3^2 x_4 \left( 14 \zeta_1 - 14 \zeta_7 + 13 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{3}{16} u_3^2 + \frac{7}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_2 + \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{3}{16} u_3 x_5 \right) \zeta_3 \\
& - \frac{1}{4} u_3 x_1 \zeta_4 + \left( \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{13}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{7}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) \\
& + \left( \frac{15}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{10} - 2 \zeta_{15} \right) \\
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{13}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = - \frac{17}{2} u_3^2 x_4^2 + 12 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{11}{2} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 - 6 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( - \frac{2}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{2}{9} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{2}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{2}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.19)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} u_3^2 x_4 \left( 16 \zeta_1 - 14 \zeta_7 + 13 \zeta_{13} \right) + \left( \frac{3}{8} u_3^2 - 2 u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{1}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_3 \\
& - \frac{7}{4} u_3 x_1 \zeta_4 + \left( \frac{15}{16} u_3^2 + \frac{11}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_8 \\
& - \left( \frac{1}{8} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{4} u_3^2 - \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_9 + \left( \frac{29}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{10} \\
& + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{16} u_3^2 - \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} \\
& - \left( \frac{43}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{15} + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = - \frac{11}{2} u_3^2 x_4^2 + 12 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{5}{2} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 - 6 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{1}{9} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{1}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{1}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.20)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{4} u_3^2 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{1}{4} u_3 x_1 \left( 14 \zeta_2 - 13 \zeta_6 \right) + \left( \frac{15}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 \\
& + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{4} u_3^2 \right) \zeta_7 + \left( \frac{43}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) \\
& - \left( 7 u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{16} u_3^2 \right) \zeta_{13} \\
& - \left( \frac{11}{2} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{3}{2} u_3^2 x_4 + 6 u_3 x_1^2 x_4 + 5 u_3 x_1 x_5 - 3 x_1^2 x_7 - 6 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{2}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{2}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{2}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{2}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.21)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{16} u_3^2 - \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 16 \zeta_2 - 11 \zeta_6 \right) \\
& - \left( 2 u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 \\
& + \left( \frac{29}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_8 + \left( \frac{13}{16} u_3 x_1 + \frac{5}{32} u_3 x_4 + \frac{1}{12} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_9 \\
& + \left( \frac{1}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{12} - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& - \left( \frac{43}{8} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{14} + \left( u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{3}{2} u_3^2 x_4 + 6 u_3 x_1^2 x_4 + 8 u_3 x_1 x_5 - 3 x_1^2 x_7 - 6 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{1}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{1}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{1}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.22)

**C<sub>B</sub>-L<sub>-,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8} u_3^2 x_4 \left( 4 \zeta_1 - 4 \zeta_7 + 5 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_2 - \zeta_8 \right) + \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 \zeta_3 \\
& + \frac{3}{8} u_3 x_1 \left( 4 \zeta_4 - 4 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15} \right) - \left( \frac{9}{16} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_6 - \zeta_{12} \right) + \left( \frac{9}{8} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{8} u_3^2 \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_9 - \left( \frac{9}{32} u_3^2 + \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = -3 u_3^2 x_4^2 + 3 u_3 x_5^2 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.23)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_1 - \zeta_7 \right) + \frac{3}{8} u_3 x_1 \left( 4 \zeta_2 - 5 \zeta_6 - 4 \zeta_8 + 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} \right) \\
& - \left( \frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{159}{16} u_3 x_1 - \frac{45}{32} u_3 x_4 - \frac{3}{4} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_9 \\
& - \left( \frac{9}{32} u_3^2 + \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} + \left( \frac{51}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{17} \\
& = 3 u_3 x_1 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.24)

**C<sub>C</sub>-L<sub>0,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8} u_3 x_5 \left( \zeta_3 + 2 \zeta_8 - \zeta_{17} \right) - \frac{9}{8} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_7 - \zeta_{13} \right) - \left( \frac{9}{8} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_9 \\
& - \frac{9}{8} u_3 x_1 \left( 2 \zeta_{10} - \zeta_{15} \right) - \left( \frac{9}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{16} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} - \left( \frac{27}{32} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} \\
& = 0
\end{aligned}$$

(C.25)

$$\begin{aligned}
& -\frac{9}{8} u_3 x_1 \left( \zeta_3 + 2\zeta_7 - \zeta_{14} - \zeta_{17} \right) + \frac{9}{4} u_3 x_5 \zeta_7 + \left( \frac{99}{16} u_3 x_1 - \frac{45}{32} u_3 x_4 - \frac{3}{4} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_9 \\
& + \left( 18 u_3 x_1 - \frac{45}{16} u_3 x_4 - \frac{3}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{12} - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} = 0
\end{aligned}$$

(C.26)

**C<sub>C</sub>-L<sub>+,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& -\left( \frac{3}{8} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_3 - \zeta_{17} \right) - \frac{1}{8} u_3^2 x_4 \left( 14\zeta_7 - 13\zeta_{13} \right) + \left( \frac{3}{8} \beta_0 u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_8 \\
& + \left( \frac{3}{8} \beta_0 u_3^2 - \frac{3}{4} u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_9 - \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 14\zeta_{10} - 13\zeta_{15} \right) - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{16} u_3^2 \right. \\
& \left. + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} - \left( \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} = 0
\end{aligned}$$

(C.27)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 7\zeta_1 + 14\zeta_8 - 13\zeta_{14} - 7\zeta_{17} \right) + \left( \frac{3}{8} u_3^2 + \frac{7}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \left( \frac{73}{16} u_3 x_1 - \frac{15}{32} u_3 x_4 \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_9 + \left( \frac{29}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{12} - \left( \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = 0
\end{aligned}$$

(C.28)

**C<sub>C</sub>-L<sub>-,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} u_3^2 x_4 \left( 4\zeta_3 - 4\zeta_8 + 8\zeta_9 - 10\zeta_{12} + 5\zeta_{14} - 4\zeta_{17} \right) + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + 3 u_3 x_5 \right) \zeta_{10} \\
& + \left( \frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_{11} - \frac{15}{4} u_3 x_5 \zeta_{15} = 0
\end{aligned}$$

(C.29)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} u_3 x_5 (2\zeta_3 - 5\zeta_{12} - 5\zeta_{14} - 2\zeta_{17}) - \frac{3}{4} u_3^2 x_4 (4\zeta_7 - 5\zeta_{13}) + \left(\frac{3}{4} \beta_0 u_3^2\right. \\ & \left. + 3 u_3 x_5\right) (\zeta_8 + \zeta_9) + \left(\frac{45}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0}\right) \zeta_{10} = 0 \end{aligned}$$

(C.30)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5\right) (\zeta_3 - \zeta_{17}) - \frac{3}{8} u_3^2 x_4 (4\zeta_7 - 5\zeta_{13}) + \left(\frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5\right) \zeta_8 \\ & - \left(\frac{3}{8} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{8} u_3^2 - \frac{3}{2} u_3 x_5\right) \zeta_9 + \left(\frac{57}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0}\right) \zeta_{10} \\ & - \left(\frac{9}{16} u_3^2 + \frac{15}{8} u_3 x_5\right) \zeta_{12} + \left(\frac{9}{32} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5\right) \zeta_{14} - \frac{15}{8} u_3 x_1 \zeta_{15} = 0 \end{aligned}$$

(C.31)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} u_3 x_1 (2\zeta_3 - 5\zeta_{12} - 5\zeta_{14} - 2\zeta_{17}) + \left(\frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{8} u_3^2\right) \zeta_7 + \left(\frac{69}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4\right. \\ & \left. - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0}\right) (\zeta_8 + \zeta_9) + \frac{9}{16} u_3^2 \zeta_{13} = 0 \end{aligned}$$

(C.32)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} u_3 x_1 (2\zeta_3 - 5\zeta_{12} - 5\zeta_{14} - 2\zeta_{17}) + \left(\frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5\right) \zeta_7 \\ & + \left(\frac{57}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0}\right) \zeta_8 - \left(\frac{21}{16} u_3 x_1 - \frac{15}{32} u_3 x_4 - \frac{1}{4} N_F u_3 z_{1,0}\right) \zeta_9 \\ & + \left(\frac{9}{32} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5\right) \zeta_{13} = 0 \end{aligned}$$

(C.33)

**C<sub>D</sub>-L<sub>0,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8} u_3^2 x_4 (\zeta_1 + \zeta_7 + \zeta_{13}) + \left( \frac{81}{32} u_3^2 - \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_2 + \left( \frac{9}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{81}{32} u_3^2 + \frac{99}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_3 \\
& + \frac{9}{8} u_3 x_1 (\zeta_4 + \zeta_{10} + \zeta_{15}) + \left( \frac{9}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{45}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) (\zeta_8 + \zeta_{14}) - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{27}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_9 \\
& - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{27}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} - \frac{9}{8} u_3 x_5 \zeta_{17} \\
& = -\frac{9}{4} u_3^2 x_4^2 + 9 u_3 x_1 x_4 x_5 - \frac{27}{4} u_3 x_5^2 - 9 x_2 x_5^2 + 9 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + w_3 z_{1,1}^2 - z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.34)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{81}{32} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \frac{9}{8} u_3 x_1 (\zeta_2 - \zeta_8 + 4\zeta_9 + 7\zeta_{12} - \zeta_{14} - \zeta_{17}) \\
& - \left( \frac{27}{4} u_3 x_1 - \frac{45}{16} u_3 x_4 - \frac{3}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{45}{8} u_3 x_4 - 3 N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{9}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = 9 u_3 x_1^2 x_4 - \frac{27}{4} u_3 x_1 x_5 + 9 x_1^2 x_7 - 9 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( w_3 z_{0,1} z_{1,1} - w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.35)

**C<sub>D</sub>-L<sub>+,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} u_3^2 x_4 \left( 7 \zeta_1 + 7 \zeta_7 + 13 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{33}{32} u_3^2 + \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{33}{32} u_3^2 \right. \\
& - \left. \frac{17}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_3 + \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 7 \zeta_4 + 7 \zeta_{10} + 13 \zeta_{15} \right) + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{5}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_6 \\
& + \left( \frac{3}{32} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_8 + \left( \frac{3}{32} u_3^2 - \frac{1}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_9 - \left( \frac{15}{32} u_3^2 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} \\
& - \left( \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} + \left( \frac{3}{8} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{7}{4} u_3^2 x_4^2 + 3 u_3 x_1 x_4 x_5 - \frac{5}{4} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 + 9 x_1 x_5 x_7 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.36)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{33}{32} u_3^2 + \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_1 + \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 7 \zeta_2 + 7 \zeta_8 - 8 \zeta_9 - 11 \zeta_{12} + 13 \zeta_{14} + 7 \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{55}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{83}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& + \left( \frac{3}{32} u_3^2 - \frac{7}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \left( \frac{15}{32} u_3^2 + \frac{13}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = -3 u_3 x_1^2 x_4 - \frac{5}{2} u_3 x_1 x_5 + 3 x_1^2 x_7 - 3 x_1 x_2 x_5 \\
& \quad + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.37)

**C<sub>D</sub>-L<sub>-,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_2 + 2 \zeta_3 + 5 \zeta_6 + 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 + 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} - 4 \zeta_{17} \right) - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 \right. \\
& + \left. \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_4 - \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_5 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \left( 2 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15} \right) \\
& = N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( 2 w_3^2 z_{1,0}^3 - 4 w_3 z_{1,0} z_{1,1}^2 + 2 z_{1,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.38)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} u_3^2 x_4 (2 \zeta_1 + 2 \zeta_7 + 5 \zeta_{13}) - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{27}{8} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) (\zeta_2 + \zeta_3) \\
& - \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 - \frac{3}{4} u_3 x_5 (5 \zeta_6 - 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} + 2 \zeta_{17}) \\
& + \left( \frac{9}{8} u_3^2 - \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_8 + \left( \frac{9}{8} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_9 \\
& = N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( 2 w_3^2 z_{1,0}^2 - 2 w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - 2 w_3 z_{1,1}^2 + 2 z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.39)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8} u_3^2 x_4 (2 \zeta_1 + 2 \zeta_7 + 5 \zeta_{13}) - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_2 \\
& + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \left( 12 u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 \\
& + \left( \frac{9}{32} u_3^2 + \frac{15}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{9}{16} u_3^2 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_8 + \frac{9}{32} u_3^2 (2 \zeta_9 + \zeta_{12}) \\
& - \frac{3}{8} u_3 x_1 (2 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15}) + \left( \frac{9}{32} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = \frac{3}{2} u_3^2 x_4^2 - \frac{3}{2} u_3 x_5^2 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( 2 w_3^2 z_{1,0}^2 \right. \\
& \quad \left. - 3 w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - w_3 z_{1,1}^2 + z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.40)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{8} u_3^2 \right) \zeta_1 - \left( \frac{51}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 - \left( \frac{33}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 \right. \\
& \left. - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \frac{3}{4} u_3 x_1 (10 \zeta_6 - 2 \zeta_8 - 5 \zeta_{14} - 2 \zeta_{17}) + \frac{9}{16} u_3^2 (2 \zeta_7 + \zeta_{13}) \\
& = 3 u_3^2 x_4 - 3 u_3 x_1 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( 2 w_3^2 z_{1,0} \right. \\
& \quad \left. - 2 w_3 z_{0,1} z_{1,1} - 2 w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + 2 z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} \right)
\end{aligned}$$

(C.41)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{63}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \left( 12 u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 \\
& + \left( \frac{39}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \frac{3}{8} u_3 x_1 \left( 5 \zeta_6 + 2 \zeta_8 - 2 \zeta_9 - 5 \zeta_{12} \right. \\
& \left. + 5 \zeta_{14} + 2 \zeta_{17} \right) + \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 + \left( \frac{9}{32} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = 3 u_3^2 x_4 - \frac{3}{2} u_3 x_1 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( 2 w_3^2 z_{1,0} \right. \\
& \quad \left. - 3 w_3 z_{0,1} z_{1,1} - w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.42)

**C<sub>E</sub>-L<sub>0,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{4} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_2 + 2 \zeta_3 + 5 \zeta_6 + 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 + 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} - 4 \zeta_{17} \right) + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_4 + \left( \frac{45}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_5 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \left( 2 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15} \right) \\
& = N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( - 2 w_3^2 z_{1,0}^3 + 4 w_3 z_{1,0} z_{1,1}^2 - 2 z_{1,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.43)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} u_3^2 x_4 \left( \zeta_1 + \zeta_7 + \zeta_{13} \right) + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{16} u_3^2 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{9}{16} u_3^2 \right. \\
& \left. - \frac{15}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_3 + \left( \frac{27}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 + \left( 3 \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{8} u_3^2 + \frac{15}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) + \frac{9}{4} u_3 x_1 \left( \zeta_{10} + 2 \zeta_{15} \right) \\
& - \left( \frac{9}{8} u_3^2 + \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) + \left( \frac{9}{8} u_3^2 - \frac{3}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = - \frac{9}{2} u_3^2 x_4^2 + 6 u_3 x_1 x_4 x_5 - \frac{3}{2} u_3 x_5^2 - 6 x_2 x_5^2 + 6 x_1 x_5 x_7 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( - 2 w_3^2 z_{1,0}^2 + \frac{10}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{2}{3} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{2}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{4}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.44)

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} u_3^2 x_4 \left( 5 \zeta_1 + 5 \zeta_7 + 11 \zeta_{13} \right) + \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{81}{32} u_3^2 + \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_2 + \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{81}{32} u_3^2 \right. \\
& - \frac{21}{8} u_3 x_5 \left. \right) \zeta_3 + \left( \frac{87}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 - \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{9}{32} u_3^2 + \frac{15}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{27}{32} u_3^2 - \frac{15}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_8 - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{3}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_9 - \frac{3}{8} u_3 x_1 \left( \zeta_{10} + \zeta_{15} \right) \\
& + \left( \frac{9}{32} u_3^2 - \frac{3}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} + \left( \frac{9}{32} u_3^2 + \frac{33}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} + \frac{15}{8} u_3 x_5 \zeta_{17} \\
& = \frac{3}{4} u_3^2 x_4^2 - 3 u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{9}{4} u_3 x_5^2 + 3 x_2 x_5^2 - 3 x_1 x_5 x_7 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( -2 w_3^2 z_{1,0}^2 + \frac{7}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} + \frac{5}{3} w_3 z_{1,1}^2 - \frac{5}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.45)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{81}{16} u_3^2 + \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 + \left( \frac{21}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{4} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 \\
& - \left( \frac{57}{4} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \left( \frac{39}{2} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - 2 N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{27}{16} u_3^2 - \frac{9}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \frac{3}{4} u_3 x_1 \left( \zeta_8 - 2 \zeta_9 - 2 \zeta_{12} + \zeta_{14} + \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{9}{16} u_3^2 + \frac{9}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = -3 u_3^2 x_4 - 6 u_3 x_1^2 x_4 + \frac{9}{2} u_3 x_1 x_5 - 6 x_1^2 x_7 + 6 x_1 x_2 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( -2 w_3^2 z_{1,0} + \frac{10}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{2}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{2}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{4}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.46)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{63}{32} u_3^2 - \frac{3}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_1 + \left( \frac{105}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 \\
& + \left( \frac{51}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{93}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{8} u_3 x_4 - N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& - \left( \frac{45}{32} u_3^2 + \frac{3}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_7 + \frac{3}{8} u_3 x_1 \left( 5 \zeta_8 - 4 \zeta_9 - 7 \zeta_{12} + 11 \zeta_{14} + 5 \zeta_{17} \right) \\
& - \left( \frac{27}{32} u_3^2 + \frac{3}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = -3 u_3^2 x_4 + 3 u_3 x_1^2 x_4 + \frac{3}{4} u_3 x_1 x_5 + 3 x_1^2 x_7 - 3 x_1 x_2 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( -2 w_3^2 z_{1,0} + \frac{7}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{5}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} - \frac{5}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} - \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.47)

**C<sub>E</sub>-L<sub>+,s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_2 + 2 \zeta_3 + 5 \zeta_6 + 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 + 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} - 4 \zeta_{17} \right) - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_4 - \left( \frac{15}{4} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_5 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \left( 2 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15} \right) \\
& = N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} w_3^2 z_{1,0}^3 - \frac{4}{3} w_3 z_{1,0} z_{1,1}^2 + \frac{2}{3} z_{1,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.48)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} u_3^2 x_4 \left( 7 \zeta_1 + 7 \zeta_7 + 13 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{1}{16} u_3^2 + \frac{7}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_2 \\
& + \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{1}{16} u_3^2 + \frac{35}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \left( \frac{11}{3} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 \\
& + \left( \beta_0 u_3^2 - \frac{1}{8} u_3^2 + \frac{65}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{1}{16} u_3^2 - \frac{7}{12} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 + \zeta_9 \right) \\
& + \frac{1}{12} u_3 x_1 \left( \zeta_{10} - 2 \zeta_{15} \right) - \left( \frac{1}{8} u_3^2 + \frac{13}{12} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_{12} + \zeta_{14} \right) - \left( \frac{1}{8} u_3^2 + \frac{7}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = -\frac{1}{6} u_3^2 x_4^2 + 2 u_3 x_1 x_4 x_5 - \frac{11}{6} u_3 x_5^2 - 2 x_2 x_5^2 + 2 x_1 x_5 x_7 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( \frac{2}{3} w_3^2 z_{1,0}^2 - \frac{10}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{2}{9} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{2}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{4}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.49)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24} u_3^2 x_4 \left( 5 \zeta_1 + 5 \zeta_7 + 17 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{25}{32} u_3^2 + \frac{5}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_2 \\
& - \left( \frac{1}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{25}{32} u_3^2 + \frac{29}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_3 - \left( \frac{97}{24} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_4 \\
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 - \frac{5}{32} u_3^2 + \frac{25}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{11}{32} u_3^2 - \frac{5}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_8 + \left( \frac{11}{32} u_3^2 + \frac{13}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_9 \\
& - \frac{1}{24} u_3 x_1 \left( 7 \zeta_{10} + 13 \zeta_{15} \right) + \left( \frac{5}{32} u_3^2 + \frac{7}{6} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} + \left( \frac{5}{32} u_3^2 - \frac{17}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} \\
& - \left( \frac{1}{8} u_3^2 + \frac{5}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_{17} \\
& = \frac{7}{12} u_3^2 x_4^2 - u_3 x_1 x_4 x_5 + \frac{5}{12} u_3 x_5^2 + x_2 x_5^2 - x_1 x_5 x_7 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( \frac{2}{3} w_3^2 z_{1,0}^2 - \frac{7}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} - \frac{5}{9} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{5}{9} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} + \frac{1}{9} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.50)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{25}{16} u_3^2 - \frac{1}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \left( \frac{13}{3} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 \\
& + \left( \frac{17}{12} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \left( \frac{19}{6} u_3 x_1 - \frac{5}{4} u_3 x_4 - \frac{2}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& + \left( \frac{11}{16} u_3^2 + \frac{1}{12} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \frac{1}{12} u_3 x_1 \left( 7 \zeta_8 - 14 \zeta_9 - 26 \zeta_{12} + 13 \zeta_{14} + 7 \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{5}{16} u_3^2 - \frac{1}{6} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = u_3^2 x_4 - 2 u_3 x_1^2 x_4 + \frac{5}{6} u_3 x_1 x_5 - 2 x_1^2 x_7 - x_1 x_2 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( \frac{2}{3} w_3^2 z_{1,0} - \frac{10}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{2}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{2}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{4}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.51)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{1}{2} \beta_0 u_3^2 + \frac{23}{32} u_3^2 + \frac{7}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_1 - \left( \frac{95}{24} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_2 \\
& - \left( \frac{11}{24} u_3 x_1 - \frac{5}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{6} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 - \left( \frac{23}{24} u_3 x_1 - \frac{5}{8} u_3 x_4 - \frac{1}{3} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_6 \\
& + \left( \frac{13}{32} u_3^2 - \frac{7}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \frac{1}{24} u_3 x_1 \left( 5 \zeta_8 + 8 \zeta_9 + 11 \zeta_{12} + 17 \zeta_{14} + 5 \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{1}{32} u_3^2 - \frac{13}{24} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = 3 u_3^2 x_4 + u_3 x_1^2 x_4 - \frac{17}{12} u_3 x_1 x_5 + x_1^2 x_7 - x_1 x_2 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \\
& \quad \cdot \left( \frac{2}{3} w_3^2 z_{1,0} - \frac{7}{9} w_3 z_{0,1} z_{1,1} - \frac{5}{9} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} + \frac{5}{9} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{1}{9} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.52)

**C<sub>E</sub>-L<sub>-s</sub>-Gleichungen:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} u_3^2 x_4 \left( 2 \zeta_1 + 2 \zeta_7 + 5 \zeta_{13} \right) - \left( \frac{15}{16} u_3^2 + \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_2 - \left( \frac{3}{4} \beta_0 u_3^2 + \frac{15}{16} u_3^2 + u_3 x_5 \right) \zeta_3 \\
& + \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 2 \zeta_4 + 2 \zeta_{10} + 5 \zeta_{15} \right) - \left( \frac{3}{32} u_3^2 + \frac{5}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_6 + \left( \frac{3}{16} u_3^2 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \left( \zeta_8 + \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{3}{16} u_3^2 + \frac{1}{2} u_3 x_5 \right) \zeta_9 - \left( \frac{3}{32} u_3^2 - \frac{5}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_{12} - \left( \frac{3}{32} u_3^2 + \frac{5}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{14} \\
& = -\frac{1}{2} u_3^2 x_4^2 + \frac{1}{2} u_3 x_5^2 - 3 x_2 x_5^2 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( \frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,0} z_{1,1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} w_3 z_{1,1}^2 + \frac{1}{3} z_{0,1} z_{1,1} z_{1,4} - \frac{1}{3} z_{0,4} z_{1,1}^2 \right)
\end{aligned}$$

(C.53)

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{15}{16} u_3^2 + \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_1 + \frac{1}{8} u_3 x_1 \left( 2 \zeta_2 - 25 \zeta_6 + 2 \zeta_8 + 2 \zeta_9 + 5 \zeta_{12} + 5 \zeta_{14} + 2 \zeta_{17} \right) \\
& + \left( \frac{35}{8} u_3 x_1 - \frac{15}{16} u_3 x_4 - \frac{1}{2} N_F u_3 z_{1,0} \right) \zeta_3 + \left( \frac{3}{16} u_3^2 - \frac{1}{4} u_3 x_5 \right) \zeta_7 - \left( \frac{3}{32} u_3^2 + \frac{5}{8} u_3 x_5 \right) \zeta_{13} \\
& = \frac{1}{2} u_3 x_1 x_5 + N_F \left( \frac{u_3}{w_3} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} w_3 z_{0,1} z_{1,1} + \frac{1}{3} w_3 z_{0,1}^2 z_{1,0} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} z_{0,1} z_{0,4} z_{1,1} + \frac{1}{3} z_{0,1}^2 z_{1,4} \right)
\end{aligned}$$

(C.54)

## C.2 „Perturbative“ Divergenzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A,0,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \frac{1}{u_3} \left( -\frac{45}{4}x_1\zeta_1 + \left(\frac{99}{4}x_1 - \frac{15}{8}x_4 - N_F z_{1,0}\right) (\zeta_7 - \zeta_{13}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{63}{2}x_1^2 \right) + \frac{1}{u_3^2} 27x_1^2x_2 \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.55}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A,+0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \frac{1}{u_3} \left( -\frac{15}{4}x_1\zeta_1 - \left(\frac{13}{4}x_1 - \frac{5}{8}x_4 - \frac{1}{3}N_F z_{1,0}\right) (\zeta_7 + \zeta_{13}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{21}{2}x_1^2 \right) + \frac{1}{u_3^2} 9x_1^2x_2 \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.56}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{B,0,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \frac{1}{u_3} \left( -\frac{45}{4}x_1\zeta_1 - \left(\frac{9}{8}x_1 - \frac{15}{16}x_4 - \frac{1}{2}N_F z_{1,0}\right) \zeta_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{27}{2}x_1 - \frac{15}{8}x_4 - N_F z_{1,0}\right) \zeta_{13} - \frac{63}{2}x_1^2 \right) + \frac{1}{u_3^2} 27x_1^2x_2 \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.57}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{B,+0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \frac{1}{u_3} \left( -\frac{15}{4}x_1\zeta_1 + \left(\frac{43}{8}x_1 - \frac{5}{16}x_4 - \frac{1}{6}N_F z_{1,0}\right) \zeta_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(7x_1 - \frac{5}{8}x_4 - \frac{1}{3}N_F z_{1,0}\right) \zeta_{13} - \frac{21}{2}x_1^2 \right) + \frac{1}{u_3^2} 9x_1^2x_2 \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.58}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{C,-0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ \frac{1}{u_3} \left( \left(\frac{69}{8}x_1 - \frac{15}{16}x_4 - \frac{1}{2}N_F z_{1,0}\right) \zeta_7 - \frac{15}{4}x_1\zeta_{13} \right) \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.59}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{D,-,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ 6 - 2N_F + \frac{1}{u_3} \left( \left( -\frac{51}{4}x_1 + \frac{15}{8}x_4 + N_F z_{1,0} \right) \zeta_1 - \frac{3}{2}x_1 \zeta_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{15}{4}x_1 \zeta_{13} + 3x_1^2 \right) + N_F \left( \frac{1}{w_3} 4z_{0,1}^2 - \frac{1}{w_3^2} 2z_{0,1}^2 z_{1,1} \right) \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{E,0,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ -6 + 2N_F + \frac{1}{u_3} \left( \left( \frac{207}{16}x_1 - \frac{15}{8}x_4 - N_F z_{1,0} \right) \zeta_1 + \frac{3}{2}x_1 \zeta_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{15}{4}x_1 \zeta_{13} - 3x_1^2 \right) - N_F \left( \frac{1}{w_3} 4z_{0,1}^2 - \frac{1}{w_3^2} 2z_{0,1}^2 z_{1,1} \right) \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{E,+,0}(\Lambda(\epsilon); \epsilon) &= \left[ 2 - \frac{2}{3}N_F + \frac{1}{u_3} \left( \left( -\frac{17}{4}x_1 + \frac{5}{8}x_4 + \frac{1}{3}N_F z_{1,0} \right) \zeta_1 - \frac{1}{2}x_1 \zeta_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{5}{4}x_1 \zeta_{13} + x_1^2 \right) + N_F \left( \frac{1}{w_3} \frac{4}{3}z_{0,1}^2 - \frac{1}{w_3^2} \frac{2}{3}z_{0,1}^2 z_{1,1} \right) \right] \\
&\quad \cdot \left( \frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{C.62}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Ali, F. Barreiro: *High Energy Electron-Positron Physics*; World Scientific (1988)
- [2] M. Baker, C. Lee: *Overlapping-divergence-free Skeleton Expansion in Non-Abelian Gauge Theories*; Phys. Rev. **D 15** (1977) 2201
- [3] J. D. Barrow: *Theorien für alles*; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1992)
- [4] P. Becher, M. Böhm, H. Joos: *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*; Teubner Verlag, Stuttgart (1981)
- [5] N. Blachmann, M. J. Mossinghoff: *Maple griffbereit*; Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden (1994)
- [6] J. Collins: *Renormalization*; Cambridge University Press, Cambridge (1984)
- [7] J. M. Cornwall, R. E. Norton; Phys. Rev. **D 8** (1973) 3338
- [8] L. Driesen: *Erste Ansätze in modifizierter Störungstheorie für Gluonium-Bindungszustände in der quarkfreien Quantenchromodynamik*; Diplomarbeit an der WWU Münster (1993)
- [9] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl: *Extended QCD Perturbation Theory: Three-gluon and Ghost Vertices* (in Vorbereitung)
- [10] L. Driesen: *1-Schleifen-Divergenzen für den reduzierten 4-Gluon-Vertex in erster nichtperturbativer Iteration* (in Vorbereitung)
- [11] J. Fromm: *Dyson-Schwinger-Gleichung des Dreigluonvertex und Bestimmung des effektiven Gluonpropagators einer erweiterten Störungstheorie der QCD*; Diplomarbeit an der WWU Münster (1996)
- [12] W. Greiner, J. Reinhardt: *Theoretische Physik Band 7: Quantenelektrodynamik*; Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main (1984)
- [13] D. J. Gross, F. Wilczek: *Ultraviolet Behaviour of Non-Abelian Gauge Theories*; Phys. Rev. Letters **30** (1973) 1343
- [14] U. Häbel, R. Könning, H.-G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard: *A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD*; Z. Physik **A 336** (1990) 423 bzw. 435
- [15] C. Itzykson, J. B. Zuber: *Quantum Field Theory*; McGraw-Hill, New York (1980)

- [16] R. Jackiw, K. Johnson; *Phys. Rev. D* **8** (1973) 2386
- [17] J. Kuhrs: *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*; Dissertation an der WWU Münster (1997)
- [18] G. Löffler: *Die Vier-Gluon-Amplitude im Rahmen eines nicht-störungstheoretischen Lösungsansatzes der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD*; Dissertation an der WWU Münster (1992)
- [19] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff; *Nuclear Physics B* **413** (1994) 481
- [20] D. Lurie: *Particles and Fields*; McGraw-Hill, New York (1966)
- [21] I. Montvay, G. Münster: *Quantum Fields on a Lattice*; Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [22] T. Muta: *Foundations of Quantum Chromodynamics, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*; Singapore, World Scientific (1987)
- [23] O. Nachtmann: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*; Vieweg Verlag, Braunschweig (1981)
- [24] P. Pascual, R. Tarrach: *Renormalization for the Practitioner*; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (1984)
- [25] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: *Hadron Properties from QCD Sum Rules*; *Phys. Rep.* **A 127** (1985) 1
- [26] H.-G. Reusch: *Strahlungsübergänge und Zerfallsprozesse an einem phänomenologischen Meson-Modell*; Diplomarbeit an der WWU Münster (1986)
- [27] H.-G. Reusch: *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*; Dissertation an der WWU Münster (1989)
- [28] R. J. Rivers: *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*; Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [29] L. Ryder: *Quantum Field Theory*; Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- [30] M. Schmelling: *Status of the Strong Coupling Constant*; Plenary talk given at XXVIII International Conference on High Energy Physics; Warsaw 1996, e-print archive: hep-ph/9604363
- [31] D.V. Shirkov, I. L. Solovtsov: *A Analytic QCD Running Coupling with Finite IR Behaviour and Universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  Value*; e-print archive: hep-ph/9604363
- [32] M. Spratte: *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfenergie in Einschleifen-Näherung*; Diplomarbeit an der WWU Münster (1995)
- [33] M. Stingl; Unveröffentlichte Notizen zum 4-Gluon-Vertex.
- [34] M. Stingl; Persönliche Mitteilungen zu „entschärften“ 1-Teilchen-Austausch-Diagrammen.

- [35] M. Stingl; Unveröffentlichte Notizen zu der Berechnung führender 2-Schleifen-Divergenzen.
- [36] M. Stingl: *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*; Z. Physik **A 353** (1996) 423
- [37] A. F.-J. Streibl: *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*; Dissertation an der WWU Münster (1996)
- [38] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov; Nucl. Phys. **B 147** (1979) 385, 448
- [39] G. t'Hooft: *Renormalization of Massless Yang-Mills-Fields*; Nuclear Physics **B 33** (1971) 173
- [40] G. t'Hooft, M. Veltman; Nuclear Physics **B 61** (1973) 455
- [41] C. N. Yang, R. Mills; Phys. Rev. **96** (1954) 191
- [42] W. Zimmermann; Nuovo Cim. **13** (1959) 503, **16** (1960) 690



# Schlußwort

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt und beraten haben; vor allem danke ich Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für die Anregung zu diesem interessanten Thema und für seine ständige Bereitschaft zu hilfreichen Gesprächen.

Bei meiner Arbeitsgruppe und meinen Zimmerkollegen bedanke ich mich für die gute Arbeitsatmosphäre, die sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Dies betrifft vor allem Dr. Jürgen Kuhrs, dessen Dissertation die vorliegende Arbeit in idealer Weise ergänzt und so zu vielen anregenden Diskussionen geführt hat.

Außerdem danke ich meiner Mutter Dr. phil. Irma Driesen für das Korrekturlesen und meiner Freundin Angelika Mertin für ihre Geduld während der Zeit des Zusammenschreibens.



# Lebenslauf

<b>Name</b>	Lutz Driesen
<b>geboren</b>	am 16. 7. 1965 in Osterforde
<b>Eltern</b>	Helmut Driesen Dr. phil. Irma Driesen, geb. Brunken
<b>Familienstand</b>	ledig
<b>Schulbildung</b>	
1972 – 1976	Besuch der Grundschule Haarentor in Oldenburg
1976 – 1978	Besuch der Orientierungsstufe Eversten in Oldenburg
1978 – 1985	Besuch des Herbart-Gymnasiums in Oldenburg
12. 6. 1985	Allgemeine Hochschulreife (Abitur)
<b>Militärdienst</b>	
1. 7. 1985 – 30. 9. 1986	Grundwehrdienst in Varel bzw. Oldenburg
<b>Studium/Tätigkeiten</b>	
Oktober 1986	Aufnahme des Grundstudiums der Physik an der Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg
2. 11. 1989	Vordiplom der Physik an der Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg
Oktober 1989	Aufnahme des Hauptstudiums der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

November 1991	Beginn der Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl über das Thema: <i>Erste Ansätze in modifizierter Störungstheorie für Gluonium-Bindungszustände in der quarkfreien Quantenchromodynamik</i>
1. 3. 1992 – 30. 9. 1993	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
24. 9. 1993	Diplom der Physik an der WWU Münster
Oktober 1993	Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1. 10. 1993 – 31. 7. 1995	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
seit 1. 8. 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster







