



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

DIPLOMARBEIT

---

**Schwere Quarkonia vor einem thermischen  
Hintergrund**

---

MÜNSTER, 4. März 2007

*Autor:*  
Marcus TASSLER

*Arbeitsgruppe:*  
Prof. Dr. Owe PHILIPSEN



WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER



# Inhaltsverzeichnis

|  |            |
|--|------------|
| <b>Einleitung</b>  | <b>vii</b> |
| <b>I Kontinuum</b>   | <b>1</b>   |
| <b>1 Thermische Feldtheorie</b>  | <b>3</b>   |
| 1.1 Die Analogie der Quantenfeldtheorie zur statistischen Physik . . . . .   | 3          |
| 1.1.1 Die Pfadintegraldarstellung der Quantenfeldtheorien . . . . .          | 3          |
| 1.1.2 Wick Rotation und Zustandssumme der euklidischen Feldtheorie . . . . . | 3          |
| 1.2 Pfadintegraldarstellung thermischer Zustandssummen . . . . .             | 4          |
| 1.2.1 Das bosonische Pfadintegral . . . . .                                  | 4          |
| 1.2.2 Das fermionische Pfadintegral . . . . .                                | 5          |
| 1.3 Observablen in der thermischen Feldtheorie . . . . .                     | 5          |
| 1.3.1 Statische Observablen . . . . .  | 5          |
| 1.3.2 Dynamische Observablen . . . . .                                       | 5          |
| 1.4 Die thermische Yang-Mills Theorie . . . . .                              | 6          |
| 1.4.1 Grundlagen der Yang-Mills Theorie . . . . .                            | 6          |
| 1.4.2 Die Zustandssumme der thermischen Yang-Mills Theorie . . . . .         | 8          |
| 1.5 Klassische Feldapproximation . . . . .                                   | 10         |
| 1.5.1 Dimensionale Reduktion der Zustandssumme . . . . .                     | 10         |
| 1.5.2 Dynamische Observablen in der klassischen Feldapproximation . . . . .  | 10         |
| 1.5.3 Semiklassische Approximation der Yang-Mills Theorie . . . . .          | 10         |
| <b>2 Kinetische Theorie des Quark-Gluon Plasmas</b>                          | <b>11</b>  |
| 2.1 Die Skalen der thermischen QCD . . . . .                                 | 11         |
| 2.2 Grundgleichungen der kinetischen Theorie . . . . .                       | 12         |
| 2.2.1 Die Wong-Gleichungen . . . . .   | 12         |
| 2.2.2 Boltzmann-Gleichung der Phasenraumverteilung . . . . .                 | 12         |
| 2.2.3 Feldgleichung . . . . .  | 12         |
| 2.3 Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie . . . . .                   | 13         |
| 2.3.1 Expansion der Distributionsfunktion . . . . .                          | 13         |
| 2.3.2 Bestimmung des Stroms . . . . .  | 13         |
| 2.3.3 Bewegungsgleichungen . . . . .   | 14         |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>3</b>  | <b>Schwere Quarkonia</b>   | <b>15</b> |
| 3.1       | Charmonium und Bottomium . . . . .   | 15        |
| 3.1.1     | Die Rolle schwerer Quarkonia bei der Untersuchung der starken Wechselwirkung . . . . . | 15        |
| 3.1.2     | Physikalische Eigenschaften und Potential schwerer Quarkonia . . . . .                 | 16        |
| 3.2       | Schwere Quarkonia vor einem thermischen Hintergrund . . . . .                          | 17        |
| 3.2.1     | Debye Screening . . . . .  | 17        |
| 3.2.2     | Das Schmelzen der Bindungszustände . . . . .   | 20        |
| 3.3       | Wilson-Loop und statisches Potential . . . . .   | 21        |
| <b>II</b> | <b>Diskretisierung</b>   | <b>23</b> |
| <b>4</b>  | <b>Der Gitterformalismus der Quantenfeldtheorien</b>                                   | <b>25</b> |
| 4.1       | Grundlagen . . . . .   | 25        |
| 4.1.1     | Links . . . . .  | 25        |
| 4.1.2     | Plaketten . . . . .  | 26        |
| 4.1.3     | Die kovariante Ableitung auf dem Gitter . . . . .                                      | 26        |
| 4.2       | Dynamische Simulationen . . . . .  | 28        |
| 4.2.1     | Observablen und statische Erwartungswerte . . . . .                                    | 28        |
| 4.2.2     | Entwicklung des Ensembles . . . . .  | 28        |
| <b>5</b>  | <b>Die klassische Yang-Mills Theorie</b>   | <b>29</b> |
| 5.1       | Die Wilson-Wirkung der dynamischen Yang-Mills Theorie . . . . .                        | 29        |
| 5.1.1     | Diskretisierung des magnetischen Anteils der Yang-Mills Wirkung . . . . .              | 29        |
| 5.1.2     | Diskretisierung des elektrischen Anteils der Yang-Mills Wirkung . . . . .              | 30        |
| 5.2       | Bewegungsgleichungen . . . . .   | 31        |
| 5.2.1     | Variationsansatz . . . . .   | 31        |
| 5.2.2     | Die Bewegungsgleichung der elektrischen Felder . . . . .                               | 31        |
| 5.2.3     | Skalierte Bewegungsgleichungen . . . . .   | 32        |
| <b>6</b>  | <b>Kinetische Theorie</b>  | <b>33</b> |
| 6.1       | Expansion in Kugelflächenfunktionen . . . . .  | 33        |
| 6.1.1     | Bewegungsgleichungen im Kontinuum . . . . .  | 33        |
| 6.1.2     | Räumliche Diskretisierung . . . . .  | 35        |
| 6.1.3     | Zeitliche Diskretisierung . . . . .  | 36        |
| 6.1.4     | Gaußsches Gesetz . . . . .   | 37        |
| 6.2       | Diskretisierung durch Platonische Körper . . . . .                                     | 38        |
| 6.2.1     | Bewegungsgleichungen im Kontinuum . . . . .  | 38        |
| 6.2.2     | Diskretisierte Bewegungsgleichungen . . . . .  | 39        |
| 6.2.3     | Das Gaußsche Gesetz . . . . .  | 39        |
| 6.3       | Reihenfolge der Bewegungsgleichungen . . . . .   | 40        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>7</b>   | <b>Thermalisierung und Ensemblemittelung</b>                          | <b>41</b> |
| 7.1        | Heatbath . . . . .  | 41        |
| 7.2        | Thermalisierung bei Verwendung von Kugelflächenfunktionen . . . . .   | 42        |
| 7.3        | Thermalisierung bei Verwendung platonischer Körper . . . . .          | 43        |
| <b>8</b>   | <b>Wilson-Loop und Potential</b>                                      | <b>45</b> |
| 8.1        | Diskretisierung des Wilson-Loops . . . . .                            | 45        |
| 8.2        | Bestimmung des verallgemeinerten Potentials . . . . .                 | 45        |
| <b>III</b> | <b>Simulation</b>   | <b>47</b> |
| <b>9</b>   | <b>Thermalisierung</b>  | <b>49</b> |
| 9.1        | Verlauf der Thermalisierung . . . . .                                 | 49        |
| 9.2        | Plakettenerwartungswerte . . . . .                                    | 49        |
| 9.3        | Doppler . . . . .   | 51        |
| <b>10</b>  | <b>Wilson-Loop und klassisches Potential</b>                          | <b>53</b> |
| 10.1       | Zeitentwicklung des Wilson-Loop für SU(2) . . . . .                   | 53        |
| 10.2       | Das klassische Potential für SU(2) . . . . .                          | 55        |
| 10.3       | Vergleich der Diskretisierungen . . . . .                             | 57        |
| 10.4       | Die Zeitentwicklung des Wilson-Loops für SU(3) . . . . .              | 58        |
| 10.5       | Das klassische Potential für SU(3) . . . . .                          | 59        |
| <b>11</b>  | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                   | <b>61</b> |
| <b>IV</b>  | <b>Anhang</b>   | <b>63</b> |
| <b>A</b>   | <b>Herleitungen</b>   | <b>65</b> |
| A.1        | Die Bewegungsgleichungen der klassischen Yang-Mills Theorie . . . . . | 65        |
| A.1.1      | Variationsansatz . . . . .  | 65        |
| A.1.2      | Bewegungsgleichungen . . . . .  | 65        |
| A.2        | Bewegungsgleichung der diskretisierten Yang-Mills Theorie . . . . .   | 67        |
| A.2.1      | Variationsansatz . . . . .  | 67        |
| A.2.2      | Euler-Lagrange Bewegungsgleichung . . . . .                           | 67        |
| A.2.3      | Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Felder . . . . .            | 68        |
| A.3        | Herleitung der sphärischen Koeffizienten . . . . .                    | 70        |
| A.3.1      | Kugelflächenfunktionen . . . . .                                      | 70        |
| A.3.2      | Bestimmung der Koeffizienten $v_m^i$ . . . . .                        | 70        |
| A.3.3      | Bestimmung der Koeffizienten $C_{lm'l'}^i$ . . . . .                  | 71        |
| <b>B</b>   | <b>Bewegungsgleichungen und Koeffizienten</b>                         | <b>75</b> |
| <b>C</b>   | <b>Implementation</b>   | <b>77</b> |



# Einleitung

---

Aufgrund aktueller kosmologischer Beobachtungen, welche die uns bekannte Materie auf nur 5 bis 10% des Materie- und Energiegehalts des Universums beziffern [1], erscheint eine grundlegende Weiterentwicklung unseres Verständnisses der subatomaren Physik, welches 1970 in der Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik kulminierte, geboten.

Als Ausgangspunkt hierzu dient in vielen Theorien, wie der Loop-Quantengravitation oder der Stringtheorie, der Versuch einer Vereinigung von Quantenphysik und Gravitation auf der Planck-Skala von  $10^{-35}m$ . Da die korrespondierende Energieskala von  $10^{19}GeV$  jedoch das Leistungsvermögen heutiger Beschleuniger um das  $\sim 10^{16}$ -fache übertrifft, scheint eine Falsifizierbarkeit dieser Theorien in absehbarer Zeit nicht gegeben zu sein.

Ein phänomenologischer Ansatz andererseits wird durch ein in vielen Bereichen unzulängliches mathematisches Verständnis des Standardmodells erschwert. So ist insbesondere eine Lösung der Quantenchromodynamik trotz großer Fortschritte, etwa bei einer nichtperturbativen Behandlung der QCD im Rahmen von Gittersimulationen, bisher nicht gelungen.

Entsprechend erweist sich eine Behandlung der komplexen Dynamik des Quark-Gluon-Plasmas, welche den Rahmen für diese Arbeit bilden wird, als eine theoretische Herausforderung. Ein bedeutender Durchbruch bei der Behandlung dieses Materiezustandes, welcher das frühe Universum vor dem Confinement der Quarks in Hadronen dominierte und heute im Rahmen von Schwerionenkollisionen einem experimentellen Studium zugänglich ist, wurde 1990 durch die Entwicklung der Hard-Thermal-Loop Näherung der QCD von Braaten und Pisarski [2] erzielt. Diese löste das Problem einer fehlenden Konvergenz herkömmlicher Störungstheorie und ermöglichte somit ein analytisches Studium der thermischen QCD.

Auf Grundlage der HTL- Näherung gelang Blaizot, Iancu und Nair 1993, durch Ausintegration der auf hohen Energieskalen dominanten Quanteneffekte, eine semiklassische Näherung der thermischen QCD in Form einer kinetischen Theorie [3-6], die im zweiten Kapitel dieser Arbeit nach einer Einführung in die thermische Feldtheorie ausführlich behandelt werden wird.

Zur Bestimmung der Zerfallsbreite eines schweren  $q\bar{q}$ -Paares jenseits der Deconfinementtemperatur  $T_C$  wird ein aktueller Ansatz verwendet, welcher die entsprechende Zerfallsbreite als Imaginärteil eines verallgemeinerten Potentials aus der Dynamik eines Wilson-Loops bestimmt [7]. Aufgrund der deutlichen Signatur schwerer Quarkonia in Schwerionenkollisionen sowie dem baldigen Start des ALICE-Experiments am LHC, dessen Spektrometer besonders für ein Studium der Charmonium- und Bottomiumresonanzen ausgelegt wurde, ist eine experimentelle Verifikation aktueller Voraussagen der Zerfallsbreite schwerer Quarkonia für  $T > T_C$  innerhalb der nächsten Jahre zu erwarten.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird, nach einer Einführung der Grundlagen des Gitterformalismus, die Durchführung dynamischer Simulationen auf dem Gitter diskutiert und eine Diskretisierung der klassischen Yang-Mills Theorie bei quasikontinuierlicher Zeit vorgestellt. Aufbauend hierauf wird die zur numerischen Bestimmung der Zerfallsbreite notwendige Diskretisierung der kinetischen Theorie auf der Grundlage einer Arbeit von Bödeker, Moore und Rummukainen [8] ausführlich dargestellt. Nach Vorstellung einer alternativen Diskretisierung der in der kinetischen Theorie des Quark-Gluon Plasmas auftretenden effektiven Felder wird abschließend die Erzeugung eines thermischen Ensembles von Feldkonfigurationen unter Verwendung eines Heatbath-Algorithmus diskutiert.

Im dritten Teil dieser Arbeit werden schließlich die Ergebnisse der Simulation für  $SU(2)$  und  $SU(3)$  vorgestellt und abschließend diskutiert. Detaillierte Herleitungen zu den im Hauptteil der Arbeit vorgestellten Bewegungsgleichungen und Koeffizienten können, soweit diese aufgrund ihres Umfangs nicht im Haupttext der Arbeit aufgeführt sind, einem ausgedehnten Anhang entnommen werden.



**Teil I**

**Kontinuum**



# 1 Thermische Feldtheorie

---

## 1.1 Die Analogie der Quantenfeldtheorie zur statistischen Physik

Als Ausgangspunkt zur Darstellung der engen Analogie von Quantenfeldtheorie und statistischer Physik dient im folgenden die auf Dirac und Feynman zurückgehende Pfadintegraldarstellung der Quantenfeldtheorien.

### 1.1.1 Die Pfadintegraldarstellung der Quantenfeldtheorien

Die Formulierung einer Quantenfeldtheorie erfolgt allgemein durch Quantisierung einer geeigneten klassischen Feldtheorie. Grundlage der Pfadintegralquantisierung ist eine Gewichtung der möglichen raumzeitlichen Feldkonfigurationen eines physikalischen Systems durch ein komplexes Exponential ihrer klassischen Wirkung  $S$ .

Der im Pfadintegralformalismus postulierte Erwartungswert eines Funktionals  $f$  der Felder  $\phi_i$  ist gegeben durch [9, 10]

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int D[\phi_i] f[\phi_i] e^{iS[\phi_i]}, \quad (1.1)$$

wobei der Normierungsfaktor  $Z$  durch die Zustandssumme

$$Z = \int D[\phi] e^{iS[\phi_i]} \quad (1.2)$$

gegeben ist und die Integration über alle raumzeitlichen Feldkonfigurationen erfolgt. Um ein Divergieren obiger Ausdrücke zu unterbinden, ist die Einführung eines Cutoffs in der Fourierdarstellung der Felder  $\phi_i$  und damit die Formulierung der Quantenfeldtheorie als effektive Theorie in einem bestimmten Energiebereich erforderlich.

### 1.1.2 Wick Rotation und Zustandssumme der euklidischen Feldtheorie

Der Bezug der Ausdrücke (1.1) und (1.2) zur statistischen Physik wird im Übergang in den euklidischen Raum durch Wick-Rotation  $t \rightarrow -i\tau$  deutlich. Die resultierende Zustandssumme

$$Z_E = \int D[\phi] e^{-S_E[\phi_i]} \quad (1.3)$$

der euklidischen Feldtheorie steht als exponentiell gewichtetes Integral über alle Systemzustände in einer direkten formalen Analogie zur Zustandssumme eines kontinuierlichen statistischen Systems mit  $\beta H = S_E$ . Die euklidische Darstellung von (1.1) entspricht dem Erwartungswert des Funktionals  $f$  im korrespondierenden statistischen System.

## 1.2 Pfadintegraldarstellung thermischer Zustandssummen

Zur angestrebten Behandlung der statistischen und quantenfeldtheoretischen Aspekte eines relativistischen Vielteilchensystems in einem geschlossenen und einheitlichen Formalismus wird im folgenden die zuvor dargestellte Analogie zur Formulierung der statistischen Aspekte im Rahmen einer euklidischen Feldtheorie benutzt. Hierzu wird zunächst die Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme bosonischer und fermionischer Felder vorgestellt.

Als Ausgangspunkt dient die kanonische Zustandssumme in der sowohl für Fermionen als auch Bosonen gültigen Form:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (1.4)$$

Der Parameter  $\beta = \frac{1}{T}$  wird in der korrespondierenden Feldtheorie als zeitliche Ausdehnung des euklidischen Raums identifiziert werden.

### 1.2.1 Das bosonische Pfadintegral

Entsprechend der Darstellung der Spur eines auf ein bosonisches Feld  $\phi$  wirkenden Operators  $e^{-\beta H}$  kann die statische Zustandssumme des Feldes  $\phi$  allgemein geschrieben werden als:

$$Z = \prod_x \int d\phi(\mathbf{x}) \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle \quad (1.5)$$

Die Integration erfolgt über alle räumlichen Feldkomponenten. Wie im Detail in [11] oder [12] dargestellt besitzt dieser Ausdruck eine Pfadintegraldarstellung der Form

$$Z = \int_{\phi(\beta)=\phi(0)} D\pi D\phi \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E \right] \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_E = -i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\phi, \pi), \quad (1.6)$$

wobei die Integration nun über alle Feld- und Impulskonfigurationen in einem vierdimensionalen euklidischen Raum  $(\mathbf{x}, \tau)$  mit  $0 \leq \tau \leq \beta$  erfolgt.  $\pi(\mathbf{x})$  bezeichnet den zu  $\phi(\mathbf{x})$  kanonisch konjugierten Impuls der klassischen Theorie.

Die in der Pfadintegraldarstellung auftretenden kanonischen Impulse können üblicherweise für physikalische Theorien ausintegriert werden, sodass obiger Ausdruck in direkter Analogie zu (1.3) als Zustandssumme einer euklidischen Feldtheorie interpretiert werden kann. Der Parameter  $\tau$  übernimmt hierbei die Rolle der euklidischen Zeit der korrespondierenden Feldtheorie. Aufgrund der Darstellung (1.5) der Spur ist eine Periodizität der bosonischen Felder innerhalb der euklidischen Zeitausdehnung  $\beta$  als Randbedingung zu fordern.

### 1.2.2 Das fermionische Pfadintegral

Ausgangspunkt für die Formulierung der fermionischen Zustandssumme als Pfadintegral ist in Analogie zum bosonischen Fall die Integraldarstellung der Spur des auf ein fermionisches Feld  $\psi$  wirkenden Operators  $e^{-\beta H}$ . In Verallgemeinerung der Darstellung der Spur eines auf eine einzelne Graßmannvariable  $c$  wirkenden Operators  $f$

$$\text{Tr} f = \int dc dc^* \langle -c | f | c \rangle \quad (1.7)$$

lautet diese:

$$Z = \prod_x \int d\psi(x) d\psi^*(x) e^{-\sum_x \psi^* \psi} \langle -\psi | e^{-\beta H} | \psi \rangle. \quad (1.8)$$

Die Integration erfolgt über alle durch die Graßmannvariablen  $\psi(x)$  repräsentierten räumlichen Feldkonfigurationen. Die korrespondierende Pfadintegraldarstellung lautet [11, 12]

$$Z = \int_{\psi(\beta)=-\psi(0)} D\psi D\psi^* \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_E\right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_E = \psi^* \partial_\tau \psi + \mathcal{H}, \quad (1.9)$$

wobei die Integration erneut über alle Feldkonfigurationen in einem euklidischen Raum  $(\mathbf{x}, \tau)$  mit  $0 \leq \tau \leq \beta$  erfolgt. Im Gegensatz zur bosonischen Zustandssumme führt die Darstellung (1.8) der Spur für Fermionen auf eine euklidische Feldtheorie mit antiperiodischen Randbedingungen.

## 1.3 Observablen in der thermischen Feldtheorie

### 1.3.1 Statische Observablen

Der thermische Erwartungswert eines Funktionals  $f$  der Felder kann als Erwartungswert der entsprechenden euklidischen Feldtheorie über den Ausdruck

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int_{(a)\text{period}} D[\phi_i] f[\phi_i] e^{iS[\phi_i]} \quad (1.10)$$

bestimmt werden. Eine unmittelbare Bestimmung thermischer Observablen aus der Zustandssumme ist in der üblichen Weise durch Ergänzung der Wirkung um geeignete Quellterme und Ableitung der Zustandssumme möglich.

### 1.3.2 Dynamische Observablen

Die Behandlung der statistischen und dynamischen Aspekte eines relativistischen Vielteilchensystems in einem einheitlichen Formalismus erlaubt insbesondere eine Berechnung zeitabhängiger Observablen mit quantenfeldtheoretischen Methoden. Dies kann sowohl durch eine analytische Fortsetzung der euklidischen Ergebnisse unter Verwendung bekannter Relationen wie etwa der Beziehung zwischen dem euklidischen Propagator und der Realzeitspektralfunktion oder unmittelbar in einem Realzeitformalismus durch Einführung geeigneter thermischer Feynmanregeln erreicht werden. Eine weitere am Schluß dieses Kapitels dargestellte Möglichkeit zur Bestimmung dynamischer Observablen eröffnet sich durch eine Verwendung der klassischen Feldapproximation bei hoher Temperatur.

## 1.4 Die thermische Yang-Mills Theorie

Seit ihrer Einführung 1954 durch Chen Ning Yang und Robert Mills stellt die Yang-Mills Theorie das Fundament des modernen Verständnisses der starken Wechselwirkungen dar. Zur Behandlung stark wechselwirkender Systeme bei hohen Temperaturen, wie sie in Schwerionenkollisionen oder der Kosmologie auftreten, ist eine statistische Formulierung dieser Theorie erforderlich.

Nach einem kurzen Überblick über die Grundlagen dieser Theorie werden die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt zu einer Darstellung der Zustandssumme der Yang-Mills Theorie im Rahmen einer euklidischen Feldtheorie verwendet werden.

### 1.4.1 Grundlagen der Yang-Mills Theorie

#### Die Symmetrien der starken Wechselwirkung

Mit der Entwicklung leistungsstarker Beschleuniger in den 50 er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde eine enorme Vielfalt hadronischer Teilchen einem experimentellen Studium zugänglich. Eine Klassifizierung der Hadronen gelang 1964 durch das von Murray Gell-Mann und Kazuhiko Nishijima entwickelte Quarkmodell, welches Quarks als fundamentale Bestandteile der Hadronen postuliert und von einer globalen SU(3)-Flavoursymmetrie ausgeht.

Diesem Modell fundamental zu widersprechen schien die Existenz des  $\Delta^{++}$ , welches in Verletzung des Pauli-Prinzips aus 3 Quarks mit parallelem Spin aufgebaut zu sein schien. Zur Lösung dieses Widerspruchs wurde 1965 unabhängig von Moo-Young Han, Yoichiru Nambu und Oscar W. Greenberg die Existenz einer zusätzlichen lokalen SU(3)-Symmetrie und damit zusätzlich auftretender Quantenzahlen postuliert. Die zusätzlichen SU(3)- Freiheitsgrade wurden 1973 von Bardeen, Fritsch und Gell-Mann als Farbladung identifiziert.

#### Die Lagrangedichte der Yang-Mills Theorie

Die von Yang und Mills bereits 1954 zur Verallgemeinerung der QED auf nicht-abelsche Eichsymmetrien postulierte Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi. \quad (1.11)$$

Während der zweite Term der Yang-Mills Theorie einfach ein Doublet von Dirac-Fermionen beschreibt, führt der kinetische Term der Yang-Mills Lagrangedichte in der quantisierten Theorie auf ein selbstwechselwirkendes Eichfeld. Fordert man eine Renormierbarkeit der quantisierten Theorie, so erweist sich der von Yang und Mills postulierte Eichfeldterm als der einzig mögliche kinetische Term bei gegebener SU(N)-Eichsymmetrie.

Für eine allgemeine SU(N)-Eichsymmetrie ist der Feldtensor  $F_{\mu\nu}$  gegeben durch die Matrix:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (1.12)$$

Die Matrizen  $A_\mu$  repräsentieren die aufgrund der lokalen Eichsymmetrie auftretenden Eichfelder. Die in der Lagrangedichte auftretende kovariante Ableitung kann mit ihrer Hilfe geschrieben werden als:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi. \quad (1.13)$$

Feldtensor und Eichfelder besitzen als Elemente der Lie-Algebra  $\mathcal{L}SU(N)$  von  $SU(N)$  Darstellungen der Form

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad \text{und} \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad (1.14)$$

wobei die Eichfelder  $A_\mu^a$  in der adjungierten und die Elemente des Feldtensors  $F_{\mu\nu}^a$  in der kovarianten Darstellung transformieren.

Die hermiteschen Matrizen  $T^a$  bezeichnen hierbei die Generatoren von  $SU(N)$  und erfüllen allgemein die Beziehungen:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (T^a)^\dagger = T^a \quad \text{und} \quad \text{Tr}(T^a T^b) = \alpha \delta_{ab}. \quad (1.15)$$

Die Konstanten  $f^{abc}$  charakterisieren die Gruppe  $SU(N)$  und werden daher als Strukturkonstanten bezeichnet. Der in der letzten Beziehung auftretende Normierungsfaktor  $\alpha$  wurde gemäß der üblichen Konvention im Rahmen dieser Arbeit mit  $\alpha = \frac{1}{2}$  gewählt.

In der  $N$ -dimensionalen Fundamentaldarstellung sind die Generatoren für  $SU(2)$  durch die Pauli-Matrizen  $\frac{1}{2}\sigma_i$  gegeben. Die Generatoren der  $SU(3)$  sind in [9] in der Fundamentaldarstellung aufgeführt.

### Quantenchromodynamik

Unter Verwendung der von Han, Nambu und Greenberg geforderten  $SU(3)$ -Eichsymmetrie und Summation über alle Flavour führt die Yang-Mills Theorie auf die Quantenchromodynamik als theoretisches Modell der starken Wechselwirkung. Wie abschließend 1973 von David Gross, Frank Wilczek und David Politzer gezeigt werden konnte, reproduziert die QCD insbesondere die experimentell beobachtete Abnahme der Kopplung der starken Wechselwirkung bei kleinen Entfernungen, beziehungsweise hohen Energien. Eine genaue Vermessung der laufenden Kopplung sowie die allgemeine experimentelle Verifikation der perturbativen QCD etwa am LEP führten schließlich zu einer allgemeinen Akzeptanz der QCD als korrekte Theorie der starken Wechselwirkung. Aufgrund des nichtabelschen Charakters der zugrundeliegenden Symmetrie ist bis heute eine mathematische Lösung der QCD nicht gelungen. Viele wichtige Eigenschaften der Theorie wie etwa das Confinement der Quarks in Hadronen sind jedoch im Rahmen von Gittersimulationen einem wissenschaftlichen Studium zugänglich. So ist insbesondere die thermische QCD, aufgrund aktueller Experimente zur Erzeugung des Quark-Gluon Plasmas am RHIC und LHC (beginnend 2009 mit den ersten Pb-Kollisionen), ein Gegenstand intensiver Forschung.

### 1.4.2 Die Zustandssumme der thermischen Yang-Mills Theorie

Zur Vereinfachung der Darstellung ist es zweckmäßig an dieser Stelle zunächst die thermische Zustandssumme des elektromagnetischen Feldes zu betrachten.

#### Die Zustandssumme des elektromagnetischen Feld

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.16)$$

und genügt einer lokalen U(1) Symmetrie. Elektrische und magnetische Felder sind definiert über die Ausdrücke:

$$E_i = F_{0i} \quad \text{und} \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}. \quad (1.17)$$

Der zu  $A_\mu(x)$  konjugierte Impuls ist gegeben durch  $\pi_\mu(x) = F_{0\mu}$ . Unter Verwendung der axialen Eichung  $A_3 = 0$  sind lediglich zwei unabhängige Eichfeldkomponenten zu betrachten, da wegen der Antisymmetrie des Feldtensors  $\pi_0 = 0$  folgt und die Feldkomponente  $A_0$  somit kein unabhängiges Feld darstellen kann.

Unter Verwendung des Ausdrucks (1.6) für die bosonische Zustandssumme lautet die Zustandssumme des elektromagnetischen Feldes zunächst

$$Z = \int D\pi_1 D\pi_2 \int_{\text{period}} DA_1 DA_2 \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi_1 \partial_\tau A_1 + i\pi_2 \partial_\tau A_2 - \mathcal{H})\right), \quad (1.18)$$

wobei die Hamiltondichte gegeben ist durch den Ausdruck

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) = \frac{1}{2}(\pi_1^2 + \pi_2^2 + E_3^2(\pi_1, \pi_2) + B^2) \quad (1.19)$$

und  $E_3$  über das Gaußsche Gesetz mit  $\pi_1$  und  $\pi_2$  verknüpft ist. Wie im Detail in [11] dargestellt ermöglicht die Beziehung

$$1 = \int D\pi_3 \int DA_4 \det\left(\frac{\partial(\nabla \cdot \pi)}{\partial\pi_3}\right) \exp\left(i \int_0^\beta d\tau \int d^3x A_4 \nabla \cdot \pi\right) \quad (1.20)$$

eine Ausintegration der konjugierten Impulse durch Gaußsche Integration unter Einführung der euklidischen Feldkomponente  $A_4 = iA_0$  und führt unter Berücksichtigung der axialen Eichung auf die Zustandssumme:

$$Z = \int_{\text{period}} dA_\mu \delta(A_3) \det(\partial_3) \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_E = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$



### Verallgemeinerung auf nicht-abelsche Eichfelder

Die Herleitung der Zustandssumme erfolgt für nichtabelsche Eichfelder in analoger Weise und ergibt bei beliebigen Eichfixierungsfunktionen  $F^a$  in Verallgemeinerung von (1.21) den Ausdruck [12]:

$$Z = \int DA_\mu^a \delta(F^b) \det \left( \frac{\partial F^c}{\partial \alpha_d} \right) \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right). \quad (1.22)$$

### Das Dirac-Feld

Die Herleitung der Zustandssumme der Dirac-Fermionen erweist sich als weniger aufwendig. Ausgehend von der Hamiltondichte der Dirac-Fermionen

$$\mathcal{H}_D = \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi \quad (1.23)$$

ergibt sich durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (1.9) unter Verwendung der euklidischen  $\gamma$ -Matrizen  $\gamma^E$  [13] unmittelbar die gesuchte Zustandssumme [12]:

$$Z = \int_{aperiod} D\psi^+ D\psi \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(\gamma_\mu^E \partial_\mu + m)\psi \right). \quad (1.24)$$

### Die Zustandssumme der Yang-Mills Theorie

Unter Verwendung der Ausdrücke (1.22) und (1.24) kann schließlich die vollständige Zustandssumme der Yang-Mills Theorie angegeben werden

$$Z = \int_{period} DA_\mu^a \int_{aperiod} D\psi^+ D\psi \delta(F^b) \det \left( \frac{\partial F^c}{\partial \alpha_d} \right) \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E \right], \quad (1.25)$$

wobei  $\mathcal{L}_E$  die euklidische Lagrangedichte der Yang-Mills Theorie bezeichnet:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma_\mu^E D_\mu + m)\psi. \quad (1.26)$$

## 1.5 Klassische Feldapproximation

### 1.5.1 Dimensionale Reduktion der Zustandssumme

Betrachtet man nun zunächst eine bosonische Zustandssumme der Form

$$Z = N \int_{\phi_i(\beta)=\phi_i(0)} D[\phi_i] \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{H}(x) \right], \quad (1.27)$$

wie sie für das Eichfeld der Yang-Mills Theorie (1.22) vorliegt bei hohen Temperaturen so kann im Grenzwert  $\beta \rightarrow 0$  die Integration über die imaginäre Zeitkomponente im Gewichtungsfaktor der Zustandssumme unmittelbar ausgeführt werden, sodass sich diese auf eine klassische Zustandssumme

$$Z \approx N \int D[\phi_i] \exp \left[ -\beta \int d^3x \mathcal{H}(x) \right] \quad (1.28)$$

reduziert, wobei die  $\phi_i$  nun als dreidimensionale Felder aufzufassen sind. Dies entspricht einer Beschränkung auf die Matsubara- Nullmode der Felder und kann als führende Ordnung einer systematischen Entwicklung der Zustandssumme angesehen werden [14].

### 1.5.2 Dynamische Observablen in der klassischen Feldapproximation

Eine Berechnung dynamischer Observablen führt im Rahmen der Feldapproximation auf eine klassische Ensemblemittelung. Zur dynamischen Bestimmung des Erwartungswertes

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} N \int D[\phi_i] f(\phi_i) \exp \left[ -\beta \int d^3x \mathcal{H}(x) \right] \quad (1.29)$$

eines Funktionals  $f(\phi_i)$  dient hierbei ein gemäß dem Boltzmannfaktor  $e^{-\beta H}$  verteiltes Ensemble von Feldkonfigurationen, welches über die üblich klassischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} \quad \text{und} \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}, \quad (1.30)$$

die hier im Hamiltonformalismus dargestellt sind, entwickelt wird [14].

### 1.5.3 Semiklassische Approximation der Yang-Mills Theorie

Wie im folgenden Abschnitt näher dargestellt wird, erweist sich die klassische Feldapproximation auf der Energieskala  $g^2 T < k < gT$  als eine gute Näherung für die Dynamik des Eichfeldes der Yang-Mills Theorie. Es zeigt sich darüber hinaus, dass die massiven fermionischen Moden und harten Eichfeldmoden auf der Energieskala  $k > gT$  als effektive Felder im Rahmen einer klassischen Approximation berücksichtigt werden können. Dies wird als Ausgangspunkt für eine numerische Behandlung der Dynamik des Quark-Gluon Plasmas dienen.

## 2 Kinetische Theorie des Quark-Gluon Plasmas

---

### 2.1 Die Skalen der thermischen QCD

Eine klassische Approximation von Quantenfeldtheorien im Infraroten wurde zunächst von Grigoriev und Rubakov [15] vorgeschlagen. Eine Anwendung auf die Yang-Mills Theorie erweist sich jedoch aufgrund der Kopplung hoch- und niederenergetischer Skalen sowie dem Zusammenbruch einer klassischen Approximation bei hoher Energie als problematisch. Dieser korrespondiert mit dem Auftreten ultravioletter Divergenzen der klassischen Theorie, wie etwa der hier in Abhängigkeit vom Impulscutoff  $\mu$  dargestellten Rayleigh-Jeans Divergenz der Energiedichte [16]

$$E(T) = \frac{T}{6\pi^3} \mu^3, \quad (2.1)$$

welche bereits in der Elektrodynamik einen Zusammenbruch der klassischen Physik signalisierte. Eine Regularisierung der klassischen Theorie erfordert eine Ausintegration der harten Freiheitsgrade im Rahmen der vollen Quantentheorie. Als geeigneter Rahmen für eine Abseparation harter Feldmoden erweist sich hierbei die "Hard-Thermal Loop"- Näherung der thermischen QCD.

Im folgenden sind die im Rahmen der "Hard-Thermal-Loop"- Approximation relevanten Impulsskalen der thermischen QCD aufgelistet:

- $k \sim T$  (Charakteristische Skala des Quark-Gluon-Plasmas)  
Dominante Impulsskala der massiven Quarks und energiereichen Gluonen
- $g^2 T < k < gT$  (Skala kollektiver Dynamik)  
Dynamische Skala der "weichen" Eichfeldmoden. Bei einer klassischen Approximation der Felder auf dieser Impulsskala ist ein Beitrag durch den Austausch harter Teilchen zu berücksichtigen.
- $k < g^2 T$  (Nichtperturbative Dynamik)  
Beiträge thermischer Loops höherer Ordnung dominieren, Zusammenbruch einer störungstheoretischen Beschreibung der kollektiven Dynamik.

Durch Ausintegration der hochenergetischen Moden (Hard-Thermal-Loops) bis zu einer Cutoffskala  $gT \ll k \ll T$  und klassische Approximation der resultierenden Theorie kann eine geeignet regularisierte Theorie gewonnen werden, welche einen Strom harter Teilchen vor einem klassischen Eichfeldhintergrund beschreibt. Es zeigt sich, dass diese äquivalent ist zu einer kinetischen Theorie des Quark-Gluon Plasmas auf der Basis eines Satzes von Bewegungsgleichungen der als "Wong-Gleichungen" bekannt ist.

## 2.2 Grundgleichungen der kinetischen Theorie

### 2.2.1 Die Wong-Gleichungen

Als Ausgangspunkt einer klassischen Behandlung des Quark-Gluon Plasmas dienen die 1970 von S. Wong [17] formulierten Wong-Gleichungen für die Bewegung eines klassischen Teilchens der Masse  $M$  und Farbladung  $Q^a$  in einem nichtabelschen Eichfeld  $A_\mu^b$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & M \frac{dx^\mu}{d\tau} = k^\mu \\ 2) \quad & M \frac{dk^\mu}{d\tau} = -gQ^a F_a^{\mu\nu} k_\nu \\ 3) \quad & M \frac{dQ^a}{d\tau} = g f^{abc} k_\mu A_b^\mu Q_c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Anstelle des üblichen durch Ort  $x$  und Impuls  $k$  charakterisierten Phasenraums tritt nun die Farbladung  $Q$  als zusätzliche Koordinate der Theorie auf.  $\tau$  bezeichnet die Eigenzeit des Teilchens. Die Bewegungsgleichung der räumlichen Koordinate 1) entspricht der üblichen relativistischen Orts-Impuls Beziehung. In Analogie zur klassischen Elektrodynamik ist die durch Gleichung 2) beschriebene Impulsänderung des Teilchens proportional zu Ladung und Impuls des Teilchens sowie zur Feld- und Kopplungsstärke. Gleichung 3) beschreibt schließlich die Entwicklung der Farbladung unter Einwirkung des nichtabelschen Eichfeldes. Die folgende Herleitung eines Satzes von Bewegungsgleichungen zur Beschreibung der Dynamik des Eichfeldes und des Farbladungsstroms auf Basis der Wong-Gleichungen folgt der Darstellung in [18, 19].

### 2.2.2 Boltzmann-Gleichung der Phasenraumverteilung

Die Boltzmann-Gleichung für die Phasenraumverteilung  $f(x, k, Q)$  lautet allgemein zunächst

$$\left( \dot{x}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{k}_\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} + \dot{Q}^a \frac{\partial}{\partial Q^a} \right) f(x, k, Q) = C[f], \quad (2.3)$$

wobei  $C[f]$  den Kollisionsterm bezeichnet. Durch Einsetzen der Wong-Gleichungen (2.2) und Vernachlässigung des Kollisionsterms [11] ergibt sich der Ausdruck:

$$k_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + gQ^a F_a^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial k^\nu} + g f^{abc} A_b^\mu Q_c \frac{\partial}{\partial Q^a} \right) f(x, k, Q) = 0. \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Feldgleichung

Wie im Anhang A.1 hergeleitet wird, ist die Feldgleichung des klassischen Yang-Mills Feldes in Anwesenheit eines Farbladungsstroms  $J^\mu = J_a^\mu T^a$  gegeben durch den Ausdruck

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.5)$$

wobei  $D_\mu$  die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung bezeichnet. Der Farbladungsstrom  $J^\mu$  ergibt sich hier durch Summation über die Ströme  $j_i^\mu(x)$  aller Teilchen und Spinorientierungen, die über die zugehörigen Phasenraumverteilung  $f_i(x, k, Q)$  bestimmt sind:

$$J^\mu(x) = \sum_i j_i^\mu(x) = g \sum_i \int dk dQ k^\mu Q f_i(x, k, Q). \quad (2.6)$$

## 2.3 Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie

### 2.3.1 Expansion der Distributionsfunktion

Eine Lösung der Gleichungen (2.4) und (2.5) ist bei Expansion der Phasenraumverteilungen in Potenzen der Kopplungskonstante  $g$

$$f_i(x, k, Q) = \sum_n f_i^{(n)}(x, k, Q) g^n \quad (2.7)$$

in führender Ordnung möglich.  $f_i^{(0)}$  stellt hierbei die Gleichgewichtsverteilung der freien Theorie dar, welche für Gluonen gegeben ist durch die Boseverteilung  $f_-$ , während für Quarks die Fermiverteilung  $f_+$  zu verwenden ist:

$$f_{\pm}(k^0) = C_{\pm} n_{\pm} \quad \text{mit} \quad n_{\pm} = \frac{1}{e^{\beta k^0} \pm 1}. \quad (2.8)$$

$C_+$  und  $C_-$  bezeichnen hierbei die Normierungskonstanten. Bis zur ersten Ordnung in der Kopplungskonstante lautet die Boltzmann-Gleichung:

$$k_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + g f_{abc} A_b^{\mu} Q_c \frac{\partial}{\partial Q_a} \right) f_i^{(1)}(x, k, Q) = k_{\mu} Q_a F_a^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial k^{\nu}} f_i^{(0)}(k^0). \quad (2.9)$$

Wie im Detail in [18, 19] dargestellt ist, führt dieser Ausdruck nach einigen Umformungen und Summation über alle Teilchen und Spins auf die Gleichung

$$k^{\nu} D_{\nu} J^{\mu}(x, k) = 2g^2 k^{\mu} k_{\nu} F^{\nu 0} \frac{d}{dk_0} [N_c n_-(k^0) + N_f n_+(k^0)], \quad (2.10)$$

wobei  $J^{\mu}(x, k)$  die Impulskomponente des Farbladungsstroms  $J^{\mu}(x)$  bezeichnet:

$$J^{\mu}(x) = \int dk J^{\mu}(x, k). \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Bestimmung des Stroms

Integriert man (2.10) über  $k^0$ , so ergibt sich

$$v^{\nu} D_{\nu} \int dk^0 k^0 J^{\mu}(x, k) = 2m_D^2 v^{\mu} v_{\nu} F^{\nu 0}, \quad (2.12)$$

wobei unter Vernachlässigung der Teilchenmasse  $k = k^0 v$  mit dem ultrarelativistischen Geschwindigkeitsvektor  $v = (1, \mathbf{v})$  angenommen wurde. Bei Integration über die rechte Seite von (2.10) tritt das Quadrat der thermischen Gluon-Masse auf [19]:

$$m_D^2 = \frac{1}{3} g^2 T^2 \left( N + \frac{1}{2} N_f \right). \quad (2.13)$$

Ein Vergleich mit der explizit lösbaren Gleichung

$$v^{\nu} D_{\nu} W^{\mu}(x, v) = F^{\mu\nu}(x) v_{\nu} \quad (2.14)$$

führt unter Verwendung von (2.11) auf die Beziehung [11]

$$J^\mu(x) = m_D^2 \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}}}{4\pi} v^\mu W^0(x, \mathbf{v}), \quad (2.15)$$

wobei eine sphärische Integration über alle Impulsorientierung  $\mathbf{v}$  erfolgt und eine Beschränkung auf die Nullkomponente von  $W^\mu(x, \mathbf{v})$  aufgrund der Isotropie des Plasmas möglich ist. Da die  $\mu \neq 0$  Komponenten der  $W^\mu(x, \mathbf{v})$  keinen Einfluß auf die Dynamik des Eichfeldes oder die Dynamik der  $W^0(x, \mathbf{v})$  ausüben, brauchen diese Komponenten nicht weiter berücksichtigt zu werden. Die Größe  $m_D^2 W^0(x, \mathbf{v})$  kann physikalisch als Anteil der Gesamtladungsdichte aller harten Moden welcher sich an der Stelle  $x$  in Richtung  $\mathbf{v}$  bewegt interpretiert werden [8].

### 2.3.3 Bewegungsgleichungen

Aufgrund ihrer kompakten Form eignet sich (2.14) hervorragend als Bewegungsgleichung der harten Moden im Rahmen einer numerischen Simulation des Quark-Gluon Plasmas. Ein geeigneter Satz klassischer Bewegungsgleichungen für eine numerische Approximation der thermischen Dynamik des Quark-Gluon Plasmas lautet somit zusammenfassend

$$1) \quad D_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu \quad (2.16)$$

$$2) \quad v^\nu D_\nu W(x, v) = F^{0\nu}(x) v_\nu, \quad (2.17)$$

wobei die Kurzschreibweise  $W(x, \mathbf{v}) = W^0(x, \mathbf{v})$  eingeführt wurde. Der Strom ist gegeben durch den Ausdruck:

$$J^\mu(x) = m_D^2 \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}}}{4\pi} v^\mu W(x, \mathbf{v}). \quad (2.18)$$

Die Beobachtungen und Ergebnisse dieses Kapitels können unverändert auf eine beliebige  $SU(N)$  Yang-Mills Theorie übertragen werden. Eine Diskretisierung dieser Bewegungsgleichungen wird daher im weiteren Verlauf der Arbeit für eine allgemeine  $SU(N)$ - Eichsymmetrie diskutiert.

## 3 Schwere Quarkonia

---

Schwere Quarkonia sind mesonische Bindungszustände zwischen einem Charm- oder einem Bottomquark und dem jeweiligen Antiquark. Den Konstituenten entsprechend wird ein solches Meson als Charmonium oder Bottomium bezeichnet.

### 3.1 Charmonium und Bottomium

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Überblick über die physikalischen Eigenschaften schwerer Quarkonia und ihre Rolle bei der Untersuchung des Potentials der starken Wechselwirkung gegeben. Im darauffolgenden Abschnitt wird dann die erwartete Modifikation des Potentials schwerer Quarkonia bei nichtverschwindender Temperatur und ein Ansatz für eine numerischen Bestimmung des Potentials und der Zerfallsbreite diskutiert.

#### 3.1.1 Die Rolle schwerer Quarkonia bei der Untersuchung der starken Wechselwirkung

Die große Bedeutung die Charmonium und Bottomium bei der Erforschung der starken Wechselwirkung erlangt haben liegt darin begründet, dass es sich um wohldefinierte Bindungszustände aus nichtrelativistischen Quarks gleichen Flavours handelt.

Aufgrund der ähnlichen Masse des Up-, Down- und Strangequarks treten leichte Mesonen hingegen als Mischzustände aus Quarks verschiedener Flavour auf. Ein Studium wohldefinierter mesonischer Bindungszustände mit leichten Konstituenten gleichen Flavours ist somit nicht möglich. Das Topquark zerfällt weiterhin aufgrund seiner hohen Masse schnell über die elektroschwache Wechselwirkung, sodass keine scharfen Toponium-Resonanzen in Beschleunigerexperimenten zu erwarten sind.

Die einfache symmetrische Struktur schwerer Quarkonia sowie die hohe Masse ihrer Konstituenten ermöglichen insbesondere eine quantitative Vorhersage der Bindungszustände schwerer Quarkonia im Rahmen nichtrelativistischer Näherungen der QCD. Desweiteren ermöglichen die bei Quarkoniaübergängen über ein Primärphoton erzeugten Dileptonpaare eine präzise Vermessung der Übergangsenergie und damit eine detaillierte experimentelle Verifikation theoretischer Erwartungen. So gelang durch die Vermessung des Zerfallsspektrums angeregter Charmoniumzustände eine experimentelle Untersuchung des Quark-Antiquark-Potentials der starken Wechselwirkung.

### 3.1.2 Physikalische Eigenschaften und Potential schwerer Quarkonia

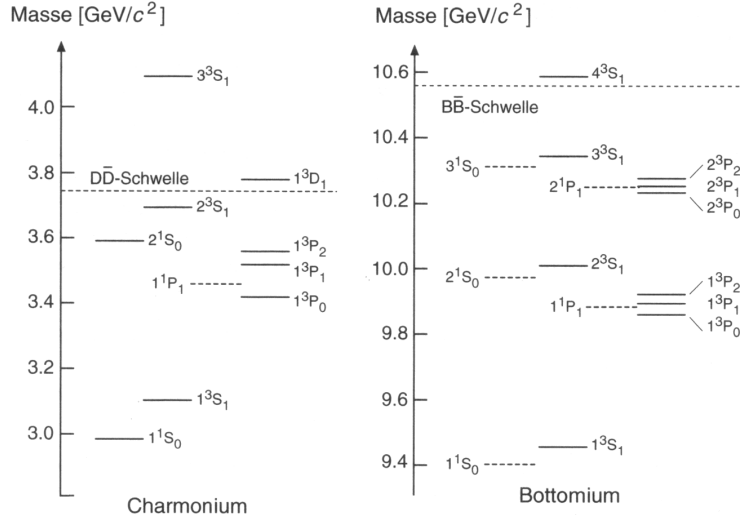


Abbildung 3.1: Das Termschema schwerer Quarkonia [20].

In Abbildung 3.1 sind die Termschemata von Charmonium und Bottomium dargestellt. Eine Herleitung der Zustände und Bindungsenergien schwerer Quarkonia ist aufgrund der hohen Masse der Konstituenten ( $M(c)=1.3 \text{ GeV}/c^2$ ,  $M(b)=4.2 \text{ GeV}/c^2$ ) in erster Näherung über eine nichtrelativistische Schrödingergleichung [20]

$$\left( -\frac{\Delta}{2M} + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

unter Verwendung des Potentials

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} + kr \quad (3.2)$$

und Vernachlässigung des Spins möglich. Das Potential reflektiert hierbei den coulombförmigen Beitrag ( $\alpha_s \approx 0.15 - 0.25$ ) des Gluonfeldes bei geringem Abstand  $r$  zwischen den Konstituenten des Mesons sowie einen linearen Beitrag aufgrund der Herausbildung eines gluonischen Feldflusses (flux tube) der Längenenergiedichte  $k$  (string tension) zwischen dem Quarkpaar. Für Charmonium ist die string tension von der Größenordnung  $k \approx 1 \text{ GeV}/\text{fm}$ . Es kann bereits im Rahmen dieses einfachen Modells eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen erzielt werden. Der Abbildung 3.2 sind die Zerfallskanäle schwerer Quarkonia zu entnehmen. Neben den elektromagnetischen Übergängen zwischen angeregten Zuständen sind folgende Zerfallskanäle von Bedeutung:

1. Annihilation des Quark-Antiquarkpaares zu Photonen oder Gluonen
2. Abreißen des "flux tubes" aufgrund der Bildung eines oder mehrerer leichter Quarkpaare (string breaking)
3. Zerfall eines Konstituentenquarks über die schwache Wechselwirkung



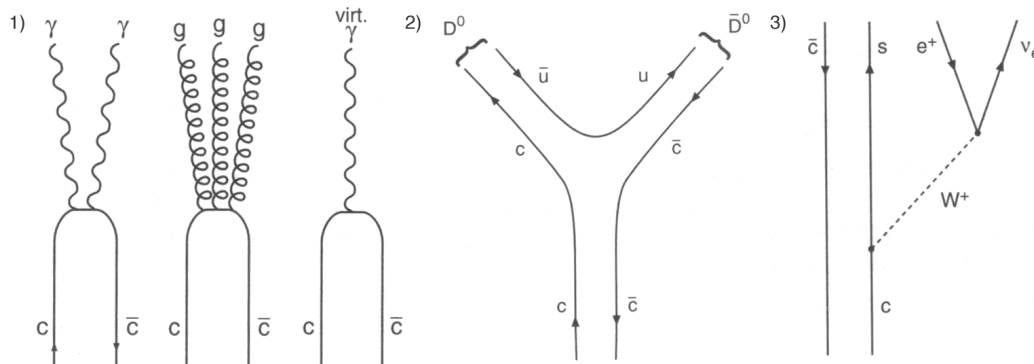


Abbildung 3.2: Zerfallskanäle schwerer Quarkonia [20].

Aufgrund des geringen Wirkungsquerschnitts ist hierbei der Zerfall über die schwache Wechselwirkung gegenüber den anderen Zerfallskanälen zu vernachlässigen. Da ein "string breaking" zudem erst auftreten kann, wenn die Anregungsenergie des Mesons zur Bildung eines leichten Quarkpaares ausreicht, ist für niederenergetische Anregungszustände nur der 1. Zerfallskanal von Bedeutung. Bei hohen Anregungsenergien schwerer Quarkonia erweist sich hingegen der 2. Zerfallskanal als dominant.

Wie im Folgenden ausführlich dargestellt ist, führt desweiteren das Auftreten einer thermischen Gluonmasse bei steigender Temperatur zu einer Modifikation des Potentials (3.2), welche einhergeht mit einem schnellen Zerfall der Bindungszustände nach einem Übergang in die Deconfinement-Phase der QCD [7]. Eine genaue Untersuchung dieses Übergangs ist hierbei zur experimentellen Verifikation des derzeitigen Verständnisses der thermischen QCD von besonderem Interesse.

## 3.2 Schwere Quarkonia vor einem thermischen Hintergrund

Im folgenden Abschnitt wird ausführlich die erwartete Modifikation des Potentials (3.2) für schwere Quarkonia vor einem thermischen Hintergrund sowie der Zerfall schwerer Quarkonia bei einem Übergang in die Deconfinement-Phase der QCD diskutiert.

### 3.2.1 Debye Screening

Zur Herleitung des thermischen Screenings in der QCD werden im Folgenden zunächst die Grundzüge der linearen Antworttheorie vorgestellt. Die Argumentation dieses Abschnitts folgt der in [11] vorgestellten Herleitung des Debye-Screenings in der thermischen QED und verallgemeinert diese auf die QCD.

#### Lineare Antworttheorie

Die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors  $|\psi(t)\rangle$  im Schrödingerbild ist gegeben durch:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle. \quad (3.3)$$

Wird das System einer kleinen Störung  $\epsilon V(t)$  mit  $V(t)=0$  für  $t \leq t_0$  und  $\epsilon \ll 1$  ausgesetzt, so läßt sich die Zeitentwicklung in folgender Form schreiben:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-iHt}\hat{U}(t, t_0)|\psi(0)\rangle. \quad (3.4)$$

$\hat{U}(t, t_0)$  erfüllt hierbei die Gleichung

$$i\frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \epsilon V_H(t)\hat{U}(t, t_0) \quad (3.5)$$

mit der Randbedingung

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 \text{ für } t \leq t_0, \quad (3.6)$$

wobei  $V_H(t) = e^{iHt}V(t)e^{-iHt}$  die Störung im Heisenbergbild bezeichnet.

Löst man Gleichung (3.5) durch Rekursion so ergibt sich:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' \epsilon V_H(t') + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.7)$$

Der induzierte thermische Erwartungswert  $\delta(\hat{A}(t)) = \langle \hat{A}(t) \rangle_{H+\epsilon V} - \langle \hat{A}(t) \rangle_H$  eines Operators  $\hat{A}(t)$

$$\delta(\hat{A}(t)) = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \left[ \langle \tilde{\psi}_n(t) | \hat{A}(t) | \tilde{\psi}_n(t) \rangle - \langle \psi_n(t) | \hat{A}(t) | \psi_n(t) \rangle \right] \quad (3.8)$$

besitzt somit im Heisenbergbild mit  $|n\rangle = |\psi_n(0)\rangle$  die Form:

$$\begin{aligned} \delta(\hat{A}(t)) &\simeq \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \left[ -i \int_{t_0}^{\infty} dt' \Theta(t-t') \langle n | [\hat{A}(t), \epsilon V_H(t')] | n \rangle \right] \\ &= -i \int_{t_0}^{\infty} dt' \Theta(t-t') \langle [\hat{A}(t), \epsilon V_H(t')] \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### Debye Screening

Im diesem Abschnitt wird ein QCD-Plasma im thermischen Equilibrium, das einer schwachen Störung in Form eines klassischen Stroms  $j_{cl}^{\mu(a)} = (\rho_{cl}^a, \vec{j}_{cl}^a)$  ausgesetzt ist, betrachtet. Der Strom koppelt an das quantisierte Eichfeld über die Störung:

$$V(t) = \int d^3x j_{cl}^{\mu(a)}(x) \hat{A}_\mu^a(x). \quad (3.10)$$

Der thermische Erwartungswert des Eichfeldes  $A_\mu^a$  ergibt sich über

$$A_\mu^a(x) = \langle \hat{A}_\mu^a(x) \rangle = \langle \hat{A}_\mu^a(x) \rangle - \langle \hat{A}_\mu^a(x) \rangle_{eq} = \delta(\hat{A}_\mu^a(x)), \quad (3.11)$$

wobei im Zwischenschritt verwendet wurde, dass der Erwartungswert des Eichfeldes  $\langle \hat{A}_\mu^a \rangle_{eq}$  im thermischen Equilibrium verschwindet. Über (3.2.1) folgt

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= -i \int d^4x' \Theta(t-t') \langle [\hat{A}_\mu^a(x), \hat{A}_\nu^b(x')] \rangle j_{cl}^{\nu(b)}(x') \\ &= -i \int d^4x' D_{\mu\nu}^{R(ab)}(x, x') j_{cl}^{\nu(b)}(x'), \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei  $D_{\mu\nu}^{R(ab)}(x, x')$  den retardierten Realzeit-Gluonpropagator bezeichnet.  
Im Fourierraum ergibt sich über das Faltungstheorem:

$$A_\mu^a(q) = -iD_{\mu\nu}^{R(ab)}(q)j_{cl}^{\nu(b)}(q). \quad (3.13)$$

Der explizite Ausdruck für den retardierten Gluon-Propagator lautet in der Landau-Eichung

$$D_{\mu\nu}^{R(ab)}(q) = \delta_{ab} \left( \frac{i}{q^2 - G} P_{\mu\nu}^T + \frac{i}{q^2 - F} P_{\mu\nu}^L \right) \quad (3.14)$$

mit skalaren Funktion  $F(q)$  und  $G(q)$  sowie den longitudinalen und transversalen Projektoren  $P_{\mu\nu}^T$  und  $P_{\mu\nu}^L$  im Minkowski-Raum:

$$P_{00}^T = P_{0i}^T = 0, \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{q^2} \quad \text{und} \quad (3.15)$$

$$P_{\mu\nu}^L = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - P_{\mu\nu}^T. \quad (3.16)$$

Somit ergibt sich der thermische Erwartungswert des gluonischen Feldes im Impulsraum mit:

$$A_0^a(q) = -\frac{\rho_{cl}^a(q)}{q^2 - F} \quad \text{und} \quad A_i^a(q) = -\left( \frac{P_{ij}^L}{q^2 - F} + \frac{P_{ij}^T}{q^2 - G} \right) j_{cl}^{j(a)}(q). \quad (3.17)$$

Der Beitrag der Stromdichte  $\mathbf{j}_{cl}^a$  zu  $A_0^a$  sowie der Ladungsdichte  $\rho_{cl}^a$  zu  $A_i^a$  verschwinden wegen der Erhaltung des Stroms:

$$\partial_\mu j_{cl}^{\mu(a)}(x) = 0 \Rightarrow q_\mu j_{cl}^{\mu(a)}(q) = 0. \quad (3.18)$$

Bei Störung des Plasmas durch eine statische Punktladung

$$\rho_{cl}^a(x) = Q^a \delta(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{cl}^a(q) = Q^a \delta(q_0) \quad (3.19)$$

ergibt sich für das farbelektrische Feld

$$E_i^a = F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a - g f^{abc} A_0^b A_i^c \quad (3.20)$$

im Impulsraum über (3.17) der Ausdruck:

$$E_i^a(\mathbf{q}) = -\frac{i q_i Q^a}{\mathbf{q}^2 - F(q_0 = 0, \mathbf{q})}. \quad (3.21)$$

Durch Vergleich mit der Definition des Potentials  $E_i^a(\mathbf{q}) = -i q_i V^a(\mathbf{q})$  folgt:

$$V^a(\mathbf{q}) = \frac{Q^a}{\mathbf{q}^2 - F(q_0 = 0, \mathbf{q})}. \quad (3.22)$$

Die Rücktransformation in den Ortsraum liefert:

$$V^a(\mathbf{r}) = Q^a \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 - F(q_0 = 0, \mathbf{q})}. \quad (3.23)$$

Im Rahmen der Hard-Thermal Loop Näherung der QCD ist  $F(\mathbf{q})$  für  $q_0 = 0$  eine impulsabhängige Konstante:  $F(q_0 = 0, \mathbf{q}) = m_D^2$ . Die Konstante  $m_D$  entspricht hierbei der thermischen Masse der Gluonen (2.13), welche diese durch ihre Wechselwirkung mit dem Plasma erhalten. Somit folgt schließlich:

$$V^a(\mathbf{r}) = Q^a \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2 - m_D^2} = \frac{Q^a}{r} e^{-m_D r}. \quad (3.24)$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß das thermische Potential als physikalische Größe eichinvariant ist und in einer beliebigen Eichung hergeleitet werden kann. Eine alternative Herleitung kann etwa [12] entnommen werden.

Das Potential eines statischen Quarks in der thermischen QCD entspricht somit, bis auf einen Beitrag durch den bisher unberücksichtigten linearen Term des Potentials (3.2), einem exponentiell mit der Debyemasse abfallenden Coulomb-Potential. Die thermische Modifikation der Gluonmasse führt somit zu einer Abschirmung der starken Wechselwirkung. Da jenseits der Deconfinement-Temperatur nur noch der Coulomb-Anteil des Potentials der starken Wechselwirkung gebundene Zustände ermöglichen kann, ist für die folgende Betrachtung schwerer Quarkonia in einem Quark-Gluon Plasma eine Beschränkung auf obigen Ausdruck möglich.

Der Effekt der zunehmenden Abschirmung des Potentials bei steigender Temperatur soll im folgenden qualitativ untersucht werden.

### 3.2.2 Das Schmelzen der Bindungszustände

Die Energie eines gebundenen Zustandes der nichtrelativistischen Schrödingergleichung (3.1) kann qualitativ über den Ausdruck [21]

$$E(r) = 2M + \frac{1}{2Mr^2} + V(r) \quad (3.25)$$

abgeschätzt werden. Eine Bestimmung des Minimums von (3.25) unter Verwendung des Potentials (3.24) führt für den Grundzustand auf die Beziehung

$$x(x+1)e^{-x} = \frac{m_D}{MQ} \quad \text{mit} \quad x = m_D r, \quad (3.26)$$

welche nur für  $m_D/MQ \leq 0.84$  lösbar ist, wobei der kleinste Wert von  $x$  welcher obige Gleichung erfüllt mit steigendem  $m_D/MQ$  bis zu einem Maximalwert von  $x = 1.62$  ansteigt. Da (3.25) oberhalb der Deconfinement-Temperatur näherungsweise das Potential eines schweren Quark-Antiquarkpaares beschreibt, ist an obiger Gleichung und (2.13) unmittelbar abzulesen daß gebundene Zustände in einem Quark-Gluon Plasma für  $m_D \gtrsim 0.84MQ$  nicht mehr möglich sind. Der Radius des Grundzustands schwerer Quarkonia vor dem Verschwinden kann durch Einsetzen der Werte mit  $r = 1.93 M^{-1}Q^{-1}$  abgeschätzt werden, was für Charmonium bei Verwendung der  $T = 0$  Werte von  $Q = 0.5$  und  $M = 1.3$  GeV einem Radius von 0.6 fm entspricht. Damit übersteigt der Radius des Grundzustandes deutlich etwa den Radius des angeregten  $J/\psi$ -Zustandes bei verschwindender Temperatur [20]. Es ist hierbei naheliegend mit steigender Temperatur eine Zunahme der Zerfallsbreite der Quarkoniumresonanzen zu erwarten, welche häufig als Schmelzen der Bindungszustände bezeichnet wird. Dies wird durch eine quantitative Berechnung der Zerfallsbreite als Imaginärteil eines verallgemeinerten Potentials bestätigt, die als Grundlage für eine nichtperturbative Bestimmung der Zerfallsbreite in dieser Arbeit dienen wird [7].

### 3.3 Wilson-Loop und statisches Potential

Als Ausgangspunkt für eine Bestimmung des Potentials schwerer Quarkonia dient der Korrelator

$$C_{>}(t, \mathbf{r}) = \int d^3x \langle \hat{\psi}(t, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}) \gamma^\mu W(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}) \hat{\psi}(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}) \times \\ \times \hat{\psi}(0, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}) \gamma^\mu W(0, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}) \hat{\psi}(0, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}) \rangle, \quad (3.27)$$

welcher im Grenzfall unendlicher Quarkmassen die zeitliche Propagation eines statischen Quarkpaares mit Abstandsvektor  $\mathbf{r}$  beschreibt.  $\psi$  bezeichnet hierbei das Quarkfeld und  $\langle \dots \rangle$  den thermischen Erwartungswert. Die Wilson-Linie  $W$  ist allgemein definiert über den Ausdruck

$$W(t_1, x_1; t_2, x_2) = P \exp \left( ig \int_{(t_1, x_1)}^{(t_2, x_2)} dx_\mu A_\mu(x) \right), \quad (3.28)$$

wobei  $P$  eine Pfadordnung der auftretenden Terme bewirkt. In obigem Korrelator formulieren die Wilson-Linien einen Fluxtube, der das Quarkpaar entlang einer geraden Linie zu einem Meson verbindet und eine Eichinvarianz des Korrelators sicherstellt.

Die Quarkpropagatoren können im Grenzfall unendlicher Quarkmassen durch Wilson-Linien ersetzt werden [7], so dass in Entsprechung zu obigem Ausdruck ein Wilson-Loop der Form

$$C_{>}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N} Tr \langle W(0, \mathbf{r}; t, \mathbf{r}) W(t, \mathbf{r}; t, \mathbf{0}) W(t, \mathbf{0}; 0, \mathbf{0}) W(0, \mathbf{0}; 0, \mathbf{r}) \rangle \quad (3.29)$$

ausgewertet werden kann. Wie ausführlich in [7] dargestellt wird, kann bei Formulierung der zeitlichen Dynamik des Korrelators über den Ausdruck

$$i \partial_t C_{>}(t, \mathbf{r}) = V_{>}(t, \mathbf{r}) C_{>}(t, \mathbf{r}) \quad (3.30)$$

der Faktor  $V_{>}(t, r)$  als statisches Potential des Quarkpaares interpretiert werden. Eine diagrammatische Auswertung des Korrelators führt im Übergang  $t \rightarrow \infty$  auf das Potential [7]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{>}(t, r) = -\frac{g^2 C_F}{4\pi} \left[ m_D + \frac{\exp(-m_D r)}{r} \right] - \frac{ig^2 T C_F}{4\pi} \phi(m_D r), \quad (3.31)$$

wobei  $C_F$  über  $C_F = (N^2 - 1)/2N$  und die Funktion  $\phi$  über den Ausdruck

$$\phi = 2 \int_0^\infty \frac{dz z}{(z^2 + 1)^2} \left[ 1 - \frac{\sin(zx)}{zx} \right] \quad (3.32)$$

definiert ist. Neben dem Realteil des Potentials, welcher dem zuvor hergeleiteten statischen Potential der thermischen QCD (3.24) entspricht, tritt ein Imaginärteil auf, welcher als Zerfallsbreite des Quarkpaares interpretiert werden kann. Eine Expansion dieses Ergebnisses in Ordnungen von  $\hbar$  deutet darauf hin, dass die so definierte Zerfallsbreite schwerer Quarkonia von der klassischen Dynamik des Quark-Gluon Plasmas bestimmt ist, während zumindest für  $t \rightarrow \infty$  bis zur betrachteten Ordnung ein Beitrag der klassischen Dynamik zum bindenden Realteil des statischen Potentials nicht existiert.

Im folgenden Abschnitt werden nun die Grundlagen für eine numerische Bestimmung der Zeitentwicklung des Wilson-Loops im Rahmen der kinetischen Theorie und damit für eine nichtperturbative Bestimmung der Zerfallsbreite schwerer Quarkonia nach (3.30) gelegt.



**Teil II**

**Diskretisierung**





## 4 Der Gitterformalismus der Quantenfeldtheorien

---

Zur Simulation physikalischer Vorgänge ist eine Diskretisierung des im allgemeinen kontinuierlichen Parameterraums des betrachteten Systems und insbesondere der Raumzeit erforderlich. Die Formulierung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten des diskretisierten Systems hat hierbei so zu erfolgen, dass diese im Kontinuumsübergang, d.h. bei beliebiger Erhöhung der Feinheit der Diskretisierung, in die erwartete Kontinuumsphysik übergehen.

### 4.1 Grundlagen

In der Gitterformulierung der Quantenfeldtheorien erfolgt die Diskretisierung der Raumzeit üblicherweise durch ein vierdimensionales Gitter. Während die Diskretisierung fermionischer Felder direkt durch eine Zuweisung entsprechender Feldwerte an die einzelnen Gitterpunkte erfolgt, verwendet man zur Diskretisierung der Eichfelder den benachbarte Gitterpunkte verbindenden Paralleltransport. Die diskretisierten Eichfelder sind somit auf den Links zwischen benachbarten Gitterplätzen definiert.

Die folgende Diskussion der Grundlagen der Gittereichtheorien wird sich ausschließlich auf die Behandlung von Eichfeldern beschränken, da die Quarks im Rahmen der hier vorgestellten Simulation lediglich als statische Ladungen oder in bereits ausintegrierter Form im Rahmen der Hard-Thermal Loop Näherung auftreten.

#### 4.1.1 Links

Unter Diskretisierung der Dyson-Formel besitzt der Paralleltransporter zwischen zwei Gitterpunkten  $x$  und  $x + a\hat{\mu}$  die Darstellung

$$U_{\mu}(x) = \exp(igaA_{\mu}(x)), \quad (4.1)$$

wobei  $a$  den Gitterabstand und  $\hat{\mu}$  den Einheitsvektor in Richtung der  $\mu$ -ten Koordinatenachse bezeichnet. Die Eichfelder  $A_{\mu}^a$  werden hierbei entlang des Links als konstant betrachtet und können als effektive Felder entlang eines Links interpretiert werden.

Die  $SU(N)$ -Linkmatrizen  $U_{\mu}(x)$  erfüllen die einfache Beziehung

$$U_{-\mu}(x) = U_{\mu}^{+}(x - \mu) \quad (4.2)$$

und transformieren unter einer lokalen Eichtransformation gemäß der üblichen Beziehung für Paralleltransporter

$$U_{\mu}(x) \rightarrow \Lambda^{-1}(x + \mu)U_{\mu}(x)\Lambda(x), \quad (4.3)$$

wobei die Kurzschreibweise  $x + \mu = x + a\hat{\mu}$  eingeführt wurde.

Der Paralleltransporter  $U(\zeta)$  entlang eines Pfades  $\zeta$  bestehend aus den Links  $L_1 \dots L_n$  des Gitters ist gegeben durch

$$U(\zeta) = U(L_n) \dots U(L_1). \quad (4.4)$$

Aufgrund der zyklischen Invarianz der Spur ist die Spur eines Paralleltransporters entlang eines geschlossenen Pfades eichinvariant.

### 4.1.2 Plaketten

Der einfachste geschlossene Pfad auf dem Gitter ist die über vier benachbarte Gitterpunkte verlaufende sogenannte Plakette. Der zugehörige Paralleltransporter  $U_{\mu\nu}(x)$  ist gegeben durch:

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\nu(x)U_\mu(x+\nu)U_\nu^+(x+\mu)U_\mu^+(x). \quad (4.5)$$

Unter Verwendung von (4.1) und der Campbell-Baker-Hausdorff Formel

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad A, B \in SU(N) \quad (4.6)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) &= \exp\{iga(A_\mu(x+\nu) - A_\mu(x) - (A_\nu(x+\mu) - A_\nu(x))) \\ &\quad -g^2a^2([A_\nu(x), A_\mu(x+\nu)] + [A_\nu(x+\mu), A_\mu(x)]) + \mathcal{O}(a^3)\} \\ &= \exp\{-iga^2F_{\mu\nu}(x)\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei im letzten Schritt der diskretisierte Feldtensor  $F_{\mu\nu}$  definiert wurde. Im Übergang  $a \rightarrow 0$  zeigt sich die Entsprechung zum  $SU(N)$ -Feldtensor im Kontinuum:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a). \quad (4.8)$$

Die Symmetrien der Plakette

$$U_{\mu\nu}(x) = U_{\nu\mu}^+(x) \quad \text{und} \quad U_{\mu\nu}(x)U_{\mu\nu}^+(x) = \mathbf{1} \quad (4.9)$$

übertragen sich auf den diskretisierten Feldtensor in Form der Beziehungen:

$$F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}^+(x) \quad \text{und} \quad F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^+(x) \quad \Rightarrow \quad F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x). \quad (4.10)$$

Wegen  $U_{\mu\nu}(x) \in SU(N)$  folgt, dass der Feldtensor ein Element der zugehörigen Lie-Algebra ist und somit eine Darstellung der Form  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$  mit  $F_{\mu\nu}^a \in \mathcal{R}$  besitzt. Neben der zuvor gezeigten Hermitizität folgt hieraus insbesondere:

$$\text{Tr}F_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (4.11)$$

Die Beziehung (4.7) zwischen Plakette und Feldtensor wird bei der Konstruktion der diskretisierten Wirkung der Yang-Mills Theorie eine entscheidende Rolle spielen.

### 4.1.3 Die kovariante Ableitung auf dem Gitter

#### Für Felder in der Fundamentaldarstellung

Der einfachste Ausdruck für die kovariante Ableitung eines Feldes  $\phi$  in der Fundamentaldarstellung auf dem Gitter ist die sogenannte Vorwärtsableitung:

$$D_\mu^f(x)\phi(x) = \frac{1}{a} (U_\mu^+(x)\phi(x+\mu) - \phi(x)). \quad (4.12)$$

Für  $a \rightarrow 0$  zeigt sich über (4.1)

$$\begin{aligned} D_\mu^f(x)\phi(x) &\rightarrow \frac{1}{a} [(1 - ig a A_\mu(x))\phi(x + \mu) - \phi(x)] \\ &= \partial_\mu \phi(x) - ig A_\mu(x)\phi(x) = D_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

unmittelbar der Übergang in die kovariante Ableitung  $D_\mu$  im Kontinuum.  
Die Rückwärtsableitung  $D_\mu^b$  ist entsprechend definiert über:

$$D_\mu^b(x)\phi(x) = \frac{1}{a} (\phi(x) - U_\mu(x)\phi(x - \mu)). \quad (4.14)$$

### Für Felder in der adjungierten Darstellung

Es sei  $\phi(x) = \phi^a(x)T^a$  eine Feldmatrix mit Feldern  $\phi^a(x)$  in der adjungierten Darstellung. Die kovariante (Rückwärts-)ableitung der adjungierten Felder  $\phi^a(x)$  kann über folgenden Ausdruck gebildet werden:

$$D_\mu^{b(ad)}(x)\phi(x) = \frac{1}{a} (\phi(x) - P_{-\mu}\phi(x - \mu)). \quad (4.15)$$

Hierbei bezeichnet  $P_\mu\phi(x + \mu)$  den Paralleltransport des Feldes  $\phi$  vom Punkt  $x + \mu$  zum Punkt  $x$ :

$$P_\mu\phi(x + \mu) = U_\mu(x, t)\phi(x + \mu)U_\mu^+(x, t). \quad (4.16)$$

Betrachtet man den Ausdruck für die kovariante Ableitung im Kontinuumsimes, so ergibt sich unter Verwendung von (4.1):

$$\begin{aligned} D_\mu^{b(ad)}(x)\phi(x) &= \frac{1}{a} (\phi(x) - (\mathbf{1} - ig a A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2))\phi(x - \mu)(\mathbf{1} + ig a A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2))) \\ &= \frac{1}{a} (\phi(x) - \phi(x - \mu) + ig a [T^a, T^b]\phi^a(x)A_\mu^b(x)) + \mathcal{O}(a) \\ &\rightarrow \partial_\mu \phi(x) - g f^{abc} \phi^a(x) A_\mu^b(x) T^c \\ &= \partial_\mu \phi(x) + g f^{abc} T^a A_\mu^b(x) \phi^c(x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Im Kontinuumsimes ergibt sich somit wie gewünscht die kovariante Ableitung der adjungierten Feldkomponenten  $\phi^a$ .

In einer symmetrisierten Form kann die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung auch geschrieben werden als:

$$D_\mu^{s(ad)}(x)\phi(x) = \frac{1}{2a} (P_\mu\phi(x + \mu) - P_{-\mu}\phi(x - \mu)). \quad (4.18)$$

Alle im Rahmen dieser Simulation auftretenden kovarianten Ableitungen wirken auf Felder in der adjungierten Darstellung, sodass im weiteren der Zusatz (ad) weggelassen wird.

## 4.2 Dynamische Simulationen

Im folgenden wird die Realisierung dynamischer Simulationen bei quasikontinuierlicher Zeit auf einem räumlichen Gitter im Rahmen der klassischen Feldapproximation vorgestellt.

### 4.2.1 Observablen und statische Erwartungswerte

Da physikalische Größen von der zur Formulierung einer Theorie gewählten Eichung unabhängig sein müssen, sind Observablen in diskretisierten Eichtheorien allgemein als eichinvariante Funktionale der Freiheitsgrade des Systems zu verstehen. Durch Diskretisierung von (1.29) ergibt sich in reinen Eichfeldtheorien, wie sie im Folgenden zunächst behandelt werden, als thermischer Erwartungswert einer Observablen  $O$  auf einem räumlichen Gitter der Ausdruck:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,i} dU_i(x) O e^{-\frac{1}{T}H}. \quad (4.19)$$

Die räumliche Diskretisierung der Feldkonfigurationen bei einem Gitterabstand  $a$  führt hierbei den Impulscutoff [13]

$$\Lambda = \frac{\pi}{a} \quad (4.20)$$

im Fourierraum der Feldkonfigurationen ein. Die physikalischen Parameter des Hamiltonian bei verschiedenen Impulsskalen sind über den Renormierungsgruppenfluß miteinander verknüpft und müssen bei einer gegebenen Skala  $a$  wie üblich durch einen Abgleich mit physikalischen Observablen ermittelt werden.

Im Rahmen einer Monte-Carlo Näherung kann der Erwartungswert (4.19) durch eine Mittelung über ein Ensemble von  $N$  zufällig generierten Feldkonfigurationen

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_n O(U_n) \quad (4.21)$$

ersetzt werden, wobei die statistische Verteilung der Feldkonfigurationen dem Gewichtungsfaktor  $e^{-\frac{1}{T}H}$  zu entsprechen hat.

### 4.2.2 Entwicklung des Ensembles

Die Grundidee dynamischer Simulationen besteht in der Entwicklung eines Ensembles räumlicher Feldkonfigurationen über diskretisierte Bewegungsgleichungen im Rahmen einer klassischen Feldapproximation. Hierzu ist am sinnvollsten eine temporale Eichung zu wählen, wobei die räumlichen Feldkonfigurationen aufgrund der Eichinvarianz des Haar-Maßes  $dU$  keiner weiteren Eichfixierung bedürfen. Dieser Ansatz ermöglicht eine unmittelbare Bestimmung dynamischer Erwartungswerte im Minkowskiraum durch Mittelung über einen begrenzten Satz raumzeitlicher Systemtrajektorien. Aufgrund der schlechten zeitlichen Auflösung vierdimensionaler, euklidischer Gittersimulationen sowie der Problematik einer analytischen Fortsetzung der Ergebnisse ermöglichen dynamische Simulationen unter Verwendung semiklassischer Approximationen eine Einsicht in die Dynamik der Quantenfeldtheorien im Minkowskiraum, die im Rahmen der üblichen euklidischen Gittersimulationen derzeit nicht möglich ist.

## 5 Die klassische Yang-Mills Theorie

---

Im folgenden Kapitel wird zunächst die Diskretisierung der klassischen Dynamik des Yang-Mills Feldes vorgestellt. Anschließend wird hierauf aufbauend die Diskretisierung der kinetischen Theorie auf dem Gitter und die Erzeugung eines geeigneten Ensembles von Ausgangsfeldkonfigurationen diskutiert. Die im folgenden hergeleiteten Bewegungsgleichungen der diskretisierten Yang-Mills Theorie wurden erstmals 1990 von Ambjorn, Askgaard, Porter und Shaposhnikov aufgestellt [29].

### 5.1 Die Wilson-Wirkung der dynamischen Yang-Mills Theorie

Spaltet man die Wirkung der thermischen Yang-Mills Theorie in einen elektrischen und einen magnetischen Teil auf, so ergibt sich in temporaler Eichung zunächst:

$$S = -\frac{1}{T} \int d^4x \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu})^2 = \frac{1}{T} \int d^4x \left( \text{Tr}(E_i)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{ij})^2 \right). \quad (5.1)$$

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Diskretisierung beider Ausdrücke vorgestellt. Anschließend werden die resultierenden klassischen Bewegungsgleichungen diskutiert.

#### 5.1.1 Diskretisierung des magnetischen Anteils der Yang-Mills Wirkung

Entsprechend der vierdimensionalen Diskretisierung der Yang-Mills Wirkung nach Wilson erfolgt die Diskretisierung des magnetischen Anteils der Yang-Mills Wirkung durch den Ausdruck

$$\frac{1}{T} \int d^4x \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{ij})^2 \rightarrow \beta_3 \int dt \sum_{\mathbf{x}, i < j} \left( 1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{ij}(x) \right), \quad (5.2)$$

wobei  $U_{ij}(x)$  die Plakette (4.5) und  $\beta_3$  den Proportionalitätsfaktor

$$\beta_3 = \frac{2N}{ag^2T} \quad (5.3)$$

bezeichnet. Die Summe erfolgt über alle Gitterplätze  $\mathbf{x}$  und Plaketten  $U_{ij}(x)$  mit  $0 \leq i < j \leq j$ , sodass jede raumartige Plakette genau einmal aufsummiert wird. Unter Verwendung von (4.7) kann die magnetische Wilsonwirkung  $S_W$  (5.2) umgeschrieben werden in:

$$S_W = \int dt \sum_{\mathbf{x}, i < j} \left( 1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} \left( \mathbf{1} - iga^2 F_{ij}(x) - \frac{g^2 a^4}{2} F_{ij}^2(x) + \mathcal{O}(a^6) \right) \right). \quad (5.4)$$

Der Term der Ordnung  $a^2$  verschwindet wegen der Beziehung  $\text{Tr} F_{ij} = 0$ . Somit folgt:

$$S_W = \frac{ag^2}{2N} \int dt \sum_{\mathbf{x}} a^3 \sum_{i < j} \text{ReTr} F_{ij}^2(x) + \mathcal{O}(a^6). \quad (5.5)$$

Unter Verwendung von (5.3) und der Beziehung

$$F_{ij}^+(x) = F_{ji}(x) \quad (5.6)$$

für den Kontinuumsfeldtensor zeigt sich schließlich im Limes  $a \rightarrow 0$  die Entsprechung zum magnetischen Anteil der Kontinuumswirkung der Yang-Mills Theorie:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \beta_3 S_W & \stackrel{(5.3)}{=} \frac{1}{T} \int dt \int d^3x \sum_{i < j} \frac{1}{2} \left( \text{Tr} F_{ij}^2(x) + \text{Tr} (F_{ij}^+(x))^2 \right) \\ & \stackrel{(5.6)}{=} \frac{1}{T} \int dt \int d^3x \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} F_{ij}^2(x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Diskretisierung des elektrischen Anteils der Yang-Mills Wirkung

Zur Diskretisierung des elektrischen Anteils der Yang-Mills Wirkung ist zunächst eine Definition der diskretisierten farbelektrischen Felder erforderlich. Diese werden über die Zeitentwicklung der Linkvariablen des Gitters definiert:

$$\dot{U}_i(x) = i g a E_i(x) U_i(x). \quad (5.8)$$

In Umkehrung dieser Beziehung folgt unmittelbar:

$$E_i(x) = -\frac{i}{g a} \dot{U}_i(x) U_i^+(x). \quad (5.9)$$

Da die Matrix  $\mathbf{1} + i g a E_i(x) \delta_t$  wegen

$$U_i(x + \delta_t) = (\mathbf{1} + i g a E_i(x) \delta_t) U_i(x) \quad (5.10)$$

eine infinitesimale  $SU(N)$ -Transformation beschreibt, folgt die Zugehörigkeit von  $E_i(x, t)$  zur Lie-Algebra von  $SU(N)$ .

Durch Vergleich der aus (5.8) im Kontinuumsliches folgenden Beziehung

$$\lim_{a \rightarrow 0} \dot{U}_i(x) = i g a E_i(x) \quad (5.11)$$

und dem aus der Definition der Linkvariablen (4.1) für  $a \rightarrow 0$  folgenden Ausdruck

$$\lim_{a \rightarrow 0} \dot{U}_i(x) = \partial_0 (\mathbf{1} + i g a A_\mu(x)) = i g a \dot{A}_\mu(x) \quad (5.12)$$

zeigt sich, unter Berücksichtigung der temporalen Eichung, die Entsprechung zu den farbelektrischen Feldern  $E_i = \dot{A}_i$  im Kontinuum.

Der natürliche Ausdruck für den diskretisierten elektrischen Anteil der Yang-Mills Wirkung, der im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden soll, lautet somit:

$$\frac{1}{T} \int dt \sum_{\mathbf{x}} a^3 \text{Tr} E_i^2(x) = \frac{a}{g^2 T} \int dt \sum_{\mathbf{x}} \text{Tr} (\dot{U}_i^+(x) \dot{U}_i(x)). \quad (5.13)$$

## 5.2 Bewegungsgleichungen

Fügt man die Ausdrücke aus den beiden vorangegangenen Abschnitten zusammen, ergibt sich die diskretisierte Yang-Mills Wirkung  $S_{YM}$

$$S_{YM} = \int dt L(t) \quad (5.14)$$

über die Lagrangefunktion:

$$L(t) = \frac{a}{g^2 T} \sum_{\mathbf{x}} \text{Tr} \dot{U}_i^+(x) \dot{U}_i(x) - \beta_3 \sum_{\mathbf{x}, i < j} \left( 1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{ij}(x) \right). \quad (5.15)$$

Im Folgenden soll die Herleitung der Bewegungsgleichungen im Lagrangeformalismus vorgestellt werden.

### 5.2.1 Variationsansatz

Zur Herleitung der klassischen Bewegungsgleichung eines Systems ist die Variationsgleichung

$$\delta S_{YM} = 0 \quad (5.16)$$

unter Variation nach den Parametern des Systems zu lösen. Die Variation erfolgt hier also nach den komplexen Linkvariablen  $U_{i(ab)}(x)$  auf der  $SU(N)$ -Hyperfläche.

Es erweist sich für die folgende Rechnung als zweckmäßig nach  $U_{i(ab)}$  und  $U_{i(ab)}^*$  zu variieren, was mathematisch völlig äquivalent zu einer Variation nach Real- und Imaginärteil von  $U_{i(ab)}$  ist. Die Beschränkung auf die  $SU(N)$ -Hyperfläche geht als Randbedingung in die folgende Rechnung ein.

### 5.2.2 Die Bewegungsgleichung der elektrischen Felder

Eine ausführliche Darstellung der folgenden Rechnung ist im Anhang A.2 aufgeführt. Bei infinitesimaler Variation der Linkmatrizen auf der  $SU(N)$ -Hyperfläche

$$dU_i(x) = iT^n dq_n(x) U_i(x) \quad (5.17)$$

folgt in Matrixschreibweise zunächst die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\text{Tr} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} - \frac{\partial L}{\partial U_i} \right)^T T^n U_i - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^*} - \frac{\partial L}{\partial U_i^*} \right) U_i^+ T^n \right] = 0. \quad (5.18)$$

Für die voranstehenden Ausdrücke der Euler-Lagrange Gleichung können hierbei unter Verwendung der Definition (5.8) folgende Ausdrücke gefunden werden:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} \right)^T = -i \frac{a^2}{gT} \frac{d}{dt} (U_i^+ E_i) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^*} = i \frac{a^2}{gT} \frac{d}{dt} (E_i U_i). \quad (5.19)$$

Die nachstehenden Ausdrücke der Euler-Lagrange Gleichung besitzen hingegen unter Verwendung der Definition des Staples

$$S_{ij}(x) = U_j(x)U_i(x+j)U_j^\dagger(x+i) \quad (5.20)$$

die Darstellungen

$$\frac{\partial L}{\partial U_i(x)} = \frac{\beta_3}{2N} \sum_{|j| \neq i} S_{ij}^*(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial U_i^*(x)} = \frac{\beta_3}{2N} \sum_{|j| \neq i} S_{ij}(x), \quad (5.21)$$

wobei die Summation sowohl über positive als auch negative  $j$ , welche  $|j| \neq i$  erfüllen, erfolgt. Für eine detaillierte Herleitung sei erneut auf die ausführliche Darstellung der Rechnung im Anhang verwiesen. Setzt man die Ausdrücke (5.19) und (5.21) in die Euler-Lagrange Gleichung (5.18) ein, folgt nach einigen einfachen Zwischenschritten der Ausdruck:

$$\frac{2a^2}{gT} \left( \text{Tr}(T^n \dot{E}_i) + \text{ReTr}(T^n U_i \dot{U}_i^\dagger E_i) \right) = \frac{\beta_3}{N} \sum_{|j| \neq i} \text{ImTr}(T^n U_{ij}). \quad (5.22)$$

Die in (5.21) auftretenden Staples wurden hierbei durch Multiplikation mit dem fehlenden Link zur Plakette geschlossen. Da der zweite Ausdruck wegen (5.8) als Kontraktion eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors

$$\text{ReTr}(T^n \dot{U}_i U_i^\dagger E_i) = \text{Re}(-iga E_i^a E_i^b \text{Tr}(T^n T^a T^b)) \quad (5.23)$$

verschwindet, ergibt sich schließlich durch Einsetzen der Definition von  $\beta_3$  (5.3) als Bewegungsgleichung für das E-Feld:

$$a^3 g \dot{E}_i^a = 2 \sum_{|j| \neq i} \text{ImTr}(T^n U_{ij}). \quad (5.24)$$

### 5.2.3 Skalierte Bewegungsgleichungen

Zusammen mit der Bewegungsgleichung der Linkvariablen (5.8) ist die Dynamik der räumlich diskretisierten Yang-Mills Theorie vollständig charakterisiert. Durch eine geeignete Skalierung der E-Felder und der Zeit in Gittereinheiten mit  $a^2 g E_i^a \rightarrow E_i^a$  und  $a^{-1} t \rightarrow t$  nehmen die Bewegungsgleichungen schließlich folgende dimensionslose Form an:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{U}_i(x) = i E_i(x) U_i(x) \\ 2) \quad & \dot{E}_i^a = 2 \sum_{|j| \neq i} \text{ImTr}(T^n U_{ij}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Zusätzlich ist die Nullkomponente der Yang-Mills-Bewegungsgleichung (2.5) zu beachten, welche in temporaler Eichung  $A^0 = 0$  als statische Randbedingung für die Feldkonfigurationen in Form eines verallgemeinerten Gaußschen Gesetzes in Erscheinung tritt:

$$D_i F^{i0} = D_i E_i = j^0. \quad (5.26)$$

Eine Diskretisierung der kovarianten Ableitung gemäß (4.15) führt in Abwesenheit eines Farbblausstroms auf die Randbedingung:

$$\sum_i [E_i(x) - P_{-i}(x-i) E_i(x-i)] = 0. \quad (5.27)$$



## 6 Kinetische Theorie

---

Im folgenden Abschnitt wird die Diskretisierung der Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie vorgestellt. Zur Diskretisierung der Richtungsabhängigkeit der Hard-Thermal-Loop Beiträge  $W^a(x, \mathbf{v})$  wird zunächst eine Expansion in Kugelflächenfunktionen, wie sie von Bödeker, Moore und Rummukainen [8] eingeführt wurde, diskutiert. Eine alternative Diskretisierung unter Verwendung platonischer Körper wird im Anschluß vorgestellt.

### 6.1 Expansion in Kugelflächenfunktionen

Da die effektiven Felder  $W^a(x, \mathbf{v})$  sowohl eine Ortsabhängigkeit als auch eine sphärische Abhängigkeit über den auf der Einheitskugel definierten Vektor  $\mathbf{v}$  aufweisen, ist eine Expansion in Kugelflächenfunktionen ein naheliegender Ansatz zur Darstellung der  $W^a(x, \mathbf{v})$ :

$$W^a(x, \mathbf{v}) = W_{lm}^a(x) Y_{lm}(\mathbf{v}). \quad (6.1)$$

Da die  $W^a$  reelle Größen darstellen, ist für die sphärischen Komponenten  $W_{lm}^a$  die Symmetrie

$$W_{lm}^a = (-1)^m W_{l,-m}^{a*} \quad (6.2)$$

zu fordern. Es werden daher im Folgenden nur die  $W_{lm}^a$  für  $l \geq 0$  als unabhängige Freiheitsgrade zu betrachten sein, wobei  $W_{00}^a$  als reell vorauszusetzen ist.

#### 6.1.1 Bewegungsgleichungen im Kontinuum

Im Folgenden werden zunächst die Bewegungsgleichung der sphärischen Komponenten  $W_{lm}^a$  im Kontinuum vorgestellt. Eine Diskretisierung der Bewegungsgleichungen auf dem Gitter wird anschließend ausführlich vorgestellt.

#### Dynamik des Hard-Thermal Loop Beitrags

Setzt man obige Expansion in die Bewegungsgleichung (2.17)

$$v^\mu D_\mu W(x, v) = F_{0\mu}(x) v^\mu \quad (6.3)$$

ein und führt nach Multiplikation beider Seiten mit  $Y_{lm}^*$  eine sphärische Integration über die Einheitskugel der Richtungen  $\mathbf{v}$  aus, ergibt sich zunächst der Ausdruck:

$$D_\mu W_{l'm'} \int d\Omega Y_{lm}^* v^\mu Y_{l'm'} = F_{0\mu} \int d\Omega Y_{lm}^* v^\mu. \quad (6.4)$$

Für das Integral auf der rechten Seite ergeben sich hierbei wegen  $v = (1, \mathbf{v})$  folgende Beziehungen:

$$\int d\Omega Y_{lm}^* v^0 = \delta_{l0} 2\sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \int d\Omega Y_{lm}^* v^i = \delta_{l1} \int d\Omega Y_{1m}^* v^i. \quad (6.5)$$

In kompakter Darstellung lautet somit die Bewegungsgleichung der sphärischen Komponenten des Hard-Thermal-Loop Beitrags

$$C_{lm'l'm'}^\mu D_\mu W_{l'm'} = \delta_{l0} 2\sqrt{\pi} F_{00} + \delta_{l1} F_{0i} v_m^i, \quad (6.6)$$

wobei die Koeffizienten

$$C_{lm'l'm'}^\mu = \int d\Omega Y_{lm}^* v^\mu Y_{l'm'} \quad \text{und} \quad v_m^i = \int d\Omega Y_{1m}^* v^i \quad (6.7)$$

eingeführt wurden. Während die Null-Komponenten der Koeffizienten  $C_{lm'l'm'}^\mu$  unmittelbar angegeben werden können

$$C_{lm'l'm'}^0 = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (6.8)$$

erweist sich eine Herleitung der räumlichen Komponenten als mathematisch anspruchsvoll und wird im Anhang A.3 zusammen mit einer Herleitung der  $v_m^i$  ausführlich dargestellt. Eine Zusammenstellung der expliziten Ausdrücke für die Koeffizienten  $v_m^i$  und  $C_{lm'l'm'}^i$  kann des Weiteren im Anhang B gefunden werden.

### Expansion des Farbladungsstroms

Durch Einsetzen der Expansion (6.1) in den Farbladungsstrom (2.18) ergibt sich der Ausdruck

$$j^\mu = m_D^2 W_{lm} \int \frac{d\Omega}{4\pi} v^\mu Y_{lm}, \quad (6.9)$$

welcher unter Verwendung der Koeffizienten  $v_m^i$  (6.7) in folgende Darstellung des Farbladungsstroms umgeschrieben werden kann:

$$j^i(x) = \frac{m_D^2}{4\pi} v_m^{i*} W_{1m}(x) \quad \text{und} \quad j^0(x) = \frac{m_D^2}{2\sqrt{\pi}} W_{00}(x). \quad (6.10)$$

### Zusammenfassung

Zusammenfassend ergibt sich bei einer Expansion der  $W^a(x, \mathbf{v})$  über Kugelflächenfunktionen folgender Satz von Bewegungsgleichungen:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (6.11)$$

$$C_{lm'l'm'}^\mu D_\mu W_{l'm'} = \delta_{l0} 2\sqrt{\pi} F_{00} + \delta_{l1} F_{0i} v_m^i. \quad (6.12)$$

Der Farbladungsstrom kann hierbei dem vorangegangenen Abschnitt entnommen werden. Die raumzeitliche Diskretisierung dieser Bewegungsgleichungen auf dem Gitter wird in den folgenden Abschnitten diskutiert. Für eine numerische Simulation der resultierenden Bewegungsgleichungen ist die Entwicklung (6.1) bei einem endlichen  $l_{max}$  zu beenden. Dieses ist bei den im 3. Teil dieser Arbeit vorgestellten Messergebnissen stets angegeben.

### 6.1.2 Räumliche Diskretisierung

Da die Simulation der semiklassischen Dynamik bei nahezu kontinuierlicher Zeit erfolgt, ist es sinnvoll, zunächst die räumliche Diskretisierung der Bewegungsgleichungen bei kontinuierlicher Zeit vorzustellen und anschließend die für eine numerische Implementation notwendige zeitliche Diskretisierung einzuführen.

#### Feldgleichungen

Eine Diskretisierung des Ausdrucks

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (6.13)$$

ist bereits im Rahmen der klassischen Yang-Mills Feldtheorie in Abwesenheit des Farbladungsstroms dargestellt worden. Wählt man entsprechend der Gittereichung  $A^0 = 0$ , ergibt sich:

$$\partial_0 E^\nu = -D_i F^{i\nu} + j^\nu. \quad (6.14)$$

Der Farbladungsstrom kann somit an die Bewegungsgleichung der elektrischen Felder der diskretisierten Yang-Mills Theorie (5.25) als Quelle gekoppelt werden. Der resultierende Ausdruck kann unmittelbar angegeben werden

$$\begin{aligned} \dot{E}_i(x) &= 2T^a \text{ImTr} \left( T^a \sum_{|j| \neq i} U_{ij}(x) \right) + \frac{1}{2} (j_i(x) + P_i j_i(x+i)) \\ \text{mit } j_i(x) &= \frac{(am_D)^2}{4\pi} v_m^{i*} W_{1m}(x), \end{aligned} \quad (6.15)$$

wobei  $j_i(x)$  den diskretisierten Farbladungsstrom bei einer Skalierung  $agW \rightarrow W$  bezeichnet. Da die farbelektrischen Felder auf den Links definiert sind, erfolgt im letzten Term eine Mittelung des Stroms über die den Link  $(x,i)$  einschließenden Gitterplätze. Die Skalierungen der E-Felder und der Zeit sind wie im Rahmen der diskretisierten Yang-Mills Theorie über  $a^2 gE \rightarrow E$  und  $a^{-1}t \rightarrow t$  gegeben. Zusammen mit der Bewegungsgleichung der Linkvariablen

$$\dot{U}_i(x) = iE_i(x)U_i(x) \quad (6.16)$$

charakterisiert Gleichung (6.15) die Dynamik der Eichfelder in der diskretisierten kinetischen Theorie in Abhängigkeit der  $W_{lm}$ .

#### Bewegungsgleichungen der $W_{lm}$

In temporalen Eichung  $A^0 = 0$  nimmt die Bewegungsgleichung (6.12) folgende Form an:

$$\partial_0 W_{lm}(x) = -C_{lml'm'}^i D_i W_{l'm'}(x) + \delta_{l1} E_i(x) v_m^i. \quad (6.17)$$

Hierbei wurde die Nullkomponente  $C_{lml'm'}^0$  (6.8) unmittelbar eingesetzt. Bei einer Diskretisierung dieses Ausdrucks ist es sinnvoll die kovariante Ableitung gemäß (4.18) über die den Ort  $x$

einschließenden Gitterplätze zu bilden. Eine entsprechende Mittelung der elektrischen Felder bei der Diskretisierung des letzten Terms führt auf die Bewegungsgleichung:

$$\dot{W}_{lm} = -C_{lm'l'm'}^i \frac{1}{2} (P_i W_{l'm'}(x+i) - P_{-i} W_{l'm'}(x-i)) + \delta_{l1} v_m^i \frac{1}{2} (E_i(x) + U_i(x-i) E_i(x-i)). \quad (6.18)$$

Es wurde erneut die übliche Skalierung  $a^2 g E \rightarrow E$ ,  $agW \rightarrow W$  und  $a^{-1}t \rightarrow t$  vorausgesetzt.

### 6.1.3 Zeitliche Diskretisierung

Zur numerischen Implementation der Bewegungsgleichungen der Links  $U$ , der elektrischen Felder  $E$  und der  $W_{lm}$  sind geeignete Verfahren für eine schrittweise Entwicklung der Felder zu finden.

#### Der Zeitschritt der Linkmatrizen

Die Bewegungsgleichung (6.16) führt in einer endlichen Zeit  $\Delta t$  auf eine Entwicklung der Linkmatrizen über ein zeitgeordnetes Matrixexponential der farbelektrischen Felder:

$$\dot{U}_i(x + \Delta t) = \left[ T \exp \left( i \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt E_i(x) \right) \right] U_i(x). \quad (6.19)$$

Da in einem einzelnen Simulationszeitschritt  $\delta t$  die elektrischen Felder als konstant anzusehen sind, ergibt sich die Updateregeln:

$$\dot{U}_i(x + \delta t) = \exp(i\delta t E_i(x)) U_i(x). \quad (6.20)$$

#### Der Zeitschritt der farbelektrischen Felder

Eine geeignete Updateregeln zur Entwicklung der farbelektrischen Felder kann unmittelbar an (6.15) abgelesen werden:

$$E_i(x + \frac{\delta t}{2}) = E_i(x - \frac{\delta t}{2}) + \delta t \left[ 2T^a \text{ImTr} \left( T^a \sum_{|j| \neq i} U_{ij}(x) \right) + \frac{1}{2} (j_i(x) + P_i j_i(x+i)) \right]. \quad (6.21)$$

Das Update der farbelektrischen Felder erfolgt hierbei zwischen den Updates der Eichfeldmatrizen  $U$ , was durch halbe Zeitschritte  $\pm \delta t/2$  formal angedeutet wird.

#### Der Zeitschritt der $W_{lm}$

Da in der Bewegungsgleichung der  $W_{lm}$  (6.18) neben den Feldern  $U$  und  $E$  auch die aktuelle Feldkonfiguration der  $W_{lm}$  selbst auftritt, ist ein Update in Form eines Leapfrogs sinnvoll.

Führt man ein Update der  $W_{lm}$  bei jedem vollen Zeitschritt durch, so ist zwischen den auf halben Zeitschritten definierten farbelektrischen Feldern in geeigneter Weise zu mitteln. Die im Rahmen dieser Simulation verwendete Updateregeln lautet

$$W_{lm}(x + \delta t) = W_{lm}(x - \delta t) + \delta t(2\delta_{l1}v_m^i E_{ave,i}(x) - C_{lm'l'm'}^i [P_i W_{l'm'}(x + i) - P_{-i} W_{l'm'}(x - i)]), \quad (6.22)$$

wobei das zeitlich und räumlich gemittelte farbelektrische Feld  $E_{ave,i}$  gegeben ist durch den Ausdruck:

$$E_{ave,i}(x) = \frac{1}{4} [E_i(x - \frac{1}{2}\delta t) + P_{-i} E_i(x - i - \frac{1}{2}\delta t) + E_i(x + \frac{1}{2}\delta t) + P_{-i} E_i(x - i + \frac{1}{2}\delta t)]. \quad (6.23)$$

### Zusammenfassung

Zusammenfassend lauten die Updateregeln für die Eichfelder und farbelektrischen Felder auf dem Gitter:

$$U_i(x, t + \delta t) = \exp(i\delta t E_i(x + \frac{1}{2}\delta t)) U_i(x, t) \quad (6.24)$$

$$E_i(x, t + \frac{1}{2}\delta t) = E_i(x, t - \frac{1}{2}\delta t) + 2\delta t T^a \text{ImTr}[T^a \sum_{|j|\neq i} U_{ij}(x, t)] + \frac{1}{2}\delta t [j^i(x) + P_i j^i(x + i)]. \quad (6.25)$$

Die Dynamik der harten thermischen Moden wird über folgende Updateregeln implementiert:

$$W_{lm}(x, t + \delta t) = W_{lm}(x, t - \delta t) + \delta t(2\delta_{l1}v_m^i E_{ave,i}(x, t) - C_{lm'l'm'}^i [P_i W_{l'm'}(x + i, t) - P_{-i} W_{l'm'}(x - i, t)]). \quad (6.26)$$

Der Farbladungsstrom lautet:

$$j_i(x) = \frac{(am_D)^2}{4\pi} v_m^{i*} W_{1m}(x). \quad (6.27)$$

### 6.1.4 Gaußsches Gesetz

Die Nullkomponente der Yang-Mills Bewegungsgleichung tritt in temporaler Eichung  $A^0 = 0$  als Randbedingung

$$D_i F^{i0} = D_i E_i = j^0 \quad (6.28)$$

auf. Eine Diskretisierung dieses Ausdrucks unter Verwendung der kovarianten Ableitung (4.15) führt auf die Randbedingung

$$\sum_i [E_i(x) - P_{-i}(x - i) E_i(x - i)] = \frac{(am_D)^2}{4\sqrt{\pi}} (W_{00}(x) + W_{00}(x + \delta t)) \quad (6.29)$$

für die Feldkonfiguration des Gitters. Im letzten Term wurde eine zeitliche Symmetrisierung durchgeführt. Die Ermittlung eines thermischen Ensembles von Feldkonfigurationen, welche dem Gaußschen Gesetz genügen, wird sich im Folgenden als eine der Herausforderungen bei einer numerischen Ermittlung thermischer Erwartungswerte herausstellen.

## 6.2 Diskretisierung durch Platonische Körper

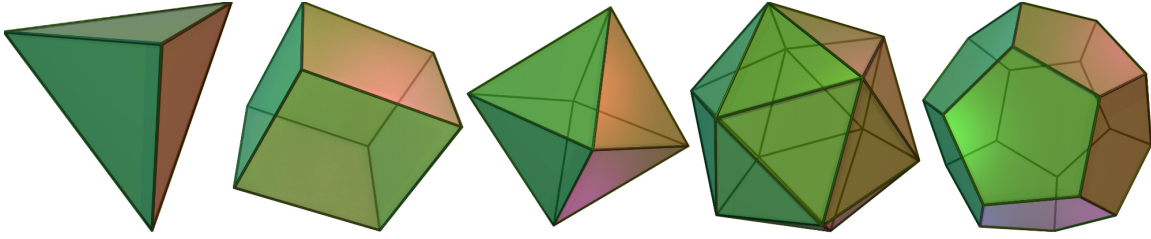


Abbildung 6.1: Darstellung der platonischen Körper.

Eine alternativer Ansatz zur Diskretisierung der Felder  $W(x, \mathbf{v}_n)$  besteht in einer Verwendung platonischer Körper zur Diskretisierung der Einheitskugel der Richtungen  $\mathbf{v}$ . Jedem Vertex  $\mathbf{v}_n$  des verwendeten Polyeders wird am Ort  $x$  die Größe  $W(x, \mathbf{v}_n)$  zugeordnet. Die sphärischen Integrale werden durch Summen über die Vertices des verwendeten Polyeders mit dem Flächenmaß

$$A_p = \frac{4\pi}{N_p} \quad (6.30)$$

ersetzt.  $N_p$  bezeichnet hierbei die Zahl der Vertices des verwendeten Polyeders  $p$  und  $A_p$  die jedem Vertex auf der Einheitskugel zugeordnete Fläche. Aufgrund der Symmetrie der platonischen Körper kann jedem Vertex eine gleiche Fläche auf der Einheitskugel zugeordnet werden und es ist zudem möglich die Bewegungsgleichungen in einer rotationsinvarianten Form auf dem Gitter zu implementieren. Die begrenzte Zahl der platonischen Körper setzt hierbei jedoch der erreichbaren Genauigkeit eine natürliche Grenze.

### 6.2.1 Bewegungsgleichungen im Kontinuum

Während die Dynamik des Hard-Thermal-Loop Beitrags (2.17) formal unverändert bleibt, wobei die auftretenden  $W(x, \mathbf{v})$  nun jedoch nur noch an den Vertices des verwendeten Polyeders definiert sind, nimmt der Farbladungsstrom (2.18) in der Feldgleichung (2.16) aufgrund der sphärischen Integration folgende Form an:

$$j^\mu(x) = m_D^2 \frac{A_p}{4\pi} \sum_n v_n^\mu W(x, \mathbf{v}_n) = \frac{m_D^2}{N_p} \sum_n v_n^\mu W(x, \mathbf{v}_n). \quad (6.31)$$

Die Summe läuft über alle Vertices des platonischen Körpers mit  $v_n = (1, \mathbf{v}_n)$ .

### 6.2.2 Diskretisierte Bewegungsgleichungen

Da die harten Moden lediglich über den Farbladungsstrom an die Eichfelder koppeln, können die Updateregeln für die Linkmatrizen und farbelektischen Felder (6.24) formal unverändert übernommen werden. Unter erneuter Verwendung der Skalierung  $W \rightarrow agW$  ist nun jedoch der diskretisierte Strom

$$j^\mu(x) = \frac{(am_D)^2}{N_p} \sum_n v_n^\mu W(x, \mathbf{v}_n) \quad (6.32)$$

zu verwenden. Die Bewegungsgleichung des Hard-Thermal-Loop Beitrags muss hingegen erneut hergeleitet werden. Betrachtet man die Kontinuumsbewegungsgleichung (2.17) zunächst für  $A^0 = 0$ , ergibt sich

$$\partial_0 W_n(x) = v_n^i (E_i(x) - D_i W_n(x)), \quad (6.33)$$

wobei zur Verkürzung der Schreibweise  $W_n(x) = W(x, v_n)$  eingeführt wurde. Diskretisiert man die kovariante Ableitung auf dem Gitter durch (4.15), ergibt sich unter Verwendung der üblichen Skalierungen zunächst die räumlich diskretisierte Bewegungsgleichung:

$$\dot{W}_n(x) = v_n^i (E_i(x) - \frac{1}{2} [P_i W_n(x+i) - P_{-i} W_n(x-i)]). \quad (6.34)$$

Für eine zeitliche Diskretisierung können dieselben Symmetrisierungen welche auf (6.22) führten verwendet werden. Ein Zeitschritt in der Entwicklung der  $W_n$  erfolgt somit über das Leapfrogupdate:

$$W_n(x + \delta t) = W_n(x - \delta t) + \delta t v_n^i (2E_{ave,i}(x) - [P_i W_n(x+i) - P_{-i} W_n(x-i)]). \quad (6.35)$$

Für eine Zusammenstellung aller Bewegungsgleichungen sei an dieser Stelle auf den Anhang B verwiesen.

### 6.2.3 Das Gaußsche Gesetz

Setzt man die Nullkomponente des Stroms (6.32) in das diskretisierte Gaußsche Gesetz (6.29) ein, ergibt sich unmittelbar die Randbedingung

$$\sum_i \left[ E_i(x + \frac{1}{2}\delta t) - P_{-i}(x-i) E_i(x-i + \frac{1}{2}\delta t) \right] = \frac{(am_D)^2}{2N_P} \sum_n [W_n(x) + W_n(x + \delta t)] \quad (6.36)$$

für die Feldkonfigurationen des Gitters. Im Gegensatz zur Diskretisierung durch Kugelflächenfunktionen gehen hier jedoch alle Variablen, die zur Diskretisierung des Hard-Thermal Loop Beitrags dienen, in das Gaußsche Gesetz ein. Wie sich im folgenden Abschnitt erweist, erschwert dies eine Thermalisierung der Felder unter Wahrung der Gaußschen Randbedingung.

### 6.3 Reihenfolge der Bewegungsgleichungen

Die Struktur der einzelnen Updateschritte gibt eine feste Reihenfolge ihrer Ausführung vor. Diese sei zunächst vorgestellt, wobei die Felder  $U(t)$ ,  $E(t - \delta t/2)$ ,  $W(t)$  und  $W(t - \delta)$  als Ausgangspunkt dienen:

1. Berechne  $E(t + \delta t/2)$  über (6.21) unter Verwendung des Stroms (6.15) bzw. (6.32)
2. Berechne  $W(t + \delta t)$  über (6.22) bzw. (6.35)
3. Berechne  $U(t + \delta t)$  über (6.20)
4. Fahre fort mit 1)

Da die E-Felder bei halben Zeitschritten definiert sind, hat ein Update der E-Felder separat von einem Update des Hard-Thermal Loop Beitrags  $W$  und der Linkvariablen  $U$  zu erfolgen. Zudem benötigt der Leapfrog zum Update der Felder  $W$  die Linkvariablen zum Zeitpunkt  $t$ , sodass dieser vor einem Update der Linkvariablen ausgeführt werden muss. Die vorgestellte Reihenfolge der Ausführung der einzelnen Updateschritte ergibt sich somit zwangsläufig aus der Struktur der verwendeten Updateschritte.

Für eine vollständige Zusammenstellung aller Bewegungsgleichungen sei an dieser Stelle noch einmal auf den Anhang B verwiesen.



## 7 Thermalisierung und Ensemblemittelung

---

Die vorgestellten Bewegungsgleichungen beschreiben zunächst die deterministische Entwicklung einer bestimmten Anfangskonfiguration der Felder  $E, W$  und  $U$  über die Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie. In diesem Kapitel werden die Grundlagen für eine Bestimmung statistischer Observablen durch eine Ensemblemittelung gelegt. Formal kann der statistische Erwartungswert eines Funktionals  $O(U)$

$$\langle O \rangle = Z^{-1} \int DU O e^{-\beta H} \quad (7.1)$$

unmittelbar durch eine Mittelung über ein Ensemble von  $N$  zufällig generierten Feldkonfigurationen

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_n O(U_n) \quad (7.2)$$

ersetzt werden. Die durch ein geeignetes Monte-Carlo Verfahren generierten Feldkonfigurationen müssen hierbei gemäß dem statistischen Faktor  $e^{-\beta H}$  verteilt sein, sodass für  $N \rightarrow \infty$  eine Übereinstimmung mit dem statistischen Erwartungswert erzielt wird. Die Herausforderung besteht nun in der Ermittlung eines geeigneten Ensembles von Feldkonfigurationen unter Wahrung des Gaußschen Gesetzes.

### 7.1 Heatbath

Die von Nair und Iancu als Nullkomponente des Energie-Impulstensors [4] bestimmte Hamiltondichte der kinetischen Theorie lautet

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left( E_i^a(x) E^{ai}(x) + B_i^a(x) B^{ai}(x) + m_D^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} W^a(x, \mathbf{v}) W^a(x, \mathbf{v}) \right), \quad (7.3)$$

wobei die farb magnetischen Felder entsprechend des üblichen Ausdrucks  $B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$  definiert sind. Wie im Folgenden gezeigt wird, sind die Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade im thermischen Gleichgewicht sowohl bei einer Diskretisierung durch Kugelflächenfunktionen, als auch bei einer Diskretisierung durch Platonische Körper gaußförmig verteilt.

Dies wird nun zur Konstruktion eines Thermalisierungsalgorithmus genutzt. Zunächst werden die Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade zufallsbasiert über eine Gaußverteilung initialisiert. Anschließend wird die so in das System injizierte Energie durch eine Anwendung der Bewegungsgleichungen über  $S$  Schritte auf die verschiedenen Felder verteilt. Durch Wiederholung dieses Vorgangs gleicht sich die Temperatur aller Felder zunehmend der durch die Gaußverteilung vorgegebenen Temperatur der Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade an, bis schließlich ein thermisches Gleichgewicht erreicht ist. In den folgenden beiden Abschnitten wird der Heatbath-Algorithmus für beide Diskretisierungen der Felder  $W^a(x, \mathbf{v})$  detailliert vorgestellt.

## 7.2 Thermalisierung bei Verwendung von Kugelflächenfunktionen

Unter Verwendung der Expansion (6.1) in Kugelflächenfunktionen lautet der statistische Faktor der kinetischen Theorie im Kontinuum:

$$e^{-(\beta H)} = \exp \left[ -\frac{1}{2T} \int d^3x \left( E_i^a(x) E^{ai}(x) + B_i^a(x) B^{ai}(x) + \frac{m_D^2}{4\pi} W_{lm}^a(x) W_{lm}^a(x) \right) \right]. \quad (7.4)$$

Berücksichtigt man die Abhängigkeit (6.2) der  $W_{lm}^a$

$$W_{lm}^a = (-1)^m W_{l,-m}^{a*} \quad (7.5)$$

ist ein möglicher Satz unabhängiger Freiheitsgrade gegeben durch die Realteile der  $W_{l0}^a$  sowie die Real- und Imaginärteile von  $W_{lm}^a$  für  $m > 0$ . Ausgedrückt durch diesen Parametersatz lautet der statistische Faktor:

$$e^{-(\beta H)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2T} \int d^3x (E_i^a(x) E^{ai}(x) + B_i^a(x) B^{ai}(x) + \frac{m_D^2}{4\pi} \sum_{l,a} \left[ \text{Re}^2 W_{l0}^a(x) + 2 \sum_{m>0} (\text{Re}^2 W_{lm}^a(x) + \text{Im}^2 W_{lm}^a(x)) \right]) \right\}. \quad (7.6)$$

Eine Diskretisierung dieses Ausdrucks ergibt schließlich unter Verwendung der Definition (5.3):

$$e^{-\beta H} = \exp \left\{ \frac{\beta_3}{N} \sum_{x,j>i} \text{ReTr}(1 - U_{ij}) + \frac{\beta_3}{4N} \sum_{x,a} ((E_i^a)^2 + \frac{(am_D)^2}{4\pi} \sum_l \left[ \text{Re}^2 W_{l0}^a(x) + 2 \sum_{m>0} (\text{Re}^2 W_{lm}^a(x) + \text{Im}^2 W_{lm}^a(x)) \right]) \right\}. \quad (7.7)$$

Zerlegt man diesen Ausdruck in ein Produkt von Exponentialfunktionen, ist unmittelbar zu erkennen, dass alle Freiheitsgrade bis auf die Linkvariablen über eine Gaußverteilung gewichtet sind. Insbesondere kann die Standardabweichung  $\sigma$  der Gaußverteilung der Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade unmittelbar an obigem Ausdruck abgelesen werden:

$$\sigma_{m=0} = \sqrt{\frac{8N\pi}{(am_D)^2 \beta_3}} \quad \text{und} \quad \sigma_{m>0} = \sqrt{\frac{4N\pi}{(am_D)^2 \beta_3}}. \quad (7.8)$$

Da im Gaußschen Gesetz (6.29) lediglich die  $l = 0$  Komponenten der  $W_{lm}^a$  auftreten, ist eine Implementation des Heatbath-Algorithmus unter Wahrung des Gaußschen Gesetzes möglich. Das Auswürfeln der Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade muss hierzu lediglich auf die  $W_{lm}^a$  ab einem  $l_{min} > 0$  beschränkt werden. Als Startpunkt des Thermalisierungsprozesses kann eine beliebige Feldkonfiguration dienen, welche das Gaußsche Gesetz erfüllt. Bei den hier vorgestellten Messungen wurde stets die Ausgangskonfiguration  $U(0) = 1$ ,  $E(-\frac{1}{2}\delta t) = W(0) = W(-\delta t) = 0$  verwendet.

Da in den Bewegungsgleichungen sowohl die Felder  $W_{lm}(t)$  als auch die Felder  $W_{lm}(t - \delta t)$  auftreten, besteht die Gefahr einer Anregung von Dopplern bei einem Auswürfeln der Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade. Um diese zu unterbinden, werden nach jeder Neubestimmung der Hard-Thermal Freiheitsgrade die Felder  $W_{lm}(t - \delta t)$  für  $l \geq l_{min}$  durch die Felder  $W_{lm}(t)$  ersetzt.

Außerdem ist zu beachten, dass in der Bewegungsgleichung der farbelektrischen Felder  $W_{l=1,m}$  auftritt. Um eine kontinuierliche Entwicklung der farbelektrischen Felder zu gewährleisten sollte also  $l_{min} \geq 2$  gewählt werden. Dies reduziert ebenfalls die Anregung der Doppler.

Zusammenfassend lautet der Thermalisierungsalgorithmus:

1. Wähle  $E(x, -\frac{1}{2}\delta t) = W_{lm}(x, 0) = W_{lm}(x, -\delta t) = 0$  und  $U(x, 0) = 1$  als Ausgangspunkt der Simulation.
2. Führe für  $l \geq l_{min} = 2$  folgende Schritte aus:
  - Bestimme die Realteile der  $W_{lm}^a(t)$  für  $m = 0$  sowie die Real- und Imaginärteile der  $W_{lm}^a(t)$  für  $m > 0$  über Gaußverteilungen der Standardabweichungen (7.8).
  - Verwende die Symmetrie (7.5) zum Setzen der verbleibenden  $W_{lm}^a(t)$ .
  - Ersetze schließlich die  $W_{lm}^a(t - \delta t)$  durch die neu bestimmten  $W_{lm}^a(t)$ .
3. Verteile die Energie im System durch eine Anwendung der Bewegungsgleichungen über  $S$  Schritte.
4. Fahre fort mit 2., bis die Felder thermalisiert sind.

### 7.3 Thermalisierung bei Verwendung platonischer Körper

Bei Diskretisierung des Hard-Thermal-Loop Beitrags durch platonische Körper lautet der statistische Faktor im Kontinuum zunächst:

$$e^{-(\beta H)} = \exp \left[ -\frac{1}{2T} \int d^3x \left( E_i^a(x) E^{ai}(x) + B_i^a(x) B^{ai}(x) + \frac{Am_D^2}{4\pi} W_m^a(x) W_m^a(x) \right) \right]. \quad (7.9)$$

Da keine Abhängigkeiten der  $W_n^a(x)$  untereinander berücksichtigt werden müssen, kann dieser Ausdruck unter Verwendung der Definitionen (5.3) und (6.30) unmittelbar auf das Gitter übertragen werden:

$$e^{-\beta H} = \exp \left[ \frac{\beta_3}{N} \sum_x \left( \sum_{j>i} \text{ReTr}(1 - U_{ij}) + \frac{1}{4} E_i^a E_i^a + \frac{(am_D)^2}{4N_p} W_n^a W_n^a \right) \right]. \quad (7.10)$$

Die Hard-Thermal Loop Freiheitsgrade sind somit entsprechend einer Gaußverteilung der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{2NN_p}{\beta_3(am_D)^2}} \quad (7.11)$$

gewichtet. Da im diskretisierten Gaußschen Gesetz (6.36) bei Verwendung platonischer Körper alle Freiheitsgrade auftreten kann - anders als bei einer Verwendung von Kugelflächenfunktionen

- ein Auswürfeln von Hard-Thermal Loop Freiheitsgraden nicht ohne eine Verletzung des Gaußschen Gesetzes erfolgen. Durch eine gleichmäßige Verteilung der Verletzung

$$V_G = \sum_i \left[ E_i(x + \frac{1}{2}\delta t) - P_{-i}(x - i)E_i(x - i + \frac{1}{2}\delta t) \right] - \frac{(am_D)^2}{2N_P} \sum_n [W_n(x) + W_n(x + \delta t)] \quad (7.12)$$

des Gaußschen Gesetzes auf alle  $W_n^a(x)$  und  $W_n^a(x + \delta t)$  kann jedoch wieder eine der Gaußschen Randbedingung genügende Feldkonfiguration hergestellt werden. Diese Verteilung wird nur während des Thermalisierungsprozesses durchgeführt und an dessen Abschluss deaktiviert. Nach einem Neuauswürfeln der  $W_n^a(x, t)$  werden die  $W_n^a(x, t - \delta t)$  aus dem vorangegangenen Zeitschritt durch die Neubestimmten Freiheitsgrade ersetzt. Dies dient erneut einer Vermeidung von Dopplern.

Zusammenfassend lautet der Thermalisierungsalgorithmus:

1. Wähle  $E(x, -\frac{1}{2}\delta t) = W_{lm}(x, 0) = W_{lm}(x, -\delta t) = 0$  und  $U(x, 0) = 1$  als Ausgangspunkt der Simulation.
2. Führe folgende Schritte aus:
  - Bestimme alle  $W_n^a(t)$  über eine Gaußverteilung der Standardabweichung (7.11).
  - Ersetze die  $W_n^a(t - \delta t)$  durch die neu bestimmten  $W_n^a(t)$ .
3. Wende die Bewegungsgleichungen über S Schritte an und verteile hierbei die Verletzung (7.12) des Gaußschen Gesetzes gleichmäßig auf alle  $W_n^a(t)$  und  $W_n^a(t - \delta t)$ .
4. Fahre fort mit 2. bis die Felder thermalisiert sind.

## 8 Wilson-Loop und Potential

---

Als Observable dient im Rahmen dieser Arbeit, wie bereits in Kapitel 3 dargestellt, der Wilson-Loop (3.29). Wie in [7] im Detail erläutert wird, ermöglicht dieser die Bestimmung eines verallgemeinerten statischen Potentials der thermischen QCD. In diesem Abschnitt werden die Diskretisierung des Wilson-Loops sowie die numerische Ableitung des Potentials vorgestellt.

### 8.1 Diskretisierung des Wilson-Loops

Die Wilson-Linie (3.28) übersetzt sich unter Verwendung der Definition (4.1) der Links entsprechend der Dyson-Formel unmittelbar in den Ausdruck

$$W(\xi) = \prod_{\xi, \text{räumlich}} U_i(x), \quad (8.1)$$

wobei  $\xi$  die Trajektorie der Wilson-Linie auf dem Gitter bezeichnet. Aufgrund der temporalen Eichung kann hierbei das Produkt auf die räumlichen Links beschränkt werden. Der diskretisierte Ausdruck für den Wilson-Loop (3.29) lautet somit

$$C_{>}(t, r) = \frac{1}{N} \text{Tr} [W(0, x_1, x_2) W(t, x_1, x_2)], \quad (8.2)$$

wobei  $W(t, x_1, x_2)$  die Wilson-Linie entlang der kürzesten Trajektorie zwischen  $(x_1, t)$  und  $(x_2, t)$  bezeichnet. Der Abstand  $r$  bezeichnet den räumlichen Abstand zwischen den beiden Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$ .

### 8.2 Bestimmung des verallgemeinerten Potentials

Zur Diskretisierung der in (3.30) auftretenden zeitlichen Ableitung wird der Ausdruck

$$\Delta_t C_{>}(t, r) = \frac{-3C_{>}(t - \delta t, r) + 4C_{>}(t, r) - C_{>}(t + \delta t, r)}{2\delta t} \quad (8.3)$$

verwendet, welcher numerische Schwankungen reduzieren soll. Wie leicht durch Taylorentwicklung überprüft werden kann, geht dieser Ausdruck für  $\delta t \rightarrow 0$  in den Differenzquotienten der zeitlichen Ableitung über. Löst man (3.30) nach dem Potential auf, ergibt sich nach Diskretisierung der Ableitung über (8.3) der Ausdruck:

$$V_{>}(t, r) = i \frac{\Delta_t C_{>}(t, r)}{C_{>}(t, r)}. \quad (8.4)$$



**Teil III**

**Simulation**





## 9 Thermalisierung

---

### 9.1 Verlauf der Thermalisierung

Für SU(2) konnte eine vollständige Thermalisierung des Systems, abhängig von Parameterwahl und Diskretisierung, üblicherweise innerhalb von 60-200 Updates erzielt werden. Da eine typische Messung sich anschließend über etwa 5000 Zeitschritte erstreckte, forderte der Thermalisierungsprozess üblicherweise 70- 90 % der zur Verfügung stehenden Rechenzeit. Für SU(3) waren üblicherweise 800-1000 Updates bei einem Anteil von  $\sim 95$  % an der zur Verfügung stehenden Rechenzeit erforderlich. Der Thermalisierungsprozess wurde als beendet betrachtet, sobald sich die Beiträge der elektrischen Felder, der Eichfelder und der Hard-Thermal-Loop Freiheitsgrade zur Gesamtenergie des Systems innerhalb ihrer Fehlertoleranzen nicht mehr veränderten. Es erwies sich hierbei allgemein als ausreichend, die Entwicklung des zur magnetischen Feldenergie proportionalen Plakettenerwartungswertes

$$\langle P \rangle = \left\langle 1 - \frac{1}{N} \text{ReTr}U_{ij} \right\rangle \quad (9.1)$$

zu betrachten. Die Entwicklung des Plakettenerwartungswertes während eines typischen Thermalisierungsvorgangs kann der Abbildung 9.1 entnommen werden. Zusätzlich ist die Entwicklung der dreidimensionalen Verteilung der Spuren der einzelnen Plaketten  $\frac{1}{N} \text{ReTr}U_{ij}$  zu Beginn der Thermalisierung der Abbildung zu entnehmen.

### 9.2 Plakettenerwartungswerte

In der nachstehenden Tabelle sind die Anzahl der notwendigen Thermalisierungsupdates U, unter Angabe der Schritte S pro Update, bei verschiedenen Parametersätzen und Diskretisierungen sowie die nach Abschluß der Thermalisierung erhaltenen Plakettenerwartungswerte aufgelistet.

|       | Gitter | $\delta t$ | $\beta_3$ | $(am_D)^2$ | Kugelflächenfkt. ( $l_{max} = 3$ ) |                     | Plat. Körper ( $N_p = 6$ ) |                     |
|-------|--------|------------|-----------|------------|------------------------------------|---------------------|----------------------------|---------------------|
|       |        |            |           |            | U×S                                | $\langle P \rangle$ | U×S                        | $\langle P \rangle$ |
| SU(2) | $16^3$ | 0.01       | 2         | 0.5        | 80×200                             | 0.54(4)             | 60×200                     | 0.54(6)             |
|       | $16^3$ | 0.01       | 3         | 0.5        | 120×200                            | 0.37(5)             | 80×200                     | 0.37(5)             |
|       | $16^3$ | 0.01       | 4         | 0.5        | 150×200                            | 0.26(9)             | 100×200                    | 0.27(1)             |
| SU(3) | $12^3$ | 0.02       | 14        | 0.032      | -                                  | -                   | 800×100                    | 0.19(1)             |
|       | $12^3$ | 0.02       | 21        | 0.032      | -                                  | -                   | 950×100                    | 0.12(6)             |

Tabelle 9.1: Ausgewählte Plakettenerwartungswerte nach Thermalisierung der Felder

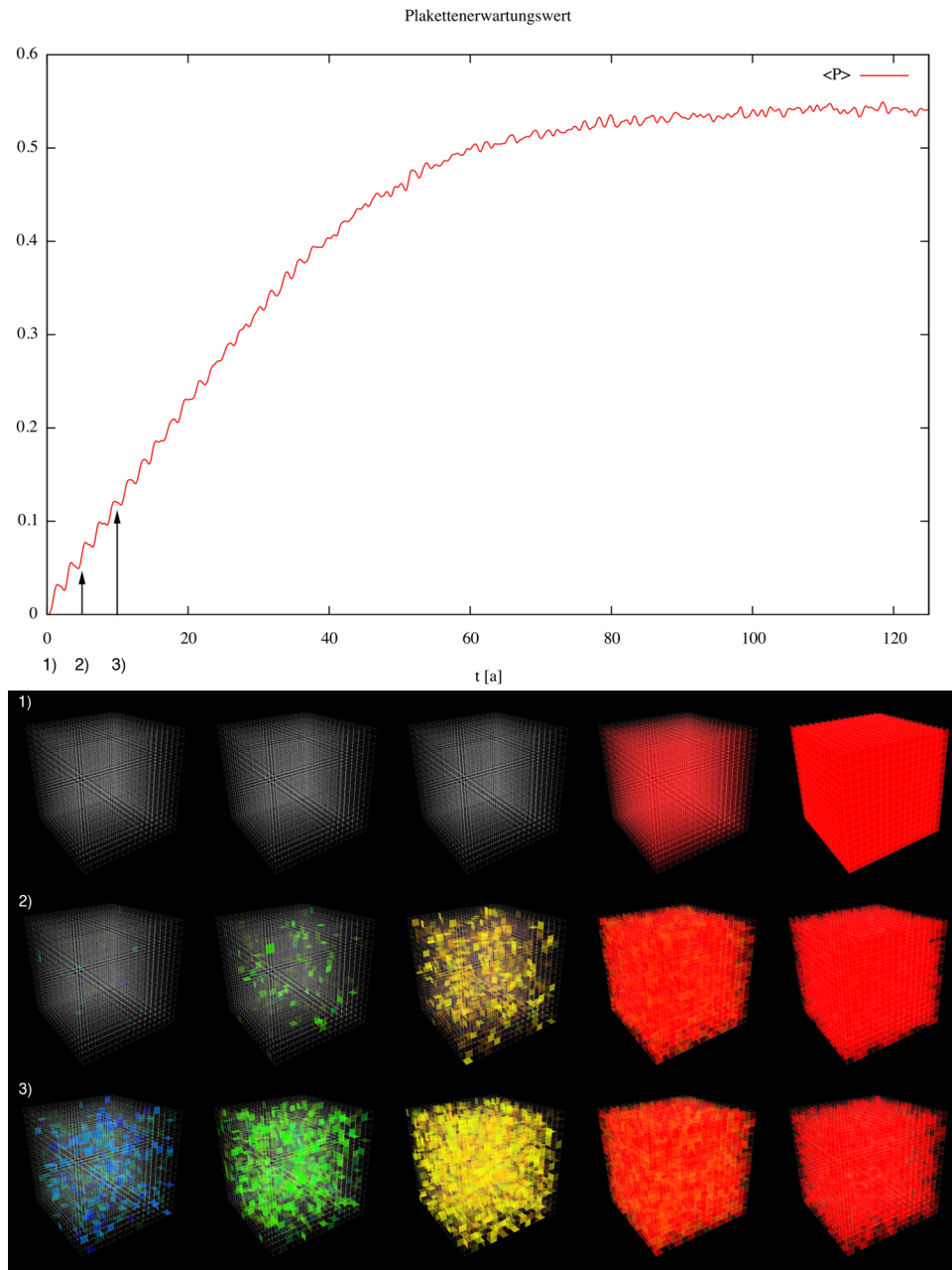


Abbildung 9.1: Darstellung des Thermalisierungsprozesses Oben: Plakettenerwartungswert (9.1)  
Unten: 3D- Darstellung der normierten Spuren der einzelnen Plaketten (von blau=0.2 bis rot=1.0)

### 9.3 Doppler

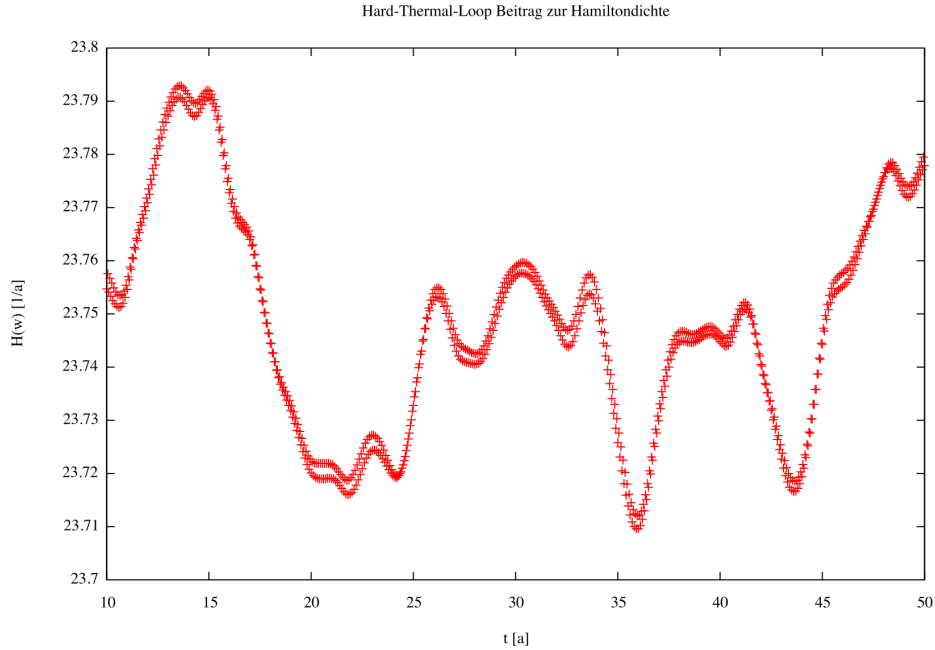


Abbildung 9.2: Die Zeitentwicklung des mittleren Hard-Thermal-Loop Beitrags zur Hamiltondichte während einer Messung mit einem  $16^3$ -Gitter unter Verwendung einer Diskretisierung durch Kugelflächenfunktionen.

Der eventuelle Einfluss von Dopplern auf die hier vorgestellten Messungen wird nun am Beispiel einer typischen Messung mit einem  $16^3$ -Gitter ( $SU(2)$ ,  $\beta_3=2$ ,  $(am_D)^2=0.5$ ,  $\delta_t=0.01$ , Kugelflächenfunktionen mit  $l_{max}=3$ ) diskutiert.

In obiger Abbildung ist die Zeitentwicklung des Hard-Thermal Loop Beitrags

$$\beta H_W = \frac{(am_D)^2}{16N\pi} W_{lm}^a W_{lm}^a \quad (9.2)$$

zur Hamiltondichte (7.3) während der Messung dargestellt. An der geringen Aufspaltung der Linie ist zu erkennen, dass während der Messung nur eine sehr schwache Anregung von Dopplern vorlag. Es ist zudem zu beobachten, dass für die Dauer der Messung ( $\sim 5000$  Zeitschritte) der Anregungsgrad der Doppler konstant blieb. Bei einer Diskretisierung des Hard-Thermal-Loop Beitrags durch platonische Körper ist bei gleicher Parameterwahl eine etwas stärkere Anregung der Doppler zu beobachten. Ein nennenswerter Einfluss der Doppler auf die Messergebnisse ist jedoch, bei hinreichend klein gewähltem Zeitschritt  $\delta_t$  der Simulation, bei beiden Diskretisierungen nicht zu befürchten.



## 10 Wilson-Loop und klassisches Potential

### 10.1 Zeitentwicklung des Wilson-Loop für SU(2)

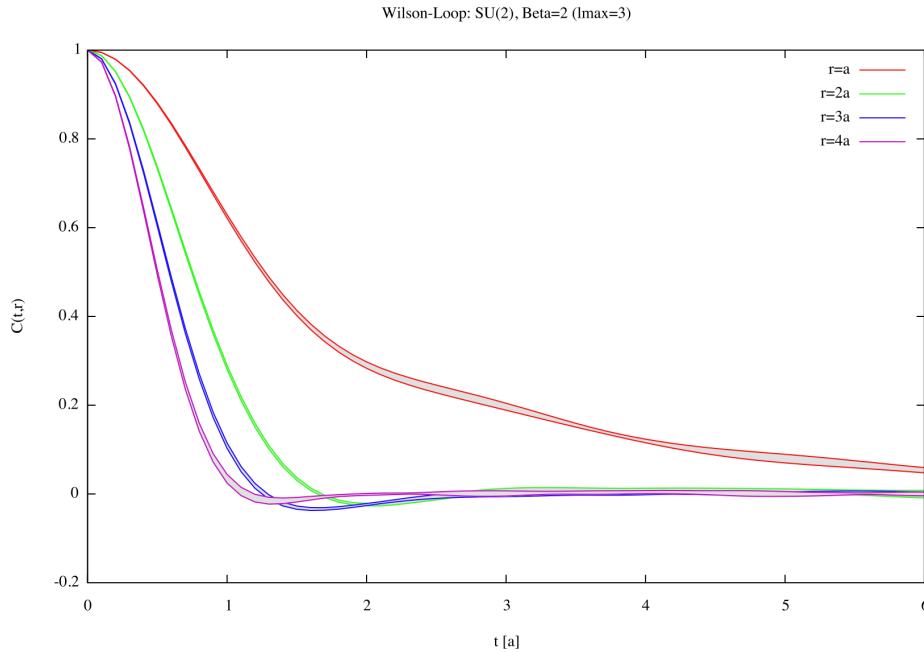
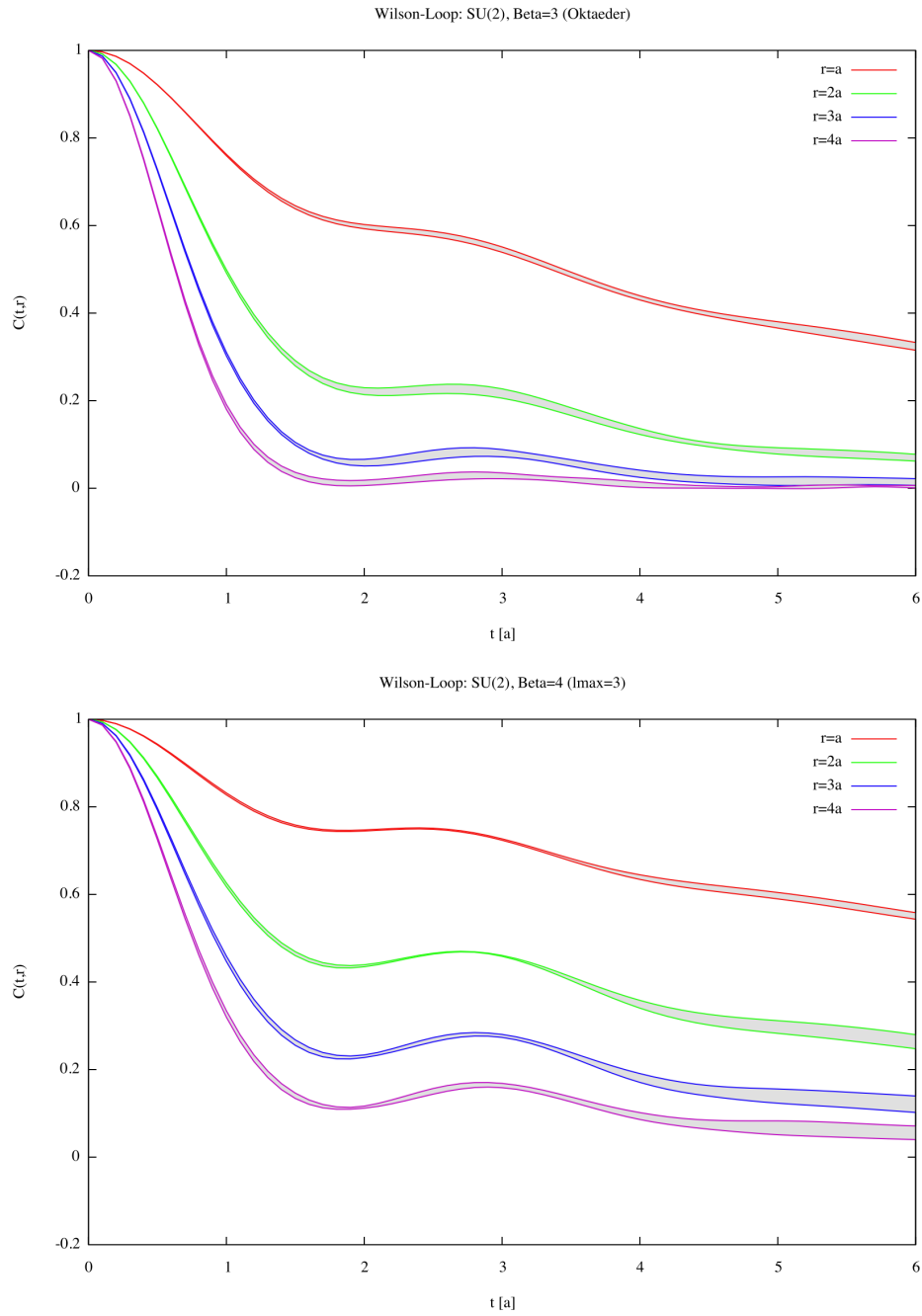


Abbildung 10.1: Zeitentwicklung des Wilson-Loops für  $\beta_3 = 2$

An den Abbildungen in diesem Abschnitt ist die Zeitentwicklung des Wilson-Loops (8.2) für SU(2) abzulesen. Alle Messungen wurden mit einem Ensemble von jeweils 5-10  $16^3$  Gittern und der Debyemasse  $(am_D)^2 = 0.5$  durchgeführt. Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass die hier vorgestellten Messungen Teil eines laufenden Projektes sind, wobei abschließend Ensemblegrößen von jeweils  $\sim 100$  Konfigurationen angestrebt werden. Soweit Kugelflächenfunktionen zur Diskretisierung des Hard-Thermal-Loop Beitrags verwendet wurden, wurde  $l_{max} = 3$  gewählt. Bei Verwendung platonischer Körper wurde ein Oktaeder ( $N_p = 6$ ) gewählt. Die Abweichung zwischen den Diskretisierungen wird in einem folgenden Abschnitt diskutiert. Die Breite der dargestellten Linien für verschiedene Längen  $r$  des Wilson-Loops  $C(t, r)$  ist durch die Standardabweichung des Ensembles bestimmt. Der Wert des Wilson-Loops  $C(t, r)$  für ein einzelnes Element des Ensembles ergibt sich hierbei durch Mittelung über das gesamte Gitter.

Abbildung 10.2: Zeitentwicklung des Wilson-Loops für  $\beta_3 = 3$  (oben) und  $\beta_3 = 4$  (unten)

## 10.2 Das klassische Potential für SU(2)

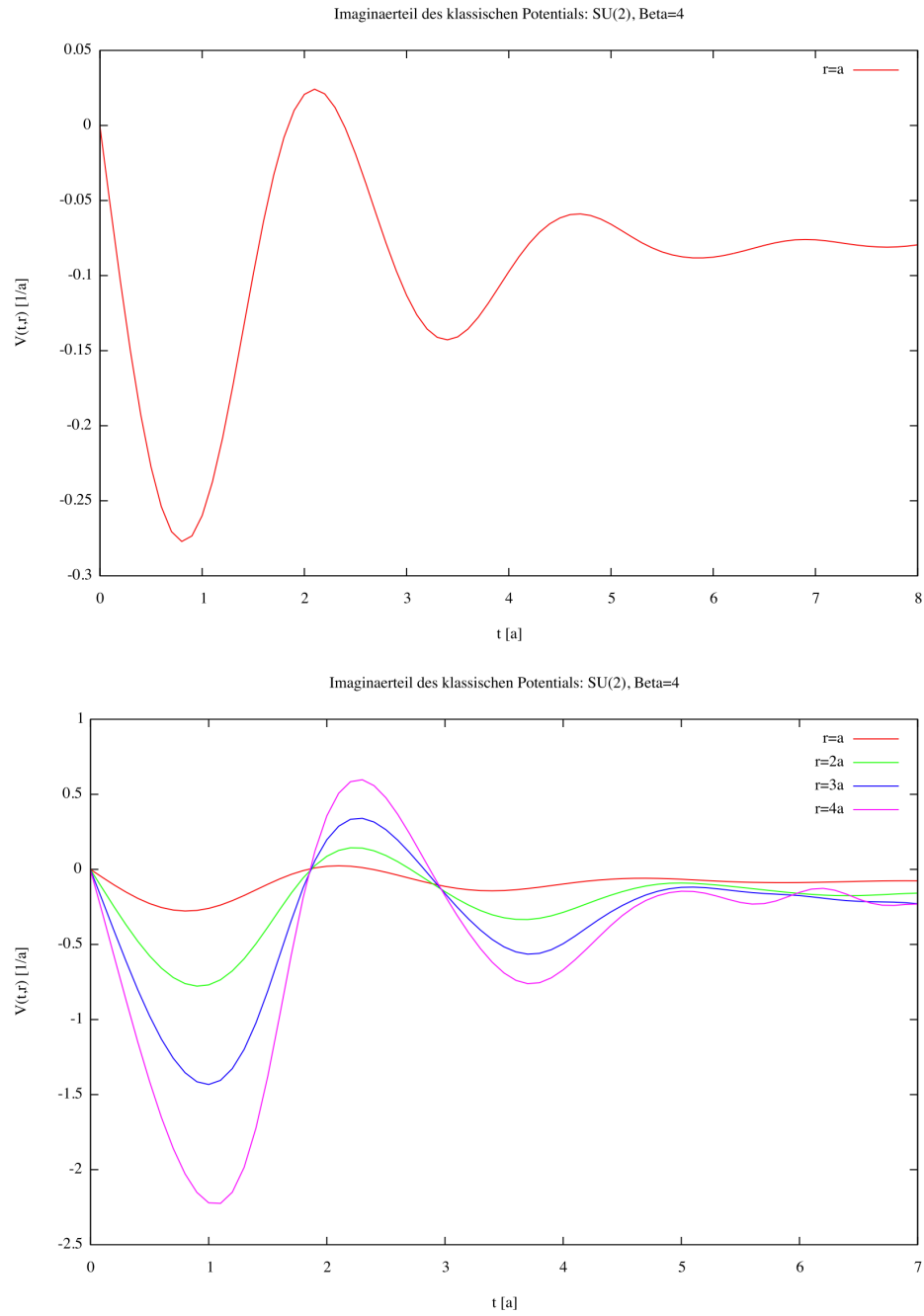
| Gitter: $16^3$ , $(am_D)^2 = 0.5$ |               | Kugelflächenfkt. ( $l_{max} = 3$ ) |                        | Plat. Körper ( $N_p = 6$ ) |                        |
|-----------------------------------|---------------|------------------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|
|                                   | Abstand r [a] | Min.                               | $t \rightarrow \infty$ | Min.                       | $t \rightarrow \infty$ |
| $\beta_3=4$                       | 1             | -0.28                              | -0.08(0)               | -0.28                      | -0.07(5)               |
|                                   | 2             | -0.78                              | -0.16(5)               | -0.80                      | -0.1(8)                |
|                                   | 3             | -1.43                              | -0.(3)                 | -1.46                      | -0.(3)                 |
|                                   | 4             | -2.22                              | -                      | -2.26                      | -                      |
| $\beta_3=3$                       | 1             | -0.44                              | -0.1(5)                | -0.43                      | -0.1(5)                |
|                                   | 2             | -1.38                              | -0.(4)                 | -1.33                      | -0.(4)                 |
|                                   | 3             | -2.9                               | -                      | -2.81                      | -                      |
|                                   | 4             | -                                  | -                      | -5.59                      | -                      |
| $\beta_3=2$                       | 1             | -0.95                              | -0.4(5)                | -0.96                      | -0.(45)                |

Tabelle 10.1: Minimum und Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  des Imaginärteils des klassischen Potentials für SU(2) bei verschiedenen Parametersätzen und Entfernungen

Wie aufgrund der analytischen Ergebnisse [7] erwartet wurde, tritt in der klassischen Feldapproximation lediglich der Imaginärteil des Potentials (3.30) auf. Eine Darstellung der Zeitentwicklung des Imaginärteils kann in Abbildung 10.3 für  $\beta_3 = 4$  gefunden werden. Es ist deutlich die analytisch erwartete Konvergenz des Imaginärteils im Limes  $t \rightarrow \infty$ , wo dieser als Zerfallsbreite identifiziert werden kann, zu erkennen.

Zerfallsbreite und Schwankungsminimum des Imaginärteils sind in obiger Tabelle abzulesen. Eine numerische Bestimmung der Zerfallsbreite für kleine  $\beta_3$  und große r konnte aufgrund der begrenzten zur Verfügung stehenden Rechenzeit nicht erfolgen, da diese eine Mittelung über eine größere Anzahl von Feldkonfigurationen sowie eine höhere Auflösung der verwendeten Gitter erfordert hätte.

Dennoch ist deutlich die erwartete Zunahme der Zerfallsbreite mit steigender Temperatur und steigendem Abstand des statischen Fermionpaares zu erkennen.

Abbildung 10.3: Zeitentwicklung des Imaginärteils des Potentials (3.30) für  $\beta_3 = 4$



### 10.3 Vergleich der Diskretisierungen

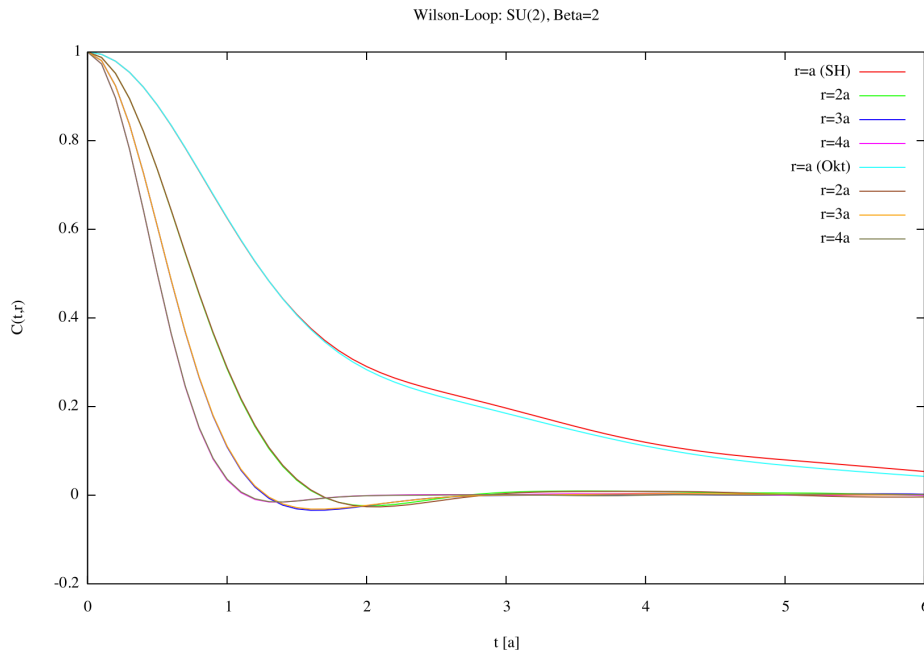


Abbildung 10.4: Vergleich der Zeitentwicklung des Wilson-Loops bei Verwendung einer Diskretisierung der Felder  $W(x, \mathbf{v})$  durch einen Oktaeder (Okt) sowie durch Kugelflächenfunktionen (SH) mit  $l_{max} = 3$

In obiger Abbildung ist die Zeitentwicklung des Wilson-Loop für  $\beta_3 = 2$  und  $(am_D)^2 = 0.5$  für beide Diskretisierungen dargestellt. Verwendet wurde ein Ensemble von jeweils  $5 \cdot 16^3$ -Gittern bei einem Simulationszeitschritt von  $\delta_t = 0.01$ . Es ist deutlich eine fast völlige Übereinstimmung beider Diskretisierungen zu erkennen. Die verbleibende Abweichung ist auf die geringe Größe der verwendeten Ensembles sowie die geringe Anzahl der Vertices des verwendeten Polyeders zurückzuführen. Durch Verwendung eines Dodekaeders konnte die verbleibende Abweichung reduziert werden. Eine Erhöhung von  $l_{max}$  hatte hingegen keinen sichtbaren Einfluss auf die Zeitentwicklung des Wilson-Loops.

Die geringere Präzision sowie die stärkere Anregung von Dopplern während der Thermalisierung muss als Nachteil einer Diskretisierung der Felder  $W(x, \mathbf{v})$  durch platonische Körper gewertet werden. Andererseits erlaubt diese Diskretisierung eine deutlich schnellere Thermalisierung der Felder, sodass sie bei begrenzt zur Verfügung stehender Rechenzeit zu bevorzugen ist.

## 10.4 Die Zeitentwicklung des Wilson-Loops für SU(3)

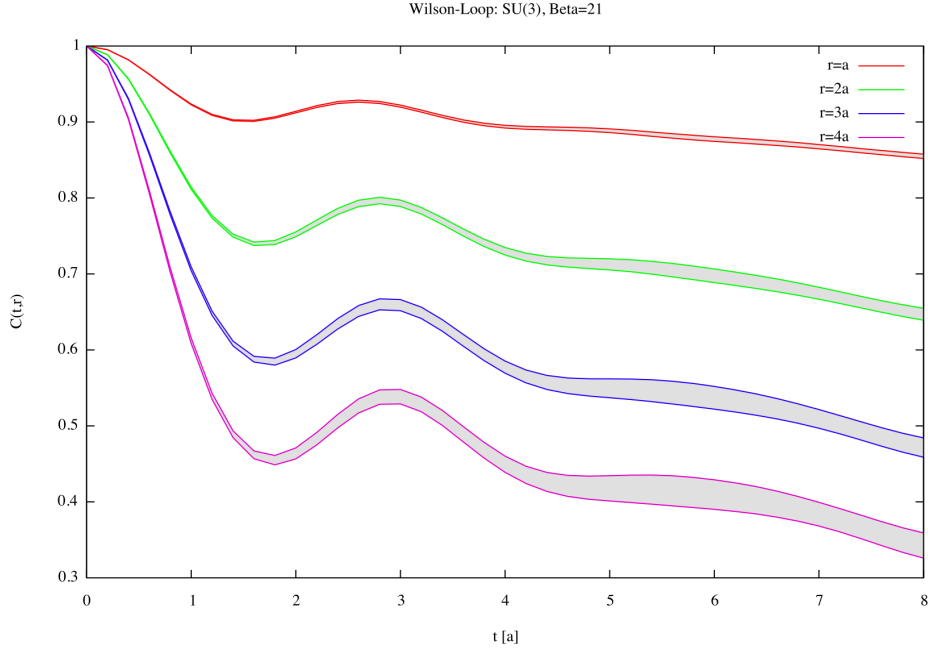


Abbildung 10.5: Zeitentwicklung des Wilson-Loops für  $\beta_3 = 21$

In Abbildung 10.5 ist die Zeitentwicklung des Wilson-Loops  $C_{>}(t, r)$  für  $\beta_3 = 21$  dargestellt. Die Messungen wurden für  $\beta_3 = 21$  und  $\beta_3 = 14$  mit einem Ensemble von jeweils 16 bzw. 18  $12^3$ -Gittern bei einer Debyemasse von  $(am_D)^2 = 0.032$  durchgeführt. Der Simulationszeitschritt wurde mit  $\delta_t = 0.02$  gewählt. Zur Reduzierung des ausgesprochen hohen Rechenaufwands bei SU(3)-Simulationen sind alle hier dargestellten Messungen mit einer Diskretisierung des Hard-Thermal-Loop Beitrags durch platonische Körper ( $N_p = 6$ ) durchgeführt worden. Trotz der nun höheren Anzahl an Feldkonfigurationen, über die jeweils gemittelt wurde, ist auch hier darauf hinzuweisen, dass die vorgestellten Messungen Teil eines laufenden Projektes sind, wobei abschließend eine Mittelung der Ergebnisse über  $\sim 100$  Konfigurationen angestrebt ist. Die Breite der dargestellten Linien ist erneut durch die Standardabweichung des Ensembles bestimmt. Im folgenden Abschnitt wird das aus dem Zeitverlauf des Wilson-Loops  $C_{>}(t, r)$  über (8.4) extrahierte klassische Potential vorgestellt.

## 10.5 Das klassische Potential für SU(3)

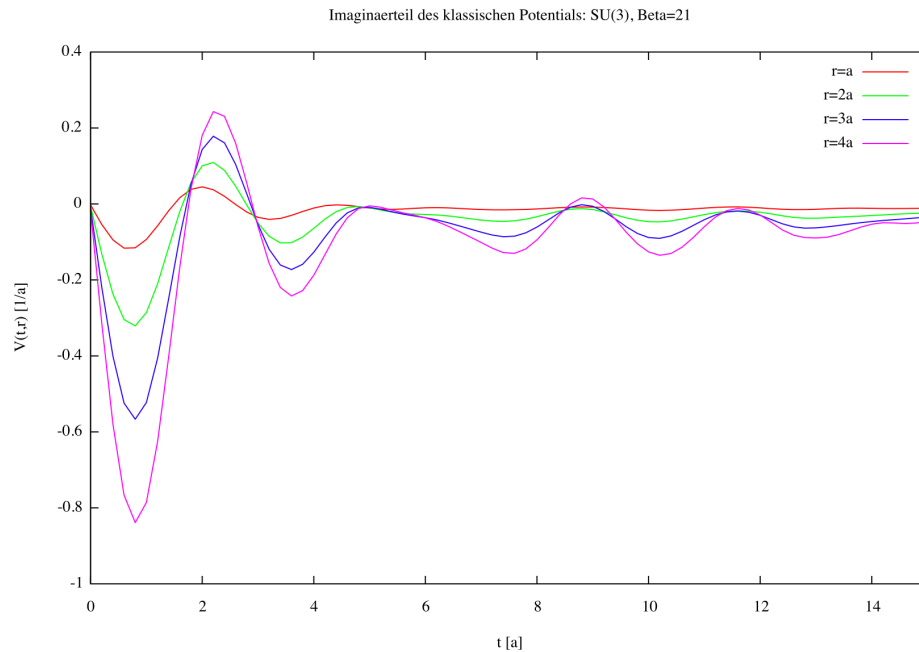


Abbildung 10.6: Der Imaginärteil des klassischen Potentials für  $\beta_3 = 21$

Die Zeitentwicklung des Imaginärteils des Potentials (3.30) ist in Abbildung 10.6 für  $\beta_3 = 21$  dargestellt. Es konnte auch für SU(3) in Entsprechung zur analytischen Erwartung kein Realteil des Potentials gemessen werden. Erneut ist deutlich die Konvergenz des Imaginärteils des Potentials im Limes  $t \rightarrow \infty$  zu erkennen, wo dieser als Zerfallsbreite zu identifizieren ist. Zerfallsbreite und Schwankungsminimum des Imaginärteils sind in nachstehender Tabelle für  $\beta_3 = 21$  und  $\beta_3 = 14$  abzulesen. Es ist erneut die erwartete Zunahme der Zerfallsbreite mit steigendem Abstand  $r$  bzw. sinkendem  $\beta_3$  zu beobachten.

| Messung      | Ensemble         | Abstand $r$ [a] | Minimum | $t \rightarrow \infty$ |
|--------------|------------------|-----------------|---------|------------------------|
| $\beta_3=21$ | $16 \times 12^3$ | 1               | -0.12   | -0.01(2)               |
|              |                  | 2               | -0.32   | -0.03(2)               |
|              |                  | 3               | -0.57   | -0.05(0)               |
|              |                  | 4               | -0.84   | -0.0(7)                |
| $\beta_3=14$ | $18 \times 12^3$ | 1               | -0.18   | -0.02(7)               |
|              |                  | 2               | -0.52   | -0.0(7)                |
|              |                  | 3               | -0.94   | -0.1(1)                |
|              |                  | 4               | -1.43   | -0.1(7)                |

Tabelle 10.2: Minimum und Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  des Imaginärteils des klassischen Potentials für SU(3) bei verschiedenen  $\beta_3$  und Entfernungen  $r$ .



## 11 Zusammenfassung und Ausblick

---

Im Verlauf dieser Arbeit konnte die Bestimmung der Zerfallsbreite schwerer Quarkonia in einem Quark-Gluon Plasma über eine semiklassische Simulation der thermischen QCD demonstriert werden. Das Ziel dieser Arbeit konnte damit erreicht werden.

### Zusammenfassung

Wie in den ersten beiden Kapiteln der Arbeit dargestellt wird, kann durch Ausintegration der harten Moden und dimensionale Reduktion der Zustandssumme eine semiklassische Approximation der thermischen QCD in Form einer kinetischen Theorie entwickelt werden. In einer besonders kompakten Darstellung lauten die Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie

$$1) \quad D_\mu F^{\mu\nu} = m_D^2 \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}}}{4\pi} v^\mu W(x, \mathbf{v}) \quad (11.1)$$

$$2) \quad v^\nu D_\nu W(x, v) = F^{0\nu}(x) v_\nu, \quad (11.2)$$

wobei die Größe  $m_D^2 W^0(x, \mathbf{v})$  physikalisch als Anteil der Gesamtladungsdichte aller harten Moden an der Stelle  $x$ , welcher sich in Richtung  $\mathbf{v}$  bewegt, interpretiert werden kann [8].

Die Diskretisierung der kinetischen Theorie auf dem Gitter wird ab dem 6. Kapitel vorgestellt. Zur Diskretisierung der effektiven Felder  $W(x, \mathbf{v})$  werden in diesem Kapitel zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, die sich in der Diskretisierung der Einheitskugel der Richtungen  $\mathbf{v}$  unterscheiden. Während diese im ersten Ansatz durch einen platonischen Körper approximiert wird, besteht der zweite Ansatz in einer Expansion der effektiven Felder  $W$  in Kugelflächenfunktionen. Es zeigt sich, dass der Vorteil des ersten Ansatzes in einer deutlich schnelleren Thermalisierung der Felder besteht. Eine Diskretisierung der Felder  $W$  durch Kugelflächenfunktionen ermöglicht andererseits eine höhere Genauigkeit und eine geringere Anregung der Doppler. Genauere Informationen über die Vor- und Nachteile beider Verfahren können dem 9. Kapitel entnommen werden.

Die Zerfallsbreite eines statischen  $q\bar{q}$ -Paares im Abstand  $r$  kann schließlich als Imaginärteil eines verallgemeinerten Potentials aus der Dynamik des Wilson-Loop

$$C_{>}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N} \text{Tr} \langle W(0, \mathbf{r}; t, \mathbf{r}) W(t, \mathbf{r}; t, \mathbf{0}) W(t, \mathbf{0}; 0, \mathbf{0}) W(0, \mathbf{0}; 0, \mathbf{r}) \rangle \quad (11.3)$$

bestimmt werden [7]. Hierzu kann die Beziehung

$$i\partial_t C_{>}(t, \mathbf{r}) = V_{>}(t, \mathbf{r}) C_{>}(t, \mathbf{r}) \quad (11.4)$$

verwendet werden, wobei  $V_{>}(t, \mathbf{r})$  das zu bestimmende Potential bezeichnet. Für eine detailliertere Darstellung dieses Ansatzes sei auf das 3. Kapitel verwiesen. Eine Diskretisierung des Wilson-Loops wird im 8. Kapitel vorgestellt.

Da die hier verwendete semiklassische Approximation auf eine beliebige  $SU(N)$  Yang-Mills Theorie übertragen werden kann, wurde die Simulation sowohl für  $SU(2)$  als auch  $SU(3)$  durchgeführt. Die gemessenen Zerfallsbreiten können dem 10. Kapitel entnommen werden. Es ist jedoch zu beachten, dass zur Extrapolation der Ergebnisse ins Kontinuum zunächst Vergleichsmessungen bei verschiedenen Gitterabständen  $a$  und Gittergrößen durchgeführt werden müssen.

### **Ausblick: Simulation dynamischer Fermionen**

Langfristig sind eine Reihe von Verbesserungen und Erweiterungen der bestehenden Simulation denkbar. Besonders interessant erscheint eine Vermessung des Potentials dynamischer Quarkpaare. Da die Quarkpropagatoren in der NRQCD einer Schrödingergleichung gehorchen, könnten diese etwa vor dem Hintergrund des klassischen Eichfeldes der kinetischen Theorie simuliert werden. Dies könnte schließlich zu einer Bestimmung der Spektralfunktion schwerer Quarkonia genutzt werden.

**Teil IV**

**Anhang**





# A Herleitungen

---

## A.1 Die Bewegungsgleichungen der klassischen Yang-Mills Theorie

Die zu betrachtende Wirkung lautet:

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + g A_\mu^a(x) j^{a\mu}(x). \quad (\text{A.1})$$

Ziel der folgenden Rechnung ist eine Bestimmung der Dynamik der Eichfelder unter Einwirkung des Farbladungsstroms  $j$ .

### A.1.1 Variationsansatz

Zur Herleitung der klassischen Bewegungsgleichung eines konservativen Systems - wie wir es hier voraussetzen wollen - ist die Variationsgleichung

$$\delta S = 0 \quad (\text{A.2})$$

bei Variation nach den Parametern des Systems zu lösen. In diesem Fall hat die Variation somit nach den Eichfeldern  $A_\mu^i(x)$  zu erfolgen. Die Unabhängigkeit der Eichfelder erlaubt hierbei die Formulierung einer Euler-Lagrange Gleichung der Form:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^i} = 0. \quad (\text{A.3})$$

### A.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Auswertung des ersten Terms liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^i)} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial F_{\alpha\beta}^j}{\partial(\partial_\mu A_\nu^i)} F^{j\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^j \frac{\partial F^{j\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^i)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \delta_{ij} \left[ (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu}) F^{j\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^j (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{4} (2F^{i\mu\nu} - 2F^{i\nu\mu}) = F^{i\nu\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

wobei  $g^{\mu\nu}$  den metrischen Tensor des Minkowskiraums bezeichnet. Als schwieriger erweist sich die Auswertung des zweiten Terms der Euler-Lagrange Gleichung aufgrund der Kontraktion der Eichfelder mit den Strukturkonstanten im Feldtensor. Der auszuwertende Ausdruck lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^i} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial F_{\alpha\beta}^j}{\partial A_\nu^i} F^{j\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^j \frac{\partial F^{j\alpha\beta}}{\partial A_\nu^i} \right) + j^{i\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Unter Verwendung der Ableitung

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j}{\partial A_\nu^i} = g \left( f^{jkl} \delta_{\alpha\nu} \delta_{ik} A_\beta^l + f^{jkl} A_\alpha^k \delta_{\beta\nu} \delta_{il} \right) = g f^{ijk} \left( \delta_{\beta\nu} A_\alpha^k - \delta_{\alpha\nu} A_\beta^k \right) \quad (\text{A.6})$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^j}{\partial A_\nu^i} F^{j\alpha\beta} &= g f^{ijk} (F^{j\alpha\nu} A_\alpha^k - F^{j\nu\beta} A_\beta^k) \\ &= 2g f^{ijk} F^{j\alpha\nu} A_\alpha^k, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei die Antisymmetrie des Feldtensors und der Strukturkonstanten verwendet wurde. Analog führt die Ableitung

$$\frac{\partial F^{j\alpha\beta}}{\partial A_\nu^i} = g (f^{jil} g^{\alpha\nu} A^{l\beta} + f^{jki} A^{k\alpha} g^{\beta\nu}) = g f^{ijk} (g^{\beta\nu} A^{k\alpha} - g^{\alpha\nu} A^{k\beta})$$

auf den identischen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{j\alpha\beta}}{\partial A_\nu^i} F_{\alpha\beta}^j &= g f^{ijk} (F_\alpha^{j\nu} A^{k\alpha} - F_\beta^{j\nu} A^{k\beta}) \\ &= 2g f^{ijk} F^{j\alpha\nu} A_\alpha^k. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Der zweite Term der Euler-Lagrange Gleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^i} = -g f^{ijk} F^{j\alpha\nu} A_\alpha^k + g j^{i\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Durch Einsetzen der Terme (A.4) und (A.9) in die Euler-Lagrange Gleichung (A.3) ergibt sich schließlich, unter erneuter Verwendung der Antisymmetrie des Feldtensors und der Strukturkonstanten, die Bewegungsgleichung der klassischen Yang-Mills Theorie:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{i\nu\mu} + g f^{ijk} F^{j\alpha\nu} A_\alpha^k &= g j^{i\nu} \\ \Rightarrow \partial_\mu F^{i\nu\mu} + g f^{ijk} A_\alpha^j F^{k\nu\alpha} &= g j^{i\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Unter Verwendung der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung sowie der Reskalierung  $-gj \rightarrow j$  führt dies auf die kompakte Darstellung:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^i = j^{i\nu}. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Bewegungsgleichung der diskretisierten Yang-Mills Theorie

### A.2.1 Variationsansatz

Zur Herleitung der klassischen Bewegungsgleichung ist erneut die Variationsgleichung  $\delta S = 0$  zu lösen, wobei die Lagrangefunktion für die diskretisierte Yang-Mills Theorie gegeben ist durch den Ausdruck:

$$L(t) = \frac{a}{g^2 T} \sum_{\mathbf{x}} \text{Tr} \dot{U}_i^+(x) \dot{U}_i(x) - \beta_3 \sum_{\mathbf{x}, i < j} \left( 1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{ij}(x) \right). \quad (\text{A.12})$$

Als Parameter des Systems treten die komplexen Linkvariablen auf, wobei  $U_{i(ab)}(x)$  und  $U_{i(ab)}^*(x)$  als unabhängige Variationsparameter aufgefasst werden. Die Beschränkung der Linkvariablen auf die  $SU(N)$ -Hyperfläche geht als Randbedingung in die folgende Rechnung ein.

### A.2.2 Euler-Lagrange Bewegungsgleichung

Die zu lösende Euler-Lagrange Gleichung lautet zunächst:

$$\sum_{a,b} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_{i(ab)}(x)} - \frac{\partial L}{\partial U_{i(ab)}(x)} \right) dU_{i(ab)}(x) + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^*(x)} - \frac{\partial L}{\partial U_{i(ab)}^*(x)} \right) dU_{i(ab)}^*(x) \right] = 0. \quad (\text{A.13})$$

Unter Verwendung der Matrixschreibweise

$$\frac{dF}{dM_{ab}} = \left( \frac{dF}{dM} \right)_{ab} \quad (\text{A.14})$$

lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\text{Tr} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} - \frac{\partial L}{\partial U_i} \right)^T dU_i + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^*} - \frac{\partial L}{\partial U_i^*} \right) dU_i^+ \right] = 0. \quad (\text{A.15})$$

Da es sich bei den Variationen  $dU_i^{(+)}(x)$  gemäß der Randbedingungen um infinitesimale Variationen auf der  $SU(N)$ -Hyperfläche handelt, besitzen diese die Darstellung

$$dU_i(x) = iT^n dq_n(x) U_i(x), \quad (\text{A.16})$$

mit infinitesimalen Koeffizienten  $dq_n(x)$ . Da diese unabhängig voneinander gewählt werden können, reduziert sich (A.15) auf die Gleichung:

$$\text{Tr} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} - \frac{\partial L}{\partial U_i} \right)^T T^n U_i - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^*} - \frac{\partial L}{\partial U_i^*} \right) U_i^+ T^n \right] = 0. \quad (\text{A.17})$$

### A.2.3 Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Felder

Betrachtet man zunächst die beiden voranstehenden Ausdrücke in der Euler-Lagrange Bewegungsgleichung, so ergibt sich:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} \right)_{ab} = \frac{a}{g^2 T} \frac{\partial}{\partial \dot{U}_{i(ab)}} \dot{U}_{j(dc)}^* \dot{U}_{j(dc)} = \frac{a}{g^2 T} \dot{U}_{i(ab)}^*. \quad (\text{A.18})$$

Unter Verwendung von (5.8) folgt:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} \right)^T = -i \frac{a^2}{gT} \frac{d}{dt} (E_i U_i)^+ = -i \frac{a^2}{gT} \frac{d}{dt} (U_i^+ E_i). \quad (\text{A.19})$$

Über eine analoge Rechnung ergibt sich für die komplex konjugierten Linkvariablen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^*} = i \frac{a^2}{gT} \frac{d}{dt} (E_i U_i). \quad (\text{A.20})$$

Zur expliziten Bestimmung der Bewegungsgleichungen verbleibt noch die Untersuchung folgender Ausdrücke:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i^{(*)}(x)} = \frac{\beta_3}{N} \frac{\partial}{\partial U_i^{(*)}(x)} \sum_{x,a,b} \text{ReTr} U_{ab}(x). \quad (\text{A.21})$$

Da nur Plaketten, welche den Link  $x \rightarrow x + \hat{a}i$  enthalten, zu berücksichtigen sind, reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial U_i^{(*)}(x)} &= \frac{\beta_3}{N} \frac{\partial}{\partial U_i^{(*)}(x)} \sum_{|j| \neq i} \text{ReTr} U_{ij}(x) \\ &= \frac{\beta_3}{2N} \frac{\partial}{\partial U_i^{(*)}(x)} \sum_{|j| \neq i} \left( \text{Tr} U_{ij}(x) + \text{Tr} U_{ij}^+(x) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

wobei sich die Summe nun sowohl über positive als auch negative Indizes  $j$  erstreckt und die Orientierung der Plaketten wegen  $\text{ReTr} U_{ji} = \text{ReTr} U_{ij}^+ = \text{ReTr} U_{ij}$  nicht zu berücksichtigen werden braucht.

An dieser Stelle sind Ableitungen der Spur einer Plakette nach einer Linkvariable zu betrachten. Bei Ableitung von  $\text{Tr} U_{ij}(x)$  nach einer komplex konjugierten Linkvariable  $U_{i(ab)}^*(x)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial U_i^*(x)} \text{Tr} U_{ij}(x) \right)_{ab} &= \frac{\partial}{\partial U_{i(ab)}^*(x)} U_{j(cd)}(x) U_{i(de)}(x+j) U_{j(fe)}^*(x+i) U_{i(cf)}^*(x) \\ &= U_{j(ad)}(x) U_{i(de)}(x+j) U_{j(be)}^*(x+i) \\ &= S_{ij(ab)}(x), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

wobei  $S_{ij}(x)$  das sogenannte "Staple"

$$S_{ij}(x) = U_j(x) U_i(x+j) U_j^+(x+i) \quad (\text{A.24})$$

bezeichnet. Analog ergibt sich für die Ableitung von  $TrU_{ij}^+(x)$  nach  $U_i(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial U_i(x)} TrU_{ij}^+(x) = S_{ij}^*(x). \quad (\text{A.25})$$

Alle weiteren Ableitungen verschwinden. Somit ergibt sich für die verbleibenden Ausdrücke in der Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i(x)} = \frac{\beta_3}{2N} \sum_{|j| \neq i} S_{ij}^*(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial U_i^*(x)} = \frac{\beta_3}{2N} \sum_{|j| \neq i} S_{ij}(x). \quad (\text{A.26})$$

Setzt man schließlich die Ausdrücke (A.19), (A.20) sowie (A.26) in die Euler-Lagrange Gleichung (A.17) ein, so folgt:

$$Tr \left[ i \frac{a^2}{gT} \left( (\dot{U}_i^+ E_i + U_i^+ \dot{E}_i) T^n U_i + (E_i \dot{U}_i + \dot{E}_i U_i) U_i^+ T^n \right) + \frac{\beta_3}{2N} \sum_{|j| \neq i} (S_{ij}^+ T^n U_i - S_{ij} U_i^+ T^n) \right] = 0. \quad (\text{A.27})$$

Unter Verwendung der zyklischen Invarianz der Spur sowie der Beziehungen

$$U_i S_{ij}^+ = U_{ij}^+ \quad S_{ij} U_i^+ = U_{ij} \quad (\text{A.28})$$

reduziert sich die Euler-Lagrange Gleichung weiter auf den Ausdruck:

$$\frac{2a^2}{gT} \left( Tr(T^n \dot{E}_i) + Re Tr(T^n U_i \dot{U}_i^+ E_i) \right) = \frac{\beta_3}{N} \sum_{|j| \neq i} Im Tr(T^n U_{ij}). \quad (\text{A.29})$$

Unter Benutzung von (5.8) ergibt sich für den zweiten Term der Ausdruck

$$Tr(T^n \dot{U}_i U_i^+ E_i) = -iga E_i^a E_i^b Tr(T^n T^a T^b), \quad (\text{A.30})$$

welcher wegen der Beziehung  $Tr(T^n T^a T^b) = -Tr(T^n T^b T^a)$  als Kontraktion eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors verschwindet. Die verbleibende Euler-Lagrange Gleichung lautet schließlich mit (5.3):

$$a^3 g \dot{E}_i^a = 2 \sum_{|j| \neq i} Im Tr(T^n U_{ij}). \quad (\text{A.31})$$

Diese bildet zusammen mit der Bewegungsgleichung für die Linkvariablen (6.16) einen vollständigen Satz von Bewegungsgleichungen für die diskretisierte Yang-Mills Theorie.

### A.3 Herleitung der sphärischen Koeffizienten

#### A.3.1 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch den Ausdruck

$$Y_{lm}(\theta\phi) = N_{lm} e^{im\phi} P_l^m(\cos(\theta)), \quad (\text{A.32})$$

wobei im Rahmen dieser Arbeit die übliche Normierung

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \quad (\text{A.33})$$

verwendet wird. Das zugeordnete Legendre-Polynom  $P_l^m$  kann über die Ausdrücke

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{und} \quad P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (\text{A.34})$$

aus dem Legendre-Polynom

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^2 \quad (\text{A.35})$$

bestimmt werden.

#### A.3.2 Bestimmung der Koeffizienten $v_m^i$

Der erste Satz sphärischer Koeffizienten, der bei Expansion des Hard-Thermal Loop-Beitrags (6.1) in den Bewegungsgleichungen der kinetischen Theorie auftritt, ist definiert durch den Ausdruck

$$v_m^i = \int d\Omega_\nu v^i Y_{1m}^*, \quad (\text{A.36})$$

wobei  $\mathbf{v}$  den ultrarelativistischen Geschwindigkeitsvektor  $(1, \mathbf{v})$  bezeichnet. Nach Einsetzen der Kugelflächenfunktion folgt in Vektordarstellung unter Verwendung der Substitution  $x = \cos(\theta)$ :

$$\mathbf{v}_m = N_{1m} \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} \cos\phi \sqrt{1-x^2} \\ \sin\phi \sqrt{1-x^2} \\ x \end{pmatrix} e^{-im\phi} P_1^m(x). \quad (\text{A.37})$$

Unter expliziter Verwendung der Ausdrücke

$$P_1^0(x) = x \quad P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \quad (\text{A.38})$$

für die zugeordneten Legendre-Polynome folgt nach Ausführung der  $\phi$ -Integration:

$$\mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} -\delta_{m,1} N_{11} \pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) + \delta_{m,-1} N_{1,-1} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dx (1-x^2) \\ i\delta_{m,1} N_{11} \pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) + i\delta_{m,-1} N_{1,-1} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dx (1-x^2) \\ \delta_{m,0} N_{10} 2\pi \int_{-1}^1 dx x^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Nach dem Einsetzen der Integrale und Normierungsfaktoren ergibt sich schließlich:

$$\mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} -\delta_{m1}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} + \delta_{m,-1}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \\ i\delta_{m1}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} + i\delta_{m,-1}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \\ \delta_{m0}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

### A.3.3 Bestimmung der Koeffizienten $C_{lm'l'm'}^i$

Als weitaus herausfordernder erweist sich die Bestimmung des zweiten Satzes der sphärischen Koeffizienten, welcher durch eine Integration über 3 Kugelflächenfunktionen dargestellt werden kann

$$C_{lm'l'm'}^i = \int d\Omega_v Y_{lm}^* v^i Y_{l'm'} = v_n^i (-1)^m \int d\Omega_v Y_{l,-m} Y_{1n} Y_{l'm'}, \quad (\text{A.41})$$

wobei im zweiten Ausdruck die Symmetrie  $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m}$  verwendet wurde. Gemäß [22, 23] ergibt sich das Integral über die Kugelflächenfunktionen unter Verwendung der Wignerschen 3j-Symbole mit:

$$\int d\Omega_v Y_{l,-m} Y_{1n} Y_{l'm'} = \sqrt{\frac{(2l+1)3(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ -m & n & m' \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Zur Bestimmung der Wignerschen 3j-Symbole kann hierbei allgemein die Racah-Formel [24, 25] verwendet werden

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a-b-\gamma} \sqrt{\Delta(a,b,c)} \sqrt{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!} \times \\ \times \sum_t \frac{(-1)^t}{t!(c-b+t+\alpha)!(c-a+t-\beta)!(a+b-c-t)!(a-t-\alpha)!(b-t+\beta)!}, \quad (\text{A.43})$$

wobei die Summe über alle  $t$  läuft, für welche die unter dem Bruchstrich auftretenden Ausdrücke nichtnegativ sind.  $\Delta(a,b,c)$  ist weiter über folgenden Ausdruck definiert:

$$\Delta(a,b,c) = \frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!}. \quad (\text{A.44})$$

Betrachtet man nun zunächst das Wignersche 3j-Symbol

$$\begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

so führt die Einschränkung auf nichtnegative Ausdrücke bei der  $t$ -Summation auf folgende Bedingungen:

$$t \in \{1, 0\} \text{ mit } \begin{matrix} l' \in \{l, l+1\}, l' \neq 0 \text{ für } t = 0 \\ l \in \{l', l'+1\}, l \neq 0 \text{ für } t = 1 \end{matrix} \quad (\text{A.46})$$

Da das Wignersche 3j-Symbol (A.45) weiterhin im Fall  $l = l'$  nach Summation über  $t$  verschwindet, ist für die weitere Rechnung eine Beschränkung auf die Fälle  $l' = l+1$  und  $l' = l-1$  möglich.

Gemäß der grundlegenden Auswahlregeln der Wignerschen 3j-Symbole [24, 25] ist weiterhin das zweite in (A.42) auftretende 3j-Symbol nur im Fall  $n = m - m'$  von Null verschieden. Allgemein gilt nach der Racah-Formel gemäß [24, 25]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1-j_2+M} \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!}{(2j_1+2j_2+1)!}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{(j_1+j_2+M)!(j_1+j_2-M)}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

falls  $J = j_1 + j_2$  und  $M = m_1 + m_2$ . Unter Verwendung dieser Formel sowie der aufgrund der grundlegenden Symmetrien [24, 25] der Wignerschen 3j-Symbole bestehenden Beziehung

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} c & b & a \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

ist eine Auswertung der sphärischen Koeffizienten  $C_{lm'l'm'}^i$  möglich. Es ist erneut daraufhinzuweisen daß nur Koeffizienten welche die Auswahlregeln

$$l' = l \pm 1 \quad \text{und} \quad m' = m - n \quad (\text{A.49})$$

erfüllen von Null verschieden sind.

**1.Fall:**  $l' = l + 1$

Sind die Auswahlregeln durch  $l' = l + 1$  und  $m' = m - n$  erfüllt, können die Wignerschen-3j Symbole des Integrals (A.42) unmittelbar über (A.47) bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} l & 1 & l+1 \\ -m & n & m-n \end{pmatrix} = (-1)^{l-1+n-m} \sqrt{\frac{(2l)!2}{(2l+3)!}} \frac{(l+1+n-m)!(l+1-n+m)!}{(l-m)!(l+m)!(1+n)!(1-n)!}. \quad (\text{A.50})$$

Für das erste Wignersche 3j-Symbol im Integral (A.42) ergibt sich speziell:

$$\begin{pmatrix} l & 1 & l+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{l-1} \sqrt{\frac{(2l)!2}{(2l+3)!}} (l+1). \quad (\text{A.51})$$

**2.Fall:**  $l' = l - 1$

Die verbleibenden nichtverschwindenden Integrale (A.42) erfüllen unter Umstellen der Auswahlregeln die Beziehungen  $l = l' + 1$  und  $m = m' + n$ . Die Symmetriebeziehung (A.48) liefert für die auftretenden Wignerschen 3j-Symbole folgenden Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} l'+1 & 1 & l' \\ -(m'+n) & n & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l' & 1 & l'+1 \\ m' & n & -(m'+n) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Ein Vergleich mit dem 1. Fall zeigt, dass die Wignerschen 3j-Symbole im 2. Fall aus (A.50) durch die Substitutionen

$$l \rightarrow l' \quad \text{und} \quad m \rightarrow -m' \quad (\text{A.53})$$

gewonnen werden können.



**Bestimmung des Integrals**

Fügt man alle Ausdrücke zusammen, ergibt sich im Fall  $l' = l + 1$  unter Verwendung der üblichen Selektionsregel  $m' = -n + m$  allgemein:

$$(-1)^m \int d\Omega_v Y_{l,-m} Y_{1n} Y_{l+1,m'} = \delta_{m',-n+m} (-1)^n \sqrt{\frac{3(2l+1)(2l+3)}{4\pi}} \frac{(2l)!2}{(2l+3)!} \\ (l+1) \sqrt{\frac{(l+1+n-m)!(l+1-n+m)!}{(l-m)!(l+m)!(1+n)!(1-n)!}}. \quad (\text{A.54})$$

Die expliziten Ausdrücke für  $n=-1,0$  und  $1$  lauten

$$\begin{aligned} n = 0 & : \quad \delta_{m',m} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} B(l, m) \\ n = 1 & : \quad -\delta_{m',m-1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} A(l, -m) \\ n = -1 & : \quad -\delta_{m',m+1} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} A(l, m), \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

wobei die Koeffizienten

$$A(l, m) = \sqrt{\frac{(l+2+m)(l+1+m)}{2(2l+1)(2l+3)}} \quad \text{und} \quad B(l, m) = \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{2(2l+1)(2l+3)}} \quad (\text{A.56})$$

eingeführt wurden. Die Ausdrücke für den Fall  $l' = l - 1$  können über die Substitutionen (A.53) in den Koeffizienten  $A(l, m)$  und  $B(l, m)$  gewonnen werden, wobei für  $n \neq 0$  wegen des Vorfaktors  $(-1)^m$  und  $m' = m - n$  ein Faktor  $-1$  zur Korrektur eingefügt werden muss. Die entsprechenden Substitutionsregeln lauten:

$$A(l, \pm m) \rightarrow -A(l', \mp m') \quad \text{und} \quad B(l, \pm m) \rightarrow B(l', \mp m'). \quad (\text{A.57})$$

**Bestimmung der Koeffizienten**

Im Fall  $l' = l + 1$  ergeben sich schließlich durch Kontraktion des obigen Ausdrucks mit den Koeffizienten  $v_n^i$  (A.40) folgende Ausdrücke:

$$l' = l + 1 : \quad C_{lml'm'}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_{m',m-1} A(l, -m) - \delta_{m',m+1} A(l, m)] \\ \frac{i}{\sqrt{2}} [-\delta_{m',m-1} A(l, -m) + \delta_{m',m+1} A(l, m)] \\ \delta_{m,m'} B(l, m) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.58})$$

Im Fall  $l' = l - 1$  ergibt sich hingegen unmittelbar über die Substitutionsregeln (A.57):

$$l' = l - 1 : \quad C_{lml'm'}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} [-\delta_{m',m-1} A(l', m') + \delta_{m',m+1} A(l', -m')] \\ \frac{i}{\sqrt{2}} [\delta_{m',m-1} A(l', m') - \delta_{m',m+1} A(l', -m')] \\ \delta_{m,m'} B(l', -m') \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$



## B Bewegungsgleichungen und Koeffizienten

---

### Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Felder und Eichfelder

$$U_i(x, t + \delta_t) = \exp(i\delta_t E_i(x + \frac{1}{2}\delta_t)) U_i(x, t) \quad (\text{B.1})$$

$$E_i(x, t + \frac{1}{2}\delta_t) = E_i(x, t - \frac{1}{2}\delta_t) + 2\delta_t T^a \text{ImTr}[T^a \sum_{|j| \neq i} U_{ij}(x, t)] \\ + \frac{1}{2}\delta_t [j^i(x) + P_i j^i(x + i)] \quad (\text{B.2})$$

### Diskretisierung der Hard- Thermal- Loops über Kugelflächenfunktionen

Bewegungsgleichung:

$$W_{lm}(x, t + \delta_t) = W_{lm}(x, t - \delta_t) + \delta_t (2\delta_{l1} v_m^i E_{ave,i}(x, t) \\ - C_{lm'l'm'}^i [P_i W_{l'm'}(x + i, t) - P_{-i} W_{l'm'}(x - i, t)]) \quad (\text{B.3})$$

Strom:

$$j^i(x, t) = \frac{(am_D)^2}{4\pi} v_m^{i*} W_{1m}(x, t) \quad (\text{B.4})$$

Gaußsches Gesetz:

$$\sum_i \left( E_i(x + \frac{1}{2}\delta_t) - P_{-i} E_i(x - i + \frac{1}{2}\delta_t) \right) = \frac{(am_D)^2}{4\sqrt{\pi}} (W_{00}(x) + W_{00}(x + \delta_t)) \quad (\text{B.5})$$

### Diskretisierung der Hard- Thermal- Loops über platonische Körper

Bewegungsgleichung:

$$W_n(x + \delta_t) = W_n(x - \delta_t) + \delta_t v_n^i (2E_{ave,i}(x) - [P_i W_n(x + i) - P_{-i} W_n(x - i)]) \quad (\text{B.6})$$

Strom:

$$j^i(x, t) = \frac{(am_D)^2}{N_p} v_n^i W_n(x, t) \quad (\text{B.7})$$

Gaußsches Gesetz:

$$\sum_i \left( E_i(x, t + \frac{1}{2}\delta_t) - P_{-i} E_i(x - i, t + \frac{1}{2}\delta_t) \right) = \frac{(am_D)^2}{2N_p} \sum_n (W_n(x, t) + W_n(x, t + \delta_t)) \quad (\text{B.8})$$

**Verwendete Definitionen:**

$$U_{ij}(x, t) = U_j(x, t)U_i(x + j, t)U_j^+(x + i, t)U_i^+(x, t) \quad (\text{B.9})$$

$$E_{ave,i}(x, t) = \frac{1}{4} \left[ E_i(x, t - \frac{1}{2}\delta_t) + P_{-i}E_i(x - i, t - \frac{1}{2}\delta_t) \right. \\ \left. + E_i(x, t + \frac{1}{2}\delta_t) + P_{-i}E_i(x - i, t + \frac{1}{2}\delta_t) \right] \quad (\text{B.10})$$

$$P_i(x, t)\phi(x + i, t) = U_i(x, t)\phi(x + i, t)U_i^+(x, t) \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta_i(x, t)\phi(x, t) = U_i(x, t)\phi(x + i, t) - \phi(x, t) \quad (\text{B.12})$$

**Sphärische Koeffizienten:**

$$v_{mi} = \sqrt{\frac{4\pi}{6}}\delta_{i,1}(-\delta_{m,1} + \delta_{m,1}) + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\delta_{i,3}\delta_{m,0} + i\sqrt{\frac{4\pi}{6}}\delta_{i,2}(-\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \quad (\text{B.13})$$

Bei Diskretisierung der Hard- Thermal- Loops durch platonische Körper bezeichnen die  $v_{ni}$  die Eckpunkte des verwendeten Polyeders.

$$C_{lm'l'm'1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-C_{lm'l'm'}^+ + C_{lm'l'm'}^-) \quad (\text{B.14})$$

$$C_{lm'l'm'2} = \frac{i}{\sqrt{2}}(C_{lm'l'm'}^+ + C_{lm'l'm'}^-) \quad (\text{B.15})$$

$$C_{lm'l'm'3} = B(l', m')\delta_{l-1,l'}\delta_{m,m'} + B(l, m)\delta_{l+1,l'}\delta_{m,m'} \quad (\text{B.16})$$

mit

$$C_{lm'l'm'}^+ = A(l', m')\delta_{l-1,l'}\delta_{m-1,m'} - A(l, -m)\delta_{l+1,l'}\delta_{m-1,m'} \quad (\text{B.17})$$

$$C_{lm'l'm'}^- = A(l', -m')\delta_{l-1,l'}\delta_{m+1,m'} - A(l, m)\delta_{l+1,l'}\delta_{m+1,m'} \quad (\text{B.18})$$

$$A(l, m) = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2(2l+1)(2l+3)}} \quad (\text{B.19})$$

$$B(l, m) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad (\text{B.20})$$

# C Implementation

## Technische Implementation der Simulation

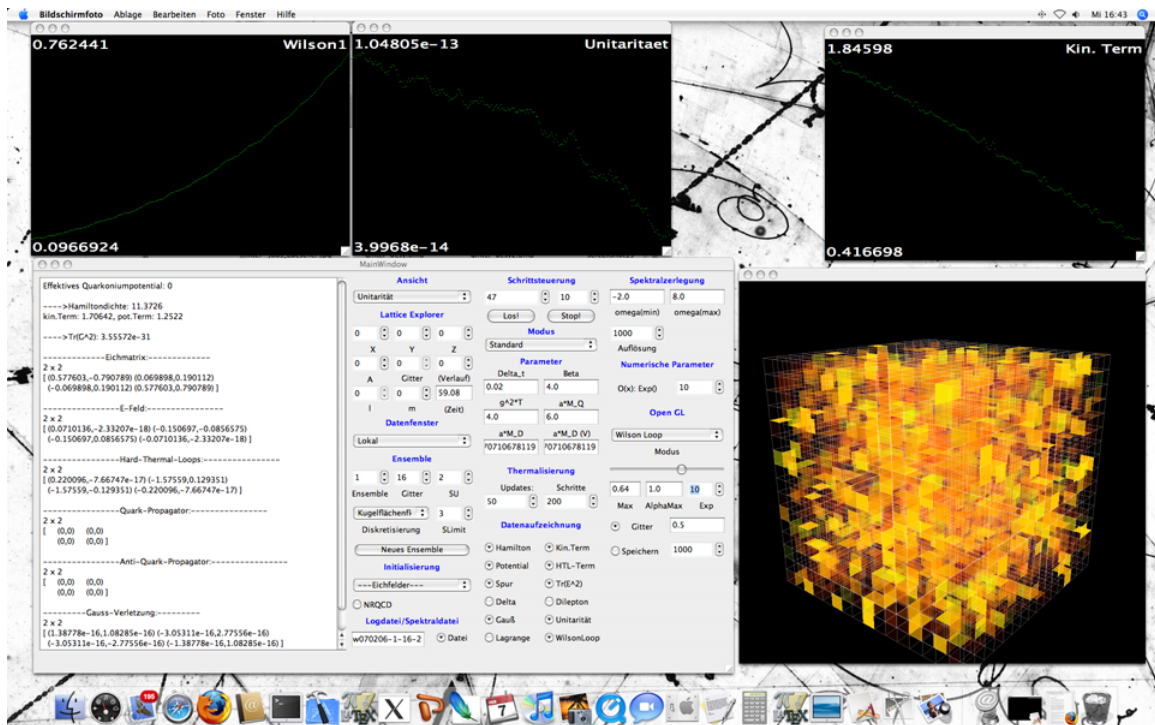


Abbildung C.1: Das Hauptfenster der Simulation

- Verwendete Compiler: gcc 4.0 unter Debian Linux 3.1 (Sarge) und Mac OS X (Tiger)
- Bibliothek zur schnellen Verarbeitung der Matrizen: Blitz ++ Version 0.9 (<http://www.oonumerics.org/blitz/>)
- Graphische Oberfläche: Qt 4.1 (<http://www.trolltech.com/>)
- Implementation der 3D-Darstellung: Open-GL
- Erzeugung von Zufallszahlen und Gaußverteilung gemäß "Numerical Recipes in C++" [30]



# Literaturverzeichnis

- [1] M. S. Turner, “Dark matter and dark energy: The critical questions,” arXiv:astro-ph/0207297.
- [2] E. Braaten and R. D. Pisarski, “Soft Amplitudes in Hot Gauge Theories: A General Analysis,” Nucl. Phys. B **337** (1990) 569.
- [3] J. P. Blaizot and E. Iancu, “Kinetic equations for long wavelength excitations of the quark - gluon plasma,” Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3376 [arXiv:hep-ph/9301236].
- [4] J. P. Blaizot and E. Iancu, “Energy momentum tensors for the quark - gluon plasma,” Nucl. Phys. B **421** (1994) 565 [arXiv:hep-ph/9401211].
- [5] V. P. Nair, “Hard thermal loops, gauged WZNW action and the energy of hot quark - gluon plasma,” Phys. Rev. D **48** (1993) 3432 [arXiv:hep-ph/9307326].
- [6] V. P. Nair, “Hamiltonian analysis of the effective action for hard thermal loops in QCD,” Phys. Rev. D **50** (1994) 4201 [arXiv:hep-th/9403146].
- [7] M. Laine, O. Philipsen, P. Romatschke and M. Tassler, “Real-time static potential in hot QCD,” arXiv:hep-ph/0611300. (JHEP: voraussichtlich 03.2007)
- [8] D. Bodeker, G. D. Moore and K. Rummukainen, “Chern-Simons number diffusion and hard thermal loops on the lattice,” Phys. Rev. D **61** (2000) 056003 [arXiv:hep-ph/9907545].
- [9] Peskin, Michael E.. Schroeder, Daniel V.. ”An Introduction to Quantum Field Theory”, Westview Press (1995)
- [10] Ryder, Lewis H.. ”Quantum Field Theory”, Second Edition, Cambridge University Press (1996)
- [11] Le Bellac, Michel. ”Thermal Field Theory”, Cambridge University Press (1996)
- [12] Kapusta, Joseph I.. Gale, Charles. ”Finite Temperature Field Theory: Principles and Applications”, Second Edition, Cambridge University Press (2006)
- [13] Münster, Gernot. Montvay, Istvan. ”Quantum Fields on a Lattice”, Cambridge University Press (1994)
- [14] J. P. Blaizot and E. Iancu, “The quark-gluon plasma: Collective dynamics and hard thermal loops,” Phys. Rept. **359** (2002) 355 [arXiv:hep-ph/0101103].

- [15] D. Y. Grigoriev and V. A. Rubakov, "SOLITON PAIR CREATION AT FINITE TEMPERATURES. NUMERICAL STUDY IN (1+1)-DIMENSIONS," Nucl. Phys. B **299** (1988) 67.
- [16] D. Bodeker, L. D. McLerran and A. Smilga, "Really computing nonperturbative real time correlation functions," Phys. Rev. D **52** (1995) 4675 [arXiv:hep-th/9504123].
- [17] S. K. Wong, "Field And Particle Equations For The Classical Yang-Mills Field And Particles With Isotopic Spin," Nuovo Cim. A **65S10** (1970) 689.
- [18] P. F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi and C. Manuel, "Deriving the hard thermal loops of QCD from classical transport theory," Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3461 [arXiv:hep-ph/9403403].
- [19] P. F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi and C. Manuel, "Classical transport theory and hard thermal loops in the quark - gluon plasma," Phys. Rev. D **50** (1994) 4209 [arXiv:hep-ph/9406285].
- [20] Povh, Rith, Scholz, Zetsche. "Teilchen und Kerne", 6. Auflage. Springer 2004
- [21] T. Matsui and H. Satz, "J/psi Suppression by Quark-Gluon Plasma Formation," Phys. Lett. B **178** (1986) 416.
- [22] Weisstein, Eric W. "Spherical Harmonic." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>
- [23] Arfken, G. "Spherical Harmonic" und "Integrals of the Products of Three Spherical Harmonics" §12.6 und 12.9 in "Mathematical Methods for Physicists", 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press
- [24] Weisstein, Eric W. "Wigner 3j-Symbol." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Wigner3j-Symbol.html>
- [25] Messiah, A. "Clebsch-Gordan (C.-G.) Coefficients and 3j-Symbols." Anhang C.I in Quantum Mechanics, Vol. 2. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, pp. 1054-1060
- [26] J. B. Kogut and L. Susskind, "Hamiltonian Formulation Of Wilson's Lattice Gauge Theories," Phys. Rev. D **11** (1975) 395.
- [27] Rothe, Heinz J.. "Lattice Gauge Theories. An Introduction.", Third Edition, World Scientific Publishing (2005)
- [28] J. P. Blaizot and E. Iancu, "Gauge Structure And Semiclassical Aspects Of Hard Thermal Loops," Nucl. Phys. B **434** (1995) 662 [arXiv:hep-ph/9405240].
- [29] J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter and M. E. Shaposhnikov, "Sphaleron transitions and baryon asymmetry: A Numerical real time analysis," Nucl. Phys. B **353** (1991) 346.
- [30] Press, Vetterling, Teukolsky, Flannery. "Numerical Recipes in C++", Second Edition, Cambridge University Press (2002)



# Danksagung

---

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um den Personen meinen herzlichen Dank auszusprechen, welche zum Gelingen dieser Arbeit besonders beigetragen haben. Ich bedanke mich bei

- Herrn Prof. Dr. Owe Philipsen für die interessante Aufgabenstellung und die viele Zeit, die er in die Betreuung meiner Arbeit investiert hat,
- meiner Freundin Steffi Blumenroth für die unverzichtbare Unterstützung während der gesamten Dauer der Diplomarbeit,
- Frau Gabriele Blumenroth, sowie Jens Langelage und Hubertus Becker für das Korrekturlesen der Arbeit,
- Babak Alikhani und Jens Langelage für die angenehme Arbeitsatmosphäre in unserem Büro.

Zu besonderem Dank bin ich auch meiner Mutter Dr. Gisa Tassler verpflichtet, die mir während meines gesamten Studiums eine wichtige Unterstützung war.

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Marcus Tassler  
Münster, 4. März 2007