

Erste Ansätze in  
modifizierter Störungstheorie  
für Gluonium-Bindungszustände in der  
quarkfreien Quantenchromodynamik

Als Diplomarbeit vorgelegt  
von

Lutz Driesen

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

7. April 1994

*Es wäre nach Ansicht einiger Physiker wünschenswert,  
...zur Vorstellung einer objektiven, realen Welt  
zurückzukehren, deren kleinste Teile in der gleichen  
Weise objektiv existieren wie Steine oder Bäume,  
gleichgültig, ob wir sie beobachten oder nicht. Dies ist  
eben nicht oder nur zum Teil möglich. [1]*

Werner Heisenberg

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Reduzibilitätsanalyse und Bethe-Salpeter-Gleichung</b>	<b>6</b>
1.1 Kinematik der 4-Punkt-Funktion . . . . .	6
1.2 Reduzibilitätsanalyse . . . . .	8
1.3 Die homogene Bethe-Salpeter-Gleichung im euklidischen Impulsraum	9
<b>2 Separation der Farbdynamik</b>	<b>12</b>
2.1 Multiplikationstabellen der Farbtensoren . . . . .	12
2.2 Erste Entkopplung des Gleichungssystems . . . . .	14
2.3 Die Clebsch-Gordan-Serie $\{8\} \otimes \{8\}$ . . . . .	17
2.3.1 Entwicklung nach Farbmultipletts . . . . .	17
2.3.2 Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Basiswechsel bezüglich der Nebenquantenzahlen . . . . .	17
2.3.3 Bestimmung der Koeffizienten $U_j^M$ . . . . .	20
2.3.4 Zweite Entkopplung . . . . .	26
2.4 Zusammenfassung . . . . .	28
<b>3 Eliminierung der Geister-Beiträge in Ordnung <math>(g^0)</math></b>	<b>29</b>
<b>4 Ansätze für die Tensor- und die Impulsstruktur</b>	<b>38</b>
4.1 Notationen für die Lorentztensoren . . . . .	38
4.2 Die erste Stufe der faktorisierenden, rationalen Approximanten . . . . .	39
4.3 Der Gluonpropagator in Landau-Eichung . . . . .	42
4.4 Der Residuumentensor . . . . .	42
4.5 Der Bethe-Salpeter-Kern . . . . .	45
<b>5 Ausführung der Impulsintegration</b>	<b>54</b>
5.1 Der $1/g^2$ -Mechanismus . . . . .	54
5.2 Logarithmisch divergente Integrale . . . . .	55

<b>6</b>	<b>Projektionen und Koeffizientenvergleich</b>	<b>58</b>
6.1	Projektion des $\Phi_0$ -Anteils und Koeffizientenvergleich I . . . . .	58
6.2	Projektion des $\Phi_1$ -Anteils und Koeffizientenvergleich II . . . . .	63
6.3	Projektion des $\Phi_2$ -Anteils und Koeffizientenvergleich III . . . . .	64
6.4	Diskussion . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden</b>	<b>71</b>
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Nichtverschwindende Strukturkonstanten der SU(3)</b>	<b>78</b>
<b>B</b>	<b>Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Isoskalare Faktoren</b>	<b>79</b>
B.1	Clebsch-Gordan-Koeffizienten der SU(2) . . . . .	79
B.2	Isoskalare Faktoren $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M \\ Y_1 I_1 & Y_2 I_2 & Y I \end{pmatrix}$ . . . . .	81
<b>C</b>	<b>Crossing-Tabellen</b>	<b>82</b>
C.1	Crossing-Algebra der Tensoren . . . . .	82
C.2	Crossing-Algebra der Impulsfunktionen . . . . .	84
<b>D</b>	<b>Berechnung der divergenten Anteile der Impulsintegrale</b>	<b>86</b>
D.1	Das Integral $\mathcal{I}$ . . . . .	87
D.2	Das Integral $\mathcal{J}$ . . . . .	90
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>94</b>
	<b>Schlußwort</b>	<b>95</b>

# Einleitung

Zur Beschreibung der starken Wechselwirkung zwischen den Bausteinen des Kerns hat sich — spätestens mit dem Beweis ihrer Renormierbarkeit [2] — die Quantenchromodynamik etabliert. Sie ist eine nach dem Prinzip der minimalen eichinvarianten Kopplung konstruierte Eichfeldtheorie zur lokalen  $SU(3)$ -Symmetriegruppe, der sogenannten Farbgruppe. Neben  $N_F$  Fermion-Familien (Quark-Flavours), die jede für sich Farbtupletts darstellen, enthält die Theorie ein Farboktett von Eichvektorfeldern (Gluonen), die die Wechselwirkung vermitteln. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik koppeln die Gluonen dabei aufgrund des nichtabelschen Charakters der Theorie auch untereinander, was Gluonium-Bindungszustände, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen sollen, erst möglich macht; die Selbstwechselwirkung ist außerdem — bei einer nicht zu großen Zahl von Quark-Flavours — verantwortlich für die asymptotische Freiheit der Theorie, nach der die effektive Kopplungskonstante für sehr kleine Abstände verschwindet [3].

Die Bindungszustände der Gluonen unterscheiden sich nicht nur bezüglich ihrer Spin- und Paritätsquantenzahlen, sondern auch bezüglich ihrer erhaltenen Farbquantenzahlen. Hierbei sind vor allem die Kopplungen zu Farbsingulett- und Farboktettzuständen von besonderem Interesse:

Die farbneutralen "Gluon-Bälle" sind zwar experimentell sehr schwer zu identifizieren, da sie im allgemeinen mit fermionischen Bindungszuständen (Mesonen) mischen; ihre Massen konnten aber in rein gluonischen Gitter-Theorien mit Hilfe von Hochtemperatur-Entwicklungen und Monte-Carlo-Methoden berechnet werden [4] [23] [24] [25].

Die Kopplung zweier Gluonen zu einem stabilen antisymmetrischen Farboktett dagegen entspreche der Existenz freier Gluonen; die Confinement-Hypothese [5] [7] drückt diesbezüglich allerdings den Sachverhalt aus, daß in der Natur bislang keine solchen Farbladung tragenden Teilchen beobachtet werden konnten. Leider ist eine zufriedenstellende Erklärung dieses Phänomens auf der Grundlage der Dynamik bis heute noch nicht gelungen; dazu wäre eine vollständige Behandlung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den allgemeinen 4-Gluon-Vertex oder eine Lösung der hier nicht behandelten inhomogenen Bethe-Salpeter-Gleichung im antisymmetrischen Farboktett-Kanal nötig.

Vielleicht kann diese Arbeit, die sich im wesentlichen auf die Farbsingulett-Kopplung beschränkt, trotz ihrer starken Näherungen auch zum Verständnis des Confinements beitragen.

Obwohl die störungstheoretische Behandlung der QCD in Hochenergie-Prozessen wie der tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung sehr erfolgreich war [6], mußte ihr Versagen im Niederenergiebereich sehr schnell akzeptiert werden. Der heute überwiegend beschrittene Weg zu einer nichtstörungstheoretischen Behandlung besteht in der numerischen Simulation der QCD auf dem Gitter. Will man bei einer "Kontinuums-", d. h. mehr analytischen Behandlung bleiben, so bietet sich als *ein* möglicher Ausweg die Erweiterung der Basisvertizes der QCD durch faktorisierende, rationale Approximanten an [7] [12] [15]. Für diese neuen Ansätze fordert man, daß sie für große Impulse in ihre rein störungstheoretischen Gegenstücke übergehen und so die perturbative Renormierbarkeit der Theorie sowie die "naive" asymptotische Freiheit garantieren.

Das Schema der faktorisierenden, rationalen Approximanten wurde in den letzten Jahren durch Resultate der Operatorproduktentwicklung (OPE) motiviert; es ist in der Lage, den Infrarotbereich der Theorie — d.h. die Dynamik bei kleinen Impulsen bzw. bei großen Abständen — annähernd zu beschreiben. Es stellt außerdem — jedenfalls approximativ — eine selbstkonsistente Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD dar [15] und vermeidet wegen seiner vom Ursprung verschobenen Polstruktur Schwierigkeiten mit Infrarot-Divergenzen.

In dieser Arbeit soll versucht werden, mit Hilfe der implizit crossing-symmetrischen Bethe-Salpeter-Integralgleichung im Rahmen der — im obigen Sinne — erweiterten Störungstheorie Aussagen über den Bindungspol-Anteil der amputierten Vier-Gluon-Amplitude — den sogenannten Residuumentensor — in einem der Mandelstam-Känale zu gewinnen. Dabei wollen wir uns auf die Ordnung  $(0, 1)$  der erweiterten Störungsrechnung, d. h. auf den ersten Term der  $g^2$ -Reihe, auf die erste Stufe des Approximationsschemas und auf das 1-Schleifen-Niveau der Integralgleichung, sowie den Farbsingulett-Kanal beschränken.

Wir werden auch der Frage nachgehen, ob sich die Masse des farbneutralen "Gluon-Balles", die in unsere Ansätze in Form einer parametrisierten Polstelle bezüglich des Quadrats des erhaltenen Gesamtimpulses eingeht, auf diesem Niveau näher bestimmen läßt; frühere Arbeiten [7] lassen dies aber als sehr unwahrscheinlich erscheinen.

Der weitere Aufbau der Arbeit sieht wie folgt aus:

Wir beginnen mit Konventionen für die 4-Gluon-Amplitude, um dann die Bethe-Salpeter-Gleichung für ihren Bindungspol-Anteil im  $s$ -Kanal einzuführen. Im Ansatz für den Bethe-Salpeter-Kern werden wir dabei keine Skelettgraphentwicklung, sondern eine aus der Crossing-Symmetrie resultierende Darstellung benutzen [7] [8].

Im zweiten Kapitel werden wir die Farbdynamik der Integralgleichung vollständig abspalten, indem wir die Integralkerne nach einer Basis von Farbtensoren entwickeln und das gekoppelte Gleichungssystem für die Farbkomponenten der Kanal-amplitude durch zwei verschiedene Verfahren entkoppeln. Dazu sind keine Näherungen wie die Einschränkung auf den Bindungspol-Anteil oder die homogene Gleichung erforderlich, so daß die Resultate auch für spätere Arbeiten, die vielleicht die volle inhomogene Integralgleichung oder andere Farbkanäle behandeln werden, von großem Nutzen sein können.

Im dritten Kapitel wollen wir dann die Vernachlässigung der Fadde'ev-Popov-Geister im Rahmen dieser Arbeit begründen. Dies soll allein durch Betrachtungen zum Konvergenzverhalten von oberflächlich logarithmisch divergenten Schleifen geschehen; wir benötigen dazu allerdings neben der asymmetrischen Impulsstruktur des nackten, störungstheoretischen Geist-Geist-Gluon-Vertex auch den  $1/g^2$ -Mechanismus [7] [14], der erst später im fünften Kapitel eingeführt wird.

Bei Beschränkung auf den Farbsingulett-Kanal werden wir in den übrigen Kapiteln stark vereinfachte Ansätze für die Lorentz- und Impulsstruktur der 4-Punkt-Funktionen vorstellen, um anschließend das Schleifenintegral der Bethe-Salpeter-Gleichung zu berechnen und mittels eines Koeffizientenvergleichs Bedingungsgleichungen für die freien Parameter herzuleiten. Eine entscheidende Rolle wird auch hier der  $1/g^2$ -Mechanismus über die nichtperturbativen Logarithmen spielen [7] [14].

Bevor wir abschließend die wichtigsten Ergebnisse resümieren und Anregungen für zukünftige Arbeiten geben, wird im siebten Kapitel die sogenannte Normierungsbedingung der Bethe-Salpeter-Amplituden [10] [11] benutzt, um — entsprechend der statistischen Normierung der quantenmechanischen Wellenfunktionen — die letzten unbestimmten Parameter festzulegen.

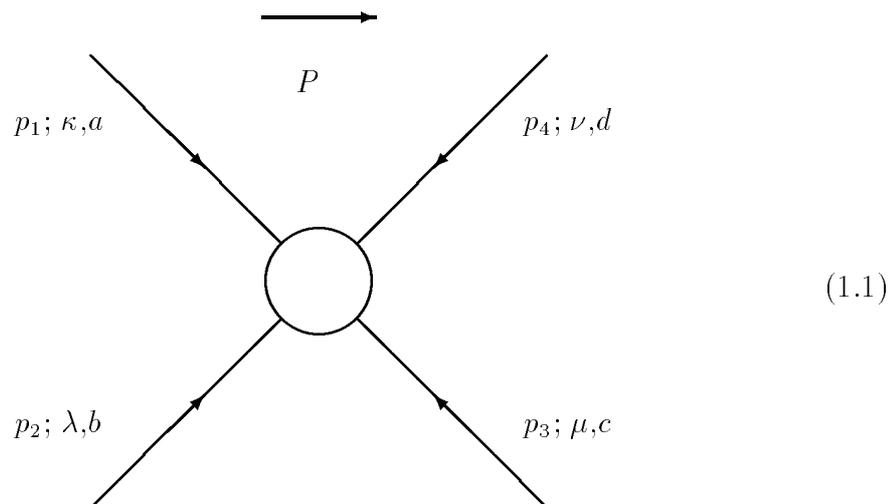
In den Anhängen finden sich in Form von Tabellen alle Größen, die bei den umfangreichen Rechnungen zur Isolierung der Farbdynamik benötigt wurden; außerdem wird die Crossing-Algebra der Tensoren und invarianten Impulsfunktionen zusammengestellt. Den Abschluß bildet die Berechnung der  $g^0$ -Anteile der auftretenden logarithmisch divergenten Impulsintegrale.

# Kapitel 1

## Reduzibilitätsanalyse und Bethe-Salpeter-Gleichung

### 1.1 Kinematik der 4-Punkt-Funktion

In diesem Kapitel sollen zunächst die später verwendeten Konventionen zur Kinematik der 4-Punkt-Funktion mit vier äußeren Gluonbeinen



eingeführt werden.

Wegen der Energie-Impuls-Erhaltung sind nur drei der vier Impulse linear unabhängig. Betrachtet man alle Impulse als einlaufend, so gilt:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad (1.2)$$

Um dies zu berücksichtigen und eine — im folgenden unvermeidliche — Auszeichnung des  $s$ -Kanals (siehe Pfeilrichtung im Bild) vorzunehmen, wählen wir als neuen

Variablensatz die Relativimpulse und den erhaltenen Gesamtimpuls in diesem Mandelstam-Kanal:

$$P := p_1 + p_2 = -(p_3 + p_4) \quad (1.3)$$

$$p := \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \quad (1.4)$$

$$p' := \frac{1}{2}(p_4 - p_3) \quad (1.5)$$

Die einlaufenden Impulse lassen sich umgekehrt auch durch die Relativimpulse und den Gesamtimpuls im  $s$ -Kanal ausdrücken:

$$p_1 = \frac{P}{2} - p \quad ; \quad p_2 = \frac{P}{2} + p \quad (1.6a)$$

$$p_3 = -\frac{P}{2} - p' \quad ; \quad p_4 = -\frac{P}{2} + p' \quad (1.6b)$$

Wir führen außerdem die Mandelstam-Variablen

$$s := P^2 \quad (1.7)$$

$$u := (p_1 + p_3)^2 \quad \left( = (p + p')^2 \right) \quad (1.8)$$

$$t := (p_1 + p_4)^2 \quad \left( = (p - p')^2 \right) \quad (1.9)$$

ein. Diese erfüllen die beiden Bedingungen

$$s + u + t = \sum_{i=1}^4 p_i^2 \quad (1.10)$$

$$u - t = 4pp' \quad . \quad (1.11)$$

Eine wichtige Eigenschaft der 4-Gluon-Amplitude ist die partielle Bosesymmetrie in jedem einzelnen Kanal. Dies bedeutet speziell für den  $s$ -Kanal eine Invarianz unter den folgenden drei Transformationen:

1. Vertauschung der ersten beiden Beine:

$$(p_1; \kappa, a) \longleftrightarrow (p_2; \lambda, b) \quad (1.12a)$$

$$(p \longleftrightarrow -p) \quad (1.12b)$$

2. Vertauschung der letzten beiden Beine:

$$(p_3; \mu, c) \longleftrightarrow (p_4; \nu, d) \quad (1.13a)$$

$$(p' \longleftrightarrow -p') \quad (1.13b)$$

3. Gleichzeitige Vertauschung von Bein 1 mit Bein 4 und von Bein 2 mit Bein 3:

$$\begin{pmatrix} p_1; \kappa, a \\ p_2; \lambda, b \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} p_4; \nu, d \\ p_3; \mu, c \end{pmatrix} \quad (1.14a)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ P \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -p' \\ -P \end{pmatrix} \quad (1.14b)$$

Eine partielle Boseantisymmetrie im  $s$ -Kanal sei durch einen Vorzeichenwechsel des betreffenden Terms der 4-Punkt-Funktion bei den ersten beiden Transformationen sowie durch die Invarianz unter der dritten Transformation definiert.

Da die partielle Bosesymmetrie im überzähligen Variablensatz (1.6a–1.6b) leichter zu erkennen ist, werden wir diesen in späteren Ansätzen für invariante Impulsfunktionen bevorzugen.

## 1.2 Reduzibilitätsanalyse

In diesem Abschnitt werden wir alle Impulsabhängigkeiten und sowohl Farb- als auch Lorentzindizes unterdrücken, da sie hier nicht benötigt werden. Wir beginnen mit einer Zerlegung der amputierten, zusammenhängenden 4-Punkt-Funktion  $T_4$ :

$$T_4 = K_s + A_s + X_s \quad (1.15)$$

Dabei faßt  $K_s$  alle im  $s$ -Kanal 1- und 2-Teilchen-irreduziblen Anteile von  $T_4$  zusammen, und  $A_s$  bezeichnet die 1-Teilchen-reduziblen d. h. 1-Gluon-Austauschgraphen im  $s$ -Kanal.

Zerlegt man die im  $s$ -Kanal 1-Teilchen-irreduzible, aber 2-Teilchen-reduzible Kanalampplitude  $X_s$  wiederum nach der Anzahl ihrer Reduzibilitätsstellen im  $s$ -Kanal, so entsteht eine geometrische Reihe, die sich aufsummieren läßt und die sogenannte Bethe-Salpeter-Gleichung im  $s$ -Kanal ergibt:

$$X_s = K_s \otimes (K_s + X_s) \quad (1.16)$$

Dies ist eine inhomogene Integralgleichung im Ortsraum oder im Impulsraum für jede Störungsordnung der allgemeinen 4-Punkt-Kanalampplitude  $X_s$  aus (1.15). Das Symbol " $\otimes$ " beschreibt im Falle von vier Gluonbeinen allerdings nicht nur ein Schleifenintegral über zwei innere Gluonlinien, sondern auch die Kontraktion von

Farbindizes und Lorentzindizes in dieser Schleife sowie einen Symmetriefaktor von  $1/2$ . Die exakte Behandlung nach den Feynman-Regeln der QCD [3] wird Thema des nächsten Abschnitts sein.

Da wir aus Gründen der Vereinfachung in dieser Arbeit allein die rein gluonische Theorie betrachten wollen, treten keine Fermionschleifen auf. Außerdem werden wir die unvermeidliche Geisterschleife schon jetzt unterdrücken. Eine Begründung für diese Vorgehensweise folgt im dritten Kapitel.

Der Bethe-Salpeter-Kern  $K_s$  läßt sich nach der Bethe-Salpeter-Theorie [7] [8] durch die Kanalampplituden in den gekreuzten Kanälen ausdrücken:

$$K_s = M_4 + A_u + A_t + X_u + X_t + \sum_i B_i \quad (1.17)$$

Hierbei bezeichnet  $M_4$  den in allen 3 Kanälen 1- und 2-Teilchen-irreduziblen Anteil von  $T_4$ , und  $\sum_i B_i$  beschreibt die sogenannten Boxgraphen, die hier die Rolle von Überzählungskorrekturen spielen.

In der nullten Ordnung der modifizierten Störungsrechnung, wie wir sie in dieser Arbeit benutzen werden, läßt sich der Kern  $M_4$  exakt durch den nackten, störungstheoretischen Vertex  $\Gamma_4^{(0)pert}$  ersetzen. Bei Beschränkung auf das 1-Schleifen-Niveau der Selbstkonsistenz lassen sich überdies die Box-Graphen-Beiträge wenn auch nicht im Kern  $K_s$  selbst, so doch nach Einsetzen desselben in die — eine weitere Schleife enthaltende — Bethe-Salpeter-Gleichung (1.16) unterdrücken [7].

Effektiv verwenden wir also folgenden Ausdruck für den Bethe-Salpeter-Kern:

$$K_s = \Gamma_4^{(0)pert} + A_u + A_t + X_u + X_t \quad (1.18)$$

### 1.3 Die homogene Bethe-Salpeter-Gleichung im euklidischen Impulsraum

In diesem Abschnitt soll die Bethe-Salpeter-Gleichung für den Bindungspolanteil der 4-Gluon-Kanalampplitude  $X_s$  als Integralgleichung im Impulsraum in ihrer vollen Tensorstruktur aufgeschrieben werden.

Wie sich in der Störungstheorie zeigt [3], tritt jede 4-Punkt-Funktion aufgrund der Basisvertizes der QCD mindestens mit einem Quadrat der nackten Kopplung  $g_0$  auf. Wir werden deshalb sowohl aus der Amplitude  $X_s$  als auch aus dem Kern  $K_s$  jeweils diesen Faktor  $g_0^2$  herausziehen.

Zur Isolierung des Bindungspol-Beitrags führen wir weiterhin eine Zerlegung der Kanalampplitude in einen Polterm und einen regulären Anteil bezüglich der Mandelstam-Variablen  $s$  durch:

$$X_{s,abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) = Z_{s,abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) + \frac{R_{s,abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P)}{P^2 + u''_{1,2}\Lambda^2} \quad (1.19)$$

Dabei werden zur Parametrisierung der Polstelle der dimensionslose Massenparameter  $u''_{1,2}$  und die renormierungsgruppeninvariante Massenskala der QCD

$$\Lambda^2(g) = \nu_0^2 \exp\left\{ -\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g}\right)^2 [1 + \mathcal{O}(g^2)] \right\} \quad (1.20)$$

benutzt [7] [12]. In (1.20) bezeichnet  $\nu_0$  die im Renormierungsverfahren auftretende beliebige Massenskala und  $\beta_0$  den ersten Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion [3], der später im fünften Kapitel erneut auftauchen wird.

Berücksichtigen wir, daß der Bethe-Salpeter-Kern  $K_s$  definitionsgemäß keinen Bindungspol-Anteil besitzt, so reduziert sich die Integralgleichung (1.16) bei Bildung des Residuums an der Stelle  $P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2$  auf die zugehörige homogene Gleichung.

Die Feynman-Regeln der QCD [3] führen dann — unter Beachtung des Symmetriefaktors 1/2 für die Gluonschleife — auf folgende graphische Darstellung dieser Gleichung:

The diagram shows the following components:

- Top Diagram:** A central circle labeled  $\mathbf{R}_s$  with four external lines. The top-left line is labeled  $p_1; \kappa, a$ , the top-right  $p_4; \nu, d$ , the bottom-left  $p_2; \lambda, b$ , and the bottom-right  $p_3; \mu, c$ . Each line has a tick mark at its outer end.
- Equation:** An equals sign followed by  $\frac{1}{2} g_0^2 \cdot$ .
- Bottom Diagram:** Two circles,  $\mathbf{K}_s$  on the left and  $\mathbf{R}_s$  on the right. The left circle  $\mathbf{K}_s$  has two external lines:  $p_1; \kappa, a$  (top-left) and  $p_2; \lambda, b$  (bottom-left). The right circle  $\mathbf{R}_s$  has two external lines:  $p_4; \nu, d$  (top-right) and  $p_3; \mu, c$  (bottom-right). Two horizontal lines connect the circles: the top one is labeled  $\eta, f$  and  $Q_1$ , and the bottom one is labeled  $\zeta, e$  and  $Q_2$ . The right circle  $\mathbf{R}_s$  also has two internal lines labeled  $\rho, g$  and  $\sigma, h$  connecting to the  $Q_1$  and  $Q_2$  lines respectively.
- Vertical Line:** A vertical line to the right of the bottom diagram, with a tick mark at its bottom end. To its right is the label  $P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2$ .

(1.21)

Die Querstriche an den äußeren, einlaufenden Gluonbeinen sollen andeuten, daß es sich bei den beiden 4-Punkt-Funktionen um amputierte Größen handelt. Die Pfeile beschreiben wie in (1.1) die Impulsrichtung der Gluonlinien; sie bestimmen aber wegen der quadratischen Impulsabhängigkeit der Gluonpropagatoren nur die Formel

für die Energie-Impuls-Erhaltung (1.2) und können im weiteren weggelassen werden.

Die beiden Schleifenimpulse  $Q_1$  und  $Q_2$  müssen den Gesamtimpuls im  $s$ -Kanal tragen

$$Q_1 + Q_2 = P \quad ,$$

sind aber darüberhinaus frei wählbar. Wir entscheiden uns — in Anlehnung an die Konventionen des ersten Abschnitts — für die "symmetrische" Variante bezüglich des inneren Relativimpulses  $q$ :

$$Q_1 = \frac{P}{2} - q \quad (1.22a)$$

$$Q_2 = \frac{P}{2} + q \quad (1.22b)$$

Die analytische Form der homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung (1.21) lautet im euklidischen Impulsraum und in Landau-Eichung <sup>1</sup>:

$$R_{s,abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int d^D q / (2\pi)^D \\ K_{s,abef}^{\kappa\lambda\zeta\eta}(p, q; P) \\ D_{T,fg}^{\eta\rho} \left( \frac{P}{2} - q \right) D_{T,eh}^{\zeta\sigma} \left( \frac{P}{2} + q \right) \\ R_{s,ghcd}^{\rho\sigma\mu\nu}(q, p'; P) \end{array} \right\}_{P^2 = -u_{1,2}'' \Lambda^2} \quad (1.23)$$

Das Impulsintegral der Gluonschleife ist oberflächlich logarithmisch divergent für die Raum-Zeit-Dimension  $D = 4$  und wird später in dimensioneller Regularisierung mit  $\epsilon = 2 - D/2$  behandelt. Aus diesem Grund wurde in (1.23) ein Faktor  $\nu_0^{2\epsilon}$  eingefügt, der die — durch das  $D$ -dimensionale Impulsintegral verursachte — überzählige Massendimension der rechten Seite korrigiert und im Limes  $D \rightarrow 4$  verschwindet. Es wird dabei gerade die willkürliche Massenskala  $\nu_0$ , die schon in (1.20) auftritt, gewählt.

Die Struktur des Residuumentensors  $R_s$  werden wir im vierten Kapitel genauer diskutieren; dasselbe trifft auch auf die Ansätze für den Kern  $K_s$  und den transversalen Gluonpropagator  $D_T$  zu.

---

<sup>1</sup>Über gleiche Farb- und Lorentzindizes soll wie üblich summiert werden!

# Kapitel 2

## Separation der Farbdynamik

### 2.1 Multiplikationstabellen der Farbtensoren

Die Kanalamplitude  $X_s$  läßt sich hinsichtlich ihrer Farbstruktur nach Kombinationen der Strukturkonstanten der  $SU(3)$  und Kombinationen von Kronecker-Symbolen im Farbraum entwickeln. Von diesen 15 möglichen Farbtensoren

$$\begin{aligned} C^1 &= \delta_{ab}\delta_{cd} & C^5 &= f_{acn}f_{dbn} & C^9 &= d_{adn}d_{bcn} & C^{13} &= d_{abn}f_{cdn} \\ C^2 &= \delta_{ac}\delta_{bd} & C^6 &= f_{adn}f_{bcn} & C^{10} &= f_{abn}d_{cdn} & C^{14} &= d_{acn}f_{dbn} \\ C^3 &= \delta_{ad}\delta_{bc} & C^7 &= d_{abn}d_{cdn} & C^{11} &= f_{acn}d_{dbn} & C^{15} &= d_{adn}f_{bcn} \\ C^4 &= f_{abn}f_{cdn} & C^8 &= d_{acn}d_{dbn} & C^{12} &= f_{adn}d_{bcn} \end{aligned}$$

sind aufgrund von Symmetrieeigenschaften und Bianchi-Identitäten der  $SU(3)$  nur acht linear unabhängig [16] [17]. Eine mögliche Basis im Farbraum, die allerdings die partielle Bosesymmetrie von  $X_s$  noch nicht berücksichtigt, bildet folgende Auswahl der Tensoren:

$$C^1, C^2, C^3, C^5, C^6, C^{13}, C^{14}, C^{15} \quad (2.1)$$

Die anderen sieben Farbtensoren sind von diesen acht linear abhängig; mit den Beziehungen aus [16] findet man:

$$C^4 = -C^5 - C^6 \quad (2.2a)$$

$$C^7 = 1/3(-C^1 + C^2 + C^3 - C^5 + C^6) \quad (2.2b)$$

$$C^8 = 1/3(C^1 - C^2 + C^3 - C^5 - 2C^6) \quad (2.2c)$$

$$C^9 = 1/3(C^1 + C^2 - C^3 + 2C^5 + C^6) \quad (2.2d)$$

$$C^{10} = -C^{14} + C^{15} \quad (2.2e)$$

$$C^{11} = C^{13} - C^{15} \quad (2.2f)$$

$$C^{12} = -C^{13} + C^{14} \quad (2.2g)$$

Die entsprechende Entwicklung der Kanalampplitude  $X_s$  nach den Farbtensoren lautet <sup>1</sup>:

$$X_{s,abcd} = \sum_{i=1,\dots,15} C_{(abcd)}^i \cdot X_{i,s} \quad (2.3)$$

Aufgrund der einfachen Farbstruktur der transversalen Gluonpropagatoren

$$D_{T,ab}^{\mu\nu} \propto \delta_{ab} \quad (2.4)$$

in der Gluonschleife von (1.23) reduziert sich die Farbdynamik auf folgende Kontraktion von Farbindizes:

$$\begin{aligned} C_{(abcd)}^i \circ C_{(efgh)}^j &:= \sum_{cdef} C_{(abcd)}^i \delta_{de} \delta_{cf} C_{(efgh)}^j \\ &= \sum_{l=1..15} K_l^{i,j} C_{(abgh)}^l \end{aligned} \quad (2.5)$$

Bei der Durchführung der Kontraktionen zeigt sich, daß als Ergebnis wieder Linearkombinationen der Basis-Farbtensoren erscheinen. Die Koeffizienten  $K_l^{i,j}$  in (2.5) sind dimensionslose Zahlen der Größenordnung 1 und lassen sich mit den in [16] [17] angegebenen Formeln für die Strukturkonstanten der SU(3) bestimmen. Das Resultat dieser langwierigen Rechnungen ist in den nachstehenden Tabellen zusammengefaßt:

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^5$	$C^6$
$C^1$	$8 C^1$	$C^1$	$C^1$	$-3 C^1$	$3 C^1$
$C^2$	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^5$	$C^6$
$C^3$	$C^1$	$C^3$	$C^2$	$-C^6$	$-C^5$
$C^5$	$-3 C^1$	$C^5$	$-C^6$	$\frac{3}{4}C^1 + \frac{3}{4}C^2 + \frac{3}{4}C^3 - C^5 - \frac{1}{2}C^6$	$-\frac{3}{4}C^1 - \frac{3}{4}C^2 - \frac{3}{4}C^3 - \frac{1}{2}C^5 - C^6$
$C^6$	$3 C^1$	$C^6$	$-C^5$	$-\frac{3}{4}C^1 - \frac{3}{4}C^2 - \frac{3}{4}C^3 - \frac{1}{2}C^5 - C^6$	$\frac{3}{4}C^1 + \frac{3}{4}C^2 + \frac{3}{4}C^3 - C^5 - \frac{1}{2}C^6$
$C^{13}$	0	$C^{13}$	$C^{13}$	$-\frac{3}{2}C^{13}$	$\frac{3}{2}C^{13}$
$C^{14}$	0	$C^{14}$	$C^{13} - C^{14}$	$-3/4 C^{13} - 3/4 C^{14} + 3/4 C^{15}$	$3/4 C^{13} - 3/4 C^{14} + 3/4 C^{15}$
$C^{15}$	0	$C^{15}$	$C^{13} - C^{15}$	$-3/4 C^{13} + 3/4 C^{14} - 3/4 C^{15}$	$3/4 C^{13} + 3/4 C^{14} - 3/4 C^{15}$

<sup>1</sup>Die Lorentzindizes und Impulsabhängigkeiten werden in diesem Kapitel weggelassen!

	$C^{13}$	$C^{14}$	$C^{15}$
$C^1$	0	0	0
$C^2$	$C^{13}$	$C^{14}$	$C^{15}$
$C^3$	$-C^{13}$	$-C^{14}$	$-C^{15}$
$C^5$	$-3/2 C^{13}$	$-3/4 C^{13} - 3/4 C^{14} + 3/4 C^{15}$	$-3/4 C^{13} + 3/4 C^{14} - 3/4 C^{15}$
$C^6$	$-3/2 C^{13}$	$-3/4 C^{13} + 3/4 C^{14} - 3/4 C^{15}$	$-3/4 C^{13} - 3/4 C^{14} + 3/4 C^{15}$
$C^{13}$	0	$5/6 C^5 + 5/6 C^6$	$-5/6 C^5 - 5/6 C^6$
$C^{14}$	$1/2 C^1 - 1/2 C^2$ $- 1/2 C^3 + 1/2 C^5 - 1/2 C^6$	$1/4 C^1 - 3/4 C^2 + 1/4 C^3$ $+ 1/3 C^5 - 1/6 C^6$	$1/4 C^1 - 3/4 C^2 + 1/4 C^3$ $- 1/2 C^5 - C^6$
$C^{15}$	$-1/2 C^1 + 1/2 C^2$ $+ 1/2 C^3 - 1/2 C^5 + 1/2 C^6$	$-1/4 C^1 - 1/4 C^2 + 3/4 C^3$ $- 1/6 C^5 + 1/3 C^6$	$-1/4 C^1 - 1/4 C^2 + 3/4 C^3$ $- C^5 - 1/2 C^6$

Diese beiden Multiplikationstabellen der Farbtensoren sind folgendermaßen zu lesen:

- Die Spaltenüberschriften der Tabellen kennzeichnen den linken Farbtensor in (2.5).
- Die Zeilenkennzeichnung der Tabellen werden durch den rechten Farbtensor in (2.5) gebildet.
- Die Einträge der Tabellen bestehen aus Linearkombinationen der 8 Basis-Farbtensoren:  $\sum_{l=1..15} K_l C^l$

## 2.2 Erste Entkopplung des Gleichungssystems

Entwickelt man nicht nur die Kanalamplitude  $X_s$ , sondern auch den Bethe-Salpeter-Kern  $K_s$  nach den acht linear unabhängigen Farbtensoren

$$X_{s,abcd} = \sum_{i=1..15} X_{i,s} C_{(abcd)}^i \quad (2.6)$$

$$K_{s,abcd} = \sum_{i=1..15} K_{i,s} C_{(abcd)}^i \quad (2.7)$$

und setzt beide in die zu (1.16) analoge *homogene* Bethe-Salpeter-Gleichung ein, so führt die Anwendung der obigen Multiplikationstabellen auf ein gekoppeltes Gleichungssystem für die acht Farbkomponenten aus (2.6):

$$\begin{aligned}
X_{1,s} &= 8 K_{1,s} \circ X_{1,s} + K_{1,s} \circ (X_{2,s} + X_{3,s} - 3 X_{5,s} + 3 X_{6,s}) \\
&+ (K_{2,s} + K_{3,s} - 3 K_{5,s} + 3 K_{6,s}) \circ X_{1,s} \\
&+ 3/4 (K_{5,s} - K_{6,s}) \circ (X_{5,s} - X_{6,s}) \\
&+ (1/2 K_{13,s} + 1/4 K_{14,s} + 1/4 K_{15,s}) \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) \\
X_{2,s} &= K_{2,s} \circ X_{2,s} + K_{3,s} \circ X_{3,s} + 3/4 (K_{5,s} - K_{6,s}) \circ (X_{5,s} - X_{6,s}) \\
&- 1/2 K_{13,s} \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) - 1/4 (K_{14,s} + K_{15,s}) \circ (3 X_{14,s} + X_{15,s}) \\
X_{3,s} &= K_{2,s} \circ X_{3,s} + K_{3,s} \circ X_{2,s} + 3/4 (K_{5,s} - K_{6,s}) \circ (X_{5,s} - X_{6,s}) \\
&- 1/2 K_{13,s} \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) + 1/4 (K_{14,s} + K_{15,s}) \circ (X_{14,s} + 3 X_{15,s}) \\
X_{5,s} &= K_{2,s} \circ X_{5,s} - K_{3,s} \circ X_{6,s} + K_{5,s} \circ X_{2,s} - K_{6,s} \circ X_{3,s} \\
&- 1/2 K_{5,s} \circ (2 X_{5,s} + X_{6,s}) - 1/2 K_{6,s} \circ (X_{5,s} + 2 X_{6,s}) \\
&+ 1/2 K_{13,s} \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) + 1/6 K_{14,s} \circ (2 X_{14,s} - X_{15,s}) \\
&- 1/2 K_{15,s} \circ (X_{14,s} + 2 X_{15,s}) \\
X_{6,s} &= K_{2,s} \circ X_{6,s} - K_{3,s} \circ X_{5,s} - K_{5,s} \circ X_{3,s} + K_{6,s} \circ X_{2,s} \\
&- 1/2 K_{5,s} \circ (X_{5,s} + 2 X_{6,s}) - 1/2 K_{6,s} \circ (2 X_{5,s} + X_{6,s}) \\
&- 1/2 K_{13,s} \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) - 1/6 K_{14,s} \circ (X_{14,s} - 2 X_{15,s}) \\
&- 1/2 K_{15,s} \circ (2 X_{14,s} + X_{15,s}) \\
X_{13,s} &= (K_{2,s} + K_{3,s} - 3/2 K_{5,s} + 3/2 K_{6,s}) \circ X_{13,s} \\
&+ K_{13,s} \circ (X_{2,s} - X_{3,s} - 3/2 X_{5,s} - 3/2 X_{6,s}) \\
&+ (K_{3,s} - 3/4 K_{5,s} + 3/4 K_{6,s}) \circ (X_{14,s} + X_{15,s}) \\
&- 3/4 (K_{14,s} + K_{15,s}) \circ (X_{5,s} + X_{6,s}) \\
X_{14,s} &= (K_{2,s} - K_{3,s}) \circ X_{14,s} - 3/4 (K_{5,s} + K_{6,s}) \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) \\
&+ K_{14,s} \circ (X_{2,s} - X_{3,s}) - 3/4 (K_{14,s} - K_{15,s}) \circ (X_{5,s} - X_{6,s}) \\
X_{15,s} &= (K_{2,s} - K_{3,s}) \circ X_{15,s} + 3/4 (K_{5,s} + K_{6,s}) \circ (X_{14,s} - X_{15,s}) \\
&+ K_{15,s} \circ (X_{2,s} - X_{3,s}) + 3/4 (K_{14,s} - K_{15,s}) \circ (X_{5,s} - X_{6,s})
\end{aligned}$$

Das Symbol "o" übernimmt hierbei alle Bedeutungen des früheren Symbols " $\otimes$ " in (1.16) bis auf die Kontraktion der Farbindizes (2.5). Es handelt sich formal um ein homogenes Gleichungssystem für die acht Amplituden  $X_{1,s} \dots X_{15,s}$ . Die Matrix dieses Systems erweist sich als diagonalisierbar, wenn die Bedingungen

$$K_{13,s} = -K_{14,s} = -K_{15,s} \quad (2.8)$$

erfüllt sind. Nach Herstellung der Diagonalform erweisen sich dann zwei der acht Eigenwerte als Null, was die Beziehungen

$$X_{13,s} = -X_{14,s} = -X_{15,s} \quad (2.9)$$

ergibt. Als nichttriviale Gleichungen verbleiben die sechs entkoppelten Integralgleichungen

$$\tilde{X}_{s,1} = \tilde{K}_{s,1} \circ \tilde{X}_{s,1} \quad (2.10a)$$

$$\tilde{X}_{s,2} = \tilde{K}_{s,2} \circ \tilde{X}_{s,2} \quad (2.10b)$$

$$\tilde{X}_{s,3+} = \tilde{K}_{s,3+} \circ \tilde{X}_{s,3+} \quad (2.10c)$$

$$\tilde{X}_{s,3-} = \tilde{K}_{s,3-} \circ \tilde{X}_{s,3-} \quad (2.10d)$$

$$\tilde{X}_{s,4} = \tilde{K}_{s,4} \circ \tilde{X}_{s,4} \quad (2.10e)$$

$$\tilde{X}_{s,5} = \tilde{K}_{s,5} \circ \tilde{X}_{s,5} \quad (2.10f)$$

für folgende Kombinationen der Farbkomponenten aus der Entwicklung der Kanalampplitude (2.6) bzw. des Kerns (2.7):

$$\tilde{X}_{s,1} = 8X_{1,s} + X_{2,s} + X_{3,s} - 3X_{5,s} + 3X_{6,s} \quad (2.11a)$$

$$\tilde{X}_{s,2} = X_{2,s} - X_{3,s} - 3/2X_{5,s} - 3/2X_{6,s} \quad (2.11b)$$

$$\tilde{X}_{s,3+} = X_{2,s} - X_{3,s} + 2iX_{13,s} \quad (2.11c)$$

$$\tilde{X}_{s,3-} = X_{2,s} - X_{3,s} - 2iX_{13,s} \quad (2.11d)$$

$$\tilde{X}_{s,4} = X_{2,s} + X_{3,s} + X_{5,s} - X_{6,s} \quad (2.11e)$$

$$\tilde{X}_{s,5} = X_{2,s} + X_{3,s} - 3/2X_{5,s} + 3/2X_{6,s} \quad (2.11f)$$

$$\tilde{K}_{s,1} = 8K_{1,s} + K_{2,s} + K_{3,s} - 3K_{5,s} + 3K_{6,s} \quad (2.12a)$$

$$\tilde{K}_{s,2} = K_{2,s} - K_{3,s} - 3/2K_{5,s} - 3/2K_{6,s} \quad (2.12b)$$

$$\tilde{K}_{s,3+} = K_{2,s} - K_{3,s} + 2iK_{13,s} \quad (2.12c)$$

$$\tilde{K}_{s,3-} = K_{2,s} - K_{3,s} - 2iK_{13,s} \quad (2.12d)$$

$$\tilde{K}_{s,4} = K_{2,s} + K_{3,s} + K_{5,s} - K_{6,s} \quad (2.12e)$$

$$\tilde{K}_{s,5} = K_{2,s} + K_{3,s} - 3/2K_{5,s} + 3/2K_{6,s} \quad (2.12f)$$

Nun bleibt noch zu klären, welche physikalische Bedeutung die obigen sechs Linearkombinationen besitzen. Diese Frage soll Thema des nächsten Abschnitts sein.

## 2.3 Die Clebsch-Gordan-Serie $\{8\} \otimes \{8\}$

### 2.3.1 Entwicklung nach Farbmultipletts

Ein Gluonium-Bindungszustand wird — ähnlich der Drehimpulskopplung in der Quantenmechanik — formal durch die Kopplung von zwei Oktettzuständen der Lie-Gruppe  $SU(3)$  beschrieben. Durch Ausreduzierung des reduziblen Produkts

$$\{8\} \otimes \{8\}$$

entsteht die folgende Clebsch-Gordan-Reihe [5]:

$$\{8\} \otimes \{8\} = \{1\} \oplus \{8\}_S \oplus \{8\}_A \oplus \{10\} \oplus \{10^*\} \oplus \{27\} \quad (2.13)$$

Die Indizes  $S$  und  $A$  bezeichnen dabei die Kopplung der Oktetts zu einem symmetrischen bzw. antisymmetrischen Oktettzustand. Die 4-Gluon-Kanalamplitude  $X_s$  sollte sich eindeutig nach diesen irreduziblen Farbmultipletts entwickeln lassen:

$$X_{s,abcd} = \sum_{M=1,\dots,27} D_{abcd}^M \cdot X_s^M \quad (2.14)$$

Wichtig ist hierbei, daß — im Gegensatz zur allgemeinen Zerlegung (2.6) — die Ausreduktion stets bezüglich eines der drei Kanäle — hier des  $s$ -Kanals — vorgenommen wird und diesen auszeichnet.

Die Koeffizienten  $D_{abcd}^M$  in (2.14) müssen sich wiederum als Linearkombinationen der acht Basis-Farbtensoren darstellen lassen:

$$D_{abcd}^M = \sum_{j=1,\dots,15} U_j^M \cdot C_{(abcd)}^j \quad (2.15)$$

Die  $6 \times 8 = 48$  — teilweise komplexen — Farbstruktur-Koeffizienten  $U_j^M$  beschreiben die Farbstruktur des Gluonium-Bindungszustands im  $s$ -Kanal vollständig.

### 2.3.2 Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Basiswechsel bezüglich der Nebenquantenzahlen

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Farbgruppe  $SU(3)$

$$\left( \begin{array}{cc|c} M_1 & M_2 & M \\ \nu_{M_1} & \nu_{M_2} & \nu_M \end{array} \right)$$

werden im Diracschen Bra-Ket-Formalismus durch das Einschieben eines vollständigen Satzes von Eigenzuständen bezüglich der erhaltenen Farbquantenzahlen des Gluonium-Bindungszustandes eingeführt:

$$\left| \begin{array}{cc} 8 & 8 \\ a & b \end{array} \right\rangle = \sum_{M=1,\dots,27} \sum_{\nu_M=0,\dots,M-1} \left| \begin{array}{c} M \\ \nu_M \end{array} \right\rangle \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \nu_M & a & b \end{array} \right) \quad (2.16)$$

Die 64 Komponenten des Bindungszustandes werden also zu Multipletts  $M$  zusammengefaßt und in diesen durch den Nebenquantenzahlensatz  $\nu_M$  abgezählt.

Faßt man nun die Amplitude  $X_s$  als Zustandsfunktion im Diracschen Formalismus auf, so gilt mit zweimaligen Basiswechsel (2.16) offenbar:

$$\begin{aligned}
X_{s,abcd} &= \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 8 & X_s \\ a & b & c \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 8 & 8 \\ c & d \end{array} \right) \\
&= \sum_{M=1,\dots,27} \sum_{\nu_M=0,\dots,M-1} \sum_{N=1,\dots,27} \sum_{\nu_N=0,\dots,N-1} \\
&\quad \delta_{MN} \delta_{\nu_M \nu_N} \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 8 & M \\ a & b & \nu_M \end{array} \right) \\
&\quad \left( \begin{array}{c|cc} M & X_s & N \\ \nu_M & & \nu_N \end{array} \middle| \begin{array}{cc} N & 8 & 8 \\ \nu_N & c & d \end{array} \right) \\
&= \sum_{M=1,\dots,27} \sum_{\nu_M=0,\dots,M-1} \\
&\quad \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 8 & M \\ a & b & \nu_M \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \nu_M & c & d \end{array} \right) \cdot X_s^M \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Die beiden Kronecker-Symbole über die Haupt- und Nebenquantenzahlen bringen die strenge Erhaltung der Gesamt-Farbquantenzahlen aufgrund der globalen Farbsymmetrie der QCD zum Ausdruck [5].

Ein Vergleich von (2.17) mit (2.14) liefert sofort:

$$\begin{aligned}
D_{abcd}^M &= \sum_{\nu_M=0,\dots,M-1} \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 8 & M \\ a & b & \nu_M \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \nu_M & c & d \end{array} \right) \\
&= \sum_{Y=Y_{min}^M}^{Y_{max}^M} \sum_{I=I_{min}^M}^{I_{max}^M} \sum_{m=-I}^{+I} \\
&\quad \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 8 & M \\ a & b & (Y, I, m) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & c & d \end{array} \right) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Dabei wurden zur Charakterisierung der Unterzustände  $\nu_M$  in einem Multiplett  $M$  die drei Quantenzahlen  $Y$  (Hyperladung),  $I$  (Isospin) und  $m$  (dritte Komponente des Isospins) benutzt.

Zählt man außerdem auch die Oktettzustände in den Clebsch-Gordan- Koeffizienten nicht mehr durch Farbindizes  $a$  und  $b$ , sondern durch die Quantenzahlensätze

$(Y_1, I_1, m_1)$  und  $(Y_2, I_2, m_2)$  ab, so lassen sich für die Quantenzahlen  $Y$ ,  $I$  und  $m$  folgende Einschränkungen angeben <sup>2</sup>:

- $Y$  läuft in ganzzahligen Schritten von  $-|Y_1 + Y_2|$  bis  $|Y_1 + Y_2|$ .
- $I$  läuft in ganzzahligen Schritten von  $|I_1 - I_2|$  bis  $|I_1 + I_2|$ .
- $m$  erfüllt die Beziehung  $m = m_1 + m_2$ .

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der  $SU(3)$  lassen sich als direktes Produkt der Clebsch-Gordan-Koeffizienten der  $SU(2)$  und der sogenannten Isoskalaren Faktoren berechnen:

$$\left( \begin{array}{cc|c} M_1 & M_2 & M \\ (Y_1, I_1, m_1) & (Y_2, I_2, m_2) & (Y, I, m) \end{array} \right) = (I_1, I_2, m_1, m_2 | I_1, I_2, I, m) \cdot \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M \\ Y_1 I_1 & Y_2 I_2 & Y I \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Der zur Berechnung notwendige Basiswechsel zwischen Farbindizes und Quantenzahlensätzen läßt sich durch eine — nicht eindeutige — unitäre Übergangsmatrix  $\mathcal{M}$  beschreiben, die für die Ket-Vektoren <sup>3</sup> folgendermaßen gewählt werden kann [18]:

$$\left| 8; \begin{pmatrix} a = 1 \\ \vdots \\ a = 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathcal{M}_{a,(Y,I,m)_b} \cdot \left| 8; \begin{pmatrix} (Y, I, m)_{b=1} \\ \vdots \\ (Y, I, m)_{b=8} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left| 8; \begin{pmatrix} (1,1/2,1/2) \\ (1,1/2,-1/2) \\ (0,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,1,-1) \\ (0,0,0) \\ (-1,1/2,1/2) \\ (-1,1/2,-1/2) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2.20)$$

<sup>2</sup>Da nicht alle Kombinationen der Quantenzahlen nichtverschwindene Beiträge in den Summen liefern, können die effektiven Summationsgrenzen von  $I$  und  $Y$  abhängig voneinander sein.

<sup>3</sup>Beim Ersetzen der Bra-Vektoren ist allerdings das Adjungieren der Matrix  $\mathcal{M}$  zu beachten!

### 2.3.3 Bestimmung der Koeffizienten $U_j^M$

Die Farbstruktur der einzelnen Multipletts wird durch die Koeffizienten  $U_j^M$  in (2.15) bestimmt. Durch Festlegung auf bestimmte Indexkombinationen für die Farbtensoren (Anhang A) läßt sich ein lineares Gleichungssystem für die  $U_j^M$  aufstellen, das bei geschickter Wahl der Indizes recht einfache Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned}
D_{8888}^M &= (U_1^M + U_2^M + U_3^M) \delta_{88} \delta_{88} \\
&\quad + (U_5^M + U_6^M) \sum_{n=1}^8 f_{88n} f_{88n} \\
&\quad + (U_{13}^M + U_{14}^M + U_{15}^M) \sum_{n=1}^8 d_{88n} f_{88n} \\
&= U_1^M + U_2^M + U_3^M \tag{2.21a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{8383}^M &= (U_1^M + U_3^M) \delta_{83} \delta_{83} + U_2^M \delta_{88} \delta_{33} \\
&\quad + U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{88n} f_{33n} - U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{83n} f_{83n} \\
&\quad + (U_{13}^M - U_{15}^M) \sum_{n=1}^8 d_{83n} f_{83n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{88n} f_{33n} \\
&= U_2^M \tag{2.21b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{8338}^M &= (U_1^M + U_2^M) \delta_{83} \delta_{38} + U_3^M \delta_{88} \delta_{33} \\
&\quad + U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{83n} f_{83n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{88n} f_{33n} \\
&\quad + (U_{13}^M - U_{15}^M) \sum_{n=1}^8 d_{83n} f_{83n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{88n} f_{33n} \\
&= U_3^M \tag{2.21c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1331}^M &= (U_1^M + U_2^M) \delta_{13} \delta_{31} + U_3^M \delta_{11} \delta_{33} \\
&\quad + U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{13n} f_{13n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{11n} f_{33n} \\
&\quad + (U_{13}^M - U_{14}^M) \sum_{n=1}^8 d_{13n} f_{31n} + U_{15}^M \sum_{n=1}^8 d_{11n} f_{33n} \\
&= U_3^M + U_5^M \tag{2.21d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1313}^M &= (U_1^M + U_3^M) \delta_{13} \delta_{31} + U_2^M \delta_{11} \delta_{33} \\
&+ U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{11n} f_{33n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{13n} f_{31n} \\
&+ (U_{13}^M - U_{15}^M) \sum_{n=1}^8 d_{13n} f_{13n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{11n} f_{33n} \\
&= U_2^M - U_6^M
\end{aligned} \tag{2.21e}$$

$$\begin{aligned}
D_{1761}^M &= U_1^M \delta_{17} \delta_{61} + U_2^M \delta_{16} \delta_{71} + U_3^M \delta_{11} \delta_{76} \\
&+ U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{16n} f_{17n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{11n} f_{76n} \\
&+ U_{13}^M \sum_{n=1}^8 d_{17n} f_{61n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{16n} f_{17n} \\
&+ U_{15}^M \sum_{n=1}^8 d_{11n} f_{76n} \\
&= -1/4 U_{13}^M - 1/4 U_{14}^M - 1/2 U_{15}^M
\end{aligned} \tag{2.21f}$$

$$\begin{aligned}
D_{1617}^M &= U_1^M \delta_{16} \delta_{17} + U_2^M \delta_{11} \delta_{67} + U_3^M \delta_{17} \delta_{61} \\
&+ U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{11n} f_{76n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{17n} f_{61n} \\
&+ U_{13}^M \sum_{n=1}^8 d_{16n} f_{17n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{11n} f_{76n} \\
&+ U_{15}^M \sum_{n=1}^8 d_{17n} f_{61n} \\
&= -1/4 U_{13}^M - 1/2 U_{14}^M - 1/4 U_{15}^M
\end{aligned} \tag{2.21g}$$

$$\begin{aligned}
D_{1176}^M &= U_1^M \delta_{11} \delta_{76} + (U_2^M + U_3^M) \delta_{17} \delta_{16} \\
&+ U_5^M \sum_{n=1}^8 f_{17n} f_{61n} + U_6^M \sum_{n=1}^8 f_{16n} f_{17n} \\
&+ U_{13}^M \sum_{n=1}^8 d_{11n} f_{76n} + U_{14}^M \sum_{n=1}^8 d_{17n} f_{61n} \\
&+ U_{15}^M \sum_{n=1}^8 d_{16n} f_{17n} \\
&= -1/2 U_{13}^M - 1/4 U_{14}^M - 1/4 U_{15}^M
\end{aligned} \tag{2.21h}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1^M = D_{8888}^M - D_{8383}^M - D_{8338}^M \quad (2.22a)$$

$$U_2^M = D_{8383}^M \quad (2.22b)$$

$$U_3^M = D_{8338}^M \quad (2.22c)$$

$$U_5^M = D_{1331}^M - D_{8338}^M \quad (2.22d)$$

$$U_6^M = D_{8383}^M - D_{1313}^M \quad (2.22e)$$

$$U_{13}^M = D_{1761}^M + D_{1617}^M - 3 D_{1176}^M \quad (2.22f)$$

$$U_{14}^M = D_{1761}^M - 3 D_{1617}^M + D_{1176}^M \quad (2.22g)$$

$$U_{15}^M = -3 D_{1761}^M + D_{1617}^M + D_{1176}^M \quad (2.22h)$$

Nützlich sind dabei folgende Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten <sup>4</sup>:

$$\left( \begin{array}{cc|c} M_1 & M_2 & M \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} M & M_1 & M_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{array} \right) \quad (2.23)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} M_1 & M_2 & M \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{array} \right) = \xi_1 \cdot \left( \begin{array}{cc|c} M_2 & M_1 & M \\ \nu_2 & \nu_1 & \nu \end{array} \right) \quad (2.24)$$

$M$	1	$8_S$	$8_A$	10	$10^*$	27
$\xi_1$	1	1	-1	-1	-1	1

Die obige Tabelle legt nahe, zwei Fälle für die Multipletts zu unterscheiden:

Fall 1:  $M = 1, 8_S$  oder 27

Fall 2:  $M = 8_A, 10$  oder  $10^*$

Damit müssen nur für 5 der 8 gewählten Indexkombinationen in (2.21a–2.21h) die Koeffizienten  $D_{abcd}^M$  berechnet werden. Zusätzlich gelten folgende Identitäten:

$$\text{Fall 1:} \quad D_{8383}^M = D_{8338}^M \quad (2.25a)$$

$$D_{1331}^M = D_{1313}^M \quad (2.25b)$$

$$D_{1761}^M = -D_{1617}^M \quad (2.25c)$$

$$\text{Fall 2:} \quad D_{8383}^M = -D_{8338}^M \quad (2.26a)$$

$$D_{1331}^M = -D_{1313}^M \quad (2.26b)$$

$$D_{1761}^M = D_{1617}^M \quad (2.26c)$$

$$D_{1176}^M = 0 \quad (2.26d)$$

Der Koeffizient  $D_{1176}^M$  muß also nur im Fall 1 berücksichtigt werden. Mit den Relationen (2.25a–2.26d) vereinfacht sich das Gleichungssystem (2.22a–2.22h):

---

<sup>4</sup>Wir benutzen für den Phasenfaktor  $\xi_1$  die Konvention aus [21].

$$\begin{aligned}
\text{Fall 1:} \quad U_1^M &= D_{8888}^M - 2 D_{8383}^M \\
U_2^M &= D_{3838}^M \\
U_3^M &= D_{3838}^M \\
U_5^M &= D_{1331}^M - D_{3838}^M \\
U_6^M &= -D_{1331}^M + D_{3838}^M \\
U_{13}^M &= -3 D_{1176}^M \\
U_{14}^M &= 4 D_{1761}^M + D_{1176}^M \\
U_{15}^M &= -4 D_{1761}^M + D_{1176}^M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Fall 2:} \quad U_1^M &= D_{8888}^M \\
U_2^M &= D_{3838}^M \\
U_3^M &= -D_{3838}^M \\
U_5^M &= D_{1331}^M + D_{3838}^M \\
U_6^M &= D_{1331}^M + D_{3838}^M \\
U_{13}^M &= 2 D_{1761}^M \\
U_{14}^M &= -2 D_{1761}^M \\
U_{15}^M &= -2 D_{1761}^M
\end{aligned}$$

Die 5 Koeffizienten  $D_{8888}^M$ ,  $D_{3838}^M$ ,  $D_{1331}^M$ ,  $D_{1761}^M$  und  $D_{1176}^M$  lassen sich mit (2.18), (2.19) und (2.20) berechnen:

$$\begin{aligned}
D_{8888}^M &= \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \end{array} \right)^2 \\
D_{3838}^M &= \sum_{I=I_{min}^M}^{I_{max}^M} \sum_{m=-I}^{+I} \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,0) & (0,0,0) \end{array} \right)^2 \\
D_{1331}^M &= 1/2 \sum_{I=I_{min}^M}^{I_{max}^M} \sum_{m=-I}^{+I} \\
&\quad \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,1) & (0,1,0) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,0) & (0,1,1) \end{array} \right) \\
+ 2 \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,1) & (0,1,0) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,0) & (0,1,-1) \end{array} \right) \\
+ \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,-1) & (0,1,0) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ \hline (0,I,m) & (0,1,0) & (0,1,-1) \end{array} \right) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1761}^M = & \quad i/4 \quad \sum_{Y=Y_{min}^M}^{Y_{max}^M} \quad \sum_{I=I_{min}^M}^{I_{max}^M} \quad \sum_{m=-I}^{+I} \\
& \left[ \begin{aligned}
& \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (0, 1, 1) \end{array} \right) \\
& + 2 \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \\
& - 2 \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \\
& - \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1, 1) \end{array} \right) \\
& + \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, -1) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \\
& - \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, -1) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \quad \Big]
\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1176}^M = & \quad -i/4 \quad \sum_{Y=Y_{min}^M}^{Y_{max}^M} \quad \sum_{I=I_{min}^M}^{I_{max}^M} \quad \sum_{m=-I}^{+I} \\
& \left[ \begin{aligned}
& \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (0, 1, 1) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \\
& + 2 \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \\
& - 2 \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \\
& - \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, 1) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1, 1) \end{array} \right) \\
& + \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, -1) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array} \right) \\
& - \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (0, 1, -1) & (0, 1, -1) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} M & 8 & 8 \\ (Y, I, m) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right) \quad \Big]
\end{aligned}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Fallunterscheidung für die Multipletts, so lassen sich mit (2.23) und (2.24) in den letzten beiden Koeffizienten noch jeweils zwei Summanden zusammenfassen. Dies verringert den Rechenaufwand aber nur unwesentlich.

Die effektiven Summationsgrenzen in den obigen Summen hängen nicht nur von den gewählten Quantenzahlsätzen, sondern auch von dem zugehörigen Farbmultiplett ab und sind in [21] nachzulesen.

Die Rechnungen wurden mit einem Maple-Programm durchgeführt und sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

$D_{abcd}^M$	1	$8_S$	$8_A$	10	$10^*$	27
(8888)	1/8	1/5	0	0	0	27/40
(3838)	0	1/5	0	1/4	1/4	3/10
(1331)	0	0	-1/3	-1/12	-1/12	1/2
(1761)	0	0	0	-i/8	i/8	0
(1176)	0	0	0	0	0	0

Durch Einsetzen der 5 Koeffizienten in das Gleichungssystem (2.22a-2.22h) lassen sich nun die Farbstruktur-Koeffizienten  $U_j^M$  angeben:

$$D_{abcd}^1 = 1/8 \delta_{ab}\delta_{cd} \quad (2.27)$$

$$D_{abcd}^{8^S} = -1/5 \delta_{ab}\delta_{cd} + 1/5 \delta_{ac}\delta_{bd} + 1/5 \delta_{ad}\delta_{bc} - 1/5 f_{acn}f_{dbn} + 1/5 f_{adn}f_{bcn} \quad (2.28)$$

$$\left( = 3/5 d_{abn}d_{cdn} \right)$$

$$D_{abcd}^{8^A} = -1/3 f_{acn}f_{dbn} - 1/3 f_{adn}f_{bcn} \quad (2.29)$$

$$\left( = 1/3 f_{abn}f_{cdn} \right)$$

$$D_{abcd}^{10} = 1/4 \delta_{ac}\delta_{bd} - 1/4 \delta_{ad}\delta_{bc} + 1/6 f_{acn}f_{dbn} + 1/6 f_{adn}f_{bcn} - i/4 d_{abn}f_{cdn} + i/4 d_{acn}f_{dbn} + i/4 d_{adn}f_{bcn} \quad (2.30)$$

$$D_{abcd}^{10^*} = 1/4 \delta_{ac}\delta_{bd} - 1/4 \delta_{ad}\delta_{bc} + 1/6 f_{acn}f_{dbn} + 1/6 f_{adn}f_{bcn} + i/4 d_{abn}f_{cdn} - i/4 d_{acn}f_{dbn} - i/4 d_{adn}f_{bcn} \quad (2.31)$$

$$D_{abcd}^{27} = 3/40 \delta_{ab}\delta_{cd} + 3/10 \delta_{ac}\delta_{bd} + 3/10 \delta_{ad}\delta_{bc} + 1/5 f_{acn}f_{dbn} - 1/5 f_{adn}f_{bcn} \quad (2.32)$$

Aufgrund der Vollständigkeitseigenschaft und der Orthonormierungsrelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten [19] lassen sich einige — leicht durchführbare — ”Summenregel-Checks” angeben, die die Richtigkeit unserer Rechnungen bestätigen. So erhält man beispielsweise bei vertikaler Summation der Koeffizienten über alle Multipletts:

$$\begin{aligned}
1/8 - 1/5 + 3/40 &= 0 \\
1/5 + 1/4 + 1/4 + 3/10 &= 1 \\
1/5 - 1/4 - 1/4 + 3/10 &= 0 \\
-1/5 - 1/3 + 1/6 + 1/6 + 1/5 &= 0 \\
1/5 - 1/3 + 1/6 + 1/6 - 1/5 &= 0 \\
-i/4 + i/4 &= 0 \\
i/4 - i/4 &= 0 \\
i/4 - i/4 &= 0
\end{aligned}$$

Dies entspricht gerade der Identität:

$$\sum_{M=1,\dots,27} \sum_{\nu_M=0,\dots,M-1} \begin{pmatrix} 8 & 8 & | & M \\ a & b & | & \nu_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & | & 8 & 8 \\ \nu_M & | & c & d \end{pmatrix} = \delta_{ac} \delta_{bd}$$

### 2.3.4 Zweite Entkopplung

Die Umkehrung des Gleichungssystems (2.27–2.32) liefert folgende Entwicklung für die Farbtensoren:

$$\begin{aligned}
C^1 &= \delta_{ab} \delta_{bd} = 8 D_{abcd}^1 \\
C^2 &= \delta_{ac} \delta_{db} = D_{abcd}^1 + D_{abcd}^{8^S} + D_{abcd}^{8^A} + D_{abcd}^{10} + D_{abcd}^{10^*} + D_{abcd}^{27} \\
C^3 &= \delta_{ad} \delta_{bc} = D_{abcd}^1 + D_{abcd}^{8^S} - D_{abcd}^{8^A} - D_{abcd}^{10} - D_{abcd}^{10^*} + D_{abcd}^{27} \\
C^5 &= f_{acn} f_{dbn} = -3 D_{abcd}^1 - 3/2 D_{abcd}^{8^S} - 3/2 D_{abcd}^{8^A} + D_{abcd}^{27} \\
C^6 &= f_{adn} f_{bcn} = 3 D_{abcd}^1 + 3/2 D_{abcd}^{8^S} - 3/2 D_{abcd}^{8^A} - D_{abcd}^{27} \\
&- C^{13} + C^{14} + C^{15} \\
&= -d_{abn} f_{cdn} + d_{acn} f_{dbn} + d_{adn} f_{bcn} = 2i (D_{abcd}^{10} - D_{abcd}^{10^*})
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt, daß eine Zuordnung der Farbtensoren zu den Farbmultipletts nur möglich ist, wenn man für die Farbkomponenten der Kanalamplitude  $X_s$  die Identität

$$X_{13,s} = -X_{14,s} = -X_{15,s}$$

fordert. Diese Einschränkung wurde aber schon früher in (2.9) zur Kenntnis genommen.

Wir setzen nun die Farbtensoren in die Basisentwicklung (2.6) ein und fassen die Summanden anschließend neu zusammen:

$$\begin{aligned}
X_{s,abcd} &= C_{(abcd)}^1 X_{1,s} + C_{(abcd)}^2 X_{2,s} + C_{(abcd)}^3 X_{3,s} \\
&+ C_{(abcd)}^5 X_{5,s} + C_{(abcd)}^6 X_{6,s} + C_{(abcd)}^{13} X_{13,s} \\
&+ C_{(abcd)}^{14} X_{14,s} + C_{(abcd)}^{15} X_{15,s} \\
&= 8 D_{abcd}^1 X_{1,s} \\
&+ (D_{abcd}^1 + D_{abcd}^{8^S} + D_{abcd}^{8^A} + D_{abcd}^{10} + D_{abcd}^{10^*} + D_{abcd}^{27}) X_{2,s} \\
&+ (D_{abcd}^1 + D_{abcd}^{8^S} - D_{abcd}^{8^A} - D_{abcd}^{10} - D_{abcd}^{10^*} + D_{abcd}^{27}) X_{3,s} \\
&- (3 D_{abcd}^1 + 3/2 D_{abcd}^{8^S} + 3/2 D_{abcd}^{8^A} - D_{abcd}^{27}) X_{5,s} \\
&+ (3 D_{abcd}^1 + 3/2 D_{abcd}^{8^S} - 3/2 D_{abcd}^{8^A} - D_{abcd}^{27}) X_{6,s} \\
&- 2i (D_{abcd}^{10} - D_{abcd}^{10^*}) X_{13,s} \\
&= D_{abcd}^1 (8 X_{1,s} + X_{2,s} + X_{3,s} - 3 X_{5,s} + 3 X_{6,s}) \\
&+ D_{abcd}^{8^S} (X_{2,s} + X_{3,s} - 3/2 X_{5,s} + 3/2 X_{6,s}) \\
&+ D_{abcd}^{8^A} (X_{2,s} - X_{3,s} - 3/2 X_{5,s} - 3/2 X_{6,s}) \\
&+ D_{abcd}^{10} (X_{2,s} - X_{3,s} - 2i X_{13,s}) \\
&+ D_{abcd}^{10^*} (X_{2,s} - X_{3,s} + 2i X_{13,s}) \\
&+ D_{abcd}^{27} (X_{2,s} + X_{3,s} + X_{5,s} - X_{6,s}) \\
&= D_{abcd}^1 X_s^1 + D_{abcd}^{8^S} X_s^{8^S} + D_{abcd}^{8^A} X_s^{8^A} \\
&+ D_{abcd}^{10} X_s^{10} + D_{abcd}^{10^*} X_s^{10^*} + D_{abcd}^{27} X_s^{27} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurden nicht mehr die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4.

verwendet, sondern die Multipllettamplituden  $X_s^M$  eingeführt; die Linearkombinationen sind aber dieselben wie in (2.11a–2.11f). Ihre Bedeutung ist damit geklärt; sie stellen die Partialamplituden mit guter d. h. erhaltener Gesamt-Farbquantenzahl bezüglich des hier ausgezeichneten  $s$ -Kanals dar.

## 2.4 Zusammenfassung

Die Analyse der Farbdynamik der Bethe-Salpeter-Gleichung führt also zu folgendem Ergebnis:

- Die Integralgleichung (1.16) für den Bindungspol-Anteil der 4-Gluon-Kanalamplitude  $X_{s,abcd}$  beschreibt — in Form eines gekoppelten Gleichungssystems für die Farbkomponenten der Entwicklung (2.6) — gleichzeitig sechs verschiedene Farbmultipletts, die jeweils erhaltenen Farbquantenzahlen des Gluonium-Bindungszustandes im  $s$ -Kanal entsprechen.
- Die Farbstruktur  $D_{abcd}^M$  dieser Multipletts läßt sich auch nach der benutzten Basis von Farbtensoren  $\{C^i\}$  entwickeln (2.27–2.32). Ein Vergleich mit der Basisentwicklung (2.6) liefert außerdem für die Multipllettamplituden  $X_s^M$  zugehörige Linearkombinationen (2.11a–2.11f) der Farbkomponenten  $X_{i,s}$ .
- Diese Linearkombinationen entkoppeln schließlich — zusammen mit (2.12a–2.12f) — das Gleichungssystem, so daß die sechs resultierenden Integralgleichungen (2.10a–2.10f) für die Multipllettamplituden keine Farbdynamik mehr enthalten.
- Die Farbkomponenten  $X_{13,s}$ ,  $X_{14,s}$  und  $X_{15,s}$  erfüllen die Identität (2.9) und sind nur für die Farbdekuplett-Kanäle von Bedeutung.

Damit lassen sich im Rahmen dieser Arbeit, die lediglich den Farbsingulett-Kanal behandeln soll, die symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  in späteren Ansätzen für den Residuumentensor und den Kern ganz weglassen.

# Kapitel 3

## Eliminierung der Geister-Beiträge in Ordnung $(g^0)$

Die Fadde'ev-Popov-Geister werden bei der Quantisierung des nichtabelschen Eichfeldes im Pfadintegralformalismus eingeführt, um die redundanten Freiheitsgrade der Theorie auszugleichen, die bei einem allein über das lokale Eichprinzip konstruierten Wirkungsfunktional unvermeidbar sind. Die Geister verhalten sich als Grassmannwertige Felder dabei in der störungstheoretischen Behandlung wie Fermionen, obwohl die Impulsstruktur ihres rein perturbativen Propagators nullter Ordnung

$$\tilde{D}_{ab}^{(0)pert}(Q) = -\delta_{ab} \frac{1}{Q^2} \quad (3.1)$$

der eines masselosen Bosons entspricht.

Wir wollen in diesem Kapitel durch allgemeine Überlegungen zum Konvergenzverhalten von oberflächlich divergenten Schleifen zeigen, daß die — im allgemeinen vorhandene — Gluon-Geist-Kopplung in der Bethe-Salpeter-Gleichung in Ordnung  $(g^0)$  für den Farbsingulett-Kanal keinen Beitrag liefert.

In einer Beschreibung durch Feynman-Diagramme müssen wir in diesem Kapitel zwei graphische Elemente unterscheiden: Der volle transversale Gluonpropagator in nullter Ordnung der erweiterten Störungstheorie

$$\frac{\mu, a \quad \nu, b}{Q} = D_{T,ab}^{(0,1)\mu\nu}(Q) \quad (3.2)$$

wurde schon im ersten Kapitel benutzt und wird später in (4.28) spezifiziert werden. Der volle Geist-Propagator in nullter Ordnung der erweiterten Störungstheorie (3.12) besitzt aufgrund seines Fermion-Charakters eine eindeutige Orientierung und wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\begin{array}{c} a \quad \dots \rightarrow \dots \quad b \\ Q \end{array} = \tilde{D}_{ab}^{(0,1)}(Q) \quad (3.3)$$



Die breite Doppellinie bei den Residuumsfaktoren symbolisiert verschiedene erhaltene Quantenzahlen des Bindungszustandes im  $s$ -Kanal und beschreibt ein — im Prinzip — beobachtbares physikalisches Teilchen.

”Gemischte” Residuumsfaktoren des Typs

(3.5)

bei denen der zugehörige Bindungszustand ein Grassmann-wertiges Vektorfeld mit Geistzahl  $\pm 1$  sein müßte, können in (3.4) nicht direkt, sondern allenfalls implizit in den Kernen auftreten, da der 1-Geist-1-Gluon-Kanal auf Grund der Erhaltung der Geistzahl vom ”horizontalen” Kanal gar nicht erreichbar ist.

Wir nehmen hier darüber hinaus an, daß ein derartiger unphysikalischer Bindungspol bzw. Vertex sich überhaupt nicht ausbildet, d. h. daß Terme des Typs (3.5) identisch verschwinden. Eine mögliche Methode für die Überprüfung der Konsistenz dieser Annahme werden wir am Schluß des Kapitels andeuten.

Wir wollen nun zeigen, daß der Residuumsfaktor mit zwei Geisterbeinen in nullter Störungsordnung im Farbsingulett-Kanal

(3.6)

ebenfalls verschwindet und damit alle Geister-Beiträge im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden können.

Dazu nehmen wir an, daß der zugehörige analytische Ausdruck zwar die Massendimension  $+1$  besitzt, aber als Residuumsfaktor eines logarithmisch divergenten 4-Punkt-Vertex höchstens Terme der Ordnung  $(q^0)$  bezüglich des äußeren Relativimpulses enthält.

Dies ist anders als beim nackten, störungstheoretischen 3-Gluon-Vertex, der bezüglich beider unabhängiger Impulse lineare Anteile besitzt:

$$= \Gamma_{3,abc}^{(0)pert,\kappa\lambda\mu}(p; P)$$

$$= i f_{abc} \left[ \delta^{\lambda\mu} \left( \frac{3P}{2} + p \right)^\kappa + \delta^{\kappa\mu} \left( -\frac{3P}{2} + p \right)^\lambda - 2 \delta^{\kappa\lambda} p^\mu \right] \quad (3.7)$$

Eine Sonderstellung nimmt in diesem Zusammenhang der nackte, störungstheoretische Geist-Geist-Gluon-Vertex <sup>1</sup> ein:

$$= \tilde{\Gamma}_{3,abc}^{(0)pert,\mu}(p; P)$$

$$= i f_{abc} \left( \frac{P}{2} - p \right)^\mu \quad (3.8)$$

Seine asymmetrische Impulsstruktur bewirkt, daß er bei der Impulspotenzabzählung in Schleifen, die auf den ersten Blick eine logarithmische Divergenz ausbilden, effektiv nur mit einer Potenz  $+1/2$  beiträgt und folglich die zugehörigen Integrale tatsächlich oberflächlich konvergent sind [3].

Diese Eigenschaft, die sich im übrigen auf den angezogenen Geist-Geist-Gluon-Vertex überträgt, wird sich als Schlüssel für die Eliminierung der Geister-Beiträge in Ordnung  $(g^0)$  erweisen.

Der Residuumsfaktor (3.6) erfüllt eine zweite Integralgleichung vom selben Typ wie (3.4):

---

<sup>1</sup>Wir wählen hier die Konvention aus [7], d. h. es tritt immer der Impuls des einlaufenden Geisterbeins explizit auf.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \diagup \cdots \blacktriangleright \\ \diagdown \cdots \blacktriangleleft \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{l} (SING)_s \\ \longrightarrow \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u''_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right. = \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \begin{array}{c} \diagup \cdots \blacktriangleright \\ \diagdown \cdots \blacktriangleleft \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{l} (SING)_s \\ \longrightarrow \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u''_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right. \\
- \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \begin{array}{c} \diagup \cdots \blacktriangleright \\ \diagdown \cdots \blacktriangleleft \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{l} (SING)_s \\ \longrightarrow \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u''_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right. \\
- \frac{1}{2} g_0^2 \cdot \begin{array}{c} \diagup \cdots \blacktriangleright \\ \diagdown \cdots \blacktriangleleft \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{l} (SING)_s \\ \longrightarrow \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u''_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right.
\end{array}$$

(3.9)

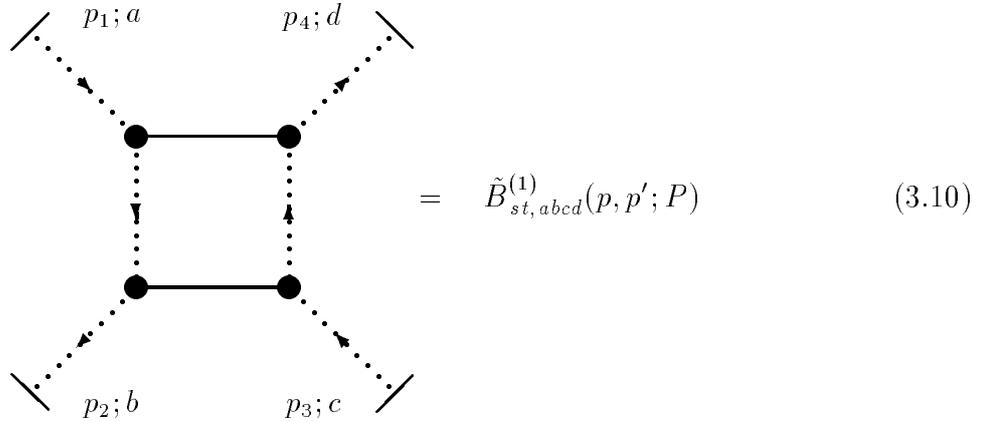
Die negativen Vorzeichen der beiden Geisterschleifen sind hier nur Konvention: sie müssen bei Skelettgraphentwicklungen der Kerne genau dann berücksichtigt werden, wenn der Gesamtgraph tatsächlich eine ungerade Anzahl von geschlossenen Geisterschleifen enthält.

Warum werden hier überhaupt zwei Geisterschleifen getrennt behandelt und nicht wie in (3.4) zu einer Schleife ohne Symmetriefaktor zusammengefaßt?

Der Grund ist natürlich in der fehlenden Partialsymmetrie der Bethe-Salpeter-Kerne zu finden: Da die gerichteten, äußeren Geisterbeine der Invarianz unter einer Symmetrie-Transformation des Typs (1.14a–1.14b) entgegenstehen, sind die Kerne  $K_s''$  und  $\tilde{K}_s''$  tatsächlich verschieden, was sich schon bei den einfachsten Ske-

lettgraphentwicklungen zeigt. Eine Spezifizierung der Kerne in Ordnung  $(g^0)$  der erweiterten Störungstheorie macht dies deutlicher:

Wählen wir einen der Box-Graphen auf 1-Schleifen-Niveau <sup>2</sup>



$$= \tilde{B}_{st,abcd}^{(1)}(p, p'; P) \quad (3.10)$$

als typischen — auf den ersten Blick logarithmisch divergenten — Anteil des Kerns  $K_s''$  in Ordnung  $(g^2)$ , so zeigt sich bei der Potenzabzählung unter Berücksichtigung von (3.8), daß der oberflächliche Divergenzgrad  $d = -2$  vorliegt. Dasselbe Verhalten beobachtet man auch bei dem Kern  $\tilde{K}_s''$ ; folglich handelt es sich bei beiden Kernen effektiv um konvergente Amplituden. Damit kann auch der an Divergenzen gekoppelte  $1/g^2$ -Mechanismus [15], den wir im fünften Kapitel vorstellen werden, nicht wirken und die Kerne enthalten in Ordnung  $(g^0)$  der erweiterten Störungstheorie nur 1-Gluon-Austauschgraphen in den gekreuzten Kanälen sowie eventuelle Pole der Ordnung  $(g^0)$  in den gekreuzten Farbsingulett- und Farboktett-Kanälen.

Ein genauer Blick auf die Struktur der Kerne zeigt dabei, daß jeder der beiden wegen der strengen Erhaltung der Geizzahl nur genau *einen* 1-Gluon-Austauschgraphen im  $t$ -Kanal bzw. im  $u$ -Kanal besitzt. Durch den Mechanismus des kompensierenden Pols [7] werden dann beide (auf Stufe  $r=1$ ) jeweils gerade durch genau *einen* Pol in den gekreuzten Farboktett-Kanälen "geschluckt", so daß nur die beiden Pole in den gekreuzten Farbsingulett-Kanälen übrigbleiben.

Diese Argumentation bleibt auch richtig, falls Graphen mit einer höheren Anzahl von Schleifen hinzugenommen werden. Jede neue divergente Schleife, die beispielsweise durch das Einsetzen von Insertionen [3] zustandekommen würde, ist immer mit mindestens zwei  $g$ -Faktoren verbunden, so daß sich die zur Modifizierung der nullten Ordnung erforderliche Anzahl von nichtperturbativen Logarithmen [7] nicht ausbilden kann.

Beim Ersetzen der Kerne  $K_s''$  und  $\tilde{K}_s''$  in (3.9) durch die zugehörigen gekreuzten Farbsingulett-Pole entstehen die beiden folgenden Schleifen:

---

<sup>2</sup>Die untere Indexkombination "st" kennzeichnet die beiden Kanäle, in denen der Graph 2-Teilchen-reduzibel ist.

$$(3.11a)$$

$$(3.11b)$$

Bei der Abzählung von Impulspotenzen in den beiden Schleifen erhält man wegen des Polfaktors in den entsprechenden Mandelstam-Variablen  $t$  bzw.  $u$  und wegen des schon früher geforderten Impulsverhaltens der Residuen:

$$n = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -6$$

Folglich besitzen sie den oberflächlichen Divergenzgrad  $d = -2$  und sind in vier Dimensionen konvergent.

Damit kann die Geisterschleife in (3.9) zur selbstkonsistenten Reproduktion von Residuumsfaktoren der Form (3.6) in nullter Störungsordnung nicht beitragen.

Bei der Behandlung der Gluonschleife in (3.9) gehen wir völlig analog vor:

Betrachten wir wieder einen Box-Graphen als typisches Beispiel für die möglicherweise divergenten Anteile des Kerns  $\tilde{K}'_s$ , so führt eine Abzählung der Impulspotenzen unter Berücksichtigung von (3.8) diesmal auf den oberflächlichen Divergenzgrad  $d = -1$ . Damit ist auch dieser Kern effektiv eine konvergente Amplitude und höhere Skelettgraphentwicklungen mit zwei oder mehr Schleifen können über den  $1/g^2$ -Mechanismus nicht zur Ordnung  $(g^0)$  beitragen.

Da die Residuen von eventuellen Bindungspolen in den gekreuzten Kanälen außerdem in diesem Fall nur Faktoren der Form (3.5) enthalten, besitzt der Kern  $\tilde{K}'_s$  also

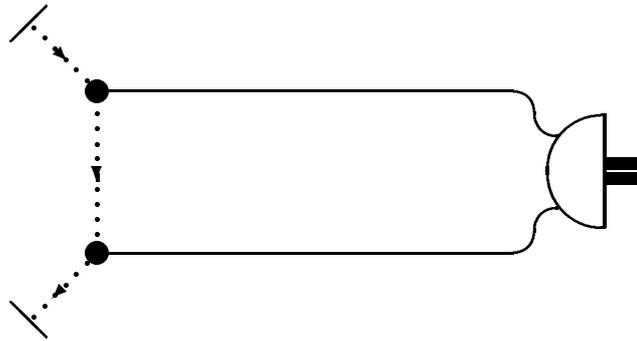
in Ordnung ( $g^0$ ) der erweiterten Störungsrechnung nur die 1-Geist-Austauschgraphen in den gekreuzten Kanälen.

Es sollte erwähnt werden, daß für letztere ein kompensierender Pol im entsprechenden Vertex nicht zu fordern ist, da der Geist-Propagator bei einer Erweiterung durch die erste Stufe der rationalen Approximation, wie wir sie im vierten Kapitel einführen werden, seinen Pol im Ursprung der euklidischen  $Q^2$ -Achse behält:

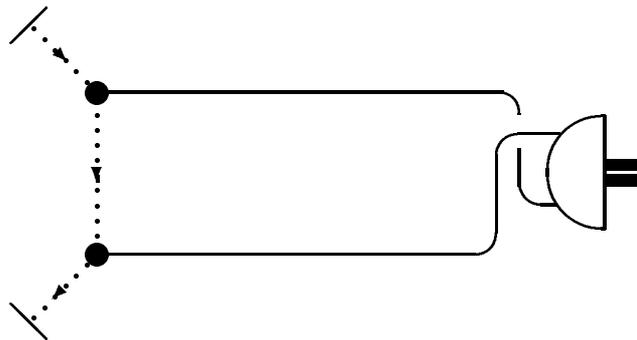
$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ab}^{(0,1)}(Q) &= -\delta_{ab} \frac{Q^2 + \tilde{u}_{1,2}\Lambda^2}{Q^2(Q^2 + \tilde{u}_{1,1}\Lambda^2)} \\ &= -\delta_{ab} \frac{\tilde{u}_{1,2}}{\tilde{u}_{1,1}} \frac{1}{Q^2} + (\text{massiver Pol}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Beschränkung auf eine Confinement zeigende Lösung läßt aber einen solchen Pol für *unphysikalische* Linien durchaus zu.

Beim Ersetzen des Kerns  $\tilde{K}'_s$  durch die beiden 1-Geist-Austauschgraphen in den gekreuzten Kanälen entstehen folgende Schleifen:



$$(3.13a)$$



$$(3.13b)$$

Beide Schleifen ergeben wegen (3.8) und (3.12) bei der Abzählung der Impulspotenzen:

$$n = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1/2 = -5$$

Damit besitzen sie den oberflächlichen Divergenzgrad  $d = -1$  und sind ebenfalls in vier Dimensionen konvergent.

Daraus folgt aber, daß auch die Gluonschleife in (3.9) keine selbstkonsistente Reproduktion von (3.6) im Farbsingulett-Kanal in Ordnung  $(g^0)$  zuläßt und folglich nur die triviale Lösung der Integralgleichung (3.9)

$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right| \begin{array}{c} (SING)_s \\ \longrightarrow \\ \\ \\ O(g^0) \end{array} = 0$$

existiert, was wir zur Eliminierung der Geister-Beiträge in (3.4) zeigen mußten.

Abschließend könnte man nun eine zu (3.4) oder (3.9) analoge Bethe-Salpeter-Gleichung für den Residuumsfaktor (3.5) aufstellen und sich durch entsprechend modifizierte Wiederholung der obigen Argumentation davon überzeugen, daß die Annahme des Verschwindens von (3.5) in sich konsistent ist.

Es muß nochmals betont werden, daß die Schlüsse dieses Kapitels nur für die Ordnung  $(g^0)$  der erweiterten Störungsrechnung gelten und daß hier nicht untersucht wird, ob etwa durch eine Teilsummation der  $g^2$ -Reihe einzelne Beiträge der Geisterschleife in (3.4) stabilisiert werden könnten.

# Kapitel 4

## Ansätze für die Tensor- und die Impulsstruktur

### 4.1 Notationen für die Lorentztensoren

Eine vollständige Behandlung der Lorentz-Tensor-Struktur unserer Integralgleichung ist mit 138 Lorentztensoren überaus umfangreich. In der Landau-Eichung werden allerdings durch die Transversalität der äußeren und inneren Gluonbeine sehr viele Anteile mit zwei Impulspotenzen und einem Kronecker-Symbol oder mit vier Impulspotenzen eliminiert. Außerdem zwingt die partielle Bosesymmetrie im  $s$ -Kanal den freien Parametern sehr viele Bedingungen auf.

Wir wählen daher im wesentlichen die folgenden drei dimensionslosen Lorentztensoren für unsere Ansätze:

$$L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = 1/D \delta^{\kappa\lambda} \delta^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = 1/2 (\delta^{\kappa\mu} \delta^{\lambda\nu} + \delta^{\kappa\nu} \delta^{\lambda\mu}) - 1/D \delta^{\kappa\lambda} \delta^{\mu\nu} \quad (4.2)$$

$$L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = 1/2 (\delta^{\kappa\mu} \delta^{\lambda\nu} - \delta^{\kappa\nu} \delta^{\lambda\mu}) \quad (4.3)$$

Sie erfüllen die Projektor-Identität

$$L_i^{(\kappa\lambda\rho\sigma)} L_j^{(\rho\sigma\mu\nu)} = \delta_{ij} L_i^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \quad (\text{für } i, j = 0, +, -) \quad (4.4)$$

und besitzen eine eindeutige Partialsymmetrie im  $s$ -Kanal bezüglich der Operationen (1.12a–1.14b):

- Die Tensoren  $L_0$  und  $L_+$  sind symmetrisch.
- Der Tensor  $L_-$  ist antisymmetrisch.

Außerdem treten bei der späteren Auswertung des Schleifenintegrals aus (1.23) noch drei weitere — ebenfalls dimensionslose — Lorentztensoren auf:

$$M_1^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} := \delta^{\eta\rho} (\delta^{\zeta\kappa} \delta^{\sigma\lambda} + \delta^{\zeta\lambda} \delta^{\sigma\kappa}) + \delta^{\zeta\sigma} (\delta^{\eta\kappa} \delta^{\rho\lambda} + \delta^{\eta\lambda} \delta^{\rho\kappa}) \quad (4.5)$$

$$M_2^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} := \delta^{\zeta\eta} (\delta^{\rho\kappa} \delta^{\sigma\lambda} + \delta^{\rho\lambda} \delta^{\sigma\kappa}) + \delta^{\eta\sigma} (\delta^{\zeta\kappa} \delta^{\rho\lambda} + \delta^{\zeta\lambda} \delta^{\rho\kappa}) + \delta^{\zeta\rho} (\delta^{\eta\kappa} \delta^{\sigma\lambda} + \delta^{\eta\lambda} \delta^{\sigma\kappa}) + \delta^{\rho\sigma} (\delta^{\zeta\kappa} \delta^{\eta\lambda} + \delta^{\zeta\lambda} \delta^{\eta\kappa}) \quad (4.6)$$

$$N_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)}(P) := 1/2 \left( \frac{P^\zeta P^\eta}{\Lambda^2} \delta^{\rho\sigma} + \frac{P^\rho P^\sigma}{\Lambda^2} \delta^{\zeta\eta} \right) \quad (4.7)$$

## 4.2 Die erste Stufe der faktorisierenden, rationalen Approximanten

Wir benutzen für den Gluonpropagator und die 4-Punkt-Amplituden neben der üblichen störungstheoretischen Entwicklung nach Potenzen der quadratischen Kopplungskonstanten  $g^2$  eine Modifizierung der Impulsabhängigkeiten durch faktorisierende, rationale Approximanten. Diese bilden für jede Störungsordnung eine Sequenz von gebrochen rationalen Funktionen in den unabhängigen Impulsvariablen des entsprechenden Vertex [12] [7].

Die Erweiterungen durch rationale Approximanten müssen in jeder Stufe einigen physikalischen Forderungen genügen:

- Um das Confinement zu beschreiben, darf der transversale Gluonpropagator keinen Pol auf der reellen Achse besitzen. Er kann allerdings Paare zueinander komplex konjugierter Pole in der komplexen  $Q^2$ -Ebene haben, wie sie durch Jet-Experimente angeregt werden. Die Masse und die Lebensdauer dieser kurzlebigen Gluonen wird dann durch dasjenige Polpaar bestimmt, dessen Positionen dem Ursprung am nächsten liegen. Dieser Gesichtspunkt wurde auch schon im dritten Kapitel in Gleichung (3.12) benutzt, um den Pol des unphysikalischen Geist-Propagators bei  $Q^2 = 0$  interpretieren zu können.

Es wird also aus der Schar aller möglichen Approximanten eine spezielle Teilfolge, nämlich die mit ungeradem Nennergrad  $r$  des 2-Punkt-Vertex (oder ungeradem Zählergrad des Propagators), ausgewählt.

- Damit alle modifizierten Vertizes noch perturbativ renormierbar bleiben, sollten unsere Ansätze für große Impulse in ihre rein störungstheoretischen Anteile

übergehen. Dies stellt außerdem die Gültigkeit der "naiven" asymptotischen Freiheit sicher <sup>1</sup>.

- Aus Gründen der Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenz [12] wird eine Faktorisierungseigenschaft gefordert, d.h. es sind nur Brüche erlaubt, deren Nenner in allen einlaufenden Impulsvariablen mit konstanten Polstellen <sup>2</sup> faktorisieren.

Eine ausführliche Diskussion der faktorisierenden, rationalen Approximanten findet sich in [12]. Allerdings sind konkrete Anwendungen dieses Schemas bisher nur auf erster Stufe, d. h. bei Beschränkung auf *einen* Nennerfaktor pro invarianter Variable, gelungen. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls nur die erste Stufe der allgemeinen Sequenz benutzen, so daß sich als Bausteine die folgenden dimensionslosen Polfaktoren anbieten:

$$\Pi_i := \frac{\Lambda^2}{p_i^2 + u''_{1,2}\Lambda^2} \quad (4.8)$$

$$\Pi_{Q_{1,2}} := \frac{\Lambda^2}{\left(\frac{P}{2} \mp q\right)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2} \quad (4.9)$$

$$\Pi_s := \frac{\Lambda^2}{P^2 + u''_{1,2}\Lambda^2} \quad (4.10)$$

$$\Pi_{u,t} := \frac{\Lambda^2}{(p \pm q)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2} \quad (4.11)$$

Folgende Abkürzungen erweisen sich später bei Entwicklungen nach Potenzen des Integrationsimpulses  $q$  als nützlich:

$$\begin{aligned} f(p, q) &:= \left((p+q)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2\right)\left((p-q)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2\right) \\ &\left( = \Lambda^4 \Pi_u^{-1} \Pi_t^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} g(q, P) &:= \left(\left(\frac{P}{2} - q\right)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2\right)\left(\left(\frac{P}{2} + q\right)^2 + u''_{1,2}\Lambda^2\right) \\ &\left( = \Lambda^4 \Pi_{Q_1}^{-1} \Pi_{Q_2}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

---

<sup>1</sup>Wegen der Dimensionslosigkeit unserer Ansätze ist diese Forderung gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Ansätze bei Abschalten der nichtperturbativen Massenskala  $\Lambda$ !

<sup>2</sup>Die Parametrisierung muß dabei auf der Stufe  $r=1$  durch den Massenparameter  $u''_{1,2}$  erfolgen!

Im Ansatz für den Bethe-Salpeter-Kern werden wir die folgenden  $s$ -Kanal-symmetrischen Kombinationen  $F_{i,s}$  und  $s$ -Kanal-antisymmetrischen Kombinationen  $G_{i,s}$  der Polfaktoren (4.8–4.11) benutzen <sup>3</sup>:

$$F_{1,s} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \quad (4.14)$$

$$F_{2,s} = (\Pi_1 + \Pi_2) \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) + \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) (\Pi_3 + \Pi_4) \quad (4.15)$$

$$F_{6,s} = \Pi_1 \Pi_2 \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) + \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.16)$$

$$F_{7,s} = (\Pi_1 + \Pi_2)(\Pi_3 + \Pi_4) \quad (4.17)$$

$$F_{8,s} = \frac{1}{\Pi_s} \left( \Pi_1 \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) + (\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \Pi_4 \right) \quad (4.18)$$

$$F_{9,s} = \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.19)$$

$$F_{11,s} = \Pi_1 \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) + (\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.20)$$

$$F_{12,s} = \frac{1}{\Pi_s} \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.21)$$

$$F_{13,s} = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.22)$$

$$F_{14,s} = \Pi_1 \Pi_2 \left( \frac{1}{\Pi_3} + \frac{1}{\Pi_4} \right) + \left( \frac{1}{\Pi_1} + \frac{1}{\Pi_2} \right) \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.23)$$

$$G_{3,s} = (\Pi_1 - \Pi_2) \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - \frac{\Pi_3}{\Pi_4} \right) + \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) (\Pi_3 - \Pi_4) \quad (4.24)$$

$$G_{5,s} = (\Pi_1 - \Pi_2)(\Pi_3 - \Pi_4) \quad (4.25)$$

$$G_{6,s} = \left( \frac{u-t}{\Lambda^2} \right) \left( \Pi_1 \Pi_2 (\Pi_3 + \Pi_4) + (\Pi_1 + \Pi_2) \Pi_3 \Pi_4 \right) \quad (4.26)$$

$$G_{8,s} = \left( \frac{u-t}{\Lambda^2} \right) \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \quad (4.27)$$

Es lassen sich noch weitere invariante Funktionen aus den Polfaktoren bilden, die zwar auf den ersten Blick alle genannten Forderungen erfüllen, aber bei den später

---

<sup>3</sup>Aus Gründen der partiellen Bose-Symmetrie treten die gekreuzten Mandelstam-Variablen  $u$  und  $t$  nur in den Kombinationen  $u + t$  und  $u - t$  auf. Die erste Kombination läßt sich dabei wegen (1.10) auch durch  $s$  ausdrücken.

auszuführenden Crossing-Operationen verbotene, d. h. die perturbative Renormierbarkeit verletzende, Beiträge liefern.

Da wir im Rahmen dieser Arbeit aus Gründen der Komplexität eine Auswahl treffen müssen, werden wir uns auf die 14 invarianten Impulsfunktionen (4.14–4.27) beschränken. Diese sind dadurch ausgezeichnet, daß sie bezüglich der Crossing-Algebra (Anhang C) ein abgeschlossenes System bilden. Die Kombination  $F_{14,s}$  (4.23) verletzt zwar an dieser Stelle die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit; sie wird aber später im Ansatz für den Bethe-Salpeter-Kern benötigt, um höher divergente Anteile aus den gekreuzten Residuumentensoren zu kompensieren. Sie verschwindet allerdings in der Gesamtamplitude  $T_4$ , die als einzige amputierte 4-Punkt-Funktion in höheren Skelettgraphentwicklungen vorkommt.

Wir sind nun in der Lage, den Farbsingulett-Kanal der Integralgleichung (1.23) auch in seiner Lorentz- und Impulsstruktur zu beschreiben. Dabei werden uns nur die divergenten Anteile des Schleifenintegrals und deshalb in nachfolgenden Ansätzen nur positive Ordnungen im Integrationsimpuls  $q$  interessieren. Diese Einschränkung soll erst im nächsten Kapitel bei der Beschreibung des  $1/g^2$ -Mechanismus begründet werden.

### 4.3 Der Gluonpropagator in Landau-Eichung

Die Farbstruktur des Gluonpropagators wurde schon vorher in (2.4) beschrieben. Wir wählen die Landau-Eichung und setzen den damit rein transversalen Gluonpropagator in Ordnung ( $g^0$ ) der erweiterten Störungstheorie folgendermaßen an [12]:

$$\begin{aligned} D_{T,ab}^{\eta\rho}(Q) &= \delta_{ab} D_T^{(0,1)\eta\rho}(Q) \\ &= \delta_{ab} \frac{(\delta^{\eta\rho} Q^2 - Q^\eta Q^\rho)(Q^2 + u_{1,2}\Lambda^2)}{Q^2(Q^2 + u_+\Lambda^2)(Q^2 + u_-\Lambda^2)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Das obere Indexpaar  $(0,1)$  steht hier — wie auch im folgenden — für die nullte Ordnung bezüglich der  $g^2$ -Reihe und die erste Stufe der rationalen Approximation. Der Parameter  $u_{1,2}$  ist außerdem aus Gründen der Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenz mit dem Massenparameter  $u''_{1,2}$  aus (1.19) identisch [12] [15].

### 4.4 Der Residuumentensor

Die Eigenschaften des Residuumentensors  $R_s$  aus der Zerlegung (1.19) wurden teilweise im dritten Kapitel angedeutet. Bezüglich seiner Tensor- und Impulsstruktur hat er folgenden physikalischen Forderungen zu genügen:

- Er soll wegen der Dimensionslosigkeit der Kanalampplitude  $X_s$  die Massendimension  $+2$  besitzen.

- Er soll partiell bosesymmetrisch im  $s$ -Kanal sein.
- Er soll im "perturbativen Limes" ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) verschwinden.
- Er soll eine Summe von Termen sein, die jeweils bezüglich der zwei Seiten des  $s$ -Kanals faktorisieren.

Für den Farbsingulett-Anteil des Residuumentensors spielt wegen der Beziehung (2.2a) und der geforderten Faktorisierungseigenschaft nur der Farbtensor  $C^1$  eine Rolle. Außerdem benutzen wir in unserem Ansatz für die Lorentzstruktur im wesentlichen die dimensionslosen Tensoren (4.1–4.3), um später der Projektionseigenschaft (4.4) nutzen zu können:

$$\begin{aligned}
& R_{s,abcd}^{(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}(p,p';P) \\
&= \delta_{ab}\delta_{cd} R_{1,s}^{(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}(p,p';P) \\
&= \delta_{ab}\delta_{cd} \left( \Phi_0^{\kappa\lambda}(p;-P) \Phi_0^{\mu\nu}(p';P) + \Phi_1^{\kappa\lambda\gamma\delta}(p;-P) \Phi_1^{\mu\nu\gamma\delta}(p';P) \right. \\
&\quad \left. + \Phi_2^{\kappa\lambda\gamma\delta}(p;-P) \Phi_2^{\mu\nu\gamma\delta}(p';P) + \Phi_3^{\kappa\lambda\phi}(p;-P) \Phi_3^{\mu\nu\phi}(p';P) \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Die Größen  $\Phi_0$  bis  $\Phi_3$  entsprechen den üblichen Bethe-Salpeter-Amplituden [11] und beschreiben in ihrer Lorentz-Tensor-Struktur vier verschiedene Spin- und Paritäts-Quantenzahlsätze des Gluonium-Bindungszustandes.

Sie werden für die linke Seite des  $s$ -Kanals unter Verwendung von Bausteinen analog zu (4.14–4.27) folgendermaßen angesetzt:

$$\Phi_0^{\kappa\lambda}(p;P) = \delta^{\kappa\lambda} \Lambda \left( a_0 + b_0 (\Pi_1 + \Pi_2) + c_0 \Pi_1 \Pi_2 + d_0 \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \quad (4.30)$$

$$\Phi_1^{\kappa\lambda\gamma\delta}(p;P) = L_-^{(\kappa\lambda\gamma\delta)} \Lambda \left( b_1 (\Pi_1 - \Pi_2) + c_1 \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) \right) \quad (4.31)$$

$$\Phi_2^{\kappa\lambda\gamma\delta}(p;P) = L_+^{(\kappa\lambda\gamma\delta)} \Lambda \left( a_2 + b_2 (\Pi_1 + \Pi_2) + c_2 \Pi_1 \Pi_2 + d_2 \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3^{\kappa\lambda\phi}(p;P) &= \delta^{\kappa\lambda} (-p)^\phi b_3 (\Pi_1 - \Pi_2) \\
&+ \left( \delta^{\lambda\phi} (P - p_1/2)^\kappa \right) \left( -a_4 (\Pi_1 - \Pi_2) + b_4 (\Pi_1 + \Pi_2) + c_4 \Pi_1 \Pi_2 \right) \\
&+ \left( \delta^{\kappa\phi} (P - p_2/2)^\lambda \right) \left( a_4 (\Pi_1 - \Pi_2) + b_4 (\Pi_1 + \Pi_2) + c_4 \Pi_1 \Pi_2 \right) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die rechte Seite des  $s$ -Kanals erhält man durch Ersetzung der Impulsvariablen und der Lorentzindizes wie in (4.29).

Die Lorentzstruktur des  $\Phi_3$ -Terms lehnt sich an die des nackten 3-Gluon-Vertex (3.7) an. Auch dort kommen drei Beiträge durch die zyklische Vertauschung der drei einlaufenden Impulse  $p_1$ ,  $p_2$  und  $-P$  zustande. Wir werden (4.33) im folgenden dadurch vereinfachen, daß wir nur rein transversale Gluonbeine zulassen; dies ist konsistent mit unserem Ansatz für den Gluonpropagator (4.28)<sup>4</sup>.

Da uns später nur divergente Anteile des Schleifenintegrals interessieren, ist es außerdem sinnvoll, den Residuumentensor auf der rechten Seite der Integralgleichung nach Potenzen des Integrationsimpulses  $q$  zu ordnen und hierbei nur die führende Ordnung mitzunehmen:

$$\begin{aligned}
& R_s^{1(0,1)\rho\sigma\mu\nu}(q, p'; P) \\
&= 8 R_{1,s}^{(0,1)\rho\sigma\mu\nu}(q, p'; P) \\
&= (\Lambda a_0)^2 L_0^{(\rho\sigma\mu\nu)} \left[ D + \frac{D b_0}{a_0} (\Pi_3 + \Pi_4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{D c_0}{a_0} \Pi_3 \Pi_4 + \frac{D d_0}{a_0} \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right] \\
&\quad + (\Lambda a_2)^2 L_+^{(\rho\sigma\mu\nu)} \left[ 1 + \frac{b_2}{a_2} (\Pi_3 + \Pi_4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_2}{a_2} \Pi_3 \Pi_4 + \frac{d_2}{a_2} \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(q^{-1}) \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Es sei noch einmal an die vereinbarte Indexnotation erinnert:

- Der einzelne obere Index "1" steht für den Farbsingulett-Anteil.
- Das obere Indexpaar "(0,1)" steht für die nullte Ordnung der erweiterten Störungstheorie bzw. die erste Stufe der rationalen Approximation.
- Der einzelne untere Index "1" bezeichnet wie in der Entwicklung (2.6) diejenige Farbkomponente des Residuums, die zum Farbtensor  $C^1$  gehört.
- Der einzelne untere Index "s" kennzeichnet wie früher den  $s$ -Kanal.

---

<sup>4</sup>Wir vernachlässigen im Rahmen dieser Arbeit einen möglichen Transversal-Projektor zwischen den beiden  $\Phi_3$ -Termen d. h. die Landau-Eichung des vektoriellen "Gluon-Balles"!

## 4.5 Der Bethe-Salpeter-Kern

Um die implizite Crossing-Symmetrie der Bethe-Salpeter-Gleichung zu berücksichtigen, benutzen wir im Ansatz für den Kern die Zerlegung (1.18) zusammen mit (2.12a) und führen die Crossing-Operationen anschließend explizit aus.

Die gekreuzten 1-Gluon-Austauschgraphen werden wie im dritten Kapitel auf der Stufe  $r=1$  durch den Mechanismus des kompensierenden Pols [7] gerade beseitigt. Dies fordert bereits die Dyson-Schwinger-Gleichung für den 3-Gluon-Vertex; es entspricht der Confinement-Hypothese, nach der die amputierte, zusammenhängende 4-Gluon-Amplitude  $T_4$  keine Bindungspol-Beiträge im Farbklett-Kanal besitzen sollte.

Allerdings müssen die regulären Anteile der  $X_s$ -Amplitude aus (1.19) in ihrer gekreuzten Form ebenso wie die Residuumentensoren in den gekreuzten Farbsingulett-Kanälen berücksichtigt werden. Eine Faktorisierungseigenschaft der regulären Anteile ist dabei nicht zu erwarten, so daß die Farbstruktur des Kerns etwas allgemeiner als beim Residuumentensor (4.29) angesetzt werden muß.

Um die Crossing-Eigenschaften des Kerns nutzen zu können, muß zunächst die Farbstruktur rekapituliert werden. Wir beginnen mit dem regulären Anteil der Kanal-amplitude aus der Zerlegung (1.19); dieser kann — unter Ausnutzung der Resultate des zweiten Kapitels — wie üblich nach den unabhängigen Farbtensoren entwickelt werden <sup>5</sup>:

$$Z_s = Z_{1,s} C^1 + Z_{2,s} C^2 + Z_{3,s} C^3 + Z_{5,s} C^5 + Z_{6,s} C^6 \quad (4.35)$$

Die im Anhang C zusammengestellten Crossing-Tabellen liefern dann für die Summe der gekreuzten Terme:

$$\begin{aligned} Z_u + Z_t &= (Z_{2,u} + Z_{3,t}) C^1 \\ &+ (Z_{1,u} + Z_{2,t}) C^2 \\ &+ (Z_{1,t} + Z_{3,u}) C^3 \\ &+ (Z_{5,u} - Z_{5,t} + Z_{6,t}) C^5 \\ &+ (Z_{5,u} - Z_{6,u} + Z_{6,t}) C^6 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Wir setzen nun dieses Resultat unter Ausnutzung des "kompensierenden Pols" in die allgemeine 4-Punkt-Amplitude  $T_4$  (1.15) ein und erhalten:

---

<sup>5</sup>Wir werden bei der Behandlung der Farbstruktur wieder die Impulsabhängigkeiten und alle Indizes weglassen. Für eine entsprechende Erweiterung der Ansätze kann auf die Zerlegung (1.19) zurückgegriffen werden.

$$\begin{aligned}
T_4 &= K_s + Z_s + \frac{R_s}{s + u''_{1,2}\Lambda^2} \\
&= \Gamma_4^{(0)pert} \\
&\quad + (Z_{1,s} + Z_{2,u} + Z_{3,t}) C^1 \\
&\quad + (Z_{1,u} + Z_{2,s} + Z_{2,t}) C^2 \\
&\quad + (Z_{1,t} + Z_{3,s} + Z_{3,u}) C^3 \\
&\quad + (Z_{5,s} + Z_{5,u} - Z_{5,t} + Z_{6,t}) C^5 \\
&\quad + (Z_{5,u} + Z_{6,s} - Z_{6,u} + Z_{6,t}) C^6 \\
&\quad + \frac{R_{1,s}}{s + u''_{1,2}\Lambda^2} C^1 + \frac{R_{1,u}}{u + u''_{1,2}\Lambda^2} C^2 + \frac{R_{1,t}}{t + u''_{1,2}\Lambda^2} C^3 \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Die *allgemeine* Crossing-Symmetrie dieser Amplitude liefert die folgenden Identitäten für die Farbkomponenten:

$$Z_{2,t} = Z_{3,t} \quad (4.38a)$$

$$-Z_{5,t} = Z_{6,t} \quad (4.38b)$$

$$Z_{2,u} = Z_{3,u} \quad (4.38c)$$

$$-Z_{5,t} - Z_{6,u} = Z_{5,u} + Z_{6,t} \quad (4.38d)$$

$$Z_{2,s} + Z_{2,u} = Z_{3,s} + Z_{3,u} \quad (4.38e)$$

$$Z_{2,t} + Z_{3,u} = Z_{2,u} + Z_{3,t} \quad (4.38f)$$

$$-Z_{6,s} - Z_{6,u} = Z_{5,s} + Z_{5,u} \quad (4.38g)$$

$$-Z_{5,s} - Z_{5,t} = Z_{6,s} + Z_{6,t} \quad (4.38h)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt nur die folgende Lösung:

$$Z_{2,s} = Z_{3,s} \quad (4.39)$$

$$-Z_{5,s} = Z_{6,s} \quad (4.40)$$

Damit reduziert sich also die Zahl der unbekanntnen Funktionen in der Entwicklung (4.35). Natürlich vereinfacht sich damit die Summe (4.36) und auch der Ausdruck (4.37) für die allgemeine 4-Punkt-Amplitude.

Um die volle Crossing-Symmetrie dieser Amplitude zu betonen und mögliche Kompensationsmechanismen — diese spielen wegen des zu fordernden ”kompensierenden Pols” im wesentlichen für den Farboktett-Kanal eine Rolle — zwischen den einzelnen Anteilen des Kerns in nachfolgenden Arbeiten schneller einfügen zu können, führen wir neue Tensorfunktionen ein, die sich aus den freien Funktionen der Entwicklung (4.35) — teilweise in gekreuzter Form — linear zusammensetzen:

$$2 U_{1,s} = Z_{2,u} + Z_{2,t} \quad (4.41)$$

$$- V_{1,u} = Z_{1,u} + Z_{2,t} \quad (4.42)$$

$$- V_{1,t} = Z_{1,t} + Z_{2,u} \quad (4.43)$$

$$- V_{4,u} = Z_{5,u} - 2 Z_{5,t} \quad (4.44)$$

$$- V_{4,t} = 2 Z_{5,u} + Z_{5,t} \quad (4.45)$$

Wir gehen also von dem unabhängigen Funktionensatz  $(Z_{1,s}, Z_{2,s}, Z_{5,s})$  zu dem unabhängigen Funktionensatz  $(U_{1,s}, V_{1,s}, V_{4,s})$  über. Mit diesen Definitionen nimmt vor allem die allgemeine 4-Punkt-Amplitude  $T_4$  eine einfachere Gestalt an.

Wir benötigen im Rahmen dieser Arbeit allerdings nur die Darstellung des Kerns in dem neuen Funktionensatz <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} K_{s,abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu} = & \Gamma_{4,abcd}^{(0)pert,\kappa\lambda\mu\nu} \\ & + 2 U_{1,s}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^1 \\ & - \left( V_{1,u}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^2 + V_{4,u}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} (-C_{(abcd)}^5) \right) \\ & - \left( V_{1,t}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^3 + V_{4,t}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} (-C_{(abcd)}^6) \right) \\ & + \left( \frac{R_{1,u}^{(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}}{u + u''\Lambda^2} C_{(abcd)}^2 + \frac{R_{1,t}^{(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}}{t + u''\Lambda^2} C_{(abcd)}^3 \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Die Tensorfunktionen  $U_s$  und  $V_s$  in (4.46) sind solche Kombinationen von Lorentztensoren und invarianten Impulsfunktionen, daß die partielle Bosesymmetrie im  $s$ -Kanal erhalten bleibt:

---

<sup>6</sup>Obwohl wir von nun ab die Tensorstruktur wieder berücksichtigen werden, bleiben die Impulsabhängigkeiten zunächst noch unterdrückt. Sie übertragen sich natürlich bei weiteren Zerlegungen implizit auf alle in ihnen enthaltenen invarianten Funktionen.

$$U_{1,s}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = S_{0,s}L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + S_{+,s}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + A_{-,s}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \quad (4.47a)$$

$$V_{1,s}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = S'_{0,s}L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + S'_{+,s}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + A'_{-,s}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \quad (4.47b)$$

$$V_{4,s}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} = A'_{0,s}L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + A'_{+,s}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + S'_{-,s}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \quad (4.47c)$$

Die Größen  $S_{i,s}$  und  $A_{i,s}$  sind wiederum Linearkombinationen der invarianten Impulsfunktionen (4.14–4.27):

$$\begin{aligned} S_{i,s} = & c_{i,1}F_{1,s} + c_{i,2}F_{2,s} + c_{i,6}F_{6,s} + c_{i,7}F_{7,s} \\ & + c_{i,8}F_{8,s} + c_{i,9}F_{9,s} + c_{i,11}F_{11,s} + c_{i,12}F_{12,s} \\ & + c_{i,13}F_{13,s} + c_{i,14}F_{14,s} \end{aligned} \quad (4.48a)$$

$$A_{i,s} = d_{i,3}G_{3,s} + d_{i,5}G_{5,s} + d_{i,6}G_{6,s} + d_{i,8}G_{8,s} \quad (4.48b)$$

$$\begin{aligned} S'_{i,s} = & c'_{i,1}F_{1,s} + c'_{i,2}F_{2,s} + c'_{i,6}F_{6,s} + c'_{i,7}F_{7,s} \\ & + c'_{i,8}F_{8,s} + c'_{i,9}F_{9,s} + c'_{i,11}F_{11,s} + c'_{i,12}F_{12,s} \\ & + c'_{i,13}F_{13,s} + c'_{i,14}F_{14,s} \end{aligned} \quad (4.48c)$$

$$A'_{i,s} = d'_{i,3}G_{3,s} + d'_{i,5}G_{5,s} + d'_{i,6}G_{6,s} + d'_{i,8}G_{8,s} \quad (4.48d)$$

(für  $i = 0, +, -$ )

Die Farb- und Lorentzstruktur von  $\Gamma_4^{(0)pert}$  ist bekannt [3]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,abcd}^{(0)pert,\kappa\lambda\mu\nu} = & (L_2 - L_3)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^4 \\ & + (L_3 - L_1)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^5 \\ & + (L_1 - L_2)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^6 \\ = & 3/2(L_2 - L_3)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^4 \\ & + (-2L_1 + L_2 + L_3)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} 1/2(C^5 - C^6)_{(abcd)} \\ = & 3L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} C_{(abcd)}^4 \\ & + (L_+ - (D-1)L_0)^{(\kappa\lambda\mu\nu)} (C^5 - C^6)_{(abcd)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Bedenkt man die allgemeine Bosesymmetrie von  $\Gamma_4^{(0)pert}$ , so erkennt man — spätestens zu diesem Zeitpunkt — die Partialsymmetrie der Farbtensoren, welche im zweiten Kapitel zunächst unberücksichtigt blieb:

- Neben den Farbtensoren  $C_{(abcd)}^1$  und  $1/2(C^2 + C^3)_{(abcd)}$ <sup>7</sup> besitzt auch der Farbtensor  $1/2(C^5 - C^6)_{(abcd)}$  eine partielle Bosesymmetrie im  $s$ -Kanal.
- Neben dem Farbtensor  $1/2(C^2 - C^3)_{(abcd)}$ <sup>8</sup> ist auch der Farbtensor  $C_{(abcd)}^4$  antisymmetrisch bezüglich der Konventionen des ersten Kapitels.

Es sei an dieser Stelle noch betont, daß die Konstruktion (4.46) schon allein wegen der wesentlichen Benutzung der Crossing-Struktur nichts mehr mit den üblichen "Leiter"- oder "Blasen"-Näherungen des Bethe-Salpeter-Kerns gemein hat.

Mit dem Impulsvariablen-Satz (1.3–1.5) folgt nun für den Farbsingulett-Anteil des Kerns (2.12a):

$$\begin{aligned}
K_s^{1(0,1)\kappa\lambda\zeta\eta}(p, q; P) = & (6D - 6) L_0^{(\kappa\lambda\zeta\eta)} - 6 L_+^{(\kappa\lambda\zeta\eta)} \\
& + 16 U_{1,s}^{(\kappa\lambda\zeta\eta)}(p, q; P) \\
& - (V_{1,u} + V_{1,t})^{(\kappa\lambda\zeta\eta)}(p, q; P) \\
& - 3 (V_{4,u} - V_{4,t})^{(\kappa\lambda\zeta\eta)}(p, q; P) \\
& + \frac{R_u^{(0,1)(\kappa\lambda\zeta\eta)}(p, q; P)}{u + u''_{1,2}\Lambda^2} + \frac{R_t^{(0,1)(\kappa\lambda\zeta\eta)}(p, q; P)}{t + u''_{1,2}\Lambda^2}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Die Ausführung der Crossing-Operationen an den Tensorfunktionen und den Residuumentensoren gemäß Anhang C ist zwar sehr langwierig, beinhaltet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Das Ergebnis dieser elementaren Rechnung bleibt überschaubar, wenn man einige Abkürzungen bei den Koeffizienten einführt und negative Potenzen im Integrationsimpuls  $q$  vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
K_s^{1(0,1)\kappa\lambda\zeta\eta}(p, q; P) = & \\
& \left[ z_{0,0}(D) + \left( z_{0,1}(D) - v_0(D) \right) (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \left. + \left( z_{0,9}(D) + \frac{3u''_{1,2}}{2} v_0(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \right]
\end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Die Struktur dieser Farbtensoren entspricht den Lorentztensoren  $L_0$  und  $L_+$ !

<sup>8</sup>Die Struktur dieses Farbtensors entspricht dem Lorentztensor  $L_-$ !

$$\begin{aligned}
& + 2 v_0(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^2}{\Lambda^2} - X(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^6}{\Lambda^2 f(p, q)} \\
& + X(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \frac{q^8}{f(p, q) g(q, P)} \\
& + \frac{1}{2} X(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \frac{q^4}{f(p, q)} \\
& + \left( \frac{b_3^2}{2} - \frac{7 u''_{1,2}}{4} X(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^4}{f(p, q)} \\
& + X(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{P^\gamma P^\delta}{\Lambda^2} \frac{q^2 q^\gamma q^\delta}{f(p, q)} \quad \left. \vphantom{\frac{q^2 q^\gamma q^\delta}{f(p, q)}} \right] L_0^{(\kappa \lambda \zeta \eta)} \\
& + \left[ \begin{aligned}
& z_{+,0}(D) + \left( z_{+,1}(D) - v_+(D) \right) (\Pi_1 + \Pi_2) \\
& + \left( z_{+,9}(D) + \frac{3 u''_{1,2}}{2} v_+(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \\
& + 2 v_+(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^2}{\Lambda^2} - Y(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^6}{\Lambda^2 f(p, q)} \\
& + Y(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \frac{q^8}{f(p, q) g(q, P)} \\
& + \frac{1}{2} Y(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \frac{q^4}{f(p, q)} \\
& + \left( \frac{b_3^2}{2} - \frac{7 u''_{1,2}}{4} Y(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \frac{q^4}{f(p, q)} \\
& + Y(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{P^\gamma P^\delta}{\Lambda^2} \frac{q^2 q^\gamma q^\delta}{f(p, q)} \quad \left. \vphantom{\frac{q^2 q^\gamma q^\delta}{f(p, q)}} \right] L_+^{(\kappa \lambda \zeta \eta)} \\
& + 2 (a_4^2 - b_4^2) \Pi_1 \Pi_2 \delta^{\zeta \eta} \frac{q^2 q^\kappa q^\lambda}{f(p, q)} + \text{Terme} \left( \propto q^\zeta, q^\eta \right) \\
& + Z(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{p^\gamma}{\Lambda} \frac{q^4 q^\gamma}{\Lambda f(p, q)} \quad L_-^{(\kappa \lambda \zeta \eta)} \\
& + \mathcal{O}(q^{-1}) \tag{4.51}
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

Neben der Festlegung der Mandelstam-Variablen  $s$  auf die Polposition des ersten Kapitels

$$P^2 = -u''_{1,2} \Lambda^2 \quad (4.52)$$

wurden dabei folgende Identitäten für die Bausteine der invarianten Impulsfunktionen (4.14–4.27) verwendet <sup>9</sup>:

$$\frac{2q \cdot P}{\Lambda^2} \Pi_{Q_1} \Pi_{Q_2} = \Pi_{Q_1} - \Pi_{Q_2} \quad (4.53)$$

$$\frac{2q \cdot P}{\Lambda^2} (\Pi_{Q_1} + \Pi_{Q_2}) = \frac{\Pi_{Q_1}}{\Pi_{Q_2}} - \frac{\Pi_{Q_2}}{\Pi_{Q_1}} \quad (4.54)$$

$$\frac{4q^2}{\Lambda^2} \Pi_{Q_1} \Pi_{Q_2} = 2(\Pi_{Q_1} + \Pi_{Q_2}) - 3u''_{1,2} \Pi_{Q_1} \Pi_{Q_2} \quad (4.55)$$

$$\frac{2q^2}{\Lambda^2} + \frac{3u''_{1,2}}{2} = \frac{1}{\Pi_{Q_1}} + \frac{1}{\Pi_{Q_2}} \quad (4.56)$$

Die Größen  $X(D)$ ,  $Y(D)$  und  $Z(D)$  in (4.51) stehen für folgende Kombinationen der Residuumparameter:

$$X(D) := 2d_0^2 + (D-1)c_1^2 + \frac{D^2 + D - 2}{D} d_2^2 \quad (4.57)$$

$$Y(D) := 2d_0^2 - c_1^2 + \frac{D-2}{D} d_2^2 \quad (4.58)$$

$$Z(D) := 4d_0^2 + 2c_1^2 - \frac{2D+4}{D} d_2^2 \quad (4.59)$$

Die anderen Größen  $z_{i,j}(D)$  und  $v_i(D)$  bezeichnen Kombinationen der freien Parameter aus (4.48a–4.48d). Der Index  $i$  nimmt dabei nur die Werte 0 und + an und beschreibt den zugehörigen bosensymmetrischen Lorentztensor. Der Index  $j$  dagegen entspricht der zugehörigen invarianten Impulsfunktion und nimmt die Werte 0, 1 und 9 an.

Neben der Identität  $z_{+,0} = -6$  lauten die Abkürzungen im einzelnen:

$$z_{0,0}(D) = 6D - 6 \quad (4.60a)$$

$$z_{0,1}(D) = 16c_{0,1} - \frac{2}{D} c'_{0,1} - \frac{D^2 + D - 2}{D} c'_{+,1} - (3D - 3)c'_{-,1} \quad (4.60b)$$

---

<sup>9</sup>In den Identitäten (4.55–4.56) wurde die Festlegung (4.52) schon benutzt!

$$\begin{aligned}
z_{0,9}(D) = & 16c_{0,9} - \frac{4}{D}c'_{0,6} - \frac{2D^2 + 2D - 4}{D}c'_{+,6} - (6D - 6)c'_{-,6} \\
& - \frac{2}{D}c'_{0,7} - \frac{D^2 + D - 2}{D}c'_{+,7} - (3D - 3)c'_{-,7} \\
& - \frac{4}{D}c'_{0,8} - \frac{2D^2 + 2D - 4}{D}c'_{+,8} - (6D - 6)c'_{-,8} \\
& - \frac{2}{D}c'_{0,14} - \frac{D^2 + D - 2}{D}c'_{+,14} - (3D - 3)c'_{-,14} \\
& - \frac{6}{D}d'_{0,5} - \frac{3D^2 + 3D - 6}{D}d'_{+,5} - (D - 1)d'_{-,5} \\
& + \frac{12}{D}d'_{0,6} + \frac{6D^2 + 6D - 12}{D}d'_{+,6} + (2D - 2)d'_{-,6} \quad (4.60c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0(D) = & 16c_{0,14} - \frac{2}{D}c'_{0,2} - \frac{D^2 + D - 2}{D}c'_{+,2} - (3D - 3)c'_{-,2} \\
& + \frac{6}{D}d'_{0,3} + \frac{3D^2 + 3D - 6}{D}d'_{+,3} + (D - 1)d'_{-,3} \quad (4.60d)
\end{aligned}$$

$$z_{+,1}(D) = 16c_{0,1} - \frac{2}{D}c'_{0,1} - \frac{D - 2}{D}c'_{+,1} + 3c'_{-,1} \quad (4.60e)$$

$$\begin{aligned}
z_{+,9}(D) = & 16c_{0,9} - \frac{4}{D}c'_{0,6} - \frac{2D - 4}{D}c'_{+,6} + 6c'_{-,6} \\
& - \frac{2}{D}c'_{0,7} - \frac{D - 2}{D}c'_{+,7} + 3c'_{-,7} \\
& - \frac{4}{D}c'_{0,8} - \frac{2D - 4}{D}c'_{+,8} + 6c'_{-,8} \\
& - \frac{2}{D}c'_{0,14} - \frac{D - 2}{D}c'_{+,14} + 3c'_{-,14} \\
& - \frac{6}{D}d'_{0,5} - \frac{3D - 6}{D}d'_{+,5} + d'_{-,5} \\
& + \frac{12}{D}d'_{0,6} + \frac{6D - 12}{D}d'_{+,6} - 2d'_{-,6} \quad (4.60f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_+(D) = & 16c_{+,14} - \frac{2}{D}c'_{0,2} - \frac{D - 2}{D}c'_{+,2} + 3c'_{-,2} \\
& + \frac{6}{D}d'_{0,3} + \frac{3D - 6}{D}d'_{+,3} - d'_{-,3} \quad (4.60g)
\end{aligned}$$

Alle Terme in (4.51), die proportional zu  $q^\zeta$  oder  $q^n$  sind, werden in führender Ordnung durch die Transversalprojektoren in der Gluonschleife zum Verschwinden gebracht. Sie gehören deshalb effektiv zur Ordnung ( $q^{-1}$ ) und tragen zur selbstkonsistenten Reproduktion des Residuums in Ordnung ( $g^0$ ) der erweiterten Störungstheorie und in Landau-Eichung nicht bei.

Die Terme der Ordnungen  $(q^1)$  und  $(q^2)$  erzeugen beim Einsetzen des Kerns in die Schleife teilweise lineare oder sogar quadratische Divergenzen, obwohl der allgemeine 4-Gluon-Vertex nur oberflächlich logarithmisch divergent ist. Diese neue Divergenzstruktur scheint also auf den ersten Blick nicht mit der perturbativen Renormierbarkeit verträglich zu sein <sup>10</sup>.

Man muß aber beachten, daß allein die Amplitude  $T_4$  in Schleifen von höheren Skelettgraphentwicklungen eingesetzt werden darf und so nach (1.15) die Möglichkeit besteht, die quadratischen Divergenzen durch entsprechende Terme in der Kanalampplitude  $X_s$  zu kompensieren.

Diese Kompensation muß dabei durch den Anteil  $Z_s$  aus der Zerlegung (1.19) geschehen, da der Residuumentensor nach (4.34) keine höheren Ordnungen in  $q$  besitzt. Sie läßt sich durch Anpassung einzelner Parameter aus (4.48a–4.48d) erreichen und soll auf spätere Arbeiten verschoben werden.

Wir werden im Rahmen dieser Arbeit die Divergenzsteigerung *schon im Kern* durch eine Anpassung der freien Parameter unterdrücken. Der Term der Ordnung  $(q^1)$  muß dabei direkt zu Null gesetzt werden:

$$Z(D) = 0 \quad (4.61)$$

Die Terme der Ordnung  $(q^2)$  dagegen lassen sich bereits durch Kompensation untereinander zum Verschwinden bringen:

$$X(D) = 2 v_0(D) \quad (4.62)$$

$$Y(D) = 2 v_+(D) \quad (4.63)$$

$$\left( \begin{array}{l} D = 4 \\ \iff \end{array} \right) d_0^2 = 5/56 v_0 + 27/56 v_+ \quad (4.64)$$

$$c_1^2 = 1/4 v_0 - 3/4 v_+ \quad (4.65)$$

$$d_2^2 = 3/14 v_0 + 5/14 v_+ \quad (4.66)$$

Es sollte noch erwähnt werden, daß im Farboctett-Kanal die "kontrollierte Divergenzsteigerung" auch in früheren Arbeiten auftritt [7] und dort durch den kompensierenden Pol bzw. die Forderung nach Selbstkonsistenz in der Dyson-Schwinger-Gleichung für den 3-Gluon-Vertex [12] regelrecht erzwungen wird.

---

<sup>10</sup>Die linearen Divergenzen sind allerdings aus Gründen der Lorentzinvarianz effektiv nur von logarithmischer Natur und lassen sich für Renormierungsfragen vernachlässigen!

# Kapitel 5

## Ausführung der Impulsintegration

### 5.1 Der $1/g^2$ -Mechanismus

Im ersten Kapitel haben wir gesehen, daß in der Bethe-Salpeter-Integralgleichung (1.23) auf der rechten Seite explizit ein Faktor  $g_0^2$  auftritt. Wir erkennen daran sofort, daß in der reinen Störungstheorie eine selbstkonsistente Lösung der Integralgleichung in nullter Ordnung für den Residuumentensor — d. h. in 1-Schleifen-Ordnung — nicht möglich ist.

Die durch faktorisierende, rationale Approximanten erweiterte Störungstheorie dagegen liefert einen Mechanismus, der in der Lage ist, Beiträge der Form  $1/g^2$  auszubilden [7] [12] [14]; er erlaubt damit erst die selbstkonsistente Reproduktion der nullten Ordnung.

Dieser  $1/g^2$ -Mechanismus basiert auf der nichtmeromorphen  $g$ -Abhängigkeit der Massenskala  $\Lambda$  (1.20) und der multiplikativen Renormierung der nackten Kopplungskonstanten  $g_0$ :

$$g_0^2 = Z_g g^2 \quad (5.1)$$

$$Z_g = 1 - \beta_0 \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \quad (5.2)$$

Hierbei ist  $\beta_0$  der erste Koeffizient der  $\beta$ -Funktion und hat unabhängig vom Renormierungsschema [3] für eine allgemeine  $SU(N_C)$ -Eichtheorie den Wert

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_f \quad , \quad (5.3)$$

für die quarkfreie  $SU(3)$ -Eichtheorie also

$$\beta_0 = 11 \quad . \quad (5.4)$$

Aus (1.20) ergibt sich durch Umstellen der sogenannte nichtperturbative Logarithmus

$$-\ln \frac{\Lambda^2}{\nu_0^2} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g} \right)^2 [1 + \mathcal{O}(g^2)] \quad (5.5)$$

und damit verbunden gerade der erwünschte Faktor  $1/g^2$ .

Man kann sich davon überzeugen (siehe Anhang D), daß in dimensioneller Regularisierung die typischen divergenten Schleifenintegrale gerade diesen nichtperturbativen Logarithmus auszubilden vermögen. Er tritt allerdings immer gekoppelt an die Divergenzen in  $\epsilon = 2 - D/2$  auf, so daß sich erst nach Durchführung der multiplikativen Renormierung [3] der Faktor  $1/g^2$  endgültig extrahieren läßt:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( -\ln \frac{\Lambda^2}{\nu_0^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{g_0}{g} \right)^2 \left( 1 + \beta_0 \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( 1 - \beta_0 \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \right) \left( 1 + \beta_0 \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left( 1 + \mathcal{O}(g^4) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es sollte an dieser Stelle noch einmal erwähnt werden, daß der  $1/g^2$ -Mechanismus den störungstheoretischen Zusammenhang zwischen der Ordnung bezüglich der  $g^2$ -Reihe und der Schleifenordnung aufhebt. Prinzipiell können also Graphen mit beliebig hoher Schleifenzahl zur nullten störungstheoretischen Ordnung beitragen; die entstehende Reihe ist dabei im wesentlichen eine formale Potenzreihe in  $1/\beta_0$ , die wegen (5.4) recht gut konvergiert [12] [15].

Wir werden uns allerdings im Rahmen dieser Arbeit auf das 1-Schleifen-Niveau beschränken.

## 5.2 Logarithmisch divergente Integrale

Wir setzen nun die Ansätze für die Gluonpropagatoren (4.28), den Residuumentensor (4.34) und den Kern (4.51) in die Bethe-Salpeter-Schleife von (1.23) ein. Nach der Separation der Farbdynamik durch die Linearkombinationen der Farbkomponenten aus dem zweiten Kapitel (2.11a bzw. 2.12a) besitzt die Integralgleichung natürlich keine Farbindizes mehr.

In Hinblick auf später auszuführende Projektionen ist eine eigene Bezeichnung für das Schleifenintegral (1.23) im Farbsingulett-Kanal nützlich:

$$\begin{aligned}
& 1/2(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int d^D q/(2\pi)^D \quad K_s^{1(0,1)\kappa\lambda\zeta\eta}(p, q; P) D_T^{(0,1)\eta\rho}(P/2 - q) \\
& \quad D_T^{(0,1)\zeta\sigma}(P/2 + q) R_s^{1(0,1)\rho\sigma\mu\nu}(q, p'; P) \\
& =: \left\{ \int d\mathcal{S} \right\}^{(\kappa\lambda\mu\nu)}(p, p'; P) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren des länglichen Integranden läßt sich die Additivitätseigenschaft des Integrals ausnutzen. Unter Verwendung der Abkürzung (D.1) treten schließlich effektiv die folgenden logarithmisch divergenten Impulsintegrale auf:

$$\mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} = 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \tag{5.8}$$

$$\mathcal{I}_1^{\zeta\eta\rho\sigma} = 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \frac{q^4}{f(p, q)} \tag{5.9}$$

$$\mathcal{I}_2^{\zeta\eta\rho\sigma} = 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \frac{q^8}{f(p, q) g(q, P)} \tag{5.10}$$

$$\mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} = 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \frac{q^2 q^\kappa q^\lambda}{f(p, q)} \tag{5.11}$$

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß für eine Reproduktion der nullten Ordnung des Residuumentensors nur die divergenten Anteile der Integrale von Bedeutung sind. Eine genauere Betrachtung in Anhang D zeigt aber, daß sich die Integrale  $\mathcal{I}_0$ ,  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  bezüglich ihrer divergenten Anteile gar nicht unterscheiden.

Die renormierten Divergenzen und damit die Ordnung ( $g^0$ ) der Impulsintegrale (5.8–5.11) sind im Anhang D berechnet und lauten:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} &= \left\{ \mathcal{I}_1^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \left\{ \mathcal{I}_2^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \\
&= \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{3}{8} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{7}{24} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{1}{4} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \right] \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{19}{192} \delta^{\kappa\lambda} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{17}{192} \delta^{\kappa\lambda} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{1}{12} \delta^{\kappa\lambda} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{7}{384} M_1^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{384} M_2^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} \right] \quad (5.13)$$

Das Integral  $\mathcal{J}$  tritt allerdings nur in bestimmten Kontraktionen auf. Diese lassen sich leicht ausführen und enthalten dann wieder nur die Tensoren (4.1–4.3) sowie den Tensor (4.7):

$$\delta^{\zeta\eta} \left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{3}{32} L_0^{(\kappa\lambda\rho\sigma)} - \frac{1}{24} L_+^{(\kappa\lambda\rho\sigma)} \right] \quad (5.14)$$

$$\frac{P^\kappa P^\lambda}{\Lambda^2} \delta^{\zeta\eta} \delta^{\rho\sigma} \left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{3}{32} \frac{P^2}{\Lambda^2} \right] \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{P^\kappa P^\lambda}{\Lambda^2} \left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} &= \\ \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{P^2}{\Lambda^2} \left( \frac{19}{192} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{17}{192} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{1}{12} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{96} N_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{96} N_+^{(\zeta\rho\sigma\eta)} - \frac{7}{96} N_+^{(\zeta\sigma\eta\rho)} \right] \quad (5.16) \end{aligned}$$

# Kapitel 6

## Projektionen und Koeffizientenvergleich

Wir beginnen nun, die einzelnen Anteile des Residuums aus den beiden Seiten der Integralgleichung (1.23) im Farbsingulett-Kanal herauszuprojizieren. Dazu multiplizieren wir beide Seiten von links und rechts nacheinander mit den Lorentztensoren (4.1–4.3) und nutzen so die Projektionseigenschaft (4.4).

Bei diesem Verfahren mischt zunächst der  $\Phi_3$ -Anteil (4.33) mit jedem der drei anderen Anteile (4.30–4.32), da er im Prinzip alle drei Lorentztensoren  $L_o$ ,  $L_+$  und  $L_-$  enthält. Es wird sich aber bei dem anschließenden Koeffizientenvergleich zeigen, daß im Rahmen unserer Ansätze doch alle Parameter aus (4.33) verschwinden müssen.

### 6.1 Projektion des $\Phi_0$ -Anteils und Koeffizientenvergleich I

Unter Benutzung der Identitäten

$$\frac{2p \cdot P}{\Lambda^2} (\Pi_1 - \Pi_2) = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \quad (6.1)$$

$$\frac{2p' \cdot P}{\Lambda^2} (\Pi_3 - \Pi_4) = \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \quad (6.2)$$

und der Festlegung von  $P^2$  auf die gewählte Polposition (4.52) ergibt sich bei Multiplikation der linken Seite der Integralgleichung mit den Lorentztensoren  $L_0^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)}$  und  $L_0^{(\mu\nu\beta\beta')}$ :

$$\begin{aligned}
& L_0^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} R_s^{1(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) L_0^{(\mu\nu\beta\beta')} = \\
& (\Lambda a_0)^2 L_0^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} \left[ \left( 4 + \frac{4b_0}{a_0} (\Pi_1 + \Pi_2) + \frac{4c_0}{a_0} \Pi_1 \Pi_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{4d_0}{a_0} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \right. \\
& \quad + \left( \frac{4b_0}{a_0} + \frac{4b_0^2 - 4b_4^2 u''_{1,2}}{a_0^2} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4b_0 c_0 - 4b_4 c_4 u''_{1,2}}{a_0^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4b_0 d_0 + b_3 b_4}{a_0^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) (\Pi_3 + \Pi_4) \\
& \quad + \left( \frac{4c_0}{a_0} + \frac{4b_0 c_0 - 4b_4 c_4 u''_{1,2}}{a_0^2} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4c_0^2 - 4c_4^2 u''_{1,2}}{a_0^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4c_0 d_0 + b_3 c_4}{a_0^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \Pi_3 \Pi_4 \\
& \quad + \left( \frac{4d_0}{a_0} + \frac{4b_0 d_0 - b_3 b_4}{a_0^2} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4c_0 d_0 - b_3 c_4}{a_0^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4d_0^2}{a_0^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \\
& \quad \left. + \frac{4b_3^2}{a_0^2} \frac{p \cdot p'}{\Lambda^2} (\Pi_1 - \Pi_2)(\Pi_3 - \Pi_4) \right]
\end{aligned}$$

Bei der Multiplikation der rechten Seite der Integralgleichung mit den gleichen Lorentztensoren ist zu beachten, daß erst nach Ausführung der Integrationen der Limes  $D \rightarrow 4$  vorgenommen werden darf. Mit der Kontraktion (5.15) und unter Berücksichtigung der Festlegung (4.52) gilt dann:

$$\begin{aligned}
& L_0^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} \left\{ \int d\mathcal{S} \right\}_{\mathcal{O}(g^0); P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2}{}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} L_0^{(\mu\nu\beta\beta')} = \\
& (\Lambda a_0)^2 L_0^{(\alpha\alpha'\zeta\eta)} \left[ \begin{aligned}
& \left( z_{0,0}(D) + (z_{0,1}(D) + v_0(D)) (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + (z_{0,9}(D) - \frac{3u''_{1,2}}{2} v_0(D)) \Pi_1 \Pi_2 \right) \left\{ \mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \\
& + \left( \frac{X(D)}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) - \frac{7u''_{1,2} X(D)}{4} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{b_3^2}{2} + 2a_4^2 - 2b_4^2 \right) \Pi_1 \Pi_2 \right) \left\{ \mathcal{I}_1^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \\
& + X(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \left\{ \mathcal{I}_2^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \\
& + X(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{P^\gamma P^\delta}{\Lambda^2} \left\{ \mathcal{J}^{\gamma\delta\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \quad \left. \right] \\
& \cdot D L_0^{(\rho\sigma\beta\beta')} \left[ 1 + \frac{b_0}{a_0} (\Pi_3 + \Pi_4) + \frac{c_0}{a_0} \Pi_3 \Pi_4 + \frac{d_0}{a_0} \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_3}{\Pi_4} - 2 \right) \right] \\
& = (\Lambda a_0)^2 L_0^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} \\
& \left[ \begin{aligned}
& \left( \frac{27}{\beta_0} + \frac{3(z_{0,1} + X)}{2\beta_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3(16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X)}{32\beta_0} \Pi_1 \Pi_2 \right) \\
& + \left( \frac{27b_0}{\beta_0 a_0} + \frac{3b_0(z_{0,1} + X)}{2\beta_0 a_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3b_0(16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X)}{32\beta_0 a_0} \Pi_1 \Pi_2 \right) \\
& \hspace{15em} (\Pi_3 + \Pi_4)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{27 c_0}{\beta_0 a_0} + \frac{3c_0(z_{0,1} + X)}{2\beta_0 a_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3c_0(16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X)}{32\beta_0 a_0} \Pi_1 \Pi_2 \right) \\
& \qquad \qquad \qquad \Pi_3 \Pi_4 \\
& + \left( \frac{27 d_0}{\beta_0 a_0} + \frac{3d_0(z_{0,1} + X)}{2\beta_0 a_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3d_0(16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X)}{32\beta_0 a_0} \Pi_1 \Pi_2 \right) \\
& \qquad \qquad \qquad \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_3}{\Pi_4} - 2 \right) \Big]
\end{aligned}$$

Wir führen nun unter Beachtung von (5.4) einen Koeffizientenvergleich bezüglich den invarianten Impulsfunktionen durch. Dadurch erhalten wir eine erste Gruppe von Bestimmungsgleichungen für die Residuumsparameter und möglicherweise auch für den Massenparameter  $u''_{1,2}$ .

Die erste "Gleichung"

$$4 \stackrel{!}{=} \frac{27}{11} \quad (6.3)$$

nimmt eine Sonderrolle ein. Sie enthält keinen freien Parameter und dient durch ihren Defekt als ungefähres Maß für die Qualität der gewählten Näherungen.

Von den übrigen 16 Gleichungen sind zunächst nur 13 wirklich verschieden:

$$4b_0 = \frac{3}{22} (z_{0,1} + X) a_0 \quad (6.4a)$$

$$4c_0 = \frac{3}{352} (16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X) a_0 \quad (6.4b)$$

$$4d_0 = 0 \quad (6.4c)$$

$$4 \left( b_0^2 - b_4^2 u''_{1,2} \right) = \frac{3}{22} (z_{0,1} + X) b_0 a_0 \quad \left( = 4b_0^2 \right) \quad (6.4d)$$

$$\begin{aligned}
4 \left( b_0 c_0 - b_4 c_4 u''_{1,2} \right) &= \frac{3}{352} (16z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2}X) b_0 a_0 \\
&\quad \left( = 4b_0 c_0 \right) \quad (6.4e)
\end{aligned}$$

$$4b_0 d_0 + b_3 b_4 = 0 \quad (6.4f)$$

$$4 \left( b_0 c_0 - b_4 c_4 u''_{1,2} \right) = \frac{3}{22} \left( z_{0,1} + X \right) c_0 a_0 \quad \left( = 4b_0 c_0 \right) \quad (6.4g)$$

$$4 \left( c_0^2 - c_4^2 u''_{1,2} \right) = \frac{3}{352} \left( 16 z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2} X \right) c_0 a_0 \quad \left( = 4c_0^2 \right) \quad (6.4h)$$

$$4c_0 d_0 + b_3 c_4 = 0 \quad (6.4i)$$

$$4b_0 d_0 - b_3 b_4 = \frac{3}{22} \left( z_{0,1} + X \right) d_0 a_0 \quad \left( = 4b_0 d_0 \right) \quad (6.4j)$$

$$4c_0 d_0 - b_3 c_4 = \frac{3}{352} \left( 16 z_{0,9} + 8b_3^2 + 32a_4^2 - 32b_4^2 - 5u''_{1,2} X \right) d_0 a_0 \quad \left( = 4c_0 d_0 \right) \quad (6.4k)$$

$$4d_0^2 = 0 \quad (6.4l)$$

$$4b_3^2 = 0 \quad (6.4m)$$

Dieses Gleichungssystem enthält neben den Residuumparametern aus (4.30–4.33) und dem Massenparameter auch die Parameterkombinationen (4.60a–4.60f) aus den regulären Anteilen der Kanalampplitude  $X_s$ .

Unter Berücksichtigung der Definitionen (4.57–4.59) mit  $D = 4$  lassen sich folgende Aussagen über die Parameter treffen:

- Der Residuumparameter  $a_0$  ist nicht bestimmbar.
- Die Residuumparameter  $d_0$  und  $b_3$  sind identisch Null zu setzen.
- Die Residuumparameter  $b_4$  und  $c_4$  sind ebenfalls identisch Null zu setzen <sup>1</sup>.
- Die übrigen Parameter erfüllen:

$$b_0 = \frac{3}{176} \left( 2z_{0,1} + 6c_1^2 + 9d_2^2 \right) a_0 \quad (6.5)$$

$$c_0 = \frac{3}{2816} \left( 32z_{0,9} + 64a_4^2 - 64b_4^2 - u''_{1,2} (60c_1^2 + 90d_2^2) \right) a_0 \quad (6.6)$$

---

<sup>1</sup>Formal ließe sich diese Bedingung an dieser Stelle durch die Forderung nach verschwindendem Massenparameter  $u''_{1,2}$  umgehen!

## 6.2 Projektion des $\Phi_1$ -Anteils und Koeffizientenvergleich II

Bei der Multiplikation der linken Seite der Integralgleichung mit den Lorentztensoren  $L_-^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)}$  und  $L_-^{(\mu\nu\beta\beta')}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& L_-^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} R_s^{1(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) L_-^{(\mu\nu\beta\beta')} = \\
& \Lambda^2 L_-^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} \left[ \begin{aligned} & \left( b_1^2 (\Pi_1 - \Pi_2) + b_1 c_1 \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) \right) (\Pi_3 - \Pi_4) \\ & + \left( b_1 c_1 (\Pi_1 - \Pi_2) + c_1^2 \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) \right) \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - \frac{\Pi_3}{\Pi_4} \right) \right] \\ & - 4 a_4^2 L_-^{(\alpha\alpha'\phi\tau)} P^\tau P^\omega L_-^{(\phi\omega\beta\beta')} (\Pi_1 - \Pi_2) (\Pi_3 - \Pi_4)
\end{aligned}
\right]
\end{aligned}$$

Bei der Multiplikation des Integrals (5.7) mit den gleichen Tensoren erkennt man, daß im Kern die führende Ordnung bezüglich des Integrationsimpulses verschwindet und folglich nur noch konvergente Integrale vorliegen.

Damit kann der  $1/g^2$ -Mechanismus (5.6) überhaupt nicht wirken und das Schleifenintegral der Bethe-Salpeter-Gleichung besitzt keinen Anteil der Ordnung ( $g^0$ ):

$$L_-^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} \left\{ \int d\mathcal{S} \right\}_{\mathcal{O}(g^0); P^2 = -u'_{1,2}\Lambda^2}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} L_-^{(\mu\nu\beta\beta')} = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert deshalb hier die folgenden Identitäten für die Residuumsparameter:

$$b_1^2 = 0 \tag{6.7a}$$

$$b_1 c_1 = 0 \tag{6.7b}$$

$$c_1^2 = 0 \tag{6.7c}$$

$$4 a_4^2 = 0 \tag{6.7d}$$

Also läßt sich nur folgende Aussage über die Residuumsparameter treffen:

- Die Residuumsparameter  $b_1$ ,  $c_1$  und  $a_4$  sind identisch Null zu setzen. Damit verschwindet der  $\Phi_1$ -Anteil des Residuums in Ordnung ( $g^0$ ) vollständig.

### 6.3 Projektion des $\Phi_2$ -Anteils und Koeffizientenvergleich III

Bei der Multiplikation der linken Seite der Integralgleichung mit den Lorentztensoren  $L_+^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)}$  und  $L_+^{(\mu\nu\beta\beta')}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& L_+^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} R_s^{1(0,1)\kappa\lambda\mu\nu}(p, p'; P) L_+^{(\mu\nu\beta\beta')} = \\
& (\Lambda a_2)^2 L_+^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} \left[ \left( 1 + \frac{b_2}{a_2} (\Pi_1 + \Pi_2) + \frac{c_2}{a_2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{d_2}{a_2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \right. \\
& \quad + \left( \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2^2}{a_2^2} (\Pi_1 + \Pi_2) + \frac{b_2 c_2}{a_2^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{b_2 d_2}{a_2^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) (\Pi_3 + \Pi_4) \\
& \quad + \left( \frac{c_2}{a_2} + \frac{b_2 c_2}{a_2^2} (\Pi_1 + \Pi_2) + \frac{c_2^2}{a_0^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_2 d_2}{a_2^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \Pi_3 \Pi_4 \\
& \quad \left. + \left( \frac{d_2}{a_2} + \frac{b_2 d_2}{a_2^2} (\Pi_1 + \Pi_2) + \frac{c_2 d_2}{a_2^2} \Pi_1 \Pi_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{d_2^2}{a_2^2} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1} - 2 \right) \right) \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right] \\
& - L_+^{(\alpha\alpha'\phi\tau)} P^\tau P^\omega L_+^{(\phi\omega\beta\beta')} \left[ \left( 4b_4^2 (\Pi_1 + \Pi_2) + 4b_4 c_4 \Pi_1 \Pi_2 \right) (\Pi_3 + \Pi_4) \right. \\
& \quad \left. + \left( 4b_4 c_4 (\Pi_1 + \Pi_2) + 4c_4^2 \Pi_1 \Pi_2 \right) \Pi_3 \Pi_4 \right]
\end{aligned}$$

Der obige Lorentztensor läßt sich auch durch den in (4.7) definierten Tensor  $N_+(P)$  ausdrücken:

$$\begin{aligned}
& L_+^{(\alpha\alpha'\phi\tau)} P^\tau P^\omega L_+^{(\phi\omega\beta\beta')} \\
&= -\Lambda^2 \left( \frac{u''_{1,2}}{D} L_0^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} + \frac{2}{D} N_+^{(\alpha\alpha'\beta\beta')}(P) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} N_+^{(\alpha\beta\beta'\alpha')}(P) - \frac{1}{2} N_+^{(\alpha\beta'\alpha'\beta)}(P) \right) \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Bei der Multiplikation des Integrals (5.7) mit den gleichen Lorentztensoren ist wieder zu beachten, daß erst nach Ausführung der Integrale der Limes  $D \rightarrow 4$  vorgenommen werden darf.

Unter Berücksichtigung der Kontraktionen (5.14–5.16) und der Festlegung der Polposition (4.52) gilt dann:

$$\begin{aligned}
& L_+^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} \left\{ \int d\mathcal{S} \right\}_{\mathcal{O}(g^0); P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2}^{(\kappa\lambda\mu\nu)} L_+^{(\mu\nu\beta\beta')} = \\
& (\Lambda a_2)^2 \left\{ L_+^{(\alpha\alpha'\zeta\eta)} \left[ \left( -6 + \left( z_{+,1}(D) + v_+(D) \right) (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left( z_{+,9}(D) - \frac{3u''_{1,2}}{2} v_+(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \right) \left\{ \mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{Y(D)}{2} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left( \frac{b_3^2}{2} - \frac{7u''_{1,2}}{4} Y(D) \right) \Pi_1 \Pi_2 \right) \left\{ \mathcal{I}_1^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y(D) (\Pi_1 + \Pi_2) \left\{ \mathcal{I}_2^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y(D) \Pi_1 \Pi_2 \frac{P^\gamma P^\delta}{\Lambda^2} \left\{ \mathcal{J}^{\gamma\delta\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2(a_4^2 - b_4^2) \Pi_1 \Pi_2 L_+^{(\alpha\alpha'\kappa\lambda)} \delta^{\zeta\eta} \left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} \right\} \\
& \cdot L_+^{(\rho\sigma\beta\beta')} \left[ 1 + \frac{b_2}{a_2} (\Pi_3 + \Pi_4) + \frac{c_2}{a_2} \Pi_3 \Pi_4 + \frac{d_2}{a_2} \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\Lambda a_2)^2 \left\{ L_+^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} \right. \\
&\quad \left[ \left( -\frac{7}{4\beta_0} + \frac{7(z_{+,1} + Y)}{24\beta_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{56z_{+,9} + 28b_3^2 - 16a_4^2 + 16b_4^2 - 73u''_{1,2}Y}{192\beta_0} \Pi_1\Pi_2 \right) \right. \\
&\quad + \left( -\frac{7b_2}{4a_2\beta_0} + \frac{7b_2(z_{+,1} + Y)}{24a_2\beta_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{b_2(56z_{+,9} + 28b_3^2 - 16a_4^2 + 16b_4^2 - 73u''_{1,2}Y)}{192a_2\beta_0} \Pi_1\Pi_2 \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. (\Pi_3 + \Pi_4) \right. \\
&\quad + \left( -\frac{7c_2}{4a_2\beta_0} + \frac{7c_2(z_{+,1} + Y)}{24a_2\beta_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{c_2(56z_{+,9} + 28b_3^2 - 16a_4^2 + 16b_4^2 - 73u''_{1,2}Y)}{192a_2\beta_0} \Pi_1\Pi_2 \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \Pi_3\Pi_4 \right. \\
&\quad + \left( -\frac{7d_2}{4a_2\beta_0} + \frac{7d_2(z_{+,1} + Y)}{24a_2\beta_0} (\Pi_1 + \Pi_2) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{d_2(56z_{+,9} + 28b_3^2 - 16a_4^2 + 16b_4^2 - 73u''_{1,2}Y)}{192a_2\beta_0} \Pi_1\Pi_2 \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right] \\
&\quad + \left( \frac{u''_{1,2}}{64} L_0^{(\alpha\alpha'\beta\beta')} + \frac{1}{32} N_+^{(\alpha\alpha'\beta\beta')}(P) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{32} N_+^{(\alpha\beta\beta'\alpha')}(P) - \frac{1}{32} N_+^{(\alpha\beta\beta'\alpha')}(P) \right) \Pi_1\Pi_2 \\
&\quad \cdot \left( \frac{Y}{\beta_0} + \frac{b_2 Y}{a_2\beta_0} (\Pi_3 + \Pi_4) + \frac{c_2 Y}{a_2\beta_0} \Pi_3\Pi_4 + \frac{d_2 Y}{a_2\beta_0} \left( \frac{\Pi_3}{\Pi_4} + \frac{\Pi_4}{\Pi_3} - 2 \right) \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von  $D = 4$  ist die obige Kombination von Lorentztensoren bis auf einen Faktor mit der Kombination (6.8) identisch.

Ein erneuter Koeffizientenvergleich führt unter Beachtung von (5.4) auf eine zweite Gruppe von Bestimmungsgleichungen für die Residuumsparameter, wobei die erste "Gleichung"

$$1 \stackrel{!}{=} -\frac{7}{44} \quad (6.9)$$

wieder keine Parameter enthält und durch ihren Defekt schon an dieser Stelle deutlich macht, daß von einer selbstkonsistenten Reproduktion des  $\Phi_2$ -Anteils in den gewählten Näherungen keine Rede sein kann.

Von den übrigen 21 Gleichungen sind wieder nur 12 wirklich verschieden:

$$b_2 = \frac{7}{264} (z_{+,1} + Y) a_2 \quad (6.10a)$$

$$c_2 = \frac{1}{2112} (56 z_{+,9} + 28 b_3^2 - 16 a_4^2 + 16 b_4^2 - 73 u_{1,2}'' Y) a_2 \quad (6.10b)$$

$$d_2 = 0 \quad (6.10c)$$

$$b_2 d_2 = 0 \quad (6.10d)$$

$$c_2 d_2 = 0 \quad (6.10e)$$

$$d_2^2 = 0 \quad (6.10f)$$

$$0 = Y \quad (6.10g)$$

$$4 b_4^2 = 0 \quad (6.10h)$$

$$4 b_4 c_4 = \frac{Y b_2}{176 a_2} \quad (6.10i)$$

$$4 b_4 c_4 = 0 \quad (6.10j)$$

$$4 c_4^2 = \frac{Y c_2}{176 a_2} \quad (6.10k)$$

$$0 = Y d_2 \quad (6.10l)$$

Die Gleichungen (6.10g) und (6.10l) beschreiben die Tatsache, daß die Integralgleichung bei unseren Ansätzen auch völlig neue Tensorstrukturen schaffen kann; sie machen somit die Unvollständigkeit besonders deutlich.

Unter Berücksichtigung der Definition (4.58) mit  $D = 4$  lassen aus diesem Gleichungssystem folgende Aussagen über die Parameter ablesen:

- Der Residuumsparameter  $a_2$  ist nicht bestimmbar.
- Die Residuumsparameter  $d_2$ ,  $b_4$  und  $c_4$  sind identisch Null zu setzen.

- Die Parameterkombination  $Y$  ist ebenfalls identisch Null zu setzen. Damit verschwindet aus den Selbstkonsistenz-Gleichungen der letzte noch die Polposition enthaltende Term in (6.10b).
- Die übrigen Parameter erfüllen:

$$b_2 = \frac{7}{264} z_{+,1} a_2 \quad (6.11)$$

$$c_2 = \frac{1}{528} \left( 14 z_{+,9} + 7 b_3^2 - a_4^2 \right) a_2 \quad (6.12)$$

## 6.4 Diskussion

Zunächst kommen wir zu den Selbstkonsistenz-Gleichungen (6.3) und (6.9) zurück. Die erste Gleichung deutet mit einem relativen Fehler von etwa 39% die Selbstkonsistenz zumindest an. Es ist der Grad von Selbstkonsistenz, den man für die Ordnung  $(0, 1)$  qualitativ erwarten kann. Bedenkt man, daß sich die  $\beta$ -Funktion der Renormierung bei Anwesenheit von Fermionen verändert und der erste Koeffizient nach (5.3) im Falle von 6 Quark-Flavours den Wert

$$\beta_0 = 7$$

annimmt, so wäre die Selbstkonsistenz mit

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{27}{28} \quad (6.13)$$

und einem relativen Fehler von etwa 4% doch recht gut erfüllt. Natürlich müßten dann auch Fermionschleifen in der Bethe-Salpeter-Gleichung berücksichtigt werden, was wiederum die Selbstkonsistenz-Gleichungen strukturell verändern könnte.

Die zweite Gleichung (6.9) zeigt mit einem relativen Fehler im Betrag von etwa 84% und unterschiedlichen Vorzeichen auf beiden Seiten, daß von einer selbstkonsistenten Reproduktion des  $\Phi_2$ -Anteils in Ordnung  $(0, 1)$  noch keine Rede sein kann. Auch die obige Variation der  $\beta$ -Funktion kann diese Mängel nicht zufriedenstellend ausgleichen.

Möglicherweise deutet dies darauf hin, daß der Residuumsparameter  $a_2$  identisch Null gesetzt werden sollte. Damit würde auch der  $\Phi_2$ -Anteil in Ordnung  $(0, 1)$  der erweiterten Störungsrechnung verschwinden. Eine Antwort auf diese Frage wird im letzten Kapitel mit der Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden gegeben werden können.

Es werden in diesem Abschnitt noch einmal alle Aussagen über die Parameter zusammengefaßt, die sich aus den drei Koeffizientenvergleichen ergeben:

- Die Residuumsparameter  $a_0$  und  $a_2$  sind wegen der Normierungsfreiheit aus der homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung nicht bestimmbar.

- Der Massenparameter  $u''_{1,2}$  ist jedenfalls auf 1-Schleifen-Niveau aus der homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung nicht bestimmbar. Dieses Resultat läßt vermuten, daß die einzige für  $r=1$  vorkommende Polposition überhaupt nicht durch die Dynamik des Farbsingulett-Kanals, sondern durch die des schon erwähnten "kompensierenden Pols" im Farboktett-Kanal festgelegt wird.
- Die Residuumsparameter  $d_0, b_1, c_1, d_2, b_3, a_4, b_4$  und  $c_4$  sind in dieser Näherung identisch Null zu setzen. Damit verschwinden sowohl der  $\Phi_1$ -Anteil als auch der  $\Phi_3$ -Anteil des Residuumsensors vollständig.
- Wegen (4.57–4.59) verschwinden auch die Parameterkombinationen  $X, Y$  und  $Z$ .
- Die übrigen Parameter erfüllen folgende Relationen:

$$b_0 = \frac{3}{88} z_{0,1} a_0 \quad (6.14)$$

$$c_0 = \frac{3}{88} z_{0,9} a_0 \quad (6.15)$$

$$b_2 = \frac{7}{264} z_{+,1} a_2 \quad (6.16)$$

$$c_2 = \frac{7}{264} z_{+,9} a_2 \quad (6.17)$$

Es zeigt sich also, daß selbst die — ein wenig künstlich eingebaute — Kompensation der Ordnungen ( $q^2$ ) im Kern (4.62–4.63) nicht verhindern kann, daß die fünf mit der "kontrollierten Divergenzsteigerung" verbundenen Koeffizienten verschwinden. Hätten wir zur Eliminierung der quadratischen Divergenzen die Parameterkombinationen (4.57–4.59) direkt identisch Null gesetzt, so wäre das Ergebnis dasselbe gewesen.

Es ist zu beachten, daß in dieser Arbeit das Gluonium-Bindungsproblem aus Zeitgründen nur auf 1-Schleifen-Niveau behandelt werden kann. Will man nicht mit 2-Schleifen-Graphen konfrontiert werden, die ja über den  $1/g^2$ - Mechanismus durchaus Beiträge zur nullten Störungsordnung auszubilden vermögen, so bieten sich folgende Auswege an, um einen erweiterten Koeffizientenvergleich und damit verbesserte Bestimmungsgleichungen für die Parameter zu erhalten:

- Man könnte die höheren Ordnungen in  $q$  im Kern mitnehmen und die Divergenzsteigerung zunächst ignorieren. Dann sollten allerdings einige Bedingungen an die Koeffizienten der regulären Anteile in (4.46) dafür sorgen, daß die amputierte, zusammenhängende 4-Punkt-Funktion  $T_4$  perturbativ renormierbar bleibt.

Es müßte zusätzlich überprüft werden, ob die neue Divergenzstruktur nicht die perturbative Renormierbarkeit der inhomogenen Bethe-Salpeter-Gleichung

(1.16) im Farbsingulett-Kanal zerstört. Im Farboktett-Kanal, der die kontrollierte Divergenzsteigerung wegen des kompensierenden Pols sogar verlangt, tritt dieses Problem nicht auf, weil die quadratischen Divergenzen schon aus der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Gluonpropagator bekannt sind und folglich keiner neuen Renormierung bedürfen.

Die linearen Divergenzen sind aus Gründen der Lorentzinvarianz effektiv nur logarithmische Divergenzen und bereiten daher keine Schwierigkeiten bei der Renormierung. Sie werden außerdem bei den Projektionen des Integrals (5.7) eliminiert, da ihre Tensorstruktur auf der linken und rechten Seite unterschiedliche Typen der Tensoren (4.1–4.3) enthält.

- Da die meisten Bedingungen, die zum Verschwinden von einzelnen Residuumsparametern führen, durch eine nicht vorhandene Tensorstruktur auf der rechten Seite der Integralgleichung zustande kommen, sollte eine Erweiterung der Tensorstruktur des Kerns völlig neue Bedingungsgleichungen der Parameter liefern.

Diese Erweiterungsterme müßten dabei ebenfalls dimensionslos sein und der Forderung nach partieller Bosesymmetrie im  $s$ -Kanal genügen<sup>2</sup>. So wäre beispielsweise in (4.47a–4.47c) ein Lorentztensor vom Typ (4.7) in Verbindung mit den bosesymmetrischen invarianten Impulsfunktionen (4.14–4.23) möglich.

- Auch eine vollständige Behandlung der inhomogenen Gleichung zu (1.16) läßt mehrere neue Bestimmungsgleichungen für die Parameter erwarten. Hierbei wird man auch Relationen zwischen den freien Parametern  $a_0$  und  $a_2$  und den Koeffizienten der regulären Anteile in (4.46) vermuten.
- Eine sehr arbeitsaufwendige Möglichkeit besteht darin, für alle Ansätze die nächste ungerade Stufe der rationalen Approximation ( $r=3$ ) zu wählen. Diese Erweiterung allein würde aber wegen der unveränderten Tensorstruktur für viele Parameter keine neuen Erkenntnisse liefern.

Wir werden im letzten Kapitel versuchen, die noch freien Residuumsparameter durch die sogenannte Normierungsbedingung der Bethe-Salpeter-Amplituden [10] zu bestimmen. Es wird sich allerdings zeigen, daß für unsere Ansätze der Lorentz- und Impulsstruktur diese beiden Parameter in nullter Ordnung Störungstheorie ebenfalls verschwinden müssen und damit der gesamte Residuumentensor im Farbsingulett-Kanal in 1-Schleifen-Ordnung der erweiterten Störungsrechnung nicht selbstkonsistent reproduzierbar ist.

---

<sup>2</sup>Ob auch ein Verschwinden im "perturbativen Limes" ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) für die regulären Anteile der zu kreuzenden Kanalampplitude  $X_s$  zu fordern ist, müssen spätere Arbeiten zu diesem Thema zeigen!

# Kapitel 7

## Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden

Eine Normierungsbedingung für die nicht amputierten Bethe-Salpeter-Amplituden wurde schon in früheren Arbeiten benutzt [11] [10]. Im Rahmen dieses Kapitels wollen wir eine entsprechend modifizierte Herleitung, nämlich für die amputierten Bethe-Salpeter-Amplituden, auf der Basis der im ersten Kapitel eingeführten Bethe-Salpeter-Gleichung (1.16) für die Kanalampplitude  $X_s$  angeben.

In Hinblick auf die nachfolgenden Überlegungen definieren wir zunächst die amputierte, zusammenhängende und im  $s$ -Kanal 1-Teilchen-irreduzible 4-Punkt-Funktion  $T'_{4,s}$  :

$$T'_{4,s} = T_4 - A_s = K_s + X_s \quad (7.1)$$

Die neue Integralgleichung, die aber denselben Integralkern wie (1.16) enthält, lautet dann:

$$T'_{4,s} = K_s + K_s \otimes T'_{4,s} = K_s + T'_{4,s} \otimes K_s \quad (7.2)$$

Wir werden in diesem Kapitel alle Farb- und Lorentzindizes unterdrücken, da sie für die Argumentation nicht benötigt werden; auch die Abhängigkeiten von den Impulsvariablen können zunächst vernachlässigt werden. Allerdings spielt die Abhängigkeit aller Größen vom Gesamtviererimpuls im  $s$ -Kanal im folgenden eine entscheidende Rolle.

Das Symbol "  $\otimes$  " verknüpft wie in (1.16) nur amputierte Integralkerne und läßt sich in der stark vereinfachten Integraloperator-Schreibweise [11] auch durch eine explizite Multiplikation mit zwei vollen transversalen Gluonpropagatoren ausdrücken. Wir werden aber im folgenden so oft wie möglich das im ersten Kapitel eingeführte Symbol benutzen.

Das Inverse der 4-Punkt-Amplitude  $T'_{4,s}$  ist definiert durch die Gleichung:

$$T'_{4,s} (T'_{4,s})^{-1} = (T'_{4,s})^{-1} T'_{4,s} = 1 \quad (7.3)$$

Es bleibt festzuhalten, daß die Definition (7.3) ohne das Einschleiben von verknüpfenden Propagatoren auskommt. Damit ist das Inverse eines amputierten Integralkerns in unserer Konvention also *nicht* amputiert.

Durch Umschreiben der beiden Gleichungen in (7.2) lassen sich zwei Identitäten mit Operator-Charakter ablesen, die die inverse 4-Punkt-Amplitude  $(T'_{4,s})^{-1}$  implizit beschreiben:

$$K_s (T'_{4,s})^{-1} = 1 - K_s \otimes \quad (7.4a)$$

$$(T'_{4,s})^{-1} K_s = 1 - \otimes K_s \quad (7.4b)$$

Wir unterlassen die noch fehlende Multiplikation mit dem Inversen des Kerns und beginnen stattdessen mit einer trivialen Gleichung:

$$T'_{4,s} \otimes K_s = T'_{4,s} \otimes K_s (T'_{4,s})^{-1} T'_{4,s} \quad (7.5)$$

Diese leiten wir nach dem Gesamtimpuls im  $s$ -Kanal ab und teilen anschließend die gesamte Gleichung durch das Quadrat des Polfaktors  $\Pi_s$  (4.10). Dann nutzen wir die Regularitätszerlegung (1.19) und werten das Resultat an der Stelle  $P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2$  aus. Wir erhalten die folgende vektorielle Gleichung:

$$2P^\tau \cdot K_s \otimes R_s = R_s \otimes K_s \frac{\partial (T'_{4,s})^{-1}}{\partial P^\tau} R_s \quad (7.6)$$

Durch Anwendung der Produktregel auf der rechten Seite entsteht ein Term, der nach (7.4a) ersetzt werden kann. Benutzen wir weiterhin die homogene Gleichung zu (7.2) gemeinsam mit (7.4b), so läßt sich rechte Seite von (7.6) umformen:

$$\begin{aligned} & 2P^\tau \cdot K_s \otimes R_s \\ = & - R_s \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} \otimes R_s \\ & - R_s \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} (T'_{4,s})^{-1} K_s \otimes R_s \\ & - R_s \otimes K_s \frac{\partial (D_T D_T)}{\partial P^\tau} R_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 R_s \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} \otimes R_s \\
&\quad + R_s \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} \otimes K_s \otimes R_s \\
&\quad - R_s \otimes K_s \frac{\partial (D_T D_T)}{\partial P^\tau} R_s
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Benutzt man nun erneut die homogene Gleichung zu (7.2), so vereinfacht sich die Gleichung (7.7) weiter:

$$2 P^\tau \cdot R_s = - R_s \frac{\partial (D_T D_T)}{\partial P^\tau} R_s - R_s \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} \otimes R_s \tag{7.8}$$

Nachdem wir die triviale Lösung dieser Gleichung

$$R_s = 0 \tag{7.9}$$

zur Kenntnis genommen haben, unterstellen wir wie im dritten Kapitel die lineare Unabhängigkeit der Bethe-Salpeter-Amplituden<sup>1</sup> und erhalten endgültig<sup>2</sup>:

$$2 P^\tau \delta_{ij} = - \Phi_i \frac{\partial (D_T D_T)}{\partial P^\tau} \Phi_j - \Phi_i \otimes \frac{\partial K_s}{\partial P^\tau} \otimes \Phi_j \tag{7.10}$$

Hierbei ist wie im zweiten Kapitel zu beachten, daß die Ableitungen auf der rechten Seite bzw. die Resultate der Integrationen an der Stelle  $P^2 = -u''_{1,2}\Lambda^2$  zu nehmen sind.

Bei der Gleichung (7.10) handelt es sich erneut um eine — diesmal sogar explizit bosesymmetrische — Integralgleichung für jede einzelne Störungsordnung der 4-Punkt-Amplituden, die wieder nur durch den  $1/g^2$ -Mechanismus des fünften Kapitels eine selbstkonsistente Lösung in der Ordnung ( $g^0$ ) zuläßt.

Bei dem Bethe-Salpeter-Kern und den Bethe-Salpeter-Amplituden handelt es sich wie im ersten Kapitel um amputierte Größen, und der Kern beschreibt wieder alle im  $s$ -Kanal 1- und 2-Teilchen-irreduziblen Anteile der vollen amputierten und zusammenhängenden 4-Punkt-Amplitude  $T_4$ .

Die Gleichung (7.10) läßt sich für das 1-Schleifen-Niveau mit den Konventionen des dritten Kapitels auch graphisch veranschaulichen:

---

<sup>1</sup>Die nach den Projektionen nicht verschwindenden Anteile des Residuums sind sogar orthogonal bezüglich ihrer Lorentzstruktur!

<sup>2</sup>Die Indizes  $i$  und  $j$  in (7.10) entsprechen der Notation von (4.29) und nehmen aufgrund der Ergebnisse des sechsten Kapitels nur die Werte 0 und 2 an!

$$\begin{aligned}
2 \mathbf{P}^\tau &= -\frac{1}{2} g_0^2 \cdot \left[ \text{Diagram 1} \right] \left[ \begin{array}{l} \xrightarrow{SING_s} \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u'_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right] \\
&- \frac{1}{4} g_0^4 \cdot \left[ \text{Diagram 2} \right] \left[ \begin{array}{l} \xrightarrow{SING_s} \\ \mathcal{O}(g^0) \\ P^2 = -u'_{1,2} \Lambda^2 \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Wir betrachten zuerst den Kasten im 1-Schleifen-Graphen von (7.11):

Anhand der Darstellung (D.2) und der Definition (D.4) erkennen wir sofort, daß bei der Ableitung des Produkts von Gluonpropagatoren nach dem Gesamtimpuls im  $s$ -Kanal die führende Ordnung bezüglich des Relativimpulses verschwindet:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial P^\tau} \left( D_T^{(0,1)\eta\rho} \left( \frac{P}{2} - q \right) D_T^{(0,1)\zeta\sigma} \left( \frac{P}{2} + q \right) \right) \\
&= 4 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \frac{\partial}{\partial P^\tau} \left( \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta}{h(P, q)} + \mathcal{O}(q^{-6}) \right) \\
&= -4 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \frac{\partial h(P, q)}{\partial P^\tau} \cdot \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta}{h^2(P, q)} + \mathcal{O}(q^{-6}) \\
&= -4 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \frac{(2 P^\tau q^6 - 4 q^\tau (P \cdot q) q^4) q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta}{h^2(P, q)} + \mathcal{O}(q^{-6}) \\
&= \mathcal{O}(q^{-6})
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Damit wird die entsprechende Schleife in (7.11) konvergent und besitzt keinen Anteil der Ordnung  $(g^0)$ .

Der Kasten im 2-Schleifen-Graphen von (7.11) beschreibt eine neue amputierte 4-Punkt-Amplitude, die sich ebenso wie der Kern  $K_s$  nach Ordnungen bezüglich der beiden Relativimpulse entwickeln läßt. Ein Blick auf (4.51) zeigt sofort, daß bei der Ableitung nach dem Gesamtimpuls  $P$  nur zwei Terme der führenden Ordnung im rechten Relativimpuls übrig bleiben, die aber wegen der Resultate des vorigen Kapitels im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial P_\tau} \left( K_s^{1(0,1)\zeta\eta\rho\sigma}(q_1, q_2; P) \right) = \mathcal{O}(q_2^{-1}) \quad (7.13)$$

Der zweite Graph würde jedoch nur dann zur Ordnung  $(g^0)$  beitragen, falls beide Schleifen divergente Anteile besitzen würden und sich damit über (5.5) und (5.6) ein Faktor  $1/g^4$  ausbilden könnte.

Wir erhalten also folgendes Resultat:

Unsere Ansätze für die Bethe-Salpeter-Amplituden und den Bethe-Salpeter-Kern erlauben keine Lösung der Integralgleichung (7.10) in Ordnung  $(g^0)$  der erweiterten Störungstheorie, so daß die triviale Lösung (7.9) auf diesem Niveau akzeptiert werden muß. Diese liefert anstelle der erhofften Normierungsbedingungen das Verschwinden der letzten Residuumsparameter  $a_0$  und  $a_2$ .

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen, auf Grundlage der — durch die erste Stufe der faktorisierenden, rationalen Approximanten — erweiterten Störungsrechnung Bindungszustände zwischen Gluonen zu beschreiben. Der wesentliche neue Aspekt liegt dabei in der Ausnutzung der impliziten Crossing-Symmetrie der benutzten Integralgleichung, der Bethe-Salpeter-Gleichung für die bezüglich eines Mandelstam-Kanals ausgezeichnete 4-Gluon-Amplitude.

Es lassen sich zwei Teile dieser Arbeit unterscheiden:

Im ersten allgemeineren Teil wurde die Farbdynamik der Integralgleichung vollständig separiert, indem ein entkoppeltes Gleichungssystem für Partialamplituden mit erhaltener Gesamt-Farbquantenzahl hergeleitet wurde. Aufbauend auf der Basisentwicklung nach Farbtensoren wurden dazu zwei unterschiedliche Verfahren benutzt, die beide nur algebraische Rechnungen beinhalten und folglich keiner Näherungen für die Integralkerne bedürfen; damit werden die Resultate dieses Teils auch für mögliche nachfolgende Arbeiten von Bedeutung sein.

Im zweiten spezielleren Teil der Arbeit wird versucht, unter starker Vereinfachung der recht komplizierten Lorentz-Tensor-Struktur der 4-Gluon-Amplituden eine selbstkonsistente Lösung nullter Ordnung in  $g^2$  (im Sinne der erweiterten Störungsrechnung) der Bethe-Salpeter-Gleichung im Impulsraum zu finden. Eine entscheidende Rolle spielt dabei der in früheren Arbeiten entwickelte  $1/g^2$ -Mechanismus; er allein sichert die Selbstkonsistenz unserer Ansätze und macht die Reproduktion der nullten Störungsordnung erst möglich.

Die vorliegenden Rechnungen zeigen allerdings, daß eine Beschränkung der Lorentz-Tensor-Struktur des Bethe-Salpeter-Kerns auf die einfachsten dimensionslosen Tensoren nicht ausreicht, um einen Bindungspol zu reproduzieren. Dies wird besonders bei der Behandlung der Normierungsbedingung für die Bethe-Salpeter-Amplituden in Ordnung ( $g^2$ ) deutlich.

Bei der expliziten Ausführung der Crossing-Operationen taucht — wie schon in früheren Arbeiten zum Farboctett-Kanal — eine Divergenzsteigerung auf; diese wird im Rahmen dieser Arbeit durch eine Anpassung der freien Parameter unterdrückt, um den erforderlichen Rechenaufwand so klein wie möglich zu halten. Vor allem aufgrund der notwendigen Tensorstruktur ist aber zu vermuten, daß eine Lösung nullter Ordnung in  $g^2$  (wenn überhaupt) allenfalls durch Ausnutzung dieser Divergenzsteigerung erzielt werden könnte. Dies kann als zentrales Resultat der Rechnungen des spezielleren Teils angesehen werden.

Die fehlende Reproduzierbarkeit der nullten Störungsordnung beinhaltet selbstverständlich auch, daß die Massenbestimmung der farbneutralen "Gluon-Bälle" in unseren Näherungen nicht möglich ist; dieses Resultat überrascht uns allerdings nicht.

Natürlich besteht nach wie vor die Möglichkeit, Gluonium-Bindungszustände durch übliche Lösungen der Bethe-Salpeter-Gleichung in "Leiter"- oder "Blasen"-Näherungen — was einer unendlichen Teilsumimation der  $g^2$ -Reihe entspricht — zu erzeugen bzw. zu beschreiben. Dies gehörte jedoch, wie schon betont, nicht zur Fragestellung dieser Arbeit.

Die Berücksichtigung der Ankopplung von Quarks — über die in dieser Arbeit studierte reine Gluontheorie hinaus — ist mehr für eine realistische Spektroskopie von Interesse, die der Mischung von "Gluon-Bällen" mit mesonischen Zuständen Rechnung tragen muß. Die prinzipielle Frage nach der Existenz der "Gluon-Bälle" sollte sich bereits im Rahmen der quarkfreien Theorie entscheiden lassen.

Möglicherweise bietet die — für die Sicherung der perturbativen Renormierbarkeit notwendige — "Kontrollierung" der unverzichtbaren Divergenzsteigerung den Schlüssel zur vollständigen Beschreibung des *allgemeinen* 4-Gluon-Vertex. Eine konsequente Realisierung könnte durchaus die Basis für weitere Arbeiten zum Thema der Gluonium-Bindungszustände bilden.

Es ist allerdings — vor allem wegen der Allgemeinheit der auf der Normierungsbedingung basierenden Argumentation des siebten Kapitels — sehr wahrscheinlich, daß Gluoniumzustände in Ordnung ( $g^0$ ) überhaupt nicht erzeugbar sind.

Dieses negative Resultat, obwohl auf den ersten Blick sehr enttäuschend, wäre für den weiteren Ausbau und die Anwendung der modifizierten Störungstheorie eine erhebliche Vereinfachung und daher überaus wichtig. Ein solcher Bindungszustand in Ordnung ( $g^0$ ), dessen Residuum für  $g^2 \rightarrow 0$  wie  $\Lambda^2$  verschwinden, d. h. exponentiell abfallen würde, wäre prinzipiell zwar denkbar; er würde aber formal ein neues Teilchen mit relativ komplizierten nackten, störungstheoretischen Vertices einführen und damit die Konstruktion der oberflächlich konvergenten, höheren Amplituden technisch erheblich komplizieren.

# Anhang A

## Nichtverschwindende Strukturkonstanten der SU(3)

In dieser Tabelle werden diejenigen Kombinationen von Farbindizes aufgezählt, für welche die Strukturkonstanten der SU(3) nichtverschwindende Werte besitzen. Die Symbole  $f_{abc}$  sind total antisymmetrisch und die Symbole  $d_{abc}$  sind total symmetrisch unter Vertauschung von zwei Indizes.

$(abc)$	$f_{abc}$	$(abc)$	$d_{abc}$
123	1	118	$\sqrt{3}/3$
147	$1/2$	146	$1/2$
156	$-1/2$	157	$1/2$
246	$1/2$	228	$\sqrt{3}/3$
257	$1/2$	247	$-1/2$
345	$1/2$	256	$1/2$
367	$-1/2$	338	$\sqrt{3}/3$
458	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$
678	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$
		366	$-1/2$
		377	$-1/2$
		448	$-\sqrt{3}/6$
		558	$-\sqrt{3}/6$
		668	$-\sqrt{3}/6$
		778	$-\sqrt{3}/6$
		888	$-\sqrt{3}/3$

# Anhang B

## Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Isoskalare Faktoren

### B.1 Clebsch-Gordan-Koeffizienten der SU(2)

$(I_1, I_2, m_1, m_2   I_1, I_2, I, m)$	
$(1, 1, 1, 1   1, 1, 2, 2)$	1
$(1/2, 1, 1/2, 1   1/2, 1, 3/2, 3/2)$	1
$(1, 1/2, 1, 1/2   1, 1/2, 3/2, 3/2)$	1
$(1, 1, 0, 1   1, 1, 2, 1)$	$\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 1, 0   1, 1, 2, 1)$	$\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 0, 1   1, 1, 1, 1)$	$-\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 1, 0   1, 1, 1, 1)$	$\sqrt{2}/2$
$(0, 1, 0, 1   0, 1, 1, 1)$	1
$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2   1/2, 1/2, 1, 1)$	1
$(1, 0, 1, 0   1, 0, 1, 1)$	1
$(1/2, 1, -1/2, 1   1/2, 1, 3/2, 1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, 1/2, 0   1/2, 1, 3/2, 1/2)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 0, 1/2   1, 1/2, 3/2, 1/2)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 1, -1/2   1, 1/2, 3/2, 1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, -1/2, 1   1/2, 1, 1/2, 1/2)$	$-\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, 1/2, 0   1/2, 1, 1/2, 1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 0, 1/2   1, 1/2, 1/2, 1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 1, -1/2   1, 1/2, 1/2, 1/2)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(0, 1/2, 0, 1/2   0, 1/2, 1/2, 1/2)$	1
$(1/2, 0, 1/2, 0   1/2, 0, 1/2, 1/2)$	1

$(I_1, I_2, m_1, m_2   I_1, I_2, I, m)$	
$(1, 1, -1, 1   1, 1, 2, 0)$	$\sqrt{6}/6$
$(1, 1, 0, 0   1, 1, 2, 0)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1, 1, 1, -1   1, 1, 2, 0)$	$\sqrt{6}/6$
$(1, 1, -1, 1   1, 1, 1, 0)$	$-\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 0, 0   1, 1, 1, 0)$	0
$(1, 1, 1, -1   1, 1, 1, 0)$	$\sqrt{2}/2$
$(0, 1, 0, 0   0, 1, 1, 0)$	1
$(1/2, 1/2, -1/2, 1/2   1/2, 1/2, 1, 0)$	$\sqrt{2}/2$
$(1/2, 1/2, 1/2, -1/2   1/2, 1/2, 1, 0)$	$\sqrt{2}/2$
$(1, 0, 0, 0   1, 0, 1, 0)$	1
$(1, 1, -1, 1   1, 1, 0, 0)$	$\sqrt{3}/3$
$(1, 1, 0, 0   1, 1, 0, 0)$	$-\sqrt{3}/3$
$(1, 1, 1, -1   1, 1, 0, 0)$	$\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1/2, -1/2, 1/2   1/2, 1/2, 0, 0)$	$-\sqrt{2}/2$
$(1/2, 1/2, 1/2, -1/2   1/2, 1/2, 0, 0)$	$\sqrt{2}/2$
$(0, 0, 0, 0   0, 0, 0, 0)$	1
$(1/2, 1, -1/2, 0   1/2, 1, 3/2, -1/2)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, 1/2, -1   1/2, 1, 3/2, -1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, -1, 1/2   1, 1/2, 3/2, -1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 0, -1/2   1, 1/2, 3/2, -1/2)$	$\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, -1/2, 0   1/2, 1, 1/2, -1/2)$	$-\sqrt{3}/3$
$(1/2, 1, 1/2, -1   1/2, 1, 1/2, -1/2)$	3/4
$(1, 1/2, -1, 1/2   1, 1/2, 1/2, -1/2)$	$-\sqrt{2}\sqrt{3}/3$
$(1, 1/2, 0, -1/2   1, 1/2, 1/2, -1/2)$	$\sqrt{3}/3$
$(0, 1/2, 0, -1/2   0, 1/2, 1/2, -1/2)$	1
$(1/2, 0, -1/2, 0   1/2, 0, 1/2, -1/2)$	1
$(1, 1, -1, 0   1, 1, 2, -1)$	$\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 0, -1   1, 1, 2, -1)$	$\sqrt{2}/2$
$(1, 1, -1, 0   1, 1, 1, -1)$	$-\sqrt{2}/2$
$(1, 1, 0, -1   1, 1, 1, -1)$	$\sqrt{2}/2$
$(0, 1, 0, -1   0, 1, 1, -1)$	1
$(1/2, 1/2, -1/2, -1/2   1/2, 1/2, 1, -1)$	1
$(1, 0, -1, 0   1, 0, 1, -1)$	1
$(1/2, 1, -1/2, -1   1/2, 1, 3/2, -3/2)$	1
$(1, 1/2, -1, -1/2   1, 1/2, 3/2, -3/2)$	1
$(1, 1, -1, -1   1, 1, 2, -2)$	1

## B.2 Isoskalare Faktoren $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M \\ Y_1 I_1 & Y_2 I_2 & YI \end{pmatrix}$

$(Y, I, Y_1, I_1, Y_2, I_2)$	1	$8^S$	$8^A$	10	$10^*$	27
$(2, 1, 1, 1/2, 1, 1/2)$						1
$(2, 0, 1, 1/2, 1, 1/2)$					-1	
$(1, 3/2, 1, 1/2, 0, 1)$				$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$
$(1, 3/2, 0, 1, 1, 1/2)$				$\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$
$(1, 1/2, 1, 1/2, 0, 1)$		$3\sqrt{5}/10$	$1/2$		$-1/2$	$\sqrt{5}/10$
$(1, 1/2, 0, 1, 1, 1/2)$		$-3\sqrt{5}/10$	$1/2$		$-1/2$	$-\sqrt{5}/10$
$(1, 1/2, 1, 1/2, 0, 0)$		$-\sqrt{5}/10$	$1/2$		$1/2$	$3\sqrt{5}/10$
$(1, 1/2, 0, 0, 1, 1/2)$		$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$		$-1/2$	$3\sqrt{5}/10$
$(0, 2, 0, 1, 0, 1)$						1
$(0, 1, 1, 1/2, -1, 1/2)$		$-\sqrt{30}/10$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{5}/5$
$(0, 1, -1, 1/2, 1, 1/2)$		$-\sqrt{30}/10$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	$\sqrt{5}/5$
$(0, 1, 0, 1, 0, 1)$			$\sqrt{6}/3$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{6}/6$	
$(0, 1, 0, 1, 0, 0)$		$\sqrt{5}/5$		$1/2$	$1/2$	$\sqrt{30}/10$
$(0, 1, 0, 0, 0, 1)$		$\sqrt{5}/5$		$-1/2$	$-1/2$	$\sqrt{30}/10$
$(0, 0, 1, 1/2, -1, 1/2)$	$1/2$	$\sqrt{10}/10$	$\sqrt{2}/2$			$\sqrt{15}/10$
$(0, 0, -1, 1/2, 1, 1/2)$	$-1/2$	$-\sqrt{10}/10$	$\sqrt{2}/2$			$-\sqrt{15}/10$
$(0, 0, 0, 1, 0, 1)$	$\sqrt{6}/4$	$-\sqrt{15}/5$				$-\sqrt{10}/20$
$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{5}/5$				$3\sqrt{30}/20$
$(-1, 3/2, -1, 1/2, 0, 1)$					$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$(-1, 3/2, 0, 1, -1, 1/2)$					$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$(-1, 1/2, -1, 1/2, 0, 1)$		$-3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$		$-\sqrt{5}/10$
$(-1, 1/2, 0, 1, -1, 1/2)$		$3\sqrt{5}/10$	$1/2$	$1/2$		$\sqrt{5}/10$
$(-1, 1/2, -1, 1/2, 0, 0)$		$-\sqrt{5}/10$	$-1/2$	$1/2$		$3\sqrt{5}/10$
$(-1, 1/2, 0, 0, -1, 1/2)$		$-\sqrt{5}/10$	$1/2$	$-1/2$		$3\sqrt{5}/10$
$(-2, 1, -1, 1/2, -1, 1/2)$						1
$(-2, 0, -1, 1/2, -1, 1/2)$				1		

# Anhang C

## Crossing-Tabellen

### C.1 Crossing-Algebra der Tensoren

$s$ -Kanal $\rightarrow$ $u$ -Kanal	$s$ -Kanal $\rightarrow$ $t$ -Kanal
$b \leftrightarrow c ; \lambda \leftrightarrow \mu ; p_2 \leftrightarrow p_3$	$b \leftrightarrow d ; \lambda \leftrightarrow \nu ; p_2 \leftrightarrow p_4$
$P \rightarrow -p - p' (= R)$ $p \rightarrow \frac{1}{2}(-P + p - p') (= r)$ $p' \rightarrow \frac{1}{2}(-P - p + p') (= r')$ $s \rightarrow p^2 + 2pp' + p'^2 (= u)$	$P \rightarrow p - p' (= Q)$ $p \rightarrow \frac{1}{2}(-P + p + p') (= q)$ $p' \rightarrow \frac{1}{2}(P + p + p') (= q')$ $s \rightarrow p^2 - 2pp' + p'^2 (= t)$
$C_{(abcd)}^1 \rightarrow C_{(abcd)}^2$ $C_{(abcd)}^2 \rightarrow C_{(abcd)}^1$ $C_{(abcd)}^3 \rightarrow C_{(abcd)}^3$ $C_{(abcd)}^4 \rightarrow -C_{(abcd)}^5$ $C_{(abcd)}^5 \rightarrow -C_{(abcd)}^4$ $C_{(abcd)}^6 \rightarrow -C_{(abcd)}^6$	$C_{(abcd)}^1 \rightarrow C_{(abcd)}^3$ $C_{(abcd)}^2 \rightarrow C_{(abcd)}^2$ $C_{(abcd)}^3 \rightarrow C_{(abcd)}^1$ $C_{(abcd)}^4 \rightarrow -C_{(abcd)}^6$ $C_{(abcd)}^5 \rightarrow -C_{(abcd)}^5$ $C_{(abcd)}^6 \rightarrow -C_{(abcd)}^4$

$s$ -Kanal $\rightarrow$ $u$ -Kanal	$s$ -Kanal $\rightarrow$ $t$ -Kanal
$b \leftrightarrow c ; \lambda \leftrightarrow \mu ; p_2 \leftrightarrow p_3$	$b \leftrightarrow d ; \lambda \leftrightarrow \nu ; p_2 \leftrightarrow p_4$
$L_1^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_2^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $L_2^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_1^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $L_3^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_3^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$	$L_1^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_3^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $L_2^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_2^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $L_3^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow L_1^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$
$L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $\frac{1}{D}(L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)})$	$L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $\frac{1}{D}(L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} - L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)})$
$L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $\frac{D(D+1)-2}{2D}L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $+ \frac{D-2}{2D}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} - \frac{D+2}{2D}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$	$L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $\frac{D(D+1)-2}{2D}L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$ $+ \frac{D-2}{2D}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + \frac{D+2}{2D}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$
$L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $\left(\frac{D-1}{2}\right)L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} - \frac{1}{2}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + \frac{1}{2}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$	$L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)} \rightarrow$ $-\left(\frac{D-1}{2}\right)L_0^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + \frac{1}{2}L_+^{(\kappa\lambda\mu\nu)} + \frac{1}{2}L_-^{(\kappa\lambda\mu\nu)}$

## C.2 Crossing-Algebra der Impulsfunktionen

Crossing-Tabelle ( $F_u + F_t$ ) :

	$F_{1,s}$	$F_{2,s}$	$F_{6,s}$	$F_{7,s}$	$F_{8,s}$	$F_{9,s}$	$F_{11,s}$	$F_{12,s}$	$F_{13,s}$	$F_{14,s}$
$F_{1,u} + F_{1,t}$	2									
$F_{2,u} + F_{2,t}$	-2	1								2
$F_{6,u} + F_{6,t}$			2	-2		4				
$F_{7,u} + F_{7,t}$				1		2				
$F_{8,u} + F_{8,t}$			1	2	-1	4	$-u_2''$			
$F_{9,u} + F_{9,t}$				1						
$F_{11,u} + F_{11,t}$							2			
$F_{12,u} + F_{12,t}$							1	-1	$-u_2''$	
$F_{13,u} + F_{13,t}$									2	
$F_{14,u} + F_{14,t}$		1				2				

Crossing-Tabelle ( $F_u - F_t$ ) :

	$G_{3,s}$	$G_{5,s}$	$G_{6,s}$	$G_{8,s}$
$F_{1,u} - F_{1,t}$				
$F_{2,u} - F_{2,t}$	1			
$F_{6,u} - F_{6,t}$		-2		
$F_{7,u} - F_{7,t}$		-1		
$F_{8,u} - F_{8,t}$			1	
$F_{9,u} - F_{9,t}$		1		
$F_{11,u} - F_{11,t}$				
$F_{12,u} - F_{12,t}$				1
$F_{13,u} - F_{13,t}$				
$F_{14,u} - F_{14,t}$	1			

**Crossing-Tabelle ( $G_u + G_t$ ) :**

	$G_{3,s}$	$G_{5,s}$	$G_{6,s}$	$G_{8,s}$
$G_{3,u} + G_{3,t}$	1			
$G_{5,u} + G_{5,t}$		1		
$G_{6,u} + G_{6,t}$			1	
$G_{8,u} + G_{8,t}$				1

**Crossing-Tabelle ( $G_u - G_t$ ) :**

	$F_{1,s}$	$F_{2,s}$	$F_{6,s}$	$F_{7,s}$	$F_{8,s}$	$F_{9,s}$	$F_{11,s}$	$F_{12,s}$	$F_{13,s}$	$F_{14,s}$
$G_{3,u} - G_{3,t}$	2	1								-2
$G_{5,u} - G_{5,t}$				-1		2				
$G_{6,u} - G_{6,t}$			-1	-2	3	-4	$u_2''$			
$G_{8,u} - G_{8,t}$							-1	3	$u_2''$	

# Anhang D

## Berechnung der divergenten Anteile der Impulsintegrale

Eine Abzählung der Impulspotenzen in den Integranden von (5.8–5.11) liefert wegen (4.28) die Zahl  $-4$  und damit für alle vier Integrale den oberflächlichen Divergenzgrad  $d = 0$  [3]. Es liegen also tatsächlich nur logarithmische Divergenzen vor.

Man zeigt außerdem leicht, daß die divergenten Anteile der Integrale  $\mathcal{I}_0$ ,  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  völlig identisch sind. Dazu führen wir ein neues Integrationsmaß ein

$$d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} := \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_T^{(0,1)\eta\rho} \left( \frac{P}{2} - q \right) D_T^{(0,1)\zeta\sigma} \left( \frac{P}{2} + q \right) \quad (\text{D.1})$$

und bilden beispielsweise die Differenz zwischen  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_0$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_1^{\zeta\eta\rho\sigma} - \mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} \\ &= 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \left( \frac{q^4}{f(p, q)} - 1 \right) \\ &= 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \left( \frac{q^4 - f(p, q)}{f(p, q)} \right) \\ &= 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \left( \frac{2q^2(p^2 + u''_{1,2}\Lambda^2) - 4(p \cdot q)^2 + \mathcal{O}(q^0)}{f(p, q)} \right) \end{aligned}$$

Eine erneute Abzählung der Impulspotenzen zeigt aber, daß dies ein konvergentes Integral ist.

Die Integrale  $\mathcal{I}_0$  und  $\mathcal{I}_1$  unterscheiden sich also nur bezüglich ihrer endlichen Anteile. Auf völlig analoge Weise ließen sich auch die Integrale  $\mathcal{I}_0$  und  $\mathcal{I}_2$  oder die Integrale  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  vergleichen und so die entsprechenden divergenten Anteile identifizieren.

## D.1 Das Integral $\mathcal{I}$

Wir berechnen nun den divergenten Anteil des Integrals  $\mathcal{I}_0$ . Dazu schreiben wir den Gluonpropagator (4.28) um:

$$\begin{aligned}
D_T^{(0,1)\eta\rho}(Q) &= \frac{(\delta^{\eta\rho}Q^2 - Q^\eta Q^\rho)(Q^2 + u''_{1,2}\Lambda^2)}{Q^2(Q^2 + u_+\Lambda^2)(Q^2 + u_-\Lambda^2)} \\
&= \frac{(\delta^{\eta\rho}\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\eta\alpha}\delta^{\rho\beta})Q^\alpha Q^\beta}{(Q^2 + u_+\Lambda^2)(Q^2 + u_-\Lambda^2)} \left(1 + u''_{1,2}\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) \\
&= \frac{2L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)}Q^\alpha Q^\beta}{(Q^2 + u_+\Lambda^2)(Q^2 + u_-\Lambda^2)} \left(1 + \mathcal{O}(Q^{-2})\right) \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Beziehungen (1.22a) und (1.22b), so gilt mit (D.1) nach Einsetzen von (D.2) in das Integral  $\mathcal{I}_0$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0^{\zeta\eta\rho\sigma} &= 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\
&= 2g_0^2 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \\
&\quad \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{P}{2} - q\right)^\alpha \left(\frac{P}{2} - q\right)^\beta \left(\frac{P}{2} + q\right)^\gamma \left(\frac{P}{2} + q\right)^\delta}{h(P, q)} \\
&\quad + (\text{FIN.}) \\
&= 2g_0^2 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta}{h(P, q)} + (\text{FIN.}) \\
&= g_0^2 \frac{2}{D(D+2)} L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} (\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}) \\
&\quad \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{h(P, q)} + (\text{FIN.}) \quad (\text{D.3})
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile der obigen Rechnung wird die übliche Standardformel für symmetrische Integration [3] benutzt. Außerdem wird der Nenner des Integranden abgekürzt:

$$\begin{aligned}
h(P, q) &= \left( \left( \frac{P}{2} - q \right)^2 + u_+ \Lambda^2 \right) \left( \left( \frac{P}{2} - q \right)^2 + u_- \Lambda^2 \right) \\
&\quad \left( \left( \frac{P}{2} + q \right)^2 + u_+ \Lambda^2 \right) \left( \left( \frac{P}{2} + q \right)^2 + u_- \Lambda^2 \right) \\
&= q^8 + (P^2 + 2(u_+ + u_-)\Lambda^2)q^6 - 2(P \cdot q)^2 q^4 + \mathcal{O}(q^4) \quad (\text{D.4})
\end{aligned}$$

Die Kontraktion von Lorentzindizes in (D.3) läßt sich ausführen:

$$\begin{aligned}
&L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \left( \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\gamma} \right) \\
&= \frac{D^2 - 3}{4} \delta^{\zeta\sigma} \delta^{\eta\rho} + \frac{1}{4} \delta^{\zeta\eta} \delta^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta^{\zeta\rho} \delta^{\eta\sigma} \\
&= \frac{D^2 - 3}{4} (L_0 + L_+ + L_-)^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{D}{4} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{4} (L_0 + L_+ + L_-)^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\
&= \frac{D^2 + D - 2}{4} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{D^2 - 2}{4} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{D^2 - 4}{4} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \quad (\text{D.5})
\end{aligned}$$

Das Impulsintegral in (D.3) wird in der Regel durch Feynman-Parametrisierung behandelt und so auf ein Standardintegral zurückgeführt. Da aber nur eine schwache logarithmische Divergenz vorliegt, kann hier ein einfacheres Verfahren benutzt werden:

$$\begin{aligned}
&\nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{h(P, q)} \\
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{h(P, q)} - \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&\quad + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4 \left( (q^2 + \Lambda^2)^4 - h(P, q) \right)}{h(P, q) (q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&\quad + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\left((8 - 2u_+ - 2u_-)\Lambda^2 - P^2\right) q^{10} + 2(P \cdot q)^2 q^8 + \mathcal{O}(q^8)}{h(P, q) (q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&\quad + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} + \text{(FIN.)} \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Die Integral in (D.3) unterscheidet sich vom logarithmisch divergenten Standardintegral (D.6) also nur bezüglich seiner endlichen Anteile.

Die Lösung des Standardintegrals (D.6) findet sich in vielen Lehrbüchern [3] [22]:

$$\begin{aligned}
\nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(4 - \epsilon)\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{-\epsilon}\Gamma(4)\Gamma(2 - \epsilon)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2}\right)^\epsilon \frac{(3 - \epsilon)(2 - \epsilon)\Gamma(\epsilon)}{6(4\pi)^{-\epsilon}} \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Da uns nur die divergenten Anteile interessieren, benutzen wir die übliche Laurent-Entwicklung der Gamma-Funktion <sup>1</sup>

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{D.8}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2}\right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma\right) + \text{(FIN.)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \exp\left\{\ln\left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2}\right)\epsilon\right\} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma\right) + \text{(FIN.)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \ln\left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2}\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma\right) + \text{(FIN.)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right)\right) + \text{(FIN.)} \tag{D.9}
\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $\gamma$  ist die eulersche Konstante!

Dies ist der erwünschte nichtperturbative Logarithmus (5.5), durch den der zur Selbstkonsistenz erforderliche  $1/g^2$ -Mechanismus (5.6) ansetzen kann. Die im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  endlichen Beiträge bleiben während der Renormierungsprozedur unverändert und sind folglich mindestens von der Ordnung ( $g^2$ ).

Da die Tensorstruktur (D.5) keine Divergenzen für  $\epsilon \rightarrow 0$  besitzt, läßt sich nun der Limes ausführen und damit  $D = 4$  setzen. Die vollständige Lösung von (5.8) lautet dann in Ordnung ( $g^0$ ):

$$\left\{ \mathcal{I}^{\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{3}{8} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{7}{24} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{1}{4} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \right]$$

## D.2 Das Integral $\mathcal{J}$

Die Bestimmung des ( $g^0$ )-Anteils vom Integral  $\mathcal{J}$  verläuft völlig analog:

Wir setzen (D.2) in das Integral (5.11) ein, separieren die divergenten Anteile und benutzen wieder eine Standardformel für symmetrische Integration [22]:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} &= 1/2 g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d\mathcal{Q}_s^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \frac{q^2 q^\kappa q^\lambda}{f(p, q)} \\ &= 2 g_0^2 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \\ &\quad \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{P}{2} - q\right)^\alpha \left(\frac{P}{2} - q\right)^\beta \left(\frac{P}{2} + q\right)^\gamma \left(\frac{P}{2} + q\right)^\delta q^\kappa q^\lambda q^2}{h(P, q) f(p, q)} \\ &\quad + \text{(FIN.)} \\ &= 2 g_0^2 L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta q^\kappa q^\lambda q^2}{h(P, q) f(p, q)} + \text{(FIN.)} \\ &= g_0^2 \frac{2}{D(D+2)(D+4)} L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} S^{(\kappa\lambda\alpha\beta\gamma\delta)} \\ &\quad \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^8}{h(P, q) f(p, q)} + \text{(FIN.)} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Neben den in (4.12) bzw. (D.4) definierten Impulsfunktionen  $f(p, q)$  und  $h(P, q)$  wird in der obigen Rechnung der total symmetrische Lorentztensor sechster Stufe verwendet:

$$\begin{aligned}
S^{(\kappa\lambda\beta\gamma\delta)} = & \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma} \\
& + \delta^{\kappa\alpha}\delta^{\lambda\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\kappa\alpha}\delta^{\lambda\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\kappa\alpha}\delta^{\lambda\delta}\delta^{\beta\gamma} \\
& + \delta^{\kappa\beta}\delta^{\lambda\alpha}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\kappa\beta}\delta^{\lambda\gamma}\delta^{\alpha\delta} + \delta^{\kappa\beta}\delta^{\lambda\delta}\delta^{\alpha\gamma} \\
& + \delta^{\kappa\gamma}\delta^{\lambda\alpha}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\kappa\gamma}\delta^{\lambda\beta}\delta^{\alpha\delta} + \delta^{\kappa\gamma}\delta^{\lambda\delta}\delta^{\alpha\beta} \\
& + \delta^{\kappa\delta}\delta^{\lambda\alpha}\delta^{\beta\gamma} + \delta^{\kappa\delta}\delta^{\lambda\beta}\delta^{\alpha\gamma} + \delta^{\kappa\delta}\delta^{\lambda\gamma}\delta^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Die Kontraktion von Lorentzindizes in (D.10) läßt sich wieder ausführen:

$$\begin{aligned}
& L_-^{(\eta\beta\rho\alpha)} L_-^{(\zeta\delta\sigma\gamma)} S^{(\kappa\lambda\beta\gamma\delta)} \\
= & \frac{D^2 + 5D - 3}{4} \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\zeta\sigma}\delta^{\eta\rho} + \frac{1}{4} \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\zeta\eta}\delta^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta^{\kappa\lambda}\delta^{\zeta\rho}\delta^{\eta\sigma} \\
& - \frac{D + 3}{4} M_1^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{4} M_2^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} \\
= & \frac{D^2 + 6D - 2}{4} \delta^{\kappa\lambda} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{D^2 + 5D - 2}{4} \delta^{\kappa\lambda} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\
& - \frac{D^2 + 5D - 4}{4} \delta^{\kappa\lambda} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\
& - \frac{D + 3}{4} M_1^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{4} M_2^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Das Impulsintegral in (D.10) wird wieder auf dasselbe Standardintegral wie in (D.6) zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
& \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^8}{h(P, q) f(p, q)} \\
= & \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^8}{h(P, q) f(p, q)} - \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
& + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
= & \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^8 \left( (q^2 + \Lambda^2)^4 - q^4 h(P, q) f(p, q) \right)}{h(P, q) f(p, q) (q^2 + \Lambda^2)^4} \\
& + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{x} \Lambda^2 q^{14} + \left(2(P \cdot q)^2 + 4(p \cdot q)^2\right) q^{12} + \mathcal{O}(q^{12})}{h(P, q) f(p, q) (q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&\quad + \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} \\
&= \nu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{(q^2 + \Lambda^2)^4} + (\text{FIN.}) \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Dabei wird die Festlegung (4.52) benutzt und die folgende Abkürzung eingeführt, die aber nur im konvergenten Teil vorkommt:

$$\tilde{x} = 8 - 2(u_+ - u_-) - u_{1,2}'' \tag{D.14}$$

Außerdem wird im letzten Schritt wieder eine Abzählung von Impulspotenzen im obigen Integranden vorgenommen und so die Konvergenz des recht komplizierten Integrals festgestellt.

Die weiteren Rechnungen sind völlig identisch zum Integral  $\mathcal{I}$ :

Mit (D.7) und (D.8) folgt der nichtperturbative Logarithmus (5.5) in Verbindung mit dem divergenten Anteil des Integrals. So kann nach der multiplikativen Renormierung der Kopplungskonstanten der  $1/g^2$ -Mechanismus (5.6) ansetzen und anschließend der Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  ausgeführt werden.

Allein die Tensorstruktur (D.12) unterscheidet also das Integral  $\mathcal{J}$  vom Integral  $\mathcal{I}$ . Die vollständige Lösung von (5.11) in Ordnung ( $g^0$ ) mit  $D = 4$  lautet dann:

$$\left\{ \mathcal{J}^{\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma} \right\}_{\mathcal{O}(g^0)} = \frac{1}{\beta_0} \left[ \begin{aligned} &\frac{19}{192} \delta^{\kappa\lambda} L_0^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\ &+ \frac{17}{192} \delta^{\kappa\lambda} L_+^{(\zeta\eta\rho\sigma)} - \frac{1}{12} \delta^{\kappa\lambda} L_-^{(\zeta\eta\rho\sigma)} \\ &- \frac{7}{384} M_1^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} + \frac{1}{384} M_2^{(\kappa\lambda\zeta\eta\rho\sigma)} \end{aligned} \right]$$

# Literaturverzeichnis

- [1] N. Herbert: *Quanten Realität, Jenseits der Neuen Physik*; Birkhäuser Verlag, Basel, Boston (1987)
- [2] G. t'Hooft: Renormalization of Massless Yang-Mills-Fields; *Nuclear Physics*, **B 33**, 173 (1971)
- [3] T. Muta: *Foundations of Quantum Chromodynamics, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*; Singapore, World Scientific (1987)
- [4] K. Ishikawa: Glue-Balls; *Scientific American*, November 1982
- [5] S. Gasiorowicz: *Elementary Particle Physics*; John Wiley, New York (1966)
- [6] P. Becher, M. Böhm, H. Joos: *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*; Teubner Verlag, Stuttgart (1981)
- [7] G. Löffler: Die Vier-Gluon-Amplitude im Rahmen eines nicht-störungstheoretischen Lösungsansatzes der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD; Dissertation an der WWU Münster (1992)
- [8] M. Stingl: Equations for Four-Point Amplitude in Quantum Field Theory; unveröffentlichte Notizen, Münster (1990)
- [9] M. Stingl: Basic Integrals for Four-Point-Equations; unveröffentlichte Notizen, Münster (1992)
- [10] D. Lurie: *Particles and Fields*; McGraw-Hill, New York (1966)
- [11] H.-G. Reusch: Strahlungsübergänge und Zerfallsprozesse an einem phänomenologischen Meson-Modell; Diplomarbeit an der WWU Münster (1986)
- [12] M. Stingl: Zeroth-Order Dyson-Schwinger Solution in Terms of a Sequence of Factorizing Rational Approximants; unveröffentlichte Notizen, Münster (1991)
- [13] H.-G. Reusch: Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik; Dissertation an der WWU Münster (1989)
- [14] M. Scholze: Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgsfeld; Diplomarbeit an der WWU Münster (1991)

- [15] U. Häbel, R. Könnig, H.-G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard: A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD; *Z. Physik*, **A 336**, 423 bzw. 435 (1990)
- [16] P. Pascual, R. Tarrach: *Renormalization for the Practitioner*; Springer-Verlag, Cambridge University Press, Cambridge (1982)
- [17] E. Leader, E. Predazzi: *An Introduction to Gauge Theories and the 'New Physics'*; Cambridge University Press, Cambridge (1982)
- [18] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti: *Currents in Hadron Physics*, Appendix I.8. ; North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London (1973)
- [19] E. U. Condon, G. H. Shortley: *The Theory of Atomic Spectra*; Cambridge University Press, Cambridge (1964)
- [20] L. Kaplan, M. Resnikoff: *Journal of Math. Phys.*, 8, 9–12, 2194–2205 (1967)
- [21] J. J. de Swart: The Octet Model and its Clebsch-Gordan Coefficients; *Rev. of Mod. Phys.*, **V. 35, 4** , 916–939 (1963)
- [22] J. Collins: *Renormalization*; Cambridge University Press, Cambridge (1984)
- [23] G. F. Bertsch et al.: Review of Particle Properties; Particle Data Group; *Physics Letters B*, **V. 239**, North Holland (April 1990)
- [24] H. Chen, J. Sexton, A. Vaccarino, D. Weingarten: Glueball Mass Predictions of the Valence Approximation to Lattice QCD; *IBM Research, Yorktown Heights*, New York (August 1993)
- [25] P. van Baal, A. S. Kronfeld: Spectrum of the pure Glue Theory; *Nucl. Phys.*, **B 9**, 227 (1989)

# Schlußwort

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben, vor allem Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl, der den Vorschlag zu diesem interessanten Thema machte und mich mit viel Geduld über die gesamte Zeit begleitete.

Herr York Xylander unterstützte mich bei der Anfertigung des Maple-Programms zur Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Meine Mutter Dr. Phil. Irma Driesen half besonders beim Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ihnen sage ich hiermit ebenfalls Dank.