

FRANK ZIELEN

**Rigorese und Perturbative
Konstruktion von ϕ^4 -Trajektorien**

Oktober 1998

Rigoreuse und Perturbative Konstruktion von ϕ^4 -Trajektorien

Als Diplomarbeit vorgelegt von
Frank Zielen

Institut für Theoretische Physik I
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Oktober 1998

Inhaltsverzeichnis

Einführung	7
1 Die RG	10
1.1 Grundlagen	11
1.1.1 Propagatoren der RG	14
1.2 Die Idee der RG	15
1.2.1 Operatoren der RG	17
1.3 Herleitung der RGT	23
1.3.1 Die perfekte masselose Gitterkovarianz ν_{perf}	23
1.3.2 Der hierarchische Propagator ν_{hier}	24
1.4 Das Werkzeug RG	26
2 ϕ^4-Trajektorie der HRG in $2 < D < 4$	29
2.1 Grundlagen	29
2.1.1 Die Banachräume \mathcal{V}_{UV} und \mathcal{V}_{QU}	32
2.1.2 Die Linearisierung \mathcal{DR}	34
2.2 Die ϕ^4 -Trajektorie	37
2.3 Störungstheorie	38
2.3.1 Die lineare β -Funktion für $2 < D < 4$	41
2.3.2 Die kubische β -Funktion für $D = 4$	43
2.4 Der Raum der Trajektorien	45
2.5 Existenz und Konstruktion eines Fixpunktes	50
2.6 Approximierte Fixpunkte	56
2.6.1 Interpolationsformeln	56
2.6.2 Baumgraphen	58
2.6.3 Explizite Formulierung der Baumgraphenkoeffizienten	63
2.6.4 Konvergenzgebiet der Baumgraphen	65
2.6.5 Das skalierende Potential	66
2.6.6 Die Baumgraphenschranke	68
2.6.7 Die Güte des skalierenden Potentials	73

2.7	Konstruktion der ϕ_3^4 -Trajektorie	77
2.8	Numerische Ergebnisse	84
3	ϕ^4-Trajektorie der GRG in $D = 3$	89
3.1	Der Operator $A^{(\infty)}$	89
3.2	Störungsrechnung auf dem Gitter	91
3.3	Explizite Berechnung reduzierter Impulskerne	97
3.3.1	Berechnung der irrelevanten Kerne	98
3.3.2	$\hat{V} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$	99
3.3.3	Eigenschaft differenzierbarer Impulskerne \hat{V}	103
3.3.4	Berechnung der marginalen Kerne	104
3.3.5	Berechnung der nicht-relevanten Kerne	105
3.4	Implizite Berechnung reduzierter Impulskerne	106
3.5	Doppelreihenentwicklung in $D = 3$ Dimensionen	108
4	ϕ_4^4-Trajektorie der HRG	109
4.1	Existenz der Trajektorie	110
4.2	Konstruktionsversuch	114
4.3	Existenz eines invarianten Balls	116
4.3.1	Ein anderer Weg	118
4.4	Die Kontraktionseigenschaft	120
4.5	Abschätzungen	122
	Zusammenfassung und Ausblick	125
	A Notation	127
	B Formelsammlung	128
B.1	Normalordnung	128
B.2	Gaußsche Maße	129

Einführung

Im Jahre 1982 erhielt K. G. WILSON den Nobelpreis für Physik als Würdigung seiner Forschungsarbeit [Wil71, WK74] auf dem Gebiet der Renormierungsgruppe (RG). Dieser nichtperturbative Zugang zur Theorie kritischer Phänomene entwickelte sich in den letzten 25 Jahren zu einem machtvollen Werkzeug in der Statistischen Mechanik und der Quantenfeldtheorie (QFT).

Das Grundprinzip der RG ist der Skalenbegriff. Die physikalisch relevanten Größen, die Response- oder Greensfunktionen, erhält man durch Ableiten der erzeugenden Funktionale, die in der Statistik über die Zustandssumme und in der QFT über das Pfadintegral definiert werden.¹ In diesen spiegelt sich die meistens hohe und nicht selten unendliche Zahl von Freiheitsgraden des betrachteten Systems wider. Die Berechnung dieser hochdimensionalen Objekte (Integrale, Summen) führt man auf eine schrittweise, durch einen Skalenparameter organisierte Ausintegration von Freiheitsgraden zurück. Dies geschieht z.B. im kubisch diskretisierten, euklidischen Ortsraum durch eine Teilsumation über Würfel, deren Kantenlänge ein endliches, ganzzahliges Vielfaches der Gitterkonstante beträgt [GK84]. Eine äquivalente Möglichkeit bietet die Multiskalen-Zerlegung des Propagators einer Theorie in Impuls-scheiben [BG95].

Die RG ist somit eine Skalentransformation, die eine Theorie, die über den Boltzmann-Faktor oder ein Wechselwirkungsfunktional definiert ist, auf eine effektive, ausgedünnte, gröbere Theorie abbildet. Ein wesentliches Merkmal dieser renormierten Theorie ist eine kleinere Korrelationslänge ξ' . Unter Anwendung der Blockspintransformation (BST) erkennt man den Zusammenhang²

$$\xi' = \frac{\xi}{L}. \quad (1)$$

¹Im weiteren Verlauf verwenden wir die Begriffe Zustandssumme und Pfadintegral gleichwertig.

² $L \in \mathbb{N}_2$ ist ein Vielfaches der Raumgitterkonstante a und folglich La die Seitenlänge eines Blocks.

Diese Eigenschaft macht die RG zu einem idealen Untersuchungswerkzeug kritischer Phänomene. Kontinuierliche Phasenübergänge (PÜ) zeichnen sich am kritischen Punkt durch eine Nichtanalytizität in einer zweiten partiellen Ableitung des thermodynamischen Potentials aus. Die divergierende Korrelationslänge als wesentliches Merkmal eines PÜ's 2. Ordnung bleibt nach (1) unter Anwendung einer Renormierungsgruppentransformation (RGT) divergent: kritische Systeme sind (fast) skaleninvariant. Alle Theorien, die in Einzugsbereichen von kritischen Fixpunkten einer RGT liegen, besitzen dasselbe Verhalten wie die assoziierten Fixpunkte und bilden sogenannte Universalitätsklassen, die nur durch wenige Parameter wie die Raumdimension oder die lokalen Freiheitsgrade charakterisiert werden. Kritische Systeme lassen sich unabhängig von ihren mikroskopischen Wechselwirkungen beschreiben.³

Von einer auf dem Gitter diskretisierten QFT fordert man, daß ihre Korrelationsfunktionen, aus denen sich die physikalischen Größen, wie z.B. die Masse m des leichtesten Teilchens, bestimmen, im Kontinuumslimit (Gitterkonstante $\rightarrow 0$) endliche Werte annehmen. Der Zusammenhang

$$\xi = \frac{1}{am} \quad (2)$$

[GK84] bedingt für $a \rightarrow 0$ folglich die Divergenz der Korrelationslänge. Die Gitterfeldtheorie muß kritisch sein und eignet sich als Proband für die RG.

Die Erzeugung nicht lokaler Terme in der effektiven Theorie kompliziert die mathematische Behandlung der RGT erheblich. Aus diesem Grund arbeitet man mit hierarchischen Approximationen [Dys69, GK84, Por90], die ein ähnliches kritisches Verhalten wie die vollen Modelle aufweisen und lokalitätserhaltend sind. Sie dienen als vereinfachtes Versuchsfeld zur Entwicklung neuer RG-Strategien und repräsentieren eine Klasse von eigenständigen, untersuchungswürdigen Systemen der Statistischen Physik.

Eine Hauptanwendung der RG ist die konstruktive Behandlung der ϕ^4 -artig gestörten skalaren, freien Feldtheorie. Nach einer Idee von C. WIECZERKOWSKI parametrisiert man die durch RG-Iteration erzeugten Flüsse in der ϕ^4 -Kopplung und konstruiert RG-invariante Kurven, die im freien Feld beginnen und tangential zur Störung liegen. RGT lassen sich somit einfach durch Entlangfahren der Trajektorie bestimmen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im ersten Kapitel geben wir eine Definition der RG auf dem Gitter und im hierarchischen Modell.

³Nur die Reichweite der Wechselwirkung ist noch von Belang.

Im zweiten Abschnitt liefern wir die rigorose Konstruktion der ϕ^4 -Trajektorie in der hierarchischen Approximation. Das benutzte Verfahren basiert auf dem *construction mapping theorem*. Wir beweisen seine Anwendbarkeit für alle Dimensionen $2 < D < 4$ und behandeln den Sonderfall $D = 3$ explizit.

Im dritten Kapitel präsentieren wir eine perturbative Berechnung der ϕ_3^4 -Kurve im Rahmen der RGT auf dem Gitter. Hierzu führen wir die Aufgabenstellung auf das bereits gelöste Problem im Kontinuum zurück.

Der vierte Abschnitt beschreibt den (nicht geglückten) Konstruktionsversuch der ϕ_4^4 -Trajektorie im hierarchischen Modell.

Abschließend geben wir eine Zusammenfassung und präsentieren Ansätze und Ideen für eine weitere Behandlung des Themas. Anhänge über elementare, mathematische Notationen und Formeln vervollständigen das Bild der Arbeit.

Zur besseren Lesbarkeit des Inhaltsverzeichnisses sowie des weiteren Textes möchten wir bereits an dieser Stelle die wichtigsten Abkürzungen im Rahmen der Renormierungsgruppe präsentieren. Es stehen im folgenden RG für Renormierungsgruppe, T für Transformation, H für hierarchisch und G für Gitter, so daß z.B. eine Übersetzung des Kürzels HRGT keine Probleme bereiten dürfte. Desweiteren ergänzen wir Abkürzungen nicht um Fall spezifische Endungen.

Kapitel 1

Die RG

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Erstellung eines Begriffs- und Formelapparates zur Behandlung skalarer Gitterfeldtheorien. Das Spin-Gitter-Modell ist das Demonstrationsobjekt der Statistischen Physik zur Untersuchung von PÜ und kritischen Phänomenen schlechthin. Prominentester Vertreter ist das D -dimensionale Ising-Modell, welches die spontane Magnetisierung eines Ferromagneten erklärt. Im Jahre 1925 bewies E. ISING, daß für $D = 1$ kein PÜ existiert. Die analytische Lösung L. ONSAGER's in zwei Dimensionen zeigt hingegen einen PÜ auf. Für $D = 3$ steht eine exakte Behandlung noch aus, aber die RG bewährt sich auch hier als ideales Werkzeug, z.B. zur Berechnung kritischer Exponenten. In dieser Arbeit legen wir die diskrete Darstellung einer skalaren QFT zugrunde.

Im nächsten Abschnitt geben wir dem Leser eine mathematische Definition der RG für Gitterfeldtheorien an die Hand. Diese stützt sich auf die BST, die von L. P. KADANOFF [Kad66] erdacht wurde. Dessen Urform basiert auf einem Ising-Gitter und Blockspins, die nur zwei unterschiedliche Werte annehmen. Unser Zugang findet sich z.B. in Arbeiten von K. GAWEDZKI und A. KUPIAINEN [GK84] oder C. WIECZERKOWSKI [Wie98].

Im Anschluß erarbeiten wir zwei Formen der RGT, die sich aus den zugrunde liegenden Modellklassen ableiten und nur die Transformation des Wechselwirkungsanteils beinhalten. Die eine bezieht sich auf Gittertheorien, deren freier Anteil durch den perfekten masselosen Propagator ν_{perf} beschrieben wird. Die andere ergibt sich für Systeme, deren kinetischer Part durch den hierarchischen Propagator ν_{hier} gegeben ist, und deren Potentiale lokal sind.

1.1 Grundlagen

Die Sprache der Teilchenphysik ist die Quantenfeldtheorie. Mit ihr ist es möglich, den für das Experiment so relevanten Streuquerschnitt zu berechnen, der die Fragen nach Reaktionswahrscheinlichkeiten und Zerfallslängen beantwortet. Die Streumatrix(-elemente) bestimmt man mit Hilfe der Reduktionsformel aus den amputierten Greensfunktionen [Ryd96], und die Korrelatoren gewinnt man durch Funktionalableitung aus dem von R. FEYNMAN erdachten und Nobelpreis gewürdigten Pfadintegral. Dieses Objekt wird durch eine Lagrangedichte oder die über die Lagrangedichte bestimmte Wirkung definiert. Lagrangedichte und Wirkungsfunktional nennen wir in Zukunft Theorie. In dieser werden die Teilchensorten durch die Dimensionalität der Felder und der assoziierten Algebra festgelegt. Wechselwirkungen können sowohl untereinander bestehen (inklusive Selbstwechselwirkungen) als auch von äußeren Quellen herrühren.

Zudem legen wir die euklidische Raum-Zeit in D Dimensionen (im allgemeinen $D = 2, 3, 4$) zugrunde. Die Konsequenz ist eine Vereinfachung der Rechnungen. Mittels Wick-Rotation lassen sich die Schwingerfunktionen (euklidische Greensfunktionen) in die physikalischen Wightmanfunktionen (auf dem Minkowski-Raum lebende n -Punkt-Funktionen) fortsetzen. Gegner des euklidischen Formalismus kritisieren, daß eine Integration der allgemeinen Relativitätstheorie unmöglich sei. Für die Fragestellungen der Hochenergiephysik ist das euklidische Pfadintegral jedoch besser geeignet als das minkowskische Pendant. Ein weiterer Bonuspunkt des Euklidischen Zugangs ist die formale Äquivalenz des Feynmanschen Integrals zur Zustandssumme in der klassischen Statistik. Durch sie entsteht eine Verbindung zu einem intensiv erforschten Zweig der Physik.

Als letztes diskretisieren wir die euklidische Raum-Zeit, indem wir statt des überabzählbaren \mathbb{R}^D ein unendliches D -dimensionales kubisches Gitter mit der Gitterkonstanten a einführen.

Definition 1.1.1 (Das Gitter Λ)

Es seien $a \in \mathbb{R}_*$ und

$$\Lambda(a) := a\mathbb{Z}^D \quad (1.1)$$

$$\Lambda(0) := \lim_{a \rightarrow 0} \Lambda(a) := \mathbb{R}^D \quad (1.2)$$

OBdA sei $a \in \mathbb{R}^+$, da $\Lambda(a) = \Lambda(-a)$. Der Gitterkontinuumslimes (1.2) ist formaler Natur.¹ Die Probleme eines Grenzübergangs zwischen abzählbaren

¹In welcher Norm sollte dieser auch ausgeführt werden?

und überabzählbaren Mengen behandeln wir im Abschnitt 3.1.

Die Vorteile der Gitterfeldtheorien sind offensichtlich: Schon 20 Jahre vor der Entwicklung des Pfadintegrals wurden Untersuchungen von Spin-Gittern, z.B. Ising-, XY- oder Heisenbergmodelle, zur Beschreibung kritischer Phänomene betrieben. Darüber hinaus werden die Wohldefiniertheit des Pfadintegrals und unter entsprechenden Annahmen (z.B. lokalisierte Wirkungen) auch seine Berechnung (z.B. Faktorisierung) vereinfacht. Der entscheidende Faktor ist jedoch, daß die auf dem Gitter $\Lambda(a)$ definierte Theorien eine eingebaute Impulsbetragsobergrenze von $\frac{2\pi}{a}$ besitzen, die man auch *UV-cutoff* nennt. Für $a \rightarrow 0$ verschwindet diese Beschneidung. Die Verwendung eines räumlich begrenzten Gitters hätte eine Untergrenze des Impulsbetrags zur Folge. Die Theorie besäße einen *IR-cutoff*.

Ziel jeder diskretisierten QFT ist es, daß die Korrelationsfunktionen im Kontinuumslimes endlich bleiben.

In dieser Arbeit wollen wir die einfachste aller Feldtheorien betrachten: ein reelles skalares Feld, dessen kinetischer bzw. freier Anteil durch einen Propagator beschrieben wird, ergänzt um ein beliebiges Selbstwechselwirkungspotential. Der Urvater aller skalaren Feldtheorien ist die Klein-Gordon Gleichung, welche freie, ungeladene Spin-0 Teilchen beschreibt. Wir beginnen mit der Definition des Feldraumes:

Definition 1.1.2 (Der Konfigurationsraum $\mathcal{H}(a)$)

$$\mathcal{H}(a) := \left\{ \phi : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{x \in \Lambda(a)} |\phi(x)| < \infty \right\} \quad (1.3)$$

Da $\Lambda(a)$ als endliches, kartesisches Produkt der abzählbaren Menge \mathbb{Z} abzählbar ist, existiert ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}(a)$ und dem Vektorraum der betragsintegriblen Folgen l_1 . Folglich ist auch $\mathcal{H}(a)$ ein Vektorraum und die Bilinearform

Definition 1.1.3 (Skalarprodukt auf $\mathcal{H}(a)$)

$$(\phi, \psi) := \int_{\Lambda(a)} d^D x \phi(x)\psi(x) := \sum_{x \in \Lambda(a)} a^D \phi(x)\psi(x) \quad (1.4)$$

vervollständigt $\mathcal{H}(a)$ zu einem Hilbertraum, da $l_1 \subsetneq l_2$ und $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$

[MV92].² Die Fourier-Transformation in den Impulsraum

$$\tilde{\phi}(p) = \int_{\Lambda(a)} d^D x e^{-ipx} \phi(x) \quad (1.5)$$

ist für alle $p \in \mathbb{R}^D$ wohldefiniert und gitterperiodisch bezüglich $\Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)$, so daß wir uns auf die Brillouin-Zone

Definition 1.1.4 (Der Impulsraum)

$$\tilde{\Lambda}(a) := \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]^D \quad (1.6)$$

beschränken können [MM94]. Der Impulskonfigurationsraum $\tilde{\mathcal{H}}(a)$ ist, wie die Bezeichnung schon andeutet, das Bild des Konfigurationsraumes $\mathcal{H}(a)$ unter Fourier-Transformation und auch ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes

$$(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) := \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \overline{\tilde{\phi}(p)} \tilde{\psi}(p) . \quad (1.7)$$

Die Rücktransformation in den Ortsraum schreibt sich als

$$\phi(x) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ipx} \tilde{\phi}(p) . \quad (1.8)$$

Als letzter Komponente des Pfadintegrals begegnen wir dem Wirkungsfunktional $S(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, \nu^{-1}\phi) + V(\phi)$. Die Eigenschaften des freien Propagators ν und der Wechselwirkung V notieren wir in folgendem

Satz 1.1.5 (Der freie Propagator und die Wechselwirkung)

Der freie Propagator $\nu \in L(\mathcal{H}(a))$ modulo Nullmoden³ ist eine Kovarianz und invariant gegenüber der Poincaré-Gruppe auf dem Gitter $\Lambda(a)$.⁴ Der Wechselwirkungsterm $Z = e^{-V}$ ist ein positives, reelles Funktional über $\mathcal{H}(a)$.

²Die kanonische Wahl $\mathcal{H}(a) \cong l_2$ ist natürlich auch möglich.

³Der physikalische Ausdruck „modulo Nullmoden“ entspricht dem Ausschluß des Operator kernels $\text{Ker}(\nu) = \{\phi \in \mathcal{H}(a) | \nu\phi = 0\}$ aus dem Integrationsgebiet $\mathcal{H}(a)$. Auf dem Quotientenraum $\mathcal{H}(a) \setminus \text{Ker}(\nu)$ ist ν dann injektiv und somit invertierbar. Diese Reduzierung des Pfadintegrals ist möglich, da der Operator kernel des Propagators bezüglich des Gaußschen Maßes eine Nullmenge darstellt - für $\nu \rightarrow 0$ konvergiert der Exponentialfaktor gegen Null.

⁴Das ist die Menge aller Gittertranslationen, -rotationen und -spiegelungen.

Ziehen wir den kinetischen Anteil der Wirkung zum formalen Maß des Pfadintegrals $\prod_{x \in \Lambda(a)} d\phi(x)$, erhalten wir ein Gaußsches Maß (B.2), und das erzeugende Funktional der Gitter-Greensfunktionen schreibt sich als

$$G(J) = \frac{\int_{\mathcal{H}(a)} d\mu_\nu(\phi) Z(\phi) e^{(\phi, J)}}{\int_{\mathcal{H}(a)} d\mu_\nu(\phi) Z(\phi)}. \quad (1.9)$$

1.1.1 Propagatoren der RG

Die RG bildet eine nackte Wirkung auf eine effektive Theorie ab. Durch Iteration dieses Prozesses erhält man eine Folge von Propagatoren und Wechselwirkungspotentialen. In diesem Abschnitt charakterisieren wir die Eigenschaften von Propagatoren 1.1.5 anhand ihrer Fourier-Transformierten.

Aufgrund der Linearität lassen sich die Propagatoren über ihre Operatorkerne darstellen,⁵ die auf $\Lambda(a) \times \Lambda(a)$ definiert sind. Aus der Gittertranslationsinvarianz folgt

$$\nu(x, y) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{\nu}(p). \quad (1.10)$$

Alle weiteren Eigenschaften charakterisieren wir über die Fourier-Transformierte $\tilde{\nu} : \tilde{\Lambda}(a) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.⁶ Aus der Spiegelsymmetrie ($\tilde{\nu} \in \mathbb{Z}_2(\tilde{\Lambda}(a))$)⁷ folgt, daß ν selbstadjungiert ist. Ein allgemeiner Propagator gemäß 1.1.5 sei durch

$$\tilde{\nu}(p)^{-1} = c_0 + c_1 p^2 + \sum_{\mu=1}^D O(p_\mu^4) \quad (1.11)$$

gegeben. Motiviert ist diese Darstellung durch die kanonische Diskretisierung des Standardpropagators der skalaren Feldtheorie $(-\Delta + m^2)^{-1}(x, y)$, dessen inverse Fourier-Transformierte [MM94]

$$\tilde{\nu}^{-1}(p) = 2a^{-2} \sum_{\mu=1}^D (1 - \cos(p_\mu a)) + m^2 = 4a^{-2} \sum_{\mu=1}^D \sin^2\left(\frac{p_\mu a}{2}\right) + m^2 \quad (1.12)$$

lautet. Zwei wichtige Eigenschaften für die Behandlung wechselwirkender Theorien sind die Beschränkungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nu}\|_1 &= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} |\tilde{\nu}(p)| < \infty && UV-cuttoff \\ \|\tilde{\nu}\|_\infty &= \sup_{p \in \tilde{\Lambda}(a)} |\tilde{\nu}(p)| < \infty && IR-cuttoff \end{aligned} \quad (1.13)$$

⁵ $\nu\phi(x) = \int_{\Lambda(a)} d^D y \nu(x, y) \phi(y)$

⁶Der Bildbereich \mathbb{R}_0^+ macht ν (modulo Nullmoden) zu einem positiv definiten Operator. Mit $\tilde{\nu}(p) = \tilde{\nu}(-p)$ zeigt man, daß ν reell ist.

⁷und der Translationsinvarianz

Gelten diese nicht, spricht man von UV- bzw. IR-Divergenzen. Da sich die Integration in der $\|\cdot\|_1$ Norm für $a > 0$ auf ein Kompaktum beschränkt, ergeben sich für Propagatoren gemäß (1.11) mit $|c_0| + |c_2| > 0$ in Dimensionen $D > 2$ endliche Ausdrücke. Sie besitzen einen *UV-cutoff*. Propagatoren mit $c_0 = 0$ sind IR-divergent.⁸

Der gitterinterne *UV-cutoff* ermöglicht eine perturbative Behandlung gestörter Theorien, da die in den zusammenhängenden Greensfunktionen auftauchenden Schleifen-Integrale $\nu(x, x)$ nicht divergieren [Ryd96].

Eine störungstheoretische Behandlung nicht regularisierter Theorien wird durch Renormierung der nackten Kopplungen (1) oder das Einfügen von Countertermen in den Lagrangian (2) möglich [Ryd96]. Bei diesen Methoden entwickelt man die auftretenden Divergenzen in den Schleifen-Integralen. Durch die Annahme unendlicher, nackter (renormierter) Kopplungen erzeugt man endliche, physikalische Größen, wie z.B. die Masse (1), oder die zusätzlichen, divergenten Counterterme heben die Divergenzen des Propagators auf (2). Diese Form der RG ist äquivalent mit dem Zugang von K. GAWEDZKI und A. KUPIAINEN, den wir im nächsten Kapitel erläutern.

Man mag sich abschließend fragen, warum wir den Propagatorbegriff so allgemein halten? Im Kontinuum betreibt man skalare Feldtheorie mit dem masselosen oder massebehafteten Klein-Gordon Operator. Abweichungen von diesem Propagator-Standard können in das Wechselwirkungspotential geschrieben werden.⁹ Da die Diskretisierung des Laplace-Operators nicht eindeutig ist, existiert nicht *der* Gitterpropagator des skalaren Feldes. Hierzu vergleiche man z.B. den kanonisch diskretisierten masselosen ($m = 0$) Propagator (1.12) mit der perfekten masselosen Kovarianz ν_{perf} (1.43). Unsere allgemeine Form (1.11) trägt diesem Umstand Rechnung und erlaubt darüber hinaus die Verwendung abstrakterer Propagatoren.

1.2 Die Idee der RG

In diesem Kapitel leiten wir die auf der BST basierende RGT für Gitterfeldtheorien her. Wir orientieren uns dabei an [GK84, Wie98] und beginnen mit einer Re-Definition des Pfadintegrals.

⁸Im Kontinuum ($a = 0$) sind obige Normen nicht äquivalent! Zwei Gegenbeispiele sind z.B. $\tilde{\nu}(p) = 1$ und $\tilde{\nu}(p) = |p|^{-(D-1)} e^{-|p|^2}$. Für $D = 1$ gilt jedoch, daß $\|\cdot\|_1$ schwächer ist.

⁹Im allgemeinen möchte man jedoch, daß $Z = 1$ weiterhin die ungestörte Theorie beschreibt.

Satz 1.2.1

Es sei H ein reelles Funktional über $\mathcal{H}(a)$ definiert durch

$$H(\phi) = \frac{\int d\mu_\nu(\zeta) Z(\phi + \zeta)}{\int d\mu_\nu(\zeta) Z(\zeta)}. \quad (1.14)$$

Dann gilt für alle $J \in \mathcal{H}(a)$

$$G(J) = e^{(J, \nu J)} H(\nu J). \quad (1.15)$$

Eine einfache Substitution liefert den Beweis [Geh97]. In Zukunft arbeiten wir mit dem Funktional H , aus dem die Quelle J entfernt wurde. H ist das erzeugende Funktional der Korrelationsfunktionen, deren äußere Propagatoren trunziert sind (amputierte Greensfunktionen).

Ein Trick zur Berechnung von $H(\phi)$ liegt nun in der Reorganisierung der Integration. Statt sofort „in einem Rutsch“ über alle möglichen Feldkonfigurationen aus $\mathcal{H}(a)$ zu summieren (diese Anzahl ist im übrigen überabzählbar, da die Spins aus \mathbb{R} stammen), führen wir diese Aufgabe schrittweise aus.

Wir teilen das (unendlich große) Gitter $\Lambda(a)$ in kubische Blöcke der Seitenlänge La , wobei $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und wir L den Blockparameter nennen. Durch L führen wir eine Skala ein.

Nun zerlegen wir die Gesamtintegration. Dazu betrachten wir bzgl. $\mathcal{H}(a)$ den Untervektorraum $\mathcal{H}_0(a)$, dessen Elemente die Eigenschaft auszeichnet, daß ihre Blockspins (d.h. die Mittelwerte der Spins bzgl. der oben erklärten Blöcke) verschwinden. Betrachten wir desweiteren den Untervektorraum $\mathcal{H}_c(a)$, dessen Felder auf Blöcken konstant sind, so sind wir in der Lage, das Pfadintegral in einfacher Weise zu zerlegen.

$$\int_{\mathcal{H}(a)} \mathcal{D}[\psi] f(\psi) = \int_{\mathcal{H}_c(a)} \mathcal{D}[\phi] \int_{\mathcal{H}_0(a)} \mathcal{D}[\zeta] f(\phi + \zeta) \quad (1.16)$$

Die Integration über $\mathcal{H}_0(a)$ entspricht einer Ausintegration kurzreichweitiger Wechselwirkungen ($\leq La$), sogenannter Fluktuationen. Wir entfernen Impulse $|p| \in [\frac{2\pi}{aL}, \frac{2\pi}{a}]$ aus der Theorie. Dieses Verfahren läßt sich iterieren, wenn man weitere Blockungen mit den Skalenparametern L^2, L^3 usw. ausführt.

Es ist günstiger, den Feldkonfigurationsraum $\mathcal{H}_c(a)$ nach $\mathcal{H}(a)$ zu übertragen¹⁰ und wiederum eine Blockung der Größe L vorzunehmen. Auf diese Weise gestaltet sich eine Iteration der BST wesentlich angenehmer. Im

¹⁰Diese Transformation ist möglich, da $\mathcal{H}_c(a) \cong \mathcal{H}(a)$.

nächsten Abschnitt kleiden wir dieses Vorgehen in ein mathematisches Gewand.

Das Prinzip der BST folgt Überlegungen im Ortsraum. Die schrittweise Blockung der Spins ist jedoch nichts anderes als die Multiskalen-Zerlegung des freien Propagators im Impulsraum [BG95, Geh97]. Dazu schreiben wir den Propagator ν als (unendliche) Summe über Fluktuationspropagatoren ν_k , deren Spektrum jeweils auf einer kompakten Impulsschale $a_{k+1} \leq |p| \leq a_k$ liegt. Es gelten die Randbedingungen $a_0 = \frac{2\pi}{a}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Eine Integration über die regulären Kovarianzen ν_k ist problemlos. Das (nicht normierte) Pfadintegral zerfällt nach der Faltungsformel für Gaußsche Maße (B.14).

$$\int d\mu_{\sum_{k=0}^N \nu_k}(\phi) Z(\phi) = \int \prod_{k=0}^N d\mu_{\nu_k}(\zeta_k) Z(\phi + \sum_{k=0}^N \zeta_k) \quad (1.17)$$

An dieser Stelle erkennt man nun deutlich die Auswirkungen der Propagator *cutoff*'s (1.13). Die UV-Schranke liefert uns die Impulsobergrenze $\frac{2\pi}{a}$.¹¹ Im Falle einer IR-Divergenz, die aufgrund der Struktur (1.11) nur bei $p = 0$ auftreten kann, müssen wir uns mit der Untergrenze der Impulsscheiben a_N an den Pol herantasten und zur Berechnung des Funktionalintegrals über ν den IR-Limes $N \rightarrow 0$ ausführen. Ist $\tilde{\nu}$ in $p = 0$ regulär, benutzt man günstigerweise eine endliche (z.B. äquidistante) Multiskalen-Zerlegung des Propagators.

Die Berechnung des Pfadintegrals oder das Ausführen des IR-Limes entsprechen somit einer unendlichen Iteration von BST. Die korrespondierende Skalenzerlegung des Propagators wird durch den Blockparameter L in der Form $a_k = \frac{2\pi}{aL^k}$ organisiert. Dieses nichtperturbative Lösungsverfahren formulieren wir nun explizit.

1.2.1 Operatoren der RG

Wir beginnen mit der Definition des Blockmitteloperators B_L ¹², welcher die (normierten) Blockspins berechnet und auf das gröbere Gitter $\Lambda(La)$ überträgt. Im folgenden sei $L \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ vorausgesetzt.

¹¹In der nichtdiskreten Theorie müßten wir den Propagator in eine Impulsfolge über \mathbb{Z} zerlegen, und der UV-Limes entspräche der Untergrenze $-\infty$.

¹²Den Index notieren wir nur, wenn er benötigt wird.

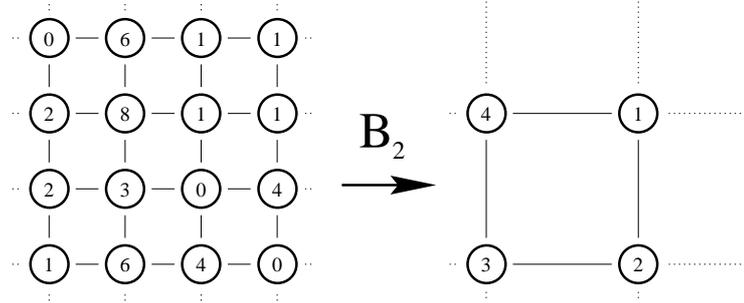


Abbildung 1.1: Die Wirkung des Blockmitteloperators B_L in 2 Dimensionen. Die Zahlen in den Kreisen sind die reellen Spins.

Definition 1.2.2 (Der Blockmitteloperator $B : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(La)$)

$$B(\phi)(x') = \frac{1}{\|\mathbb{B}(x')\|} \int_{\mathbb{B}(x')} d^D y \phi(y) \quad (1.18)$$

$$\mathbb{B}(x') = \left\{ y \in \Lambda(a) \mid La \left[\frac{y}{La} \right] = x' \right\} \quad (1.19)$$

$$\|\mathbb{B}(x')\| = (La)^D \quad (1.20)$$

Die Wirkung von B_L ¹³ verdeutlicht man sich am besten durch Abbildung 1.1. Obige Wahl der Normierung (Division durch das Blockvolumen liefert einen Faktor L^{-D}) scheint auf den ersten Blick willkürlich, doch wird erst auf diese Weise der adjungierte Operator B_L^\dagger zu einem Re-Blockoperator.

Satz 1.2.3 (Der Blockoperator $B_L^\dagger : \mathcal{H}(La) \rightarrow \mathcal{H}(a)$)

$$B_L^\dagger(\phi')(x) = \phi' \left(La \left[\frac{x}{La} \right] \right) \quad (1.21)$$

Beweis:

$$(B_L^\dagger \phi', \phi) = \int_{\Lambda(a)} d^D x \phi' \left(La \left[\frac{x}{La} \right] \right) \phi(x)$$

¹³ $\|\cdot\|$ beschreibt das Volumen einer Teilmenge des Gitters $\Lambda(a)$ (beliebige Vereinigung von Einheitsblöcken). Damit $\|\cdot\|$ zu einer Norm wird, muß man die Menge aller Teilmengen mit endlichem Volumen bzgl. der Äquivalenzrelation $A \sim B : \Leftrightarrow \|A\| = \|B\|$ auf den korrespondierenden Quotientenraum einschränken und eine Abbildung wie folgt definieren: $\forall A, B \exists C : \|C\| = \|A\| + \|B\|$. Inverse Elemente werden adjungiert (z.B. Farben + korrespondierende Verknüpfung). Eine skalare Multiplikation muß entsprechend erklärt werden. Der so konstruierte \mathbb{R} -Vektorraum ist isomorph zu \mathbb{R} .

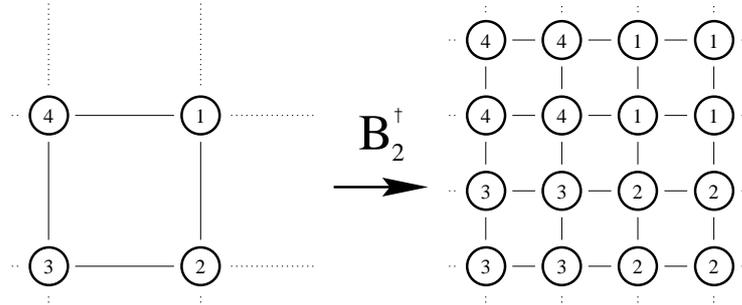


Abbildung 1.2: Die Wirkung des adjungierten Blockmitteloperators B_L^\dagger in 2 Dimensionen

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\mathbb{B}(x')\|} \int_{\Lambda(La)} d^D x' \int_{\mathbb{B}(x')} d^D y \phi' \left(La \left[\frac{y}{La} \right] \right) \phi(y) \\
&= \int_{\Lambda(La)} d^D x' \phi'(x') \frac{1}{\|\mathbb{B}(x')\|} \int_{\mathbb{B}(x')} d^D y \phi(y) \\
&= (\phi', B\phi)
\end{aligned}$$

□

Funktionen $B_L^\dagger(\phi')$ sind auf Blöcken $\mathbb{B}(x')$, $x' \in \Lambda(La)$ konstant. Dies verdeutlicht auch Abbildung 1.2. Als nächstes konstruieren wir einen Operator, mit dessen Hilfe man ein Gitter streckt bzw. staucht.

Definition 1.2.4 (Die Dilatationsoperatoren S und S^\dagger)

Es sei $\sigma \in \mathbb{R}$. Wir definieren und erhalten

$$S : \mathcal{H}(La) \rightarrow \mathcal{H}(a) \quad S(\phi')(x) = L^\sigma \phi'(Lx) \quad (1.22)$$

$$S^\dagger : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(La) \quad S^\dagger(\phi)(x') = L^{\sigma-D} \phi\left(\frac{x'}{L}\right). \quad (1.23)$$

Den Exponenten σ , den wir im folgenden skalierende Dimension nennen, lassen wir noch unbestimmt. Die Abbildungsvorschrift ist unabhängig von der Wahl des Definitionsbereiches und der zugehörigen Wertemenge, so daß S auch für $a = 0$ definiert ist und zu einer selbstabbildenden Kontinuumsfunktion wird.

Mit Hilfe der Operatoren B und S ist es nun möglich, einen auf $\mathcal{H}(a)$ selbstabbildenden Blockoperator abzuleiten, der das geblockte Feld bzgl. der Gitterkonstante wieder auf die ursprüngliche Größe reduziert bzw. ein Feld vergrößert und entstehende Blöcke mit ursprünglichen Eckwerten auffüllt. Wir definieren kanonisch:

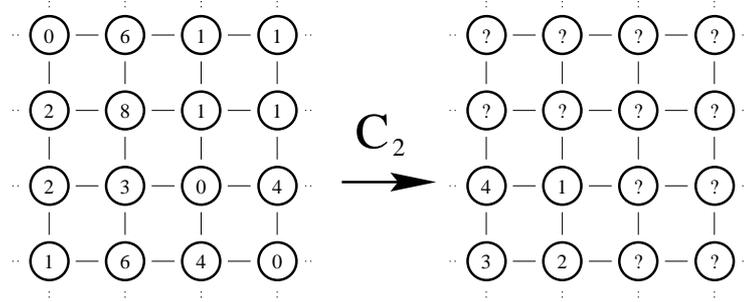


Abbildung 1.3: Die Wirkung des Blockmitteloperators C_L in 2 Dimensionen (ohne skalierenden Faktor)

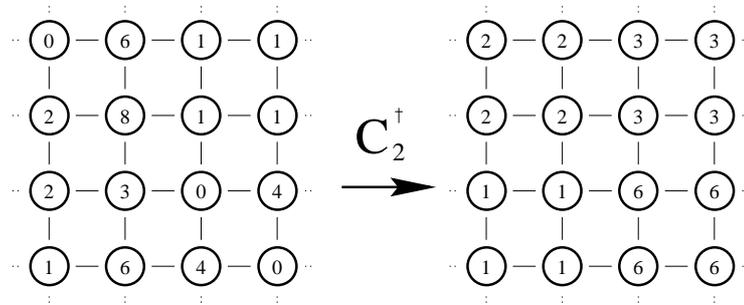


Abbildung 1.4: Die Wirkung des adjungierten Blockmitteloperators C_L^\dagger in 2 Dimensionen (ohne skalierenden Faktor)

Definition 1.2.5 (Die Blockmitteloperatoren C und C^\dagger)

$$C : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(a) \quad C := S \circ B \quad \Rightarrow \quad (1.24)$$

$$C(\phi)(x) = \frac{L^\sigma}{\mathbb{B}(Lx)} \int_{\mathbb{B}(Lx)} d^D y \phi(y) \quad (1.25)$$

$$C^\dagger(\phi)(x) = L^{\sigma-D} \phi \left(a \left[\frac{x}{La} \right] \right) \quad (1.26)$$

Die Wirkungsweise der beiden Operatoren entnimmt man den Abbildungen 1.3 und 1.4. Man erkennt deutlich, daß C^\dagger gerade die von uns definierte Aufgabe erfüllt, die in einem Feld gespeicherten Spins auf Blöcke zu verteilen. Wir wollen ein geblocktes Feld $C^\dagger\phi$ (manchmal auch nur ϕ) in Zukunft Hintergrund- oder Blockfeld nennen. Die Operatorkerne schreiben sich als

$$C(x, y) = L^{\sigma-D} \delta_{x, \lfloor \frac{y}{La} \rfloor a} \quad C^\dagger(x, y) = C(y, x) = L^{\sigma-D} \sum_{z \in \mathbb{B}(Ly)} \delta_{x, z} . \quad (1.27)$$

Für die Komposition zweier Blockoperatoren gilt:

$$C_L C_{L'} = C_{LL'} \quad (1.28)$$

Für den Beweis setze man zur Vereinfachung $a = 1$ und $D = 1$. OBdA sei $x \in \mathbb{N}_0$. Es existieren die eindeutigen Darstellungen

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{\infty} (LL')^k x_k & x_k &= 0, \dots, LL' - 1 \\ x_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (L')^k \tilde{x}_k & \tilde{x}_k &= 0, \dots, L' - 1, \end{aligned} \quad (1.29)$$

aus denen man die Relationen

$$\left[\frac{x}{LL'} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (LL')^k x_{k+1} \quad (1.30)$$

$$\left[\frac{x}{L'} \right] = L \sum_{k=0}^{\infty} (LL')^k x_{k+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (L')^k \tilde{x}_{k+1}}_{\leq \frac{x_0}{L'} < L} \quad (1.31)$$

ableitet. $[L^{-1} [(L')^{-1} x]]$ bestimmt sich mit Hilfe von (1.31) zu (1.30). Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die Nichtinvertierbarkeit von C (und folglich auch C^\dagger) auf $\Lambda(a)$, da ganze Klassen von Feldern mit gleichen Blockmittelwerten existieren. Eine interessante Eigenschaft ist die Projektoreigenschaft von $L^{2(D-\sigma)} C C^\dagger$. Mit Hilfe der bildlichen Vorstellung ist diese Eigenschaft klar, sie rechnet sich jedoch auch leicht mittels (1.27) nach [Rol96]. Unter Benutzung der Blockmitteloperatoren C und C^\dagger definieren wir die wesentlichen Objekte der RG auf dem Gitter.

Definition 1.2.6 (RGT-Operatoren)

$$\begin{aligned} u &:= C \nu C^\dagger && \text{geblockte Kovarianz} \\ A &:= \nu C^\dagger u^{-1} && A\text{-Kern} \\ \Gamma &:= \nu - A u A^\dagger && \text{Fluktuationskovarianz} \end{aligned} \quad (1.32)$$

u modulo Nullmoden (!) ist eine Kovarianz und invertierbar. Weitere Auskünfte erhalten wir über die Kerndarstellungen im Orts- und Impulsraum:

Satz 1.2.7

$$u(x, y) = L^{2\sigma} \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D z}{\|\mathbb{B}(Lx)\|} \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D w}{\|\mathbb{B}(Ly)\|} \nu(z, w) \quad (1.33)$$

$$\tilde{u}(p) = \sum_{Q \in p + \Lambda(\frac{2\pi}{a})_L} \left(\prod_{\mu=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{Q_\mu a}{2}\right)}{L^2 \sin^2\left(\frac{Q_\mu a}{2L}\right)} \right) L^{2\sigma-D} \tilde{\nu}\left(\frac{Q}{L}\right) \quad (1.34)$$

Es ist $\Lambda(\frac{2\pi}{a})_L := \Lambda(\frac{2\pi}{a})/\Lambda(\frac{2\pi L}{a}) = \{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}) \mid 0 \leq Q_\mu < \frac{2\pi L}{a}\}$. An der Produktdarstellung des Sinus [FL94]

$$\prod_{\mu=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{Q_\mu a}{2}\right)}{L^2 \sin^2\left(\frac{Q_\mu a}{2L}\right)} = \prod_{\mu=1}^D \prod_{n \in \mathbb{N} - L\mathbb{N}} \left\{ 1 - \left(\frac{Q_\mu a}{2\pi n}\right)^2 \right\}^2 \quad (1.35)$$

erkennt man, daß sich Pole von ν auf u vererben, jedoch keine neuen Singularitäten entstehen. Es gilt die Abschätzung:

$$|\tilde{u}(p)| \leq \max_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})/\Lambda(\frac{2\pi L}{a})} L^{2\sigma} \left| \tilde{\nu}\left(\frac{p+P}{L}\right) \right| \quad (1.36)$$

A ist eine ausgeschmierte Version des Operators C^\dagger und Rechts-Inverses zu C . Somit ist AC ein Projektor¹⁴ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}(a)$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle \phi, \psi \rangle := (\phi, \nu^{-1}\psi)$ (da ν positiv ist, ist dies wirklich ein Skalarprodukt).

Die Fluktationskovarianz Γ erfüllt die Eigenschaften einer Kovarianz. Mittels der Darstellung $\Gamma = (1 - AC)\nu(1 - AC)^\dagger$ folgt, daß Γ semidefinit ist. Schließen wir den Kern von $(1 - AC)^\dagger$ aus dem Pfadintegral aus, so ist Γ Kovarianz.

Ihren Namen verdankt die Fluktationskovarianz der Eigenschaft

$$\Gamma C^\dagger = 0, \quad (1.37)$$

d.h. sie verschwindet auf Hintergrundfeldern. Γ wirkt nur auf einen Fluktationsanteil.

Leider zeigen wir in dieser Arbeit nicht, daß $\|\tilde{\Gamma}\|_1 < \infty$ - der Fluktationspropagator also einen *IR-cutoff* besitzt. In der Kontinuumstheorie [Wie97d] definiert man Γ über die Impulsscheibenmethode, indem man den freien, masselosen Propagator $\frac{1}{p^2}$ mit einer L -abhängigen, exponentiellen IR- und UV-Abschneidefunktion versieht, die im wesentlichen Impulse mit $L^{-1} < |p| < 1$ herausfiltert: $\frac{1}{p^2}(e^{-p^2} - e^{-L^2 p^2})$.

Schön wäre auch ein Beweis, der zeigt, daß die Fourier-Transformierte von Γ primär den durch $\frac{2\pi}{aL} \leq |p| \leq \frac{2\pi}{a}$ definierten, kompakten Träger besitzt.

¹⁴ $(AC)^\dagger = \nu^{-1}AC\nu$

1.3 Herleitung der RGT

Mit Hilfe der Faltungsformel für Gaußsche Maße (B.14) und der Zerlegung der Kovarianz ν in einen geblockten Teil AuA^\dagger und einen Fluktuationsanteil Γ läßt sich die geplante Aufteilung des Pfadintegrals problemlos durchführen:

$$\int d\mu_\nu(\phi) Z(\psi + \phi) = \int d\mu_{AuA^\dagger}(\xi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\psi + \xi + \zeta) \\ \stackrel{\xi=A\phi}{=} \int d\mu_u(\phi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\psi + A\phi + \zeta) \quad (1.38)$$

Nun zerlegen wir Zähler und Nenner des erzeugenden Funktionals H und erhalten

$$H(A\phi) = \frac{\int d\mu_u(\zeta) R(Z)(\phi + \zeta)}{\int d\mu_u(\zeta) R(Z)(\zeta)} \quad (1.39)$$

$$R(Z)(\phi) = \frac{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\phi + \zeta)}{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\zeta)}. \quad (1.40)$$

Unsere Teilintegration hat dazu geführt, daß wir in H nun eine effektive Theorie behandeln, die durch den Propagator u und die Wechselwirkung $R(Z)$ beschrieben wird. Die Transformation des Wechselwirkungsanteils nennen wir Gitter-RGT (GRGT). Die Wechselwirkungen, gemessen in der Korrelationslänge, sind in $R(Z)$ um den Faktor $\frac{1}{L}$ kurzreichweitiger.

Im folgenden präsentieren wir die beiden Theorieklassen, die wir in dieser Arbeit behandeln.

1.3.1 Die perfekte masselose Gitterkovarianz ν_{perf}

Wir konstruieren den Propagator ν_{perf} , der Fixpunkt der Abbildung $\nu \rightarrow u(\nu)$ ist. Auf diese Weise müssen wir nur noch die RGT des Potentials betrachten.

Mittels der Folge $\nu_0 := \nu$, $\nu_n := C\nu_{n-1}C^\dagger$ für $n \in \mathbb{N}$ und der Eigenschaft (1.28) formulieren wir eine unendliche Blockung der Kovarianz wie folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{L^n} \nu C_{L^n}^\dagger = \lim_{L \rightarrow \infty} C_L \nu C_L^\dagger \quad (1.41)$$

Existiert dieser Limes, ν_{perf} genannt, ist er per Konstruktion ein Fixpunkt der Propagatortransformation. Unter der Voraussetzung

$$\sigma = \frac{D}{2} - 1 \quad (1.42)$$

fließen die IR-divergenten masselosen Kovarianzen (1.11) mit $c_0 = 0$ und $c_2 = 1$, für $L \rightarrow \infty$ in den freien, über Gitterkuben gemittelten Kontinuumspropagator

$$\nu_{perf}(x, y) = \int_{\mathbb{B}_E} \frac{d^D \bar{x}}{a^D} \int_{\mathbb{B}_E} \frac{d^D \bar{y}}{a^D} (-\Delta)^{-1}(x + \bar{x}, y + \bar{y}) . \quad (1.43)$$

Hierbei ist $\mathbb{B}_E = [0, a]^D$. ν_{perf} ist die perfekte, masselose Kovarianz.¹⁵ Obwohl sie eine masselose Theorie beschreibt, können wir Massenkorrekturen problemlos in das Potential integrieren. Sie werden von der RGT (sofern $Z \neq 1$) sowieso generiert. In allen folgenden Gitter-Rechnungen wollen wir nur noch ν_{perf} benutzen und uns auf die Transformation des Boltzmann-Faktors beschränken.

1.3.2 Der hierarchische Propagator ν_{hier}

Ein praktisches Problem der RG ist das Auftreten nichtlokaler Terme in der effektiven Wechselwirkung $R(Z)$, selbst wenn Z lokal ist. Um dies zu vermeiden, führen wir den hierarchischen Propagator ν_{hier} ein, dessen Modelle unter RGT Lokalität bewahren. Der große Nachteil ist die fehlende Gittertranslationsinvarianz. Weitere Informationen finden sich z.B. in [PPW94, Por93].

Für $D > 2$ definieren wir

Definition 1.3.1 (Die hierarchische Kovarianz)

$$\nu_{hier}(x, y) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} L^{(2-D)n} \delta_{\left[\frac{x}{L^n a}\right], \left[\frac{y}{L^n a}\right]} \quad (1.44)$$

Natürlich erhalten wir nur für $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eine positive Form. Die Delta-Funktion ist identisch eins, wenn x und y nach der n -ten Blockung im selben Hyperwürfel liegen. Der so definierte Kern ist für alle $x, y \in \Lambda(a)$ endlich, denn es gilt

$$\nu_{hier}(x, y) = \frac{\gamma}{a^D} \frac{L^{(2-d)N(x,y)}}{1 - L^{(2-d)}} \quad (1.45)$$

mit

$$N(x, y) = \min \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \mid \left[\frac{x}{L^n a} \right] = \left[\frac{y}{L^n a} \right] \right\} . \quad (1.46)$$

¹⁵Sie ist in der Beziehung perfekt, das sie die optimale Diskretisierung des masselosen, inversen Klein-Gordon Operators $(-\Delta)^{-1}$ auf dem Gitter darstellt. Die physikalischen Vorhersagen sind unabhängig vom *cutoff*, also der Gitterkonstanten. Das Spektrum ist folglich exakt.

Der Beweis besteht aus einer einfachen Anwendung der geometrischen Reihe. Die Formulierung (1.45) findet sich auch bei [GK84]. Um die nicht vorhandene Gittertranslationsinvarianz zu zeigen, verschiebt man ein Gittertupel (x, y) , das in einem L -Kubus liegt, so, daß x und y in disjunkten L -Würfeln leben. Für $|x - y| \gg 1$ gilt zwar mit großer Wahrscheinlichkeit $|x - y| \sim L^{N(x,y)} a$, so daß $\nu_{hier} \sim |x - y|^{2-d}$ und neben Translationsinvarianz ein ähnliches IR-Verhalten wie bei $-\Delta^{-1}$ vorliegt, aber die Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen zerstören dieses Bild.

Man erkennt ferner, daß die hierarchische Kovarianz 1.3.1 über eine Multiskalen-Zerlegung definiert ist und dasselbe kritische Verhalten (*UV-cutoff*, IR-divergent) wie ein allgemeiner, masseloser ($c_0 = 0$) Propagator (1.11) aufweist.

Nun betrachten wir den geblockten Operator $C^\dagger \nu_{hier} C$. Mittels (1.27) berechnen wir

$$\begin{aligned} C^\dagger \nu_{hier} C(x, y) &= \int d^D z \int d^D w C(z, x) \nu_{hier}(z, w) C(w, y) \\ &= L^{2(\sigma-D)} \nu_{hier}\left(\left[\frac{x}{La}\right] a, \left[\frac{y}{La}\right] a\right) \\ &= \gamma L^{2(\sigma-D)} \sum_{n=0}^{\infty} L^{(2-d)n} \delta_{\left[\frac{x}{L^{n+1}a}\right], \left[\frac{y}{L^{n+1}a}\right]} \\ &= L^{2\sigma-D-2} (\nu_{hier}(x, y) - \gamma \delta_{x,y}) \end{aligned}$$

Bestimmen wir die skalierende Dimension zu

$$\sigma = 1 + \frac{D}{2}, \quad (1.47)$$

so erhalten wir folgende Zerlegung unseres hierarchischen Propagators:

$$\nu_{hier} = \gamma \text{id} + C^\dagger \nu_{hier} C \quad (1.48)$$

Wir zerlegen das erzeugende Funktional H (1.14) mittels (B.14)¹⁶ und erhalten als Pendant zu (1.38)

$$\int d\mu_{\nu_{hier}}(\phi) Z(\psi + \phi) = \int d\mu_{\nu_{hier}}(\phi) \int d\mu_{\gamma \text{id}}(\zeta) Z(\psi + C^\dagger \phi + \zeta). \quad (1.49)$$

Der hierarchische Propagator ist somit ein Fixpunkt des Kovarianzflusses, und wir müssen unser Augenmerk nur noch auf die effektive Wechselwirkung

¹⁶ $C^\dagger \nu C$ ist (modulo Nullmoden) positiv.

legen. Wir benutzen die Ultralokalität des Fluktuationspropagators γ_{id} , indem wir lokale Wechselwirkungen betrachten. Es sei

$$Z(\phi) = \prod_{x \in \Lambda(a)} z(\phi(x)) . \quad (1.50)$$

Es folgt für die unnormierte RGT:

$$\begin{aligned} R(Z)(\phi) &:= \int d\mu_{\gamma_{\text{id}}}(\zeta) Z(C^\dagger \phi + \zeta) \\ &= \prod_{x \in \Lambda(a)} \prod_{z \in \mathbb{B}(Lx)} \mathcal{N} \int d\zeta(z) e^{-\frac{1}{2\gamma} \zeta(z)^2} z \left(L^{1-\frac{D}{2}} \phi(x) + \zeta(z) \right) \\ &= \prod_{x \in \Lambda(a)} \mathcal{N}' \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) z \left(L^{1-\frac{D}{2}} \phi(x) + \zeta \right) \right\}^{L^d} \\ &= \prod_{x \in \Lambda(a)} \mathcal{N}' \mathcal{R}(z)(\phi(x)) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Hierbei bezeichnet man die Abbildung \mathcal{R} als (unnormierte) hierarchische RGT (HRGT). Die Normierungsfaktoren \mathcal{N} und \mathcal{N}' können aufgrund der unendlichen Dimensionalität des Integrals nicht explizit angegeben werden (da $\mathcal{H}(a)$ auf den l_1 eingeschränkt wurde) und werden durch die Normierungsbedingung an das Gaußsche Integral definiert. Für die normierte RGT folgt

$$R(Z)(\phi) = \prod_{x \in \Lambda(a)} \underbrace{\frac{\mathcal{R}(z)(\phi(x))}{\mathcal{R}(z)(0)}}_{\text{normierte HRGT}} . \quad (1.52)$$

1.4 Das Werkzeug RG

Wir haben in diesem Kapitel zwei Klassen von Theorien betrachtet, die durch die Propagatoren ν_{perf} und ν_{hier} charakterisiert werden. Beiden ist die Eigenschaft gemein, daß die Propagatoren Fixpunkte der Blockung sind, so daß nur noch die RGT des Potentials Z betrachtet werden muß.

Wie schon erwähnt ist die RG gut dazu geeignet, kritische Theorien zu betrachten. Die RGT ist eine Skalentransformation: Eine Theorie der Korrelationslänge ξ wird auf eine Theorie der Korrelationslänge $\frac{\xi}{L}$ abgebildet [GK84]. Ist die Theorie unkritisch, d.h. $\xi < \infty$, führt die Berechnung der Zustandssumme (= unendliche Iteration der RGT) zu einer Theorie der Korrelationslänge Null. Dies entspricht einer völlig unkorrelierten Phase - einer sog.

Hochtemperaturphase - von der man aufgrund der Ultralokalität eine Faktorisierung der Wirkung bzgl. des Gitters $\Lambda(a)$ erwartet.

Da man eine Gittertheorie jedoch so konstruiert, daß im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ die Greensfunktionen endlich sind, behandelt man im allgemeinen kritische Gittertheorien mit divergierender Korrelationslänge, die unter RGT-Anwendung kritisch bleiben. Ein Fixpunkt der RGT ist somit kritisch ($\xi = \infty$) oder ultralokal ($\xi = 0$). Alle Theorien im Einzugsbereich eines Fixpunktes besitzen dieselben kritischen Eigenschaften wie der Fixpunkt selbst, d.h. divergierende oder endliche (bei einem ultralokalen Fixpunktpotential) Korrelationslängen. Die im Attraktionsbereich liegenden Theorien sind fast skaleninvariant.

Abschließend stellen wir noch einen fundamentalen Unterschied zwischen GRG und HRG heraus:

Satz 1.4.1 (Die Halbgruppeneigenschaft)

Die Menge der GRGT zu fester Dimension $\{R_L : L \in \mathbb{N}\}$ bildet bezüglich der Komposition eine abelsche Halbgruppe. Die Menge der HRGT besitzt diese Struktur nicht!

Beweis: Mit Definition 1.2.6 und der Fixpunkteigenschaft $u(\nu_{perf}) = \nu_{perf}$ erhält man die Relationen $A_L A_{L'} = A_{LL'}$ und $\Gamma_L + A_L \Gamma_{L'} A_L^\dagger = \Gamma_{LL'}$. Einsetzen in (1.40) liefert mit Substitution und Gaußscher Faltung (B.14) das gewünschte Resultat

$$R_L \circ R_{L'} = R_{LL'} . \quad (1.53)$$

Man beachte, daß das neutrale Element $R_1 := \text{id}$ ergänzt werden muß, da die Fluktationskovarianz für $L = 1$ verschwindet, und das Gaußsche Maß folglich nicht mehr definiert ist. Die Verletzung der Halbgruppeneigenschaft in der HRG mache man sich selbst klar.

Die Halbgruppeneigenschaft der GRGT ermöglicht eine alternative Berechnung des IR-Limes: statt einer unendlichen Iteration von GRGT schickt man den Skalenparameter gegen unendlich. Es gilt also für $L \in \mathbb{N}_2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_L^n = \lim_{L \rightarrow \infty} R_L \quad (1.54)$$

Die Limes-Bildung über L ist praktischer, da die Berechnung einer RGT sehr komplex ist. Vor allem bei numerischen Untersuchungen bedeutet diese Art der Berechnung eine effiziente und effektive Ausnutzung von Rechnerkapazitäten.

Für den Beweis der Existenz von RG-Flüssen oder der Konstruierbarkeit von RG-Trajektorien stützt man sich jedoch auf einzelne RG-Schritte. Im

hierarchischen Modell ist dies sogar die einzige Möglichkeit. Dennoch spielt dort, wie wir noch sehen werden, eine geeignete Wahl von L eine große Rolle.

Kapitel 2

Rigorese Konstruktion der ϕ_D^4 -Trajektorie im Hierarchischen Modell für $2 < D < 4$

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der HRGT. Vertiefende Informationen finden sich z.B. in [Rol96, GS96, Por93]. Nach der Definition der ϕ^4 -Trajektorie gemäß C. WIECZERKOWSKI berechnen wir diese perturbativ. Anschließend präsentieren wir eine formalisierte Version des ebenfalls von C. WIECZERKOWSKI entwickelten nichtstörungstheoretischen Konstruktionsbeweis [Wie97a] und zeigen, daß wir mit Hilfe perturbativer Approximanten die ϕ^4 -Kurve in jeder Dimension $2 < D < 4$ berechnen können. Schon in der Störungstheorie erkennt man, daß in bestimmten Dimensionen Resonanzen auftreten, die z.B. in $D = 3$ Dimensionen durch eine Doppelreihen-Entwicklung in Kopplung und logarithmierter Kopplung gelöst werden [RW]. Wir zeigen, daß das konstruktive Verfahren auch mit dieser perturbativen Näherung funktioniert. Abschließend stellen wir einige numerische Ergebnisse vor und diskutieren sie.

2.1 Grundlagen

Die HRGT ist eine nichtlineare Integraltransformation von reellwertigen, auf \mathbb{R} definierten Funktionen (1.52). Die HRGT wird durch die Blockgröße L und die Dimension D bestimmt. Die Gitterkonstante a findet sich (implizit) im

Wechselwirkungsterm. OBdA sei $a = 1$. Im Rahmen des hierarchischen Modells wollen wir die Parameter L und D als kontinuierlich ansehen. Auf diese Weise können wir allgemeine Verhaltensmuster der HRGT besser studieren. Hier das zentrale Objekt dieses Kapitels:

Definition 2.1.1 (HRGT)

Es sei $L \in (1, \infty)$, $D \in (2, 4]$ und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Dann erklären wir die HRGT $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{L,D}$ durch

$$\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \mathcal{R}(Z)(\phi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\phi + \zeta)^\alpha. \quad (2.1)$$

Hierbei sind $\alpha = L^D$, $\beta = L^{1-\frac{D}{2}}$, $\gamma = 1 - L^{2-D}$ und \mathcal{V} ein geeigneter Funktionenraum,¹ so daß \mathcal{R} wohldefiniert ist.

In obiger Integraltransformation ist $d\mu_\gamma(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\gamma}} d\zeta$ das eindimensionale Gaußsche Maß über \mathbb{R} mit Mittel Null und Kovarianz $\gamma > 0$, deren willkürliche Wahl zu $1 - \beta^2$ im Kapitel über die Normalordnung erklärt wird. Im allgemeinen sind die Transformationen zu zwei Kovarianzen γ, γ' über die Beziehung

$$\mathcal{R}_\gamma(Z)(\phi) = \mathcal{R}_{\gamma'} \left(Z \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma'}} \cdot \right) \right) \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \phi \right) \quad (2.2)$$

verknüpft.

OBdA seien L und D so gewählt, daß $\alpha \in \mathbb{N}$. Es folgt die Wohldefiniertheit von Z^α auch für nicht positive Funktionen.

Obige Form der RGT differiert von der Darstellung in (1.51). Mittels der Ähnlichkeitstransformation $\mathcal{U}(Z) = Z^\alpha$ erhalten wir die Beziehung²

$$\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1} \overline{\mathcal{R}} \mathcal{U}, \quad (2.3)$$

sofern wir uns auf nicht negative Z einschränken. Ist Z Fixpunkt von \mathcal{R} , so ist $\mathcal{U}(Z)$ Fixpunkt von $\overline{\mathcal{R}}$. Somit gestalten sich Untersuchungen an \mathcal{R} und $\overline{\mathcal{R}}$ äquivalent.

Im weiteren Verlauf benutzen wir die nicht normierte RG. Der Vorteil der normierten Form $\mathcal{R}_0(Z)(\phi) := \frac{\mathcal{R}(Z)(\phi)}{\mathcal{R}(Z)(0)}$ liegt darin, daß Funktionen, die bezüglich der Äquivalenzrelation $Z \sim Z' :\Leftrightarrow \frac{Z}{Z'} \in \mathbb{R}^*$ in derselben Nebenklasse liegen,

¹ \mathcal{V} sei für den Beginn nicht den Beschränkungen des ersten Kapitels, z.B. Positivität, unterworfen.

² $\overline{\mathcal{R}}$ sei die HRGT mit externem Exponenten α gemäß (1.51)

auf dieselbe effektive Wechselwirkung abgebildet werden, so daß man sich auf die Repräsentantenmenge $Z(0) = 1$ beschränken kann. $Z = 0$ wird hierbei explizit auf Null abgebildet oder ausgeschlossen. Der Nachteil ist jedoch die kompliziertere Form der Transformation.

Drücken wir die Wechselwirkung Z durch ein Potential V aus, so schreibt sich die Transformation als

$$\mathcal{T} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W} \quad V \mapsto -\ln \mathcal{R}(e^{-V}) \quad (2.4)$$

Die Wohldefiniertheit folgt daraus, daß \mathcal{R} die Positivität einer Wirkung erhält. Entsprechendes gilt für die HRGT mit externem α . \mathcal{W} muß natürlich gewisse Restriktionen erfüllen, damit \mathcal{T} definiert und selbstabbildend ist, doch dazu später mehr.

Es stellt sich die Frage, für welche Untermengen von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ die HRGT nun wohldefiniert ist? Einen wichtigen Spezialfall liefert folgender

Satz 2.1.2

Für

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_{\text{Gauß}} = \left\{ Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid Z(\phi) = Ae^{-\frac{b}{2}\phi^2} \text{ mit } A \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

ist die HRGT 2.1.1 wohldefiniert³ und es gilt:

$$\forall Z \in \mathcal{V} : \mathcal{R}(Z)(\phi) = A'e^{-\frac{b'}{2}\phi^2} \quad \text{mit} \quad A' = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\gamma b}} A^\alpha, \quad b' = \frac{\alpha\beta^2 b}{1 + \alpha\gamma b}$$

Beweis: Für $Z \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\mathcal{R}(Z)(\phi) = \dots = \frac{A^\alpha}{\sqrt{1 + \alpha\gamma b}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\alpha\beta^2 b}{1 + \alpha\gamma b} \phi^2}$$

Da $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{R}^+$ bzw. $b \in \mathbb{R}_0^+$, folgt $A' \in \mathbb{R}^+$ bzw. $b' \in \mathbb{R}_0^+$.

□

Eine massebehaftete Theorie ist unter der HRGT forminvariant. Interessant ist nun die Frage nach Fixpunkten, das heißt: Existieren $Z \in \mathcal{V}$, so daß $\mathcal{R}(Z) \equiv Z$? Eine Antwort liefert folgender

³Die HRGT ist natürlich auch für $b \in (-\frac{1}{\alpha\gamma}, \infty)$ definiert, wegen $b' \left((-\frac{1}{\alpha\gamma}, \infty) \right) = \left(-\infty, \frac{\beta^2}{\gamma} \right)$ allerdings nicht mehr selbstabbildend.

Satz 2.1.3 (Gaußsche Fixpunkte der HRGT)

Die HRGT über $\mathcal{V}_{\text{Gauß}}$ besitzt genau zwei Fixpunkte:

$$\begin{aligned} A_{UV} = 1, \quad b_{UV} = 0 &\Rightarrow Z_{UV}(\phi) = 1 \\ A_{QU} = (\alpha\beta^2)^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}, \quad b_{QU} = \frac{\alpha\beta^2-1}{\alpha\gamma} &\Rightarrow Z_{QU}(\phi) = A_{QU}e^{-\frac{b_{QU}}{2}\phi^2} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet der Index UV den ultravioletten bzw. trivialen, und das Kürzel QU den quadratischen bzw. Hochtemperaturfixpunkt.

Der Hochtemperaturfixpunkt entspricht einer völlig unkorrelierten Theorie. Die zugehörige Korrelationslänge ξ ist Null und die hierarchische Wechselwirkung folglich ultralokal [GS96]⁴. Der triviale Fixpunkt entspricht einer freien Theorie, welche, wie im vollen Modell mit masselosem Propagator, einer kritischen Theorie oder einem PÜ zweiter Ordnung entspricht. Die zugehörige Korrelationslänge divergiert.

Neben diesen beiden Gaußschen Fixpunkten existieren noch weitere Fixpunkte: Zum einem die unphysikalische Theorie $Z = 0$. Zum anderen existieren noch die nichttrivialen Fixpunkte. In Abhängigkeit der Bifurkationsdimension $d_n = \frac{2n}{n-1}$ spalten sich vom trivialen Fixpunkt weitere Fixpunkte in Richtung des marginalen Eigenvektors in der Dimension d_n ab, so daß für $D \rightarrow 2$ unendlich viele nichttriviale Fixpunkte existieren. Die Untersuchung dieses interessanten Bifurkationsszenarios soll jedoch nicht Bestandteil der Arbeit sein.

Desweiteren bleiben symmetrische Funktionen unter Anwendung von \mathcal{R} invariant, wie man leicht durch Einsetzen und die Substitution $\zeta \rightarrow -\zeta$ zeigt. Wir beschränken uns im weiteren auf symmetrische Boltzmann-Faktoren Z , da auch die Fixpunkte Z_{UV} und Z_{QU} symmetrisch sind. Ein weiterer Grund für diese Restriktion ist die Forderung, daß wir uns bei unseren Berechnungen in der sog. symmetrischen Phase befinden, in der Korrelationsfunktionen mit ungerader Argumentenanzahl verschwinden und der Vakuumzustand $|0\rangle$ eindeutig ist [MM94].

2.1.1 Die Banachräume \mathcal{V}_{UV} und \mathcal{V}_{QU}

Nun wollen wir den Definitionsbereich \mathcal{V} erklären. Um eine Iteration zu ermöglichen, muß \mathcal{V} so gewählt sein, daß \mathcal{R} selbstabbildend ist. Eine erste

⁴Die korrespondierenden Gitter-Wechselwirkungen sind natürlich immer lokal.

Wahl ist die Menge

$$\mathcal{V}_{UV} = \left\{ Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid Z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), Z \in \mathbb{Z}_2(\mathbb{R}), \sup_{\phi \in \mathbb{R}} |Z(\phi)| < \infty \right\}, \quad (2.5)$$

die mit der Supremumsnorm zu einem Banachraum⁵ ergänzt wird. Symmetrie (s.o) und Beschränktheit bleiben unter \mathcal{R} erhalten, da

$$\sup_{\phi \in \mathbb{R}} |\mathcal{R}(Z)(\phi)| \leq \|Z\|_\infty^\alpha < \infty. \quad (2.6)$$

Die Stetigkeit von $\mathcal{R}(Z)$ folgt aus den Sätzen über Parameter-Integrale [For91]. Diese sind zwar nur für kompakte Intervalle formuliert, lassen sich aber problemlos auf \mathbb{R} verallgemeinern, da das Kernstück der Beweise die gleichmäßige Stetigkeit der Integranden auf dem kartesischen Produkt von Integrationsgebiet und Gültigkeitsbereich der externen Variablen ist.

Beweis: Wählen wir $R \in \mathbb{R}^+$ beliebig, so ist

$$i(\zeta, \phi) := e^{-\frac{\zeta^2}{2\gamma}} Z^\alpha(\beta\phi + \zeta) \quad (2.7)$$

gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \times [-R, R]$. Denn für alle $\epsilon > 0$ existieren positive G und δ mit $G > \delta$, so daß $|i(\zeta, \phi)| < \frac{\epsilon}{2}$ für (ζ, ϕ) mit $\zeta > G - \delta$, da Z beschränkt ist. Auf dem Kompaktum $[-G, G] \times [-R, R]$ ist die stetige Funktion i gleichmäßig stetig und

$$\forall (\zeta, \phi) \in \mathbb{R} \setminus [-G, G] \times [-R, R] \quad \forall (\zeta', \phi') \in U_\delta(\zeta, \phi) : |i(\zeta', \phi') - i(\zeta, \phi)| < \epsilon$$

Folglich ist i auf ganz $\mathbb{R} \times [-R, R]$ gleichmäßig stetig und $\mathcal{R}(Z)$ auf $[-R, R]$ stetig. Da R beliebig ist, folgt $\mathcal{R}(Z) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

□

Auch die Stetigkeit der Transformation \mathcal{R} zeigt man leicht:

$$\|\mathcal{R}(Z + \epsilon) - \mathcal{R}(Z)\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} \|Z\|_\infty^{\alpha-n} \|\epsilon\|_\infty^n \xrightarrow{\|\epsilon\|_\infty \rightarrow 0} 0 \quad (2.8)$$

⁵Der Vektorraum der auf topologischen Räumen stetigen und beschränkten Abbildungen ist bezüglich der Supremumsnorm ein Banachraum [MV92]. Somit ist der abgeschlossene Unterraum \mathcal{V}_{UV} auf natürliche Weise auch ein Banachraum. Beweis der Abgeschlossenheit: Sei $Z_n \in \mathcal{V}_{UV}$ eine Cauchy-Folge mit Grenzwert Z , so gilt $Z(\phi) = \lim Z_n(\phi) = \lim Z_n(-\phi) = Z(-\phi)$.

Einen weiteren invarianten Banachraum erhalten wir, wenn wir

$$\mathcal{V}_{QU} = \left\{ Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid Z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), Z \in \mathcal{Z}_2(\mathbb{R}), \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left| \frac{Z(\phi)}{Z_{QU}(\phi)} \right| < \infty \right\} \quad (2.9)$$

durch die Norm

$$\|\cdot\|_{QU} : \mathcal{V}_{QU} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \|Z\|_{QU} = \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left| \frac{Z(\phi)}{Z_{QU}(\phi)} \right| \quad (2.10)$$

vervollständigen⁶. Auch dieser Raum ist invariant unter \mathcal{R} , denn

$$\sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\mathcal{R}(Z)(\phi)}{Z_{QU}(\phi)} \right| \leq \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \frac{1}{Z_{QU}(\phi)} \|Z\|_{\infty}^{\alpha} \mathcal{R}(Z_{QU})(\phi) = \|Z\|_{\infty}^{\alpha} . \quad (2.11)$$

Betrachtet man die Konstruktion von \mathcal{V}_{QU} , so erkennt man, daß \mathcal{V}_{UV} im Grunde mit Hilfe des UV-Fixpunktes konstruiert wurde. Man beachte, daß $\mathcal{V}_{QU} \subsetneq \mathcal{V}_{UV}$, da z.B. Z_{UV} nicht in \mathcal{V}_{QU} enthalten ist. In \mathcal{V}_{QU} befinden sich nur Theorien, von denen man den Hochtemperaturfixpunkt abspalten kann, so daß der Rest beschränkt bleibt. Sprechen wir in Zukunft vom Theorieraum \mathcal{V} , so impliziert dies Gültigkeit für \mathcal{V}_{UV} und \mathcal{V}_{QU} . In der Statistischen Physik oder der Feldtheorie werden Wechselwirkungsfunktionale jedoch über einen Boltzmann-Faktor erklärt, so daß wir uns letztendlich auf die konvexe, unter \mathcal{R} invariante (2.4) Teilmenge

$$\mathcal{V}^+ = \left\{ Z \in \mathcal{V} \mid Z(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.12)$$

beschränken müssen. Dementsprechend folgt für den Raum der Potentiale⁷

$$\mathcal{W} = -\ln \mathcal{V}^+ . \quad (2.13)$$

Wir müssen noch anmerken, daß \mathcal{W} keine Vektorraumstruktur besitzt, da z.B. das Inverse zu $-\ln Z_{QU}$ oder das neutrale Element im Falle von \mathcal{V}_{QU} nicht enthalten sind.

2.1.2 Die Linearisierung \mathcal{DR}

Das Finden von Fixpunkten und zugehörigen Flüssen besitzt nicht nur physikalische Relevanz - es ist im allgemeinen der Beginn bei der Untersuchung

⁶Der Vollständigkeitsbeweis ist äquivalent zu dem Vorgehen bei der Supremumsnorm.

⁷Wir erklären die Wirkung einer Abbildung A auf eine Menge M durch $A(M) = \{A(m) \mid m \in M\}$.

nichtlinearer Systeme. Die hier vorgestellte Form der RGT ist diskret, sie läßt sich aber problemlos als Differentialgleichung mit kontinuierlichem Flußparameter L schreiben. Zur Untersuchung eines Fixpunktszenarios betrachtet man zuerst die am entsprechenden Fixpunkt linearisierte Transformation. Wir wollen in dieser Arbeit ϕ^4 -artige Störungen der freien Theorie untersuchen. Somit linearisieren wir \mathcal{R} bei $Z_{UV} = 1$ bzw. \mathcal{T} bei $V_{UV} = 0$. Es folgt mit Hilfe von Definition (B.12):

$$\mathcal{DR}(Z)(\phi) := \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{R}(Z_{UV} + \epsilon Z)(\phi) = \alpha \langle Z \rangle_{\gamma, \beta \phi} \quad (2.14)$$

Die Form von \mathcal{DT} ist identisch. Mittels der Beziehung zwischen Normalordnung und Gauß-Integration - siehe hierzu auch die Anhänge (B.1) und (B.2) - rechnet man leicht nach, daß die normalgeordneten Monome über \mathbb{R} Eigenfunktionen der linearisierten RGT sind. Es gilt:

$$\mathcal{DR}(P_{n,\nu})(\phi) = \alpha \beta^n P_{n, \beta^{-2}(\nu-\gamma)}(\phi) \quad (2.15)$$

Die Wahl von $\gamma = 1 - \beta^2$ bedingt eine normalordnende Kovarianz von $\nu = 1$, um die Eigenwertgleichung (2.15) zu lösen. Der Weg, ν zu fixieren und die Fluktuationskovarianz auf $\gamma = \nu(1 - \beta^2)$ festzulegen, wird hier nicht verfolgt. Bezüglich des Hilbertraumes $L_2(\mathbb{R}, d\mu_{\nu=1}(\phi))$ bildet $\{P_{n,\nu=1}\}_{n \in \mathbb{R}_0}$ eine Basis. Allerdings ist dieser Raum kein geeigneter Definitionsbereich für die RGT selbst [GS96] - er ist „zu groß“.

Bezüglich $L_2(\mathbb{R}, d\mu_{\nu=1}(\phi))$ können wir jedoch Aussagen über das Fixpunktszenario machen. Stabile, unstabile und Zentrumsmanifoldigkeiten werden von Eigenvektoren aufgespannt, deren Betrag kleiner, größer oder gleich eins ist. Schaut man sich eine unendliche Iteration der verschiedenen Eigenvektoren an, ist sofort klar, daß Objekte aus dem stabilen Unterraum auf Null - also den Fixpunkt - abgebildet werden. Dementsprechend werden Vektoren aus dem instabilen Unterraum bezüglich ihres Betrages divergieren, und eine Funktion aus der Zentrumsmanifoldigkeit auf einer „Kugeloberfläche“ mit dem Radius des Vektorbetrags zu finden ist (Invarianz beim Eigenwert 1, alternierend beim Eigenwert -1, usw.).

Die Eigenwerte zu den normalgeordneten Polynomen $P_{n,\nu}$ sind

$$L^{D+n(1-\frac{D}{2})}, \quad (2.16)$$

und die Dimensionen der Mannigfaltigkeiten D -abhängig. Siehe hierzu Abbildung 2.1. Man beachte, daß der Massenterm ($n = 2$) in jeder Dimension relevant (L^2) ist und der ϕ^4 : $_{\nu}$ Eigenwert L^{4-D} , für $D < 4$ relevant, in vier Dimensionen marginal wird.

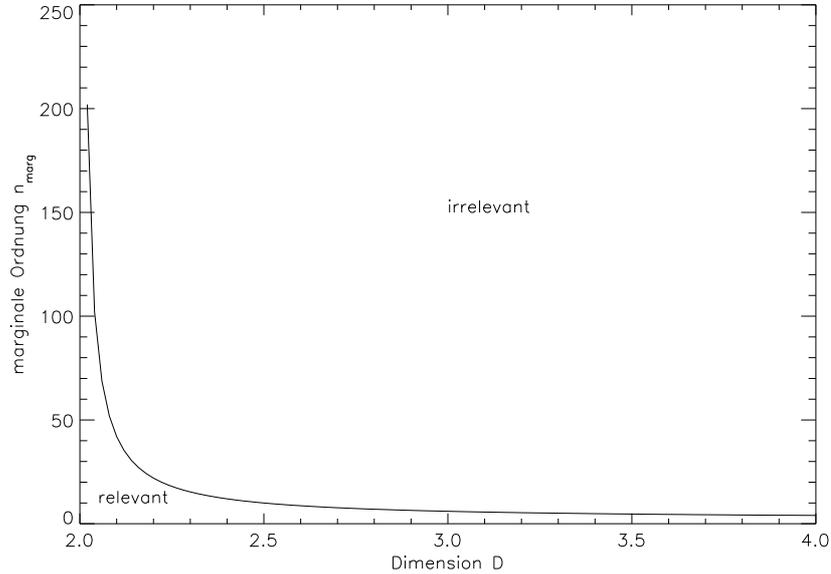


Abbildung 2.1: Mit Hilfe der Formel (2.16) berechnen wir die (reellen) Eigenwertordnungen n_{marg} , für die der Exponent verschwindet. Alle Monome $P_{n,\nu}$ mit $n > n_{\text{marg}}$ ($n < n_{\text{marg}}$) sind irrelevant (relevant). Schnittpunkte der Kurve mit der Funktionenschar $f_n(x) = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ repräsentieren marginale Eigenvektoren.

Für alle Dimensionen $D \in (2, 4]$ mit $\frac{2D}{D-2} \notin \mathbb{N}_0$ handelt es sich bei Z_{UV} also um einen hyperbolischen Fixpunkt, so daß nach dem Hartman-Grobman-Theorem [GH86] ein Homöomorphismus existiert, der die stabilen/unstabilen Eigenräume bzgl. der linearisierten Transformation auf die tangential liegenden invarianten stabilen bzw. nicht stabilen Mannigfaltigkeiten bzgl. der nichtlinearen Transformation überträgt. Für den Fall $\frac{2D}{D-2} \in \mathbb{N}_0$ treten noch Zentrumsmannigfaltigkeiten auf, die nicht eindeutig sind [GH86]⁸. Aus diesem Grund ist die Berechnung der Kurve in $D = 4$ komplizierter, da wir in einer marginalen Kopplung parametrisieren. Eine schöne Lösung wäre im übrigen das Finden dieses Homöomorphismus.

⁸Hier ist die nichtlineare Abbildung ein diffeomorphes Vektorfeld über dem \mathbb{R}^n . Schränkt man die HRGT jedoch auf polynomiale Potentiale ein und schaltet hinter die Abbildung einen geeigneten Projektor, fällt auch die HRGT in diese Gruppe.

2.2 Die ϕ^4 -Trajektorie

Definition 2.2.1 (Die ϕ^4 -Trajektorie)

Es sei $Z : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{V}^+$ eine stetige Abbildung. Z heißt ϕ^4 -Trajektorie genau dann, wenn:

1. $Z(0) = Z_{UV}$
2. $Z'(0) = -\frac{1}{4!}P_{4,1}$
3. $\exists \beta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_0^+) : \mathcal{R}(Z(g)) = Z(\beta(g))$

Obige Definition liefert eine Kurve in \mathcal{V} , die im UV-Fixpunkt beginnt, in diesem die Steigung $P_{4,1}$ besitzt, also tangential zum normalgeordneten Monom 4. Grades liegt, und invariant unter der HRGT über \mathcal{V} ist. Zu jeder ϕ^4 -Trajektorie Z existiert also eine Reparametrisierungsfunktion β (*step- β -Funktion*), und wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von einem skalierenden Paar (Z, β) .

Schreibt man Z als formale Potenzreihe⁹ in $g = 0$, so erhält man mittels der ersten beiden Eigenschaften aus 2.2.1 folgende Darstellung:

$$Z(g) = Z_{UV} - \frac{1}{4!}P_{4,1}g + O(g^2) \iff Z(g) = e^{-(gP_{4,1} + O(g^2))}$$

$O(g^2)$ und β werden durch die Invarianzeigenschaft festgelegt.

Einige allgemeine Eigenschaften der β -Funktion lassen sich ohne ihre exakte Berechnung angeben: $\beta(0) = 0$,¹⁰ denn würde dies nicht gelten, so wäre die Trajektorie zyklisch oder chaotisch. Diese beiden Fälle wollen wir ausschließen und gehen im folgenden davon aus, daß die ϕ^4 -Trajektorie doppeltpunkt-frei ist.

Unter der Annahme, daß die RGT eine Halbgruppe bildet - nach Satz 1.4.1 trifft dies nur für die GRGT zu - vererbt sich als Folge der Injektivität der Trajektorie in g die Halbgruppeneigenschaft auf β :

$$\begin{aligned} Z(\beta_{L'} \circ \beta_L(g)) &= \mathcal{R}_L \circ \mathcal{R}_{L'}(Z)(g) = \mathcal{R}_{L'L}(Z)(g) = Z(\beta_{L'L}) \\ &\iff \beta_{L'} \circ \beta_L(g) = \beta_{L'L} \end{aligned} \tag{2.17}$$

⁹Zur Berechnung einer formalen Potenzreihe benötigen wir nur die \mathcal{C}^∞ -Eigenschaft. Die Frage nach der Konvergenz stellt man zurück.

¹⁰Aus diesem Grund ist $b_0 = 0$ in (2.25).

Wir nennen (2.17) das Additionstheorem für β -Funktionen. Mit Hilfe der β_L -Funktion können wir die sog. *laufende Kopplung* über

$$g(L) := \beta_L(g) \quad (2.18)$$

definieren. Hierbei kann die Anfangskopplung g auf der rechten Seite beliebig gewählt werden. $g(L)$ gibt dann Auskunft darüber, auf welchem Punkt der invarianten Trajektorie man sich befindet, wenn man eine RGT mit Blockparameter L durchgeführt hat. Definieren wir nun noch die differentielle β -Funktion [Wie97b] über

$$\bar{\beta}(g) := \partial_L \beta_L(g) \Big|_{L=1}, \quad (2.19)$$

so erfüllt die laufende Kopplung die Gleichung

$$Lg'(L) = \bar{\beta}(g(L)). \quad (2.20)$$

Beweis:

$$Lg'(L) = \partial_{L'} g(LL') \Big|_{L'=1} \stackrel{(2.17)}{=} \partial_{L'} \beta_{L'}(\beta_L(g)) \Big|_{L'=1} = \bar{\beta}(g(L)) \quad (2.21)$$

Die differentielle β -Funktion gibt Auskunft über die Flußrichtung.

Im folgenden nehmen wir an, Z und β seien analytisch in g , so daß wir Störungstheorie betreiben dürfen. Zeigt sich letztendlich, daß Z und/oder β nicht konvergent sind,¹¹ so heißt dies lediglich, daß keine analytische Lösung existiert. Desweiteren wird sich herausstellen, daß die trunkierten Störungsreihen sehr gute Approximanten darstellen.

2.3 Störungstheorie

Wir wollen in diesem Kapitel das Potential V perturbativ bestimmen. Dazu definieren wir die parameterabhängige Funktion

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad F(t)(V)(\phi) := \mathcal{T}(tV)(\phi) \quad (2.22)$$

¹¹Konvergenzradius gleich Null

unter der Annahme, daß sie für V und $\phi \in \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar¹² und die Taylor-Entwicklung um 0 konvergent sind.¹³ Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(V)(\phi) &= F(1)(V)(\phi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \ln \langle e^{\alpha V(\cdot)t} \rangle_{\gamma, \beta \phi} \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \langle [\alpha V;]^m \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

Zur Definition der trunkierten Erwartungswerte lese man im Anhang (B.2). Die ϕ^4 -Trajektorie und die Reparametrisierungsfunktion β schreiben wir als formale Potenzreihe in $g = 0$:¹⁴

$$V(\phi, g) = \sum_{r=1}^{\infty} V_r(\phi) g^r \quad (2.24)$$

$$\beta(g) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r g^r \quad (2.25)$$

mit

$$V_1(\phi) =: \phi^4 : \quad (2.26)$$

Aufgrund der Multilinearität der trunkierten Erwartungswerte können wir $\mathcal{T}(V)$ nach Potenzen von g ordnen:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(V)(\phi, g) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} g^{\sum_{i=1}^m r_i} \langle [\alpha V_{r_1}, \dots, \alpha V_{r_m}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r=m}^{\infty} g^r \sum_{\sum_{i=1}^r r_i=m} \langle [\alpha V_{r_1}, \dots, \alpha V_{r_m}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{\sum_{i=1}^m r_i=r} \langle [\alpha V_{r_1}, \dots, \alpha V_{r_m}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \right\} g^r \end{aligned} \quad (2.27)$$

¹²Hierzu müssen die n -ten Ableitungen des RG-Integranden nach t auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$ gleichmäßig stetig sein. Aus diesem Grund ist z.B. eine Forderung $V \in \mathcal{W}$ zu schwach, da ein Term $V \exp(-\alpha V t)$ multipliziert mit dem Gaußschen Gewichtungsfaktor nicht mehr gleichmäßig stetig sein muß. Beispiel: $V(\phi) = e^{k\phi^2}$ mit $k > \frac{1}{2\gamma}$

¹³Es wird sich herausstellen, daß die Störungsreihe nicht konvergent ist. Aus diesem Grund wollen wir im folgenden lieber den Begriff der formalen Potenzreihe benutzen. Folglich handelt es sich auch bei $\mathcal{T}(V)$ in (2.23) nur um eine formale Potenzreihe.

¹⁴Wir geben die Entwicklungskoeffizienten ohne $\frac{1}{r!}$ -Terme an, da dies eine formale Vereinfachung darstellt.

Ebenso ergibt sich

$$V(\phi, \beta(g)) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^r \sum_{\sum_{i=1}^m r_i=r} \prod_{i=1}^m b_{r_i} V_m(\phi) \right\} g^r . \quad (2.28)$$

In erster Ordnung erhalten wir die Eigenwertgleichung

$$\alpha \langle V_1 \rangle_{\gamma, \beta \phi} = b_1 V_1(\phi), \quad (2.29)$$

die aufgrund der Anfangsbedingung (2.26) die eindeutige Lösung

$$b_1 = \alpha \beta^4 = L^{4-D} \quad (2.30)$$

besitzt. In höheren Ordnungen $r \geq 2$ gilt es

$$\alpha \langle V_r \rangle_{\gamma, \beta \phi} - b_1^r V_r(\phi) = b_r V_1(\phi) + L_r(\beta, V)(\phi) - K_r(V)(\phi) \quad (2.31)$$

zu lösen. Hierbei sind

$$L_r(\beta, V)(\phi) = \sum_{m=2}^{r-1} \sum_{\sum_{i=1}^m r_i=r} \prod_{i=1}^m b_{r_i} V_m(\phi), \quad (2.32)$$

$$K_r(V)(\phi) = \sum_{m=2}^r \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{\sum_{i=1}^m r_i=r} \langle [\alpha V_{r_1}, \dots, \alpha V_{r_m}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T . \quad (2.33)$$

Wir merken an, daß K_r und L_r unabhängig von V_r und b_r sind, so daß eine rekursive Lösung des Problems möglich ist. Da V_r analytisch und symmetrisch sein soll, stellen wir es durch eine Potenzreihe in normalgeordneten¹⁵, geraden¹⁶ Monomen dar:

$$V_r(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n,r} : \phi^{2n} : \quad (2.34)$$

Aufgrund der Tatsache, daß es sich beim Startterm V_1 um eine endliche Reihe handelt ($V_{2n,1} = 0$ für $n \geq 3$), pflanzt sich diese Eigenschaft in den

¹⁵Eine Darstellung in der Basis $\{\phi^{2n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genauso gut möglich, doch vereinfacht die Benutzung der Eigenbasis $\{:\phi^{2n}:\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Berechnungen erheblich.

¹⁶Wie man leicht nachrechnet, gilt: $P_{2n,\nu}(\phi) = \sum_{m=0}^n P_{2n,2m}(\nu) \phi^{2(n-m)}$: Es folgt also, daß $:\phi^{2n}:\in \text{Lin}(1, \phi^2, \dots, \phi^{2n})$ und ebenso $\phi^{2n} \in \text{Lin}(1, : \phi^2 :, \dots, : \phi^{2n} :)$. Somit werden gerade Funktionen auch durch Potenzreihen in $:\phi^{2n}:$ repräsentiert.

Kumulanten fort. So ist K_r ein normalgeordnetes Polynom vom Grade $r + 1$. Es gilt also für alle $n > r + 1$:¹⁷

$$(P_{2n,1}, K_r)_1 = 0 \quad (2.35)$$

Dies zeigt man leicht mittels vollständiger Induktion. Im Induktionsschritt benutzt man

$$\begin{aligned} & \langle [\alpha V_{r_1}, \dots, \alpha V_{r_m}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \quad (2.36) \\ \stackrel{IV}{=} & \sum_{n_1=0}^{r_1+1} \dots \sum_{n_m=0}^{r_m+1} \alpha^m V_{2n_1, r_1} \dots V_{2n_m, r_m} \langle [P_{2n_1,1}, \dots, P_{2n_m,1}] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \\ = & \sum_{n_1=0}^{r_1+1} \dots \sum_{n_m=0}^{r_m+1} \alpha^m V_{2n_1, r_1} \dots V_{2n_m, r_m} \sum_{n=0}^{n_{max}} C_{n, n_1, \dots, n_m}(\beta, \gamma) : \phi^n :_1 \dots \end{aligned}$$

Die genaue Form der Koeffizienten $C_{n, n_1, \dots, n_m}(\beta, \gamma)$ ist unwichtig, essentiell ist hingegen die Bestimmungsformel für n_{max} :¹⁸

$$n_{max} = 2 \sum_{i=1}^m n_i - 2(m-1) \leq 2 \sum_{i=1}^m (r_i + 1) - 2(m-1) = 2(r+1) \quad (2.37)$$

Die bislang noch unbeantwortete Frage nach der Konvergenz der Störungsreihe stellen wir ein wenig zurück. Physikalisch sinnvoll ist nur ein Konvergenzgebiet, das einen Quader $\mathbb{R} \times [0, g_{max})$ beinhaltet. Schon numerische Simulationen in [Rol96] sprachen gegen eine Konvergenz der perturbativen Trajektorie, ein weiteres Argument für die Divergenz liefern wir in Abschnitt 2.6.4.

2.3.1 Die lineare β -Funktion für $2 < D < 4$

Die Wahl der linearen β -Funktion

$$\beta(g) = L^{4-D} g \quad (2.38)$$

bedeutet $b_r = 0$ für alle $r \geq 2$ und (2.31) wird zu

$$\alpha \langle V_r \rangle_{\gamma, \beta \phi} - b_1^r V_r(\phi) = -K_r(V)(\phi). \quad (2.39)$$

¹⁷Hierbei nutzen wir die Orthogonalitätsrelation der normalgeordneten Monome bezüglich des Skalarproduktes $(f, g)_\nu = \int d\mu_\nu(\zeta) f(\zeta) g(\zeta)$. Es gilt $(P_{n,\nu}, P_{m,\nu})_\nu = \nu^n n! \delta_{n,m}$.

¹⁸Diese Formel ist grafisch sofort klar: die Kontraktion mit maximaler Beinanzahl erhält man, wenn $m - 2$ Vertices jeweils 2 Beine und 2 Vertices jeweils 1 Bein opfern.

Mit Hilfe von (2.34) und (2.15) erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$\left\{ 1 - \frac{\alpha\beta^{2n}}{(\alpha\beta^4)^r} \right\} V_{2n,r} = \frac{1}{(2n)!(\alpha\beta^4)^r} (P_{2n,1}, K_r(V))_\gamma. \quad (2.40)$$

Durch diese Gleichung werden die Koeffizienten $V_{2n,r}$ eindeutig bestimmt. Im Falle

$$\left\{ 1 - \frac{\alpha\beta^{2n}}{(\alpha\beta^4)^r} \right\} = 0 \Leftrightarrow D - n(D - 2) - r(4 - D) = 0 \quad (2.41)$$

muß gewährleistet sein, daß die rechte Seite von (2.40) identisch Null ist - $V_{2n,r}$ wird zu einem frei wählbaren Parameter. Ansonsten sprechen wir von (n, r) -Resonanzen, die Trajektorie ist perturbativ nicht bestimmbar.¹⁹ Für den Fall, daß $n > r + 1$ und $r > 1$ folgt

$$D + n(2 - D) - r(4 - D) < 2(1 - r) < 0, \quad (2.42)$$

so daß mit (2.35) der polynomiale Ansatz

$$V_r(\phi) = \sum_{n=0}^{r+1} V_{2n,r} : \phi^{2n} : \quad (2.43)$$

gerechtfertigt ist. Stellt sich noch die Frage, wann Resonanzen auftreten. Zu fester Dimension D ergibt sich aus (2.41) die streng monoton fallende Folge

$$n_D(r) = \underbrace{\frac{4-D}{2-D}}_{<0} r + \underbrace{\frac{D}{D-2}}_{>0}, \quad (2.44)$$

die nach oben durch $n_D(2) = 3 - \frac{2}{D-2}$ beschränkt ist. Hieraus folgt, daß in $2 < D < \frac{8}{3}$ keine Resonanzen auftreten können. In $\frac{8}{3} \leq D < 3$ können nur eine Vakuumresonanz²⁰ ($n = 0$) und in $3 \leq D < 4$ eine Vakuumresonanz und/oder eine Massenresonanz²¹ ($n = 1$) erscheinen. Resonante Terme treten für $D \rightarrow 4$ erst in immer höheren Ordnungen auf. Die Resonanz behafteten Dimensionen besitzen $D = 4$ als Häufungspunkt.

Man beachte noch, daß die lineare β -Funktion das Additionstheorem (2.17) erfüllt. Dies zeigt, daß die lineare Reparametrisierung auch für die volle RGT eine geeignete Wahl darstellt. Die nach (2.19) bestimmte differentielle β -Funktion lautet $\beta(g) = (4 - D)g$.

¹⁹Zumindest nicht mit diesem Ansatz.

²⁰Hierzu muß es eine Ordnung $r \in \mathbb{N}_2$ geben, so daß $D = \frac{4r}{1+r}$.

²¹Hierzu muß es eine Ordnung $r \in \mathbb{N}_2$ geben, so daß $D = 4 - \frac{2}{r}$.

Ferner verdeutlicht sich anhand der *step*- β -Funktion die Wirkung der RGT in $2 < D < 4$ Dimensionen: Ein RG-Schritt treibt uns auf der Trajektorie aus dem trivialen Fixpunkt heraus. Eine unendliche Iteration von RG-Schritten führt uns somit zur Fixpunkttheorie $Z(\infty)$, welche dieselben kritischen Eigenschaften besitzt wie alle Theorien $Z(g)$ mit $g > 0$. Eine Trajektorie mit streng monotoner Reparametrisierungsfunktion verbindet also immer die Fixpunkte $Z(0)$ und $Z(\infty)$, und die Flußrichtung ist eindeutig. Zur Berechnung von $Z(\infty)$ benötigen wir nur noch die Trajektorie selbst.

Die *step*- β -Funktion ist auf \mathbb{R}_0^+ definiert und umkehrbar. Wir erklären

$$\delta = \beta^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \delta(g) = \delta g \quad \text{mit} \quad \delta = L^{D-4} \quad (2.45)$$

und schreiben die Invarianzgleichung in eine Fixpunktgleichung um:

$$\mathcal{R} \times \delta^*(Z)(g) := \mathcal{R}(\delta(g)) = Z(g) \quad (2.46)$$

2.3.2 Die kubische β -Funktion für $D = 4$

Die lineare β -Funktion verkommt in 4 Dimensionen zur Identität. Somit findet sich auf der Trajektorie für $g > 0$ überall dieselbe Theorie. Die Kurve reduziert sich zu einem „Punkt“. ²² Die Wirkung $Z(g > 0)$ ist ein weiterer Fixpunkt der RGT. Diese Unstetigkeit in $g = 0$ ist Motivator für den folgenden Beweis, daß für $D = 4$ kein skalierendes Paar mit linearer Reparametrisierungsfunktion existiert. Aus (2.29) folgt $b_1 = 1$ und (2.31) schreibt sich mit Hilfe des Ansatzes (2.43) ²³ als

$$\{1 - \alpha\beta^{2n}\} V_{2n,r} = \frac{1}{(2n)!} (P_{2n,1}, K_r(V) - L_r(\beta, V) - b_r V_1)_1. \quad (2.47)$$

(2.47) läßt sich für $n \in \{0, \dots, r+1\} \setminus \{2\}$ eindeutig lösen. ²⁴ Für $n = 2$ wird die linke Seite identisch Null und (2.47) bestimmt b_r zu

$$b_r = \frac{1}{4!} (P_{4,1}, K_r(V) - L_r(\beta, V))_1. \quad (2.48)$$

Für $r = 2$ ergibt sich nach kurzer Rechnung unter Benutzung der Kumulantenformel (B.20)

$$b_2 = \frac{1}{4!} \left(P_{4,1}, -\frac{1}{2} \langle \alpha V_1; \alpha V_1 \rangle_{\gamma, \beta}^T \right)_1 = -36(L^4 - 1). \quad (2.49)$$

²²Genauer gesagt zu zwei Punkten: $Z(0) = Z_{UV}$ und $Z(g > 0)$.

²³Da L_r von der Ordnung $:\phi^{2r}:$ ist, folgt wie schon zuvor $V_{2n,r} = 0$ für $n > r+1$.

²⁴in Abhängigkeit von b_r

Diese Gleichung zeigt, daß die Wahl einer linearen β -Funktion nicht möglich ist. $V_{4,2}$ wird zu einem frei wählbaren Parameter. Es stellt sich die Frage, ob man nun $V_{4,2}$ so wählen kann, daß z.B. $b_3 = 0$. Allgemeiner formuliert: Determiniert eine willkürliche Wahl der $b_{r \geq 3}$ die freien Parameter $V_{4,r \geq 2}$? Für $r \geq 3$ gilt:

$$K_r(V)(\phi) = -\langle \alpha V_1; \alpha V_{r-1} \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T + \tilde{K}_r(V)(\phi) \quad (2.50)$$

$$L_r(\beta, V)(\phi) = (r-1)b_2 V_{r-1}(\phi) + \tilde{L}_r(\beta, V)(\phi), \quad (2.51)$$

wobei \tilde{K}_r und \tilde{L}_r nur aus $V_{\tilde{r}}$ mit $\tilde{r} < r-1$ bestehen. Es folgt für $r \geq 3$:

$$b_r = (3-r)b_2 V_{4,r-1} + \mathcal{N} \quad (2.52)$$

\mathcal{N} besteht aus schon bekannten Größen. In dritter Ordnung fällt der erste Summand auf der rechten Seite weg, so daß b_3 noch bestimmt und $V_{4,2}$ ein freier Parameter ist. Es ergibt sich²⁵

$$b_3 = 432 - 3456L^2 - 2592L^4 + 3456L^6 + 2160L^8 \quad (2.53)$$

Alle Koeffizienten $b_{r>3}$ setzen wir zu Null. Es folgt eine Determinierung der „freien“ Parameter $V_{4,r-1}$ entsprechend (2.52).²⁶ Die Störungsrechnung in $D = 4$ Dimensionen liefert somit ein skalierendes Paar bestehend aus der kubischen β -Funktion

$$\beta(g) = g - 36(L^4 - 1)g^2 + 432(1 - 8L^2 - 6L^4 + 8L^6 + 5L^8)g^3 \quad (2.54)$$

und dem Potential V , das bis auf den freien Parameter $V_{4,2}$ eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun überprüfen, ob diese perturbativ bestimmte Reparametrisierungsfunktion als Grundstock für konstruktive Berechnungen geeignet ist. Als erstes stellen wir fest, daß β auf \mathbb{R} streng monoton steigend ist, da die Diskriminante der 1. Ableitung für $L > 1$ echt kleiner Null ist und $\beta'(0) = 1 > 0$. Damit existiert die Umkehrfunktion $\delta := \beta^{-1}$, die wir zum Beispiel mittels des Satzes über implizite Funktionen berechnen können ($\delta(g) = g - b_2 g^2 + (2b_2^2 - b_3)g^3 + O(g^4)$). Die approximierte Umkehrfunktion 3. Grades liegt aber z.B. erst für $0 \leq g < 10^{-3}$ im richtigen 1. Quadranten. Natürlich läßt sich mit Hilfe der Cardanoschen Formeln, welche die drei Lösungen einer algebraischen kubischen Gleichung durch Radikale beschreiben, δ auch exakt bestimmen.

²⁵ b_3 wurde mittels *MapleV* und der Basis $\{\phi^{2n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ berechnet. Dies ändert jedoch nichts.

²⁶Dies kann man natürlich auch aus der entgegengesetzten Blickrichtung betrachten.

Es stellt sich die Frage nach Fixpunkten $\beta(g) = g$. Wir erhalten $g_{UV} = 0$ und

$$\bar{g} = \frac{1}{12(5L^4 + 8L^2 - 1)}. \quad (2.55)$$

Somit repräsentiert $Z(\phi, \bar{g})$ eine (perturbative) infrarote Fixpunkttheorie. Wir schließen den für das hierarchische Modell pathologischen Fall $L \rightarrow \infty$ aus.²⁷

Daß ein Polynom vom Grade größer eins nicht die Kompositionseigenschaft für β -Funktionen (2.17) erfüllt, ist klar. Somit ist diese Funktion kein Kandidat für die volle RGT. Dessen perturbativ berechnete β -Funktion schreibt sich als [Wie97d]

$$\beta(g) = g - \frac{3 \log(L)}{(4\pi)^2} g^2 + O(g^3). \quad (2.56)$$

Durch die logarithmische L -Abhängigkeit der Koeffizienten ist Kompositionseigenschaft in der vollen RGT erfüllt. Man beachte jedoch, daß zur Berechnung von (2.56) die Parametrisierung $\hat{V}_{4,r} = \delta_{r,1}$ benutzt wurde. Allerdings merkte WIECZERKOWSKI in [Wie97c] an, daß auch im vollen Modell die Koeffizienten des kubischen Anteils universell sind und eine Reparametrisierung $b_{r>3} = 0$ der Trajektorie möglich ist.²⁸

Das qualitative Verhalten ist jedoch für beide Modelle gleich, da der g^2 -Term ein negatives Vorzeichen besitzt und somit für $0 \leq g \ll 1$ die Eigenschaft $\beta(g) \leq g$ folgt - Theorien mit kleinen Kopplungen laufen unter unendlicher RG-Iteration in den trivialen Fixpunkt.

Für das hierarchische Modell kann man konkret angeben, daß Theorien $V(0 < g < \bar{g})$ in den trivialen Fixpunkt ($\beta(g) < g$) und Punkte $V(g > \bar{g})$ nach $V(\infty)$ ($\beta(g) > g$) laufen, sofern diese Konvergenz existiert. Zur Verdeutlichung schaue man sich die differentielle β -Funktion (2.19) an, die die Kopplungsänderung in der Nähe von $L = 1$ widerspiegelt. In $D = 4$ ist die freie Theorie also attraktiv und der infrarote Fixpunkt repulsiv.²⁹

2.4 Der Raum der Trajektorien

Im folgenden werden wir ob der einfacheren Notation immer das kartesische Produkt von Feld- und Kopplungsraum betrachten. Wir definieren über die

²⁷Das hätte $\bar{g}(L) \rightarrow 0$ zur Folge.

²⁸Diese Aussage bezieht sich jedoch auf die differentielle β -Funktion.

²⁹Man beachte, daß in unserer Terminologie die Äquivalenzen IR-Fixpunkt = nicht-Gaußscher Fixpunkt, UV-Fixpunkt = trivialer Fixpunkt gelten. In [MM94] spricht man im Falle eines attraktiven/repulsiven Fixpunktes von einem IR-/UV-Fixpunkt.

Maximalkopplung $g_0 \in \mathbb{R}^+$ die Menge

$$\mathcal{P}_{g_0} = \mathbb{R} \times [0, g_0] \quad \text{mit} \quad \mathcal{P}_\infty = \lim_{g_0 \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{g_0} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ . \quad (2.57)$$

In 2.1.2 haben wir den Funktionenraum $\mathcal{V}_{\text{Gau\ss}}$ kennengelernt und gesehen, da\ss die HRGT auf ihm wohldefiniert ist - eine Gau\ss-Funktion transformiert sich in eine Gau\ss-Funktion. Da\ss eine unter der HRGT invariante, aus Gau\ss-Funktionen bestehende Trajektorie existiert, zeigt folgender

Satz 2.4.1

$$Z_{QU} : \mathcal{P}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\phi, g) \mapsto e^{a_{QU}(g) - \frac{b_{QU}(g)}{2}\phi^2}$$

mit

$$a_{QU}(g) = \frac{1 - \alpha^{-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} \ln \left(\frac{1 + (\delta^{-n}g)^\rho}{1 + g^\rho} \right), \quad b_{QU}(g) = b_{QU} \frac{g^\rho}{1 + g^\rho}$$

$$\rho = \frac{2}{4 - D}$$

ist ein Fixpunkt der Abbildung $\mathcal{R} \times \delta^*$.

Beweis: Z_{QU} ist eine in g parametrisierte Kurve in $\mathcal{V}_{\text{Gau\ss}}$, da $b_{QU}(\mathbb{R}_0^+) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und b_{QU} stetig ist. Bei a_{QU} zeigt man diese Eigenschaften mittels des Majorantenkriteriums. Es sei $g \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig, aber fest:

$$\left| \alpha^{-n} \ln \left(\frac{1 + (\delta^{-n}g)^\rho}{1 + g^\rho} \right) \right| \leq \alpha^{-n} \ln \left(1 + \left(\frac{1}{L^2} \right)^n g^\rho \right) \leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \ln \left(1 + \frac{1}{L^2} g^\rho \right)$$

Aus dieser Abschätzung folgt $a_{QU}(\mathbb{R}_0^+) \subseteq \mathbb{R}$ und die gleichm\assige Konvergenz auf beliebigen kompakten Intervallen aus \mathbb{R}_0^+ , und somit die Stetigkeit von a_{QU} .

Die Transformation $\mathcal{R} \times \delta^*$ ist dadurch wohldefiniert. Es gilt noch zu beweisen, da\ss $\mathcal{R} \times \delta^*(Z_{QU}) = Z_{QU}$. Nach Satz 2.1.2 gilt $\forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_\infty$:

$$\mathcal{R} \times \delta^*(Z_{QU}(\phi, g)) = \mathcal{R}(Z_{QU}(\phi, \delta g)) = e^{a'_{QU}(g) - \frac{b'_{QU}(g)}{2}\phi^2} \quad (2.58)$$

mit

$$a'_{QU}(g) = \alpha a_{QU}(\delta g) - \frac{1}{2} \ln(1 + \alpha \gamma b_{QU}(\delta g)) \quad (2.59)$$

$$b'_{QU}(g) = \frac{\alpha\beta^2 b_{QU}(\delta g)}{1 + \alpha\gamma b_{QU}(\delta g)}. \quad (2.60)$$

Durch Einsetzen zeigt man $a'_{QU} \equiv a_{QU}$ und $b'_{QU} \equiv b_{QU}$. Eine mögliche Herleitung von b über die Hilfsfunktion $c = b^{-1}$ und die Bestimmung von a durch sukzessives Einsetzen in (2.59) findet der Leser in [Wie97a]. In dieser Arbeit wollen wir b jedoch mittels Störungsrechnung in g^ρ berechnen ($\rho \in \mathbb{R}^+$). Der Parameter ρ ermöglicht es, auch nicht unendlich oft differenzierbare Lösungen zu finden. Um den Vakuumterm a kümmern wir uns nicht, da er in der normierten Transformation sowieso bedeutungslos wird. Es sei also

$$b(g) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g^{\rho k}. \quad (2.61)$$

Wir tragen in diesem Ansatz der Bedingung Rechnung, daß die Kurve für $g = 0$ im UV-Fixpunkt beginnen soll. Mit Hilfe von $A = \alpha\beta^2 = L^2$, $B = \alpha\gamma$ und der Eigenschaft $|\frac{B}{A}b(g)| < 1$ schreibt sich (2.60) als³⁰

$$b(\delta g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{B} \left(\frac{B}{A} b(g) \right)^m. \quad (2.62)$$

Mit der Vereinfachung $\tilde{b}_k = \frac{B}{A} b_k \Leftrightarrow \tilde{b} = \frac{B}{A} b$ ergibt sich analog zur Störungsrechnung in Kapitel 2.3 durch Koeffizientenvergleich für alle k :

$$A\tilde{b}_k \delta^{\rho k} = \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m n_i = k \\ n_i \in \mathbb{N}}} \tilde{b}_{n_1} \dots \tilde{b}_{n_m} \quad (2.63)$$

In erster Ordnung ergibt sich, daß $\rho = \frac{2}{4-D}$ und \tilde{b}_1 ein freier Parameter ist. Alle übrigen \tilde{b}_n lassen sich rekursiv bestimmen. Explizite Berechnungen der nächsten Ordnungen erhärten den Verdacht, daß für die übrigen Koeffizienten die Gleichung

$$\tilde{b}_k = \left(\frac{L^2}{1 - L^2} \right)^{k-1} \tilde{b}_1^k =: C^{k-1} \tilde{b}_1^k \quad (2.64)$$

gilt. Der Beweis erfolgt durch Einsetzen:

$$\tilde{b}_k \stackrel{(2.63)}{=} \frac{1}{L^{2(1-k)} - 1} \sum_{m=2}^k \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m n_i = k \\ n_i \in \mathbb{N}}} \tilde{b}_{n_1} \dots \tilde{b}_{n_m}$$

³⁰Die Ungleichung $|\frac{B}{A}b(g)| < 1$ gilt ob der angenommenen Stetigkeit in $g = 0$ gewiß für kleine g . Das Resultat (2.66) mit $\tilde{b}_1 > 0$ erfüllt diese Relation sogar für alle $g \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.64)}{=} C^{k-1} \tilde{b}_1^k \frac{C}{L^{2(1-k)} - 1} \sum_{m=2}^k C^{-m} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^m n_i = k \\ n_i \in \mathbb{N}}} 1 \\
&= C^{k-1} \tilde{b}_1^k \frac{C}{L^{2(1-k)} - 1} \sum_{m=2}^k C^{-m} \frac{m}{k} \binom{k}{m} \\
&\stackrel{(\star)}{=} C^{k-1} \tilde{b}_1^k \frac{\partial_{C^{-1}} (1 + C^{-1})^k - 1}{L^{2(1-k)} - 1} \\
&= C^{k-1} \tilde{b}_1^k \tag{2.65}
\end{aligned}$$

In (\star) wurde die Beziehung $\partial_x(1+x)^k = \sum_{m=1}^k m \binom{k}{m} x^{m-1}$ benutzt. Für den invarianten Massenterm ergibt sich somit:

$$b(g) = \frac{A}{BC} \frac{C \tilde{b}_1 g^\rho}{1 - C \tilde{b}_1 g^\rho} \tag{2.66}$$

Da $C < 0$ folgt für jedes $\tilde{b}_1 > 0$, daß b auf \mathbb{R}_0^+ stetig ist. Unabhängig von der exakten Wahl gilt dann

$$\lim_{g \rightarrow \infty} b(g) = \frac{A}{BC} = \frac{A-1}{B} = b_{QU} . \tag{2.67}$$

Für $\tilde{b}_1 = -C^{-1}$ erhalten wir $b = b_{QU}$.

□

Wir haben also mit Z_{QU} eine Trajektorie vorliegen, die im trivialen Fixpunkt beginnt ($Z_{QU}(\cdot, 0) = Z_{UV} \in \mathcal{V}_{\text{Gauß}}$) und in den Hochtemperaturfixpunkt läuft ($\lim_{g \rightarrow \infty} Z_{QU}(\cdot, g) = Z_{QU} \in \mathcal{V}_{\text{Gauß}}$). Man beachte aber, daß $Z_{QU}(\cdot, \mathbb{R}_0^+) \subsetneq \mathcal{V}_{\text{Gauß}}$, da z.B. $b_{QU}(\mathbb{R}_0^+) = [b_{UV}, b_{QU})$.

Arbeiten wir mit der normierten Transformation, so müssen wir den konstanten Term nicht beachten und erhalten die Gauß-Trajektorie

$$Z(\phi, g) = e^{-\frac{b_{QU}(g)}{2} \phi^2} . \tag{2.68}$$

Wir merken noch an, daß $a_{QU}(g) = O(g^\rho)$ und $b_{QU}(g) = b_{QU} g^\rho + O((g^\rho)^2)$.

Es stellt sich die Frage, warum wir die perturbative b -Konstruktion der eleganten Methode von WIECZERKOWSKI vorziehen? Wie man leicht sieht, ist die Gauß-Trajektorie für $D = 4$ nicht mehr definiert. Die beiden Fixpunkte, die durch die Kurve $Z_{QU}(g)$ verbunden werden, existieren aber dennoch. Für

eine nichtlineare δ -Funktion, die wir in 4 Dimensionen benutzen müssen (siehe 2.3.2), stellt die Störungstheorie jedoch ein mögliches Verfahren für die Konstruktion einer invarianten Massenkopplung unter der erweiterten RGT dar.

Jetzt konstruieren wir - analog zu (2.9) und (2.10) - mit Hilfe des quadratischen Fixpunktes der Transformation $\mathcal{R} \times \delta^*$ einen Raum von Funktionskurven bzw. Funktionen in zwei Variablen. Es sei $g_0 > 0$.

$$\mathcal{V}_{g_0} = \left\{ Z : \mathcal{P}_{g_0} \rightarrow \mathbb{R} \mid Z(\cdot, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), Z(\phi, \cdot) \in \mathcal{C}^0([0, g_0]), \right. \\ \left. Z(\cdot, g) \in \mathbb{Z}_2(\mathbb{R}) \forall g \in [0, g_0], \sup_{(\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0}} \left| \frac{Z(\phi, g)}{Z_{QU}(\phi, g)} \right| < \infty \right\} \quad (2.69)$$

Wir ergänzen die Abbildungen

$$g \in [0, g_0], \quad \|\cdot\|_g : \mathcal{V}_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad Z \mapsto \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left| \frac{Z(\phi, g)}{Z_{QU}(\phi, g)} \right| \quad (2.70)$$

$$\|\|\cdot\|\|_{g_0} : \mathcal{V}_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad Z \mapsto \sup_{g \in [0, g_0]} \|Z\|_g \quad (2.71)$$

Der \mathbb{R} -Vektorraum \mathcal{V}^{g_0} wird durch die Norm $\|\|\cdot\|\|_{g_0}$ zu einem Banachraum. Da für die lineare δ -Funktion die Eigenschaft $\delta(g) < g$ gegeben ist, ist die erweiterte RGT $\mathcal{R} \times \delta^*$ auf \mathcal{V}_{g_0} selbstabbildend. Schränken wir \mathcal{V}_{g_0} auf Theorien zu einem festen Kurvenparameter g ein, so ist auf diesem Unterraum auch $\|\cdot\|_g$ eine Norm. Für $g = 0$ bzw. $g = \infty$ erhalten wir \mathcal{V}_{UV} bzw. \mathcal{V}_{QU} . \mathcal{V}_∞ stellt folglich eine Menge von Theorieräumen dar, deren Objekte zwischen \mathcal{V}_{UV} und \mathcal{V}_{QU} interpolieren und sich durch $Z_{QU}(g)$ abschätzen lassen.

Es sei $g_0^1 < g_0^2$. Werden die Funktionen aus $\mathcal{V}_{g_0^2}$ auf $\mathcal{P}_{g_0^1}$ eingeschränkt, so gilt $\mathcal{V}_{g_0^2} \subset \mathcal{V}_{g_0^1}$.

Korrespondierend zu (2.13) definieren wir aus der konvexen Teilmenge von \mathcal{V}_{g_0} , die aus den positiven Funktionen besteht, den Raum der Potentiale \mathcal{W}_{g_0} , auf dem die erweiterte Transformation $\mathcal{T} \times \delta^*$ agiert.

Abschließend wollen wir noch einmal die Bedeutung der Transformation $\mathcal{R} \times \delta^*$ herausstellen: Sie wirkt auf einem Raum von Kurven, und ihre Fixpunkte stellen unter der HRGT invariante Trajektorien dar.

2.5 Existenz und Konstruktion eines Fixpunktes

Ziel dieses Paragraphen ist es, Kriterien zu finden, die einen Punkt aus \mathcal{V}_{g_0} zu einem approximativen Fixpunkt der Transformation $\mathcal{R} \times \delta^*$ machen, so daß wir um diese Funktion eine Menge konstruieren können, in der gewiß ein Fixpunkt liegt. Der Banachsche Fixpunktsatz, welcher uns die Existenz dieses Fixpunktes beweist, liefert auch sogleich ein Konstruktionsverfahren desselbigen.

Zu Beginn zwei Definitionen, die uns das Leben leichter machen. Die erste vereinfacht uns die Handhabung der in diesem Abschnitt häufig auftretenden Indizes C, σ, g , die zweite bietet Transformationen, mit deren Hilfe wir $\mathcal{R} \times \delta^*$ zerlegen können. Im folgenden sei $g_0 \in \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt.

Definition 2.5.1

$$\mathcal{I} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, g_0], \quad X^\alpha = (C_\alpha, \sigma_\alpha, g_\alpha) \in \mathcal{I} \quad (2.72)$$

Definition 2.5.2

Es sei $Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$. Dann definiere

$$\Delta : \mathcal{V}_{g_0} \rightarrow \mathcal{V}_{g_0} \quad Z \mapsto (\mathcal{R} \times \delta^* - id)(Z) \quad (2.73)$$

$$\mathcal{R}_{Z_1} : \mathcal{V}_{g_0} \rightarrow \mathcal{V}_{g_0} \quad Z \mapsto \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + Z) - \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1). \quad (2.74)$$

Die Wohldefiniertheit der beiden Abbildungen folgt aus der von $\mathcal{R} \times \delta^*$, welche sich mit Hilfe der obigen Definition auch darstellen läßt als:

$$Z_2 \in \mathcal{V}^{g_0} \Rightarrow \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + Z_2) = Z_1 + \Delta(Z_1) + \mathcal{R}_{Z_1}(Z_2) \quad (2.75)$$

Ferner liefert uns die Funktion Δ ein Maß für die Güte eines angenäherten Fixpunktes von $\mathcal{R} \times \delta^*$, indem wir die Abweichungen in jedem Punkt mittels $\|\Delta(\cdot)\|_g$ oder die maximale Abweichung per $\|\|\Delta(\cdot)\|\|_{g_0}$ berechnen.

Was nun einen beliebigen Punkt aus \mathcal{V}_{g_0} zu einem angenäherten Fixpunkt macht, klärt folgende

Definition 2.5.3 (Der approximierter Fixpunkt)

$Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$ ist ein approximierter Fixpunkt genau dann wenn gilt:

$$\exists X^1, X^\Delta \in \mathcal{I} \quad \text{mit} \quad \sigma_\Delta > \frac{D}{4-D} : \quad \begin{array}{l} Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}^+ \\ \|Z_1\|_g \leq e^{C_1 g^{\sigma_1}} \quad \forall g \in [0, g_1] \\ \|\Delta(Z_1)\|_g \leq C_\Delta g^{\sigma_\Delta} \quad \forall g \in [0, g_\Delta] \end{array}$$

Ein solcher approximierter Fixpunkt Z_1 hat die Eigenschaft, daß seine Trajektorie denselben Ursprung besitzt wie der exakte Fixpunkt, da $\|\Delta(Z_1)\|_0 = 0$. Je größer der Wert von σ_Δ , desto mehr schmiegt sich die approximierte an die reale Fixpunkttrajektorie an (für $g \leq 1$). Die erste Forderung macht Z_1 zu einer physikalisch sinnvollen Fixpunktapproximante.³¹ Die zweite Abschätzung fließt bei der Konstruktion eines Konus um Z_1 ein, innerhalb dessen nur positive, also durch Wirkungen realisierbare, Funktionen liegen.

Dieser Konus sei eine Menge von folgender Gestalt:

Definition 2.5.4 (Die approximierte Fixpunktumgebung)

Es sei $X^2 \in \mathcal{I}$ und $Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$ ein approximierter Fixpunkt. Dann definiere

$$\mathcal{U}_{X^2}(0) = \left\{ Z_2 \in \mathcal{V}_{g_0} \mid \|Z_2\|_g \leq C_2 g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, g_2] \right\} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{U}_{X^2}(Z_1) = Z_1 + \mathcal{U}_{X^2}(0). \quad (2.77)$$

Es heißt nun eine Menge $\mathcal{U}_{X^2}(Z_1)$ Umgebung eines approximierten Fixpunktes, oder einfach approximierte Fixpunktumgebung, genau dann, wenn $X^2 \in \mathcal{I}$ so gewählt ist, daß

$$|Z_2(\phi, g)| \leq \frac{1}{2} Z_1(\phi, g) \quad \forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_2} \quad (2.78)$$

Die Eigenschaft (2.78) gewährt, daß alle Wirkungen einer approximierten Fixpunktumgebung positiv sind.³² Ferner sind oben definierte Mengen konvex und vollständig bzw. der Norm $\|\cdot\|_{g_2}$. Die letzte Eigenschaft wollen wir hier explizit zeigen:

Es sei $Z_n \in \mathcal{U}_{X^2}(0)$ eine Cauchy-Folge mit $Z = \lim Z_n$, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein N , so daß $\|Z - Z_n\|_{g_2} < \epsilon$ für $n > N$. Es folgt direkt, daß für alle $(\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_2}$ die Ungleichung $|Z(\phi, g)| < |Z_n(\phi, g)| + \epsilon$ gilt. Nehmen wir nun an, Z liegt nicht in $\mathcal{U}_{X^2}(0)$, so existiert ein (ϕ, g) -Tupel, so daß $Z(\phi, g) > \frac{1}{2} Z_1(\phi, g)$. Es existiert ein ϵ , mit dem auch

$$Z_n(\phi, g) > Z(\phi, g) - \epsilon > \frac{1}{2} Z_1(\phi, g)$$

gilt, was einen Widerspruch darstellt.

Im folgenden zeigen wir zwei Lemmata (inkl. eines Korollars), welche wir zum Beweis des darauffolgenden Satzes benötigen.

³¹Da wir den Fixpunkt durch eine unendliche Iteration der erweiterten RGT generieren werden, und $\mathcal{T} \times \delta^*$ die Positivität erhält, müssen wir schon mit einer physikalischen Approximante starten.

³²Statt $\frac{1}{2}$ hätten wir auch jede andere Zahl aus $(0, 1)$ benutzen können.

Lemma 2.5.5

$$\begin{aligned}
& X^1, X^2 \in \mathcal{I} \quad \text{mit} \quad \sigma_2 > \frac{D}{4-D} \\
& Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0} \quad \text{mit} \quad \|Z_1\|_g \leq e^{C_1 g^{\sigma_1}} \quad \forall g \in [0, g_1] \\
\Rightarrow & \exists \tilde{g} \in (0, g_0] \quad \forall Z_2 \in \mathcal{U}_{X^2}(0) : \|\mathcal{R}_{Z_1}(Z_2)\|_g \leq \frac{C_2}{2} g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, \tilde{g}] \quad (2.79)
\end{aligned}$$

Beweis:

1. $\exists \tilde{g}_1 \in (0, \min\{g_0, g_1\}) : e^{C_1 g^{\sigma_1}} \leq \tilde{C}_1 := 1 + \frac{1}{2(\alpha-1)} \quad \forall g \in [0, \tilde{g}_1]$
2. $\exists \tilde{g}_2 \in (0, g_0] : C_2(\delta g)^{\sigma_2} \leq \frac{1}{2(\alpha-1)} \quad \forall g \in [0, \tilde{g}_2]$
3. $\tilde{g} := \min\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\}$

Sei nun $Z_2 \in \mathcal{U}_{X^2}(0)$ und $(\phi, g) \in \mathcal{P}_{\tilde{g}}$:

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{R}_{Z_1}(Z_2)(\phi, g)| \\
&= \left| \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + sZ_2)(\phi, g) \Big|_0^1 \right| \\
&\stackrel{(a)}{=} \left| \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + sZ_2)(\phi, g) \right| \\
&\leq \alpha \int_0^1 ds \int d\mu_\gamma(\zeta) \{ (|Z_1| + s|Z_2|)^{\alpha-1} |Z_2| \} (\beta\phi + \zeta, \delta g) \\
&\stackrel{(b)}{\leq} \alpha \int_0^1 ds \int d\mu_\gamma(\zeta) \left(\tilde{C}_1 + sC_2(\delta g)^{\sigma_2} \right)^{\alpha-1} C_2(\delta g)^{\sigma_2} Z_{QU}^\alpha(\beta\phi + \zeta, \delta g) \\
&\leq \left\{ \sup_{s \in [0,1]} \alpha \left(\tilde{C}_1 + sC_2(\delta g)^{\sigma_2} \right)^{\alpha-1} C_2(\delta g)^{\sigma_2} \right\} \mathcal{R} \times \delta^*(Z_{QU})(\phi, g) \\
&= \alpha \left(\tilde{C}_1 + C_2(\delta g)^{\sigma_2} \right)^{\alpha-1} C_2(\delta g)^{\sigma_2} Z_{QU}(\phi, g) \\
&\stackrel{(c)}{\leq} L^{D-(4-D)\sigma_2} e C_2 g^{\sigma_2} Z_{QU}(\phi, g) \\
&\stackrel{(d)}{\leq} \frac{1}{2} C_2 g^{\sigma_2} Z_{QU}(\phi, g) .
\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung des Integranden nach s (a) ist wohldefiniert, da er eine Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen in s darstellt.³³ In der

³³Vertauschung von Integration und Differentiation ist aufgrund gleichmäßiger Stetigkeit gewährleistet.

Umformung (b) durfte 1. wegen $\delta g \leq g$ benutzt werden. In (c) fließen 2. und $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e$ ein. Damit (d) gilt, müssen wir

$$L \geq \exp\left(\frac{1 + \ln 2}{(4 - D)\sigma_2 - D}\right) \quad (2.80)$$

wählen.³⁴

□

Es stellt sich die Frage nach dem maximalen Wert von \tilde{g} . Unabhängig von g_0 und g_1 stellen die Ungleichungen 1. und 2. natürliche Schranken dar und wir erhalten

$$g_{nat} = \min \left\{ \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{C_1} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}}, \frac{1}{\delta (2C_2(\alpha-1))^{\frac{1}{\sigma_2}}} \right\}. \quad (2.81)$$

Da die Wahl von \tilde{g} im obigen Lemma unabhängig von g_2 war, kann man sofort ein g_2 wählen, das die Abschätzungen von \tilde{g} erfüllt. Wir erhalten somit folgenden wichtigen

Korollar 2.5.6

Es seien

$$X^1 \in \mathcal{I}, \quad Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0} \quad \text{mit} \quad \|Z_1\|_g \leq e^{C_1 g^{\sigma_1}} \quad \forall g \in [0, g_1] \quad (2.82)$$

$$\Rightarrow \exists X^2 \in \mathcal{I} \quad \forall Z_2 \in \mathcal{U}_{X^2}(0) : \quad \|\mathcal{R}_{Z_1}(Z_2)\|_g \leq \frac{C_2}{2} g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, g_2]. \quad (2.83)$$

Hierbei sind $C_2 \in \mathbb{R}^+$ und $\sigma_2 \in \left(\frac{D}{4-D}, \infty\right)$ frei wählbar.

Lemma 2.5.7

Es seien

$$X^\Delta \in \mathcal{I}, \quad Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0} \quad \text{mit} \quad \|\Delta(Z_1)\|_g \leq C_\Delta g^{\sigma_\Delta} \quad \forall g \in [0, g_\Delta] \quad (2.84)$$

und

$$\tilde{C}_\Delta, \tilde{\sigma}_\Delta \in \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad \tilde{\sigma}_\Delta < \sigma_\Delta \quad (2.85)$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{g}_\Delta \in (0, g_0] : \quad \|\Delta(Z_1)\|_g \leq \tilde{C}_\Delta g^{\tilde{\sigma}_\Delta} \quad \forall g \in [0, \tilde{g}_\Delta]. \quad (2.86)$$

³⁴Setzen wir $L > \exp\left(\frac{1}{(4-D)\sigma_2 - D}\right)$ voraus, so erhalten wir in Schritt (d) des Beweises statt $\frac{1}{2}$ einen Faktor $C(L) < 1$.

Beweis: Wähle $\tilde{g}_\Delta = \min \left\{ \left(\frac{\tilde{C}_\Delta}{C_\Delta} \right)^{\frac{1}{\sigma_\Delta - \tilde{\sigma}_\Delta}}, g_\Delta \right\}$.

Korollar 2.5.6 und Lemma 2.5.7 bilden die Basis der Aussage, daß um einen approximierten Fixpunkt eine konvexe Menge konstruiert werden kann, auf der $\mathcal{R} \times \delta^*$ selbstabbildend ist. Diese, für die spätere Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes benötigte, erste wichtige Eigenschaft protokolliert folgender

Satz 2.5.8

$Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$ sei ein approximierter Fixpunkt \Rightarrow

$$\exists X^2 \in \mathcal{I} \quad \text{mit} \quad \sigma_2 < \sigma_\Delta : \quad \mathcal{R} \times \delta^* : \mathcal{U}_{X^2}(Z_1) \rightarrow \mathcal{U}_{X^2}(Z_1) \quad (2.87)$$

Beweis: Es ist zu zeigen : $\exists X^2 \in \mathcal{I} \quad \forall Z_2 \in \mathcal{U}_{X^2}(0) :$

$$\|\Delta(Z_1) + \mathcal{R}_{Z_1}(Z_2)\|_g \leq C_2 g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, g_2]$$

Nach Korollar 2.5.6 $\exists X^2 \in \mathcal{I}$ mit $\sigma_2 \in (\frac{D}{4-D}, \sigma_\Delta)$, so daß

$$\forall Z_2 \in \mathcal{U}_{X^2}(0) : \quad \|\mathcal{R}_{Z_1}(Z_2)\|_g \leq \frac{C_2}{2} g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, g_2].$$

OBdA existiert nach Lemma 2.5.7 eine Transformation $X^\Delta \rightarrow X^2$, so daß

$$\|\Delta(Z_1)\|_g \leq \frac{C_2}{2} g^{\sigma_2} \quad \forall g \in [0, g_2].$$

□

Und auch die letzte benötigte Eigenschaft von $\mathcal{R} \times \delta^*$ in einem

Satz 2.5.9

$Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$ sei ein approximierter Fixpunkt \Rightarrow

$\exists X^2 \in \mathcal{I}$ so daß $\mathcal{R} \times \delta^* : \mathcal{U}_{X^2}(Z_1) \rightarrow \mathcal{U}_{X^2}(Z_1)$ kontrahierend ist.

Beweis: Es ist zu zeigen:

$$\exists X^2 \in \mathcal{I} \quad \exists \lambda \in (0, 1) \quad \forall Z = Z_1 + Z_2, \quad Z' = Z_1 + Z_2' \in \mathcal{U}_{X^2}(Z_1) :$$

$$\|\mathcal{R} \times \delta^*(Z) - \mathcal{R} \times \delta^*(Z')\|_{g_0} \leq \lambda \|Z - Z'\|_{g_0}$$

Wähle X^2 wie in Satz 2.5.8

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + Z_2) - \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + Z'_2) \right\|_{g_0} \\
 &= \left\| \mathcal{R}_{Z_1}(Z_2) - \mathcal{R}_{Z_1}(Z'_2) \right\|_{g_0} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \left\| \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}_{Z_1}(Z'_2 - s(Z_2 - Z'_2)) \right\|_{g_0} \\
 &\leq \int_0^1 ds \left\| \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{R}_{Z_1}(\underbrace{Z'_2 + s(Z_2 - Z'_2)}_{\nu}) + \epsilon(\underbrace{Z_2 - Z'_2}_{\omega}) \right\|_{\epsilon=0} \Big|_{g_0} \\
 &= (\star)
 \end{aligned}$$

Der Term in (1) ist stetig partiell nach s differenzierbar, da $\mathcal{U}_{X^2}(Z_1)$ konvex ist. Diese Eigenschaft bewahrt uns auch darauffolgend vor einem evtl. Verlassen des Definitionsbereiches von \mathcal{R}_{Z_1} , denn das Integral ist in diesem Fall als uneigentlich zu betrachten. Folglich ist $s \in (0, 1)$ und es gilt:

$$\forall s \in (0, 1) \quad \exists \epsilon(s) > 0 \quad \forall |\epsilon| < \epsilon(s) : \quad s + \epsilon \in [0, 1]$$

Es folgt nun $\forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0}$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{R}_{Z_1}(\nu + \epsilon\omega)(\phi, g) \right|_{\epsilon=0} \\
 &= \left| \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_0^1 d\tilde{s} \int d\mu_\gamma(\zeta) \alpha \{ (Z_1 + \tilde{s}(\nu + \epsilon\omega))^{\alpha-1} (\nu + \epsilon\omega) \} (\beta\phi + \zeta, \delta g) \right|_{\epsilon=0} \\
 &= \left| \int_0^1 d\tilde{s} \int d\mu_\gamma(\zeta) \alpha \{ \omega(Z_1 + \tilde{s}\nu)^{\alpha-2} (Z_1 + \alpha\tilde{s}\nu) \} (\beta\phi + \zeta, \delta g) \right| \\
 &= \left| \int d\mu_\gamma(\zeta) \alpha \{ \omega(Z_1 + \nu)^{\alpha-1} \} (\beta\phi + \zeta, \delta g) \right| \\
 &\stackrel{2.5.5}{\leq} \frac{1}{2} \|\omega\|_{g_0} Z_{QU}(\phi, g)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde darauf zurückgegriffen, daß Z_1 ein approximierter Fixpunkt ist, $\nu \in \mathcal{U}_{X^2}$ und $|\omega(\phi, g)| \leq \|\omega\|_{g_0} Z_{QU}(\phi, g) \quad \forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0}$. Die Rechnung läuft analog der aus Lemma 2.5.5.

Jetzt ist es uns vergönnt, die anfangs begonnene Rechnung fortzuführen. Da $\frac{1}{2}\|\omega\|_{g_0} Z_{QU}(\phi, g)$ unabhängig von s ist, erhalten wir $(\star) \leq \frac{1}{2}\|\omega\|_{g_0}$. Es ist also hier $\lambda = \frac{1}{2}$.

□

Mittels der Sätze 2.5.8, 2.5.9 und der Vollständigkeit der approximierten Fixpunktumgebung bezüglich der Norm-induzierten Metrik gelingt es uns nun, den fundamentalen Satz über die Existenz von Fixpunkten der Transformation $\mathcal{R} \times \delta^*$ zu formulieren.

Satz 2.5.10 (Fixpunktsatz)

Sei $Z_1 \in \mathcal{V}_{g_0}$ ein approximierter Fixpunkt. Dann existiert ein $X^2 \in \mathcal{I}$, so daß $\mathcal{R} \times \delta^* : \mathcal{U}_{X^2}(Z_1) \rightarrow \mathcal{U}_{X^2}(Z_1)$ genau einen Fixpunkt besitzt.

Beweis: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes für metrische Räume, z.B. [Sma80].

Anmerkungen: Der Banachsche Fixpunktsatz liefert auch ein Verfahren zur Konstruktion des Fixpunktes, indem wir auf einen beliebigen Punkt der approximativen Fixpunktumgebung $\mathcal{R} \times \delta^*$ iterativ anwenden, bis das Bild der Abbildung sich stabilisiert.

Am wichtigsten bei dem hier vorgestellten Verfahren ist die Wahl eines guten approximierten Fixpunktes, d.h. wir benötigen eine Abschätzung $\|\Delta(\cdot)\|_g \leq C_\Delta g^{\sigma_\Delta}$ mit großem σ_Δ . Dieser Exponent wird jedoch nicht nur durch unsere Qualitätsansprüche bestimmt. Entscheidend ist die folgende Ungleichung, die für die Konstruktion von $\mathcal{R} \times \delta^*$ gelten muß:

$$\frac{D}{4-D} < \sigma_\Delta \tag{2.88}$$

2.6 Approximierte Fixpunkte

Im letzten Paragraphen wurde gezeigt, daß man zur iterativen Berechnung unseres RG-Fixpunktes eine Starttrajektorie benötigt, welche den Bedingungen von Definition 2.5.3 genügt. Um die Konstruktion einer solchen Anfangskurve wollen wir uns in diesem Kapitel bemühen.

2.6.1 Interpolationsformeln

Zuvor wollen wir jedoch einige mathematische Hilfsmittel bereitstellen, die uns den Umgang mit der RGT erleichtern.

Satz 2.6.1

Es sei $t \in [0, 1]$ und \mathcal{V} ein Raum von analytischen Funktionen über \mathbb{R} , so daß

$$F_t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad F_t(Z)(\phi) = \int d\mu_{t\gamma}(\zeta) Z(\phi + \zeta) \quad \forall \phi \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

wohldefiniert ist. Dann ist die Abbildungsschar F stetig differenzierbar in ihrem Parameter t , und es gilt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) F_t(Z)(\phi) = 0. \quad (2.90)$$

Beweis: F_t ist in $(0, 1]$ stetig partiell differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_t(Z)(\phi) &= \int \frac{\partial}{\partial t} d\mu_{t\gamma}(\zeta) Z(\phi + \zeta) \\ &= \int \frac{1}{2t} \left(\frac{\zeta^2}{t\gamma} - 1 \right) d\mu_{t\gamma}(\zeta) Z(\phi + \zeta) \\ &= \frac{\gamma}{2} \int \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} d\mu_{t\gamma}(\zeta) Z(\phi + \zeta) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\gamma}{2} \int d\mu_{t\gamma}(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} Z(\phi + \zeta) \\ &= \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} F_t(Z)(\phi) \end{aligned}$$

Die Umformung (*) entspricht einer zweimaligen partiellen Integration, in der

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2t\gamma}} \frac{\partial}{\partial \zeta} Z(\phi + \zeta) = \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} Z(\phi + \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2t\gamma}} = 0$$

benutzt wurde. Um die Ableitung in $t = 0$ zu berechnen, bemühen wir deren Definition. Wir wollen noch bemerken, daß $F_0 = id$, da $d\mu_\gamma(\zeta) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \delta(\zeta)d\zeta$. Daraus folgt für beliebige $Z \in \mathcal{V}$ und $\phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((F_t(Z)(\phi) - F_0(Z)(\phi))) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int d\mu_{t\gamma}(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} Z(\phi) \zeta^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{2^n n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \phi^{2n}} Z(\phi) t^{n-1} \\ &= \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Z(\phi) \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Ableitung ist offensichtlich.

Der soeben bewiesene Satz 2.6.1 liefert die Grundlage für eine weitere Abbildung, die mittels des Parameters t zwischen der RGT $\mathcal{T} \times \delta^*$ und der „Identität“ interpoliert.

Lemma 2.6.2

Definieren wir für $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{T}_t(V)(\phi, g) = -\log \int d\mu_{(1-t)\gamma}(\zeta) e^{-\alpha V(\beta\phi + \zeta, \delta g)}, \quad (2.91)$$

so ist diese Abbildungsschar stetig differenzierbar in ihrem Parameter t , und es gilt die Differentialgleichung³⁵

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T}_t(V)(\phi, g) = \frac{\gamma}{2\beta^2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t(V)(\phi, g) \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \mathcal{T}_t(V)(\phi, g) \right\}. \quad (2.92)$$

Beweis: Wir haben die Angabe eines Definitions- und Wertebereiches bewußt ausgelassen, da wir die Eigenschaft der Differenzierbarkeit in \mathcal{V} bzw \mathcal{W} nicht involviert haben.³⁶ Man beachte aber, daß für eine Kovarianz γ RGT geeignete Wirkung (Potential) auch für eine RGT mit Kovarianz $\gamma' < \gamma$ geeignet ist. Die Wohldefiniertheit von $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ überträgt sich also auf \mathcal{T}_t . Die stetige Differenzierbarkeit in t folgt aus 2.6.1. Die Differentialgleichung beweist man durch explizites Ableiten. Um dabei die Ergebnisse aus dem zuvor bewiesenen Satz benutzen zu können, schreiben wir \mathcal{T}_t durch die Substitution $\frac{\zeta}{\beta} \rightarrow \zeta$ als

$$\mathcal{T}_t(V)(\phi, g) = -\log \int d\mu_{(1-t)\gamma\beta^{-2}}(\zeta) e^{-\alpha V(\beta(\phi + \zeta), \delta g)}$$

□

2.6.2 Baumgraphen

Betrachten wir die formale Störungsreihe

$$V^\infty(\phi, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=\max\{1, n-1\}}^{\infty} V_{2n,r} g^r \phi^{2n}, \quad (2.93)$$

³⁵Diese gilt natürlich nur für solche Potentiale, die zweimal stetig differenzierbar sind - und nur solche werden wir betrachten.

³⁶Um die Vollständigkeit des Raumes \mathcal{V} zu wahren, hätten wir eine Supremumsnorm, die auch die Ableitungen mit einschließt, benutzen müssen. Da wir die Interpolationsformel allerdings nur auf ganz bestimmte Potentiale, nämlich solche, die approximierbare Fixpunkte generieren und die Differentiationseigenschaft aufweisen, anwenden, können wir die Definition von \mathcal{V} bzw. \mathcal{W} so allgemein halten, wie sie war.

deren Koeffizienten so bestimmt sind, daß V^∞ die Eigenschaften einer ϕ^4 -Trajektorie bezüglich $\delta(g) = \delta g$ besitzt,³⁷ so erkennen wir, daß für $g \ll 1$ das Verhalten eines Feldes der Ordnung $2n$ primär durch den g -Summanden in kleinster Ordnung beschrieben wird. In diesem Abschnitt berechnen wir die korrespondierenden Leitkoeffizienten $V_{2n, \max\{n-1, 1\}}$, die für $n \geq 2$ auch Baumgraphen genannt werden, indem wir aus dem mittels 2.6.2 interpolierten Potential (2.93) Differentialgleichungen ableiten und lösen.

Wir beginnen mit

$$\mathcal{T}_t(V^\infty)(\phi, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=\max\{1, n-1\}}^{\infty} V_{2n, r}(t) g^r \phi^{2n}. \quad (2.94)$$

Da der Parameter t nur in der Kovarianz der Integraltransformation auftaucht, ist seine Wirkung durch die Gleichung (2.27) beschrieben.³⁸ Laut (2.35) sind die ϕ -abhängigen Koeffizienten zu gegebener Ordnung g^r von der Ordnung $r+1$. Folglich ist das interpolierte Potential forminvariant. Der nun t -abhängige Koeffizient $V_{2n, r}$ ist ein Polynom in t , da die Kovarianz polynomial in den normalgeordneten Monomen auftaucht. Es sei noch bemerkt, daß \mathcal{T}_t keine Terme in g^0 generieren kann, da

$$\begin{aligned} -\log \int d\mu_{\gamma(t)}(\zeta) e^{-V^\infty(\phi+\zeta, g)} &= -\log \int d\mu_{\gamma(t)}(\zeta) \{1 + O(g)\} \\ &= -\log \{1 + O(g)\} = O(g). \end{aligned}$$

Wir folgern folgenden

Satz 2.6.3 (Differentialgleichung der Baumgraphen)

Es seien $g_0 \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0, 1]$ und die formalen Potenzreihen

$$V^\infty, \mathcal{T}_t(V^\infty) : \mathcal{P}_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert wie in (2.93) bzw. (2.94). Dann gilt

$$\dot{V}_{4,1}(t) = 0, \quad \dot{V}_{2,1}(t) = -6 \frac{\gamma}{\beta^2} V_{4,1}(t), \quad \dot{V}_{0,1}(t) = -\frac{\gamma}{\beta^2} V_{2,1}(t). \quad (2.95)$$

Ferner erhält man für $n \geq 3$ die Differentialgleichungen

$$\dot{V}_{2n, n-1}(t) = \frac{2\gamma}{\beta^2} \sum_{m=2}^{n-1} m(n+1-m) V_{2m, m-1}(t) V_{2(n+1-m), n-m}(t). \quad (2.96)$$

³⁷Diese Reihe unterscheidet sich von der in Kapitel 2.3 bestimmten Reihe nur dadurch, daß sie nicht in normalgeordneten Monomen organisiert ist.

³⁸Man muß nur g durch δg und γ durch $(1-t)\gamma$ ersetzen.

Beweis: Um das Summieren in den folgenden Rechnungen zu vereinfachen, benutzen wir die Schreibweise

$$\mathcal{T}_i(V^\infty)(\phi, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n-1}^{\infty} V_{2n,r}(t) g^r \phi^{2n}$$

mit $V_{0,-1}(t) = V_{0,0}(t) = V_{2,0}(t) = 0$. Damit ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T}_i(V^\infty)(\phi, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n-1}^{\infty} \dot{V}_{2n,r}(t) g^r \phi^{2n} \\ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \mathcal{T}_i(V^\infty)(\phi, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (2n+1)(2n+2) V_{2(n+1),r}(t) g^r \phi^{2n} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_i(V^\infty)(\phi, g) \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{r_1=m-1}^{\infty} \sum_{r_2=n-m-1}^{\infty} 4m(n-m) V_{2m,r_1}(t) V_{2(n-m),r_2}(t) g^{r_1+r_2} \phi^{2(n-1)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{r_1=m-1}^{\infty} \sum_{r_2=n-m}^{\infty} 4m(n+1-m) V_{2m,r_1}(t) V_{2(n+1-m),r_2}(t) g^{r_1+r_2} \phi^{2n} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} 4m(n+1-m) V_{2m,m-1}(t) V_{2(n+1-m),n-m}(t) g^{n-1} \phi^{2n} + O(g^n). \end{aligned}$$

In (*) haben wir ausgenutzt, daß ein Summand Null ist, falls r_1 oder r_2 nicht positiv sind. Wir dürfen uns somit auf $1 < m < n-1$ beschränken, und es folgt, daß für $n \leq 3$ alle Summanden verschwinden. Anschließend führt man noch eine Indexverschiebung der Form $n \rightarrow n-1$ durch.

Vergleichen wir nun mittels der Differentialgleichung aus Lemma 2.6.2 die Koeffizienten von $g^{\max\{1,n-1\}} \phi^{2n}$, erhalten wir die Behauptung.

□

Obwohl es auch möglich gewesen wäre, Differentialgleichungen für alle $V_{2n,r}(t)$ zu formulieren und durch das Lösen derselbigen die Koeffizienten zu bestimmen, benötigen wir im folgenden nur die Vorfaktoren der Form $V_{2n,\max\{1,n-1\}}(t)$. Wir weiten den Baumgraphenbegriff vom Beginn des Kapitels aus und erhalten eine

Definition 2.6.4 (Baumgraphen und Baumgraphenkoeffizienten)

Die Koeffizienten

$$b_{2n}(t) := V_{2n, \max\{1, n-1\}}(t) \quad (2.97)$$

heißen Baumgraphenkoeffizienten. Das interpolierte Potential der Form

$$V_B(t, \phi, g) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(t) g^{\max\{1, n-1\}} \phi^{2n} \quad (2.98)$$

nennen wir dementsprechend Baumgraph oder Baumgraphenpotential, in manchen Fällen sprechen wir auch von der Baumgraphennäherung.

Das Baumgraphenpotential V_B genügt der Differentialgleichung, die sich aus der Interpolation 2.6.2 ergibt. Es hat jedoch einen Schönheitsfehler: $V_B(0, \cdot, \cdot)$ ist kein Fixpunkt der RGT $\mathcal{T} \times \delta^*$. Wenn wir uns jedoch an unser eigentliches Vorhaben erinnern, das Konstruieren eines approximierten Fixpunktpotentials, so ist diese Eigenschaft der Baumgraphen belanglos, sofern sie den Bedingungen eines approximierten Fixpunktes genügen.

Wir erwähnen an dieser Stelle, daß der Baumgraph in seiner jetzigen Form natürlich nicht als Starttrajektorie für das vorgestellte Konstruktionsverfahren dienen kann, da man all seine Koeffizienten berechnen müßte, was ja formaler Störungstheorie entspräche. Ließe man das zu, könnten wir V^∞ sogleich perturbativ bestimmen und hätte die Fixpunktgleichung $\mathcal{T} \times \delta^*(V^\infty) = V^\infty$ (formal) gelöst.³⁹

Dennoch wollen wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels mehr über die Baumgraphenkoeffizienten erfahren. Neben den in Satz 2.6.3 bestimmten Differentialgleichungen gehorchen sie noch einer weiteren Randbedingung:

$$T_1(V^\infty)(\phi, g) = \alpha V^\infty(\beta\phi, \delta g) \equiv \alpha T_0(V^\infty)(\beta\phi, \delta g) \quad (2.99)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} b_{2n}(1) &= (L^2)^{2-n} b_{2n}(0) \quad \forall n \geq 2 \\ b_2(1) &= \beta^{-2} b_2(0) \\ b_0(1) &= \beta^{-4} b_2(0) \quad . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Da es sich bei V^∞ um eine ϕ^4 -Trajektorie handelt, gilt ferner

$$b_4(0) = 1, \quad b_2(0) = -6, \quad b_0(0) = 3 \quad (2.101)$$

Mit Hilfe der Baumgraphendifferentialgleichung und den zuvor definierten Randbedingungen in (2.100) und (2.101) erarbeiten wir uns folgenden

³⁹Wir werden jedoch eine explizite Formel für die Baumgraphenkoeffizienten herleiten.

Satz 2.6.5

Es sei V^∞ eine als formale Potenzreihe dargestellte ϕ^4 -Trajektorie, deren Form Gleichung (2.93) genüge. Dann gilt für die Baumgraphen

$$b_0(t) = 3 \left(\frac{\gamma}{\beta^2} \right)^2 t^2 + 6 \frac{\gamma}{\beta^2} t + 3 \quad (2.102)$$

$$b_2(t) = -6 \frac{\gamma}{\beta^2} t - 6 \quad (2.103)$$

$$b_4(t) = 1 \quad (2.104)$$

$$b_{2n, n \geq 3}(t) = B_{2n} \left\{ \frac{\gamma(1 - (1 - L^{-2})t)}{\beta^2(1 - L^{-2})} \right\}^{n-2}. \quad (2.105)$$

Hierbei ist die Folge $(B_{2n})_{n \geq 2}$ durch die rekursive Vorschrift

$$B_4 = 1 \quad (2.106)$$

$$B_{2n} = \frac{2}{2-n} \sum_{m=2}^{n-1} m(n+1-m) B_{2m} B_{2(n+1-m)} \quad (2.107)$$

gegeben.

Beweis: Die Herleitung der Baumgraphen $b_{2n}(t)$ mit $n \in \{0, 1, 2\}$ ist eine einfache Übung der Integrationstheorie. Beim Überprüfen der Randbedingungen beachte man, daß $\gamma = 1 - \beta^2$. Durch explizites Einsetzen zeigt man, daß auch der Ansatz $b_{2n, n \geq 3}(t)$ den geforderten Randbedingungen genügt.

□

Ohne die Störungsreihe zu kennen oder berechnen zu müssen, ist es uns gelungen, eine Rekursionsformel für die $b_{2n}(t)$ zu finden. Da diesen, wie oben schon erwähnt, der Charakter von Leitkoeffizienten innewohnt, werden sie beim Führen von Abschätzungen vollständig ausreichen, um das Verhalten unserer Fixpunktkandidaten zu bestimmen. Es sei noch erwähnt, daß $b_{2n}(0)$ die exakten Baumgraphenkoeffizienten des Fixpunktpotentials V^∞ sind.

Abschließend noch ein

Lemma 2.6.6

Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gilt:

$$B_{2n} = (-1)^n |B_{2n}| \quad (2.108)$$

Beweis über Induktion (nur Schritt):

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{2}{n-2} \sum_{m=2}^{n-1} m(n+1-m) |B_{2m}| |B_{2(n+1-m)}| = (-1)^n |B_{2n}| \quad (2.109)$$

□

Aus (2.105) und Lemma 2.6.6 folgt, daß auch die t -abhängigen Baumgraphenkoeffizienten b_{2n} alternierend sind.

2.6.3 Explizite Formulierung der Baumgraphenkoeffizienten

Die rekursive Formulierung der Baumgraphenkoeffizienten (2.106) ist schön, aber nicht effizient. Aus diesem Grund machen wir uns in diesem Abschnitt auf die Suche nach einer expliziten Formel für die Leitkoeffizienten.

Wir betrachten die Hilfsfolge

$$c_m := \sqrt{2m} |B_{2m}| \quad (2.110)$$

und erhalten mit $a = 2^{\frac{3}{2}}$ und $b = 2^{\frac{1}{2}}$

$$c_2 = a \quad (2.111)$$

$$c_n = \frac{bn}{n-2} \sum_{m=2}^{n-1} c_m c_{n+1-m} . \quad (2.112)$$

Nun konstruieren wir die erzeugende Funktion

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n . \quad (2.113)$$

Unter der Annahme, daß g in $z = 0$ analytisch ist, erhalten wir mit Hilfe von (2.112)

$$zg'(z) - 2g(z) = b \left(\frac{g(z)^2}{z} \right)' z . \quad (2.114)$$

Diese nicht lineare Differentialgleichung besitzt die implizite Lösung (berechnet mit *Maple V*)

$$Czg(z) = (z + bg(z))^3 \quad (2.115)$$

Unter Verwendung der Anfangsbedingung (2.111) bestimmen wir die noch unbestimmte Konstante zu $C = \frac{1}{a}$. (2.115) erlaubt nun z.B. durch sukzessives Ableiten die Bestimmung der Koeffizienten c_n . Nach der Berechnung der ersten Ordnungen erahnen wir die Lösung

$$c_n = f_n a^{n-1} b^{n-2} \quad (2.116)$$

mit

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_2} = \{1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, 43263, 246675, \dots\} . \quad (2.117)$$

Die bis zu einer gewissen Position berechnete Koeffizientenfolge $\{f_n\}$ finden wir⁴⁰ samt expliziter Formel in [Slo]. Wir erhalten

$$f_{n \geq 1} = \frac{1}{2n-1} \binom{3(n-1)}{n-1} \quad (2.118)$$

und beweisen nun für den Fall $a = b = 1$, daß (2.118) wirklich die Gleichungen (2.111) und (2.112) erfüllt. Den Fall $n = 2$ zeigt man durch Einsetzen, für die Rekursionsbeziehung betrachte man die implizite Gleichung

$$F(x) - F(x)^3 = x , \quad (2.119)$$

welche die Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{2n-1}$ erfüllt.

Beweis: Die Gleichung (2.119) wird durch die Bürmann-Lagrangesche-Reihe $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ gelöst, deren Koeffizienten sich durch

$$f_n = \frac{1}{n} \operatorname{res}_0 \left((F - F^3)^{-n} \right) \quad (2.120)$$

bestimmen [HC64]. Bei der Residuenbestimmung ist die Laurentreihe in F gemeint. Mit Hilfe der geometrischen Reihe⁴¹ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{F - F^3} \right)^n &= \frac{1}{F^n} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (F^2)^{n-1}} \frac{1}{1 - F^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{k!}{(k-n+1)!} F^{2k-3n+2} . \end{aligned} \quad (2.121)$$

Für gerade n ist (2.121) residuenfrei. Ungerade Folgenglieder $n \rightarrow 2n-1$ lösen die Residuen Gleichung gemäß

$$2k - 3(2n-1) + 2 = -1 \Leftrightarrow k = 3(n-1) . \quad (2.122)$$

⁴⁰nach langer Suche

⁴¹Da $F(0) = 0$, existiert ob der Stetigkeit ein $R > 0$, so daß $|F(x)| < 1$ für $|x| < R$.

Durch Einsetzen erhält man (2.118). \square

(2.119) liefert nun nach einmaligem Differenzieren, Multiplikation mit F und nochmaliger Verwendung der Beziehung (2.119) die Gleichung

$$3xF(x)' - (F(x)^2)' = F(x), \quad (2.123)$$

aus der die Rekursionsbeziehung der c_n folgt. Die Gültigkeit von (2.116) für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ folgt durch Einsetzen in (2.111), (2.112) und Ausnutzung der soeben gewonnenen Relation für $a = b = 1$. Für die Baumgraphenkoeffizienten erhalten wir

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{2^{2n-3}}{n(2n-1)} \binom{3(n-1)}{n-1}. \quad (2.124)$$

Nachdem wir die f_n berechnet haben, können wir auch beweisen, daß der Ansatz einer konvergenten Potenzreihe g (2.113) gerechtfertigt war. Mittels des Quotientenkriteriums bestimmen wir den Konvergenzradius zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{4}{27} (ab)^{-1} = \frac{1}{27} > 0. \quad (2.125)$$

Der Ansatz der erzeugenden Funktion g erweist sich letztendlich als überflüssig, da alle Resultate aus der Gleichung (2.119) ableitbar sind. Wir betrachten die Potenzreihe g jedoch als Experiment, das uns erste numerische und analytische Ideen schenkte, und deshalb einen berechtigten Platz in dieser Arbeit einnimmt.

2.6.4 Konvergenzgebiet der Baumgraphen

Abschließend diskutieren wir noch die Konvergenz der Baumgraphen V_B . Fassen wir sie als Potenzreihen in ϕ^2 auf, so ergibt sich für den kopplungsabhängigen Konvergenzradius mit Hilfe von (2.105) und (2.125)

$$R(t, g) = \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \frac{1}{27} \frac{\beta^2(1-L^{-2})}{\gamma(1-(1-L^{-2})t)} |g|^{-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.126)$$

Dieses Resultat gilt auch für negative g . Dennoch erscheint es auf den ersten Blick sehr unbefriedigend, da für endliche Kopplungsparameter das (quadratische) Feld beschränkt ist. Eine exakte Berechnung des Baumgraphenpotentials auf dem Rand des Konvergenzgebietes ergibt für $g > 0$:

$$V_B(t, \phi, g) \Big|_{\phi^2 = +R(t, g)} = \dots + g^{-1} \left\{ \frac{\beta^2(1-L^{-2})}{\gamma(1-(1-L^{-2})t)} \right\}^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n |B_{2n}| \left(\frac{1}{27} \right)^n \quad (2.127)$$

Die Punkte symbolisieren die für die Konvergenzbetrachtung unwichtigen ersten beiden Summanden. Die Konvergenz der Reihe (2.127) folgt aus dem Leibniz-Kriterium,⁴² da

$$\left| \frac{B_{2(n+1)}}{B_{2n}} \right| = \frac{1}{6} \underbrace{\frac{3n-2}{n+1}}_{<3} \underbrace{\frac{3n-1}{2n+1}}_{<\frac{3}{2}} < 27, \quad (2.128)$$

und somit $(27)^{-n}|B_{2n}|$ streng monoton fallend ist. Unter Benutzung der Positivität folgt die Konvergenz gegen Null.

Für $\phi^2 = -R(t, g)$ erhalten wir (2.127) ohne den Faktor $(-1)^n$. Diese Reihe konvergiert nicht - ansonsten läge ein Widerspruch zum Konvergenzradius vor. Aufgrund der Entwicklung in ϕ^2 liegen auf der negativen reellen Achse nur imaginäre Feldvariablen ϕ , so daß wir unsere Betrachtungen auf \mathbb{R}_0^+ konzentrieren.

Für $\phi > \sqrt{R(t, g)}$ divergiert V_B . Möchte man mit einer Baumgraphenapproximante rechnen, die auch für Großfelder definiert ist, so muß man V_B in $\phi = \sqrt{R(t, g)}$ (n mal) stetig (differenzierbar) fortsetzen. Diesem Problem werden wir in dieser Arbeit jedoch nicht begegnen.

Unter der Annahme, daß das Konvergenzgebiet der perturbativen Trajektorie im Konvergenzbereich der Baumgraphen liegt, erhalten wir die Aussage, daß $V(\phi, g > 0)$ nicht für alle ϕ konvergiert. Dies ist direkt beweisbar, sofern ein ϕ^{2n} -Vertex die Gestalt $g^{\max(n-1,1)}(b_{2n}(0) + O(g))$ besitzt. Da die Reihe der Koeffizienten $\sum_{r \geq n} V_{2n,r} g^r$ jedoch höchstwahrscheinlich nicht konvergiert, dürfen wir sie nicht mit $O(g)$ identifizieren. Dennoch glauben wir, daß das Verhalten der Baumgraphenapproximante ein starkes Indiz für die Divergenz von V ist.

2.6.5 Das skalierende Potential

Wie generieren wir nun unseren approximierten Fixpunkt? Was liegt näher, als ihn von einem polynomialen Potential zu erzeugen, welches der Störungsreihe in der Ordnung s entspricht. Für kleine Kopplungskonstanten unterscheidet sich dieser Kandidat nur geringfügig von dem formal bestimmten perturbativen Potential. Dies liegt an der besonderen Struktur von V^∞ , in der Felder der Ordnung $2n$ mit der Gewichtung $O(g^{\max\{1, n-1\}})$ einfließen.

Zuvor jedoch ein

⁴²Es sei (a_n) eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$.

Lemma 2.6.7

Es seien $r, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{r!} \int_0^1 du (1-u)^r \frac{\partial^{r+1}}{\partial u^{r+1}} u^n = \begin{cases} 0 & n \leq r \\ 1 & n > r \end{cases} \quad (2.129)$$

Beweis: Die Teilaussage für $n \leq r$ folgt aus $\frac{\partial^{r+1}}{\partial u^{r+1}} u^n = 0$. Den Part für $n > r$ zeigt man mit vollständiger Induktion über r und benutzt im Induktionsschritt partielle Integration.

□

Mittels obiger Integraltransformation gelingt es uns, einen Projektor zu konstruieren, der zu beliebig vorgegebenem $r \in \mathbb{N}_0$ das Polynom vom Grade r aus einer um den Nullpunkt entwickelten Potenzreihe entfernt. Dazu folgende

Definition 2.6.8

Es sei $r \in \mathbb{N}_0$ und

$$\mathcal{D} = \{f : U_f(0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ analytisch in } 0\} .$$

Dann definiere den Projektor

$$\mathcal{P}^r : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \quad f(x) \mapsto \frac{1}{r!} \int_0^1 du (1-u)^r \frac{\partial^{r+1}}{\partial u^{r+1}} f(ux) \quad \forall x \in U_f(0) .$$

Obige Definition ist wohldefiniert, da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius - und dort befinden wir uns während der Integration, da $|ux| < R(f)$ wegen $|u| \leq 1$ - gliedweise integriert und differenziert werden dürfen. Ferner ist die oben definierte Abbildung linear und es gilt $\mathcal{P}^r \circ \mathcal{P}^r = \mathcal{P}^r$.

Falls es sich beim Definitionsbereich \mathcal{D} um Funktionen mehrerer Veränderlicher handelt, so wollen wir den Variablennamen, auf den der Projektor wirkt, als Index hinzufügen. Im Falle formaler Potenzreihen sei \mathcal{P}^r ein formaler Projektor.

Mit Hilfe von \mathcal{P}^r gewinnen wir nun auf einfachste Weise aus V^∞ ein polynomiales Potential.

Definition 2.6.9

Es sei $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$. Dann heißt

$$V^s(\phi, g) = (1 - \mathcal{P}_g^s)(V^\infty)(\phi, g) \quad (2.130)$$

skalierendes Potential in der Ordnung s .

Wir schränken uns bei dieser Definition sogleich auf die Potentiale ein, deren Großfeldverhalten die Wohldefiniertheit der Transformation $\mathcal{T} \times \delta^*$ erhält. Für ungerade s sind die Baumgraphenkoeffizienten $b_{2(s+1)}(t)$ positiv (siehe Lemma 2.6.6), und folglich ist $e^{-V^s} \in \mathcal{W}_\infty$. Ferner werden wir V^s im weiteren Verlauf in der Form

$$V^s(\phi, g) = \sum_{n=0}^{s+1} g^{\max\{1, n-1\}} \lambda_{2n}(g) \phi^{2n} \quad (2.131)$$

notieren und bemerken noch, daß $b_{2n}(0) = \lambda_{2n}(0)$.

Eine grundlegende Eigenschaft des skalierenden Potentials ist die Erfüllung der Fixpunktgleichung für $\mathcal{T} \times \delta^*$ bis zur Ordnung s in g . Man erkennt dies leicht, wenn man die Exponential- und Logarithmusfunktionen, die in der RGT auftauchen, als Reihen darstellt und beachtet, daß $V^\infty(\phi, g) = O(g)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \times \delta^*(V^s)(\phi, g) &= \mathcal{T} \times \delta^* \circ (1 - \mathcal{P}_g^s)(V^\infty)(\phi, g) \\ &= (1 - \mathcal{P}_g^s) \circ \mathcal{T} \times \delta^*(V^\infty)(\phi, g) + O(g^{s+1}) \\ &= (1 - \mathcal{P}_g^s)(V^\infty)(\phi, g) + O(g^{s+1}) \\ &= V^s(\phi, g) + O(g^{s+1}) \end{aligned}$$

Wir vereinbaren noch, den Index g des Projektors in Zukunft nicht mehr anzugeben und formulieren einen

Satz 2.6.10

Es sei $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ und V^s ein skalierendes Potential. Dann gilt:

$$(1 - \mathcal{P}^s) \circ \mathcal{T} \times \delta^*(V^s) = V^s \quad (2.132)$$

2.6.6 Die Baumgraphenschranke

Bei V^s handelt es sich um ein Polynom in ϕ und g , das man erhält, wenn man aus der perturbativen Lösung der Fixpunktgleichung V^∞ den Part $O(g^{s+1})$ entfernt. Wir sprechen deshalb auch von einem trunkierten Potential, das in den einzelnen Ordnungen im Kopplungsparameter aus Summen trunkierter Erwartungswerte besteht. In diesem Paragraphen wollen wir nun zeigen, daß V^s durch $\|e^{-V^s}\|_g \leq e^{C_{19}\sigma^1}$ abgeschätzt werden kann, und somit eine wichtige Voraussetzung erfüllt, um nach Definition 2.5.3 ein approximierter Fixpunkt zu sein. Die einzigen Größen, die für diesen *bound* bekannt sein müssen, sind die Baumgraphenkoeffizienten, welche wir in Kapitel 2.6.2 berechnet haben.

Wir werden im folgenden mit dem interpolierten skalierten Potential rechnen, das für $s \in 2\mathbb{N} + 1$ als

$$V^s(t, \phi, g) = (1 - \mathcal{P}^s) \mathcal{T}_t(V^\infty)(\phi, g) = \sum_{n=0}^{s+1} g^{\max\{1, n-1\}} \lambda_{2n}(g, t) \phi^{2n} \quad (2.133)$$

definiert ist. Der Spezialfall $t = 0$ liefert dann entsprechend Definition 2.6.9 das skalierende Potential. Das Polynom λ_{2n} erfüllt die Eigenschaft

$$\lambda_{2n}(g, t) = b_{2n}(t) + O(g) . \quad (2.134)$$

Natürlich hängt auch $O(g)$ noch von t ab. Nun folgt eine rekursive Abschätzung des Potentials (2.133). Beginnend mit

$$\tilde{\lambda}_{2(s+1)}^s(g, t) := \lambda_{2(s+1)}(g, t), \quad (2.135)$$

fahren wir für $n = s - 1, s - 3, \dots, 2$ fort

$$\begin{aligned} & g^{n-1} \lambda_{2n}(g, t) \phi^{2n} + g^n \lambda_{2(n+1)}(g, t) \phi^{2(n+1)} + g^{n+1} \tilde{\lambda}_{2(n+2)}^s(g, t) \phi^{2(n+2)} \\ \geq & g^{n-1} \left\{ \lambda_{2n}(g, t) - \frac{\lambda_{2(n+1)}(g, t)^2}{4\lambda_{2(n+2)}(g, t)} \right\} \phi^{2n} \\ =: & g^{n-1} \tilde{\lambda}_{2n}^s(g, t) \phi^{2n} , \end{aligned} \quad (2.136)$$

um die Ungleichung

$$V^s(t, \phi, g) \geq g\lambda_0(g, t) + g\lambda_2(g, t)\phi^2 + g\tilde{\lambda}_4^s(g, t)\phi^4 \quad (2.137)$$

zu erhalten. Jedes interpolierte skalierende Potential ungerader Ordnung besitzt also ein ϕ^4 Potential als untere Schranke. Diese Abschätzung ist allerdings nur sinnvoll, wenn wir zeigen können, daß $\tilde{\lambda}_4^s(g, t)$ positiv ist.⁴³ Die effektive ϕ^4 -Kopplung $\tilde{\lambda}_4^s(g, t)$ ist ein Kettenbruch, der alle Koeffizienten höherer Feldordnungen in sich vereint. Es ergibt sich⁴⁴

$$\tilde{\lambda}_4^s(g, t) = \lambda_4(g, t) - \frac{\lambda_6(g, t)^2}{|4\lambda_8(g, t)|} - \frac{\lambda_{10}(g, t)^2}{|4\lambda_{12}(g, t)|} - \dots - \frac{\lambda_{2s}(g, t)^2}{|4\lambda_{2(s+1)}(g, t)|} . \quad (2.138)$$

Wir können $\tilde{\lambda}_4^s$ zwar in einen „normalen“ Bruch umschreiben, doch ist es uns nicht möglich, die Funktionswerte oder singuläre Punkte zu berechnen, da wir die λ_{2n} nicht explizit bestimmt haben. Wir wissen aber, daß die λ_{2n} Polynome in g und t sind, folglich ist $\tilde{\lambda}_4^s$ eine rationale Funktion in (g, t) .

⁴³Ansonsten können wir nicht gegen $Z_{QU}(\phi, g)$ abschätzen.

⁴⁴Wir verwenden hier die Darstellung von Kettenbrüchen gemäß [OL].

Wenn wir nun zeigen können, daß die effektive Kopplung für $g = 0$ durch eine positive Konstante \tilde{C} nach unten beschränkt ist, so existieren $\tilde{g} > 0$ und $C > 0$ mit

$$\forall (g, t) \in [0, \tilde{g}] \times [0, 1] \quad : \quad \tilde{\lambda}_4^s(g, t) > C . \quad (2.139)$$

Beweis: Da $\tilde{\lambda}_4^s$ als rationale Funktion nur endlich viele Null- und Polstellen besitzt, wählen wir $\tilde{g} > 0$ so klein, daß das Rechteck $[0, \tilde{g}] \times [0, 1]$ null- und polstellenfrei ist. Es folgt Positivität. Die Existenz einer unteren Schranke leiten wir aus der gleichmäßigen Stetigkeit⁴⁵ ab, denn für alle $\epsilon > 0$ existiert ein Universal⁴⁶ $\delta > 0$, so daß für alle $(g_1, t_1), (g_2, t_2)$, die in Kreisen mit dem Durchmesser δ liegen⁴⁷, die Ungleichung $|\tilde{\lambda}_4^s(g_1, t_1) - \tilde{\lambda}_4^s(g_2, t_2)| < \epsilon$ erfüllt ist. Insbesondere folgt für $g_1 = 0$: $|\tilde{\lambda}_4^s(g_2, t_2)| > \tilde{C} - \epsilon$. Leider bietet die Argumentation über die gleichmäßige Stetigkeit keine quantitative Aussage über die maximale Kopplung \tilde{g} .

Es bleibt die Positivität für $g = 0$ zu zeigen. Mittels (2.134) und (2.105) erarbeiten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_4^s(0, t) &= b_4(t) - \frac{b_6(t)^2}{|4b_8(t)} - \frac{b_{10}(t)^2}{|4b_{12}(t)} - \dots - \frac{b_{2s}(t)^2}{|4b_{2(s+1)}(t)} \\ &= B_4 - \frac{B_6^2}{|4B_8} - \frac{B_{10}^2}{|4B_{12}} - \dots - \frac{B_{2s}^2}{|4B_{2(s+1)}} \end{aligned} \quad (2.140)$$

Man erkennt, daß die effektive ϕ^4 -Wirkung $\tilde{\lambda}_4^s \equiv \tilde{\lambda}_4^s(0, t)$ unabhängig vom Interpolationsparameter ist. Die Berechnung der ersten 50 Schranken ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Es stellt sich die Frage, ob diese Folge gegen eine positive reelle Zahl konvergiert. Diese Annahme wird durch die Grafik gestützt. In 199. Ordnung erhalten wir $\tilde{\lambda}_4^{199} \approx 0,7292155$ mit der absoluten Abweichung (zum Vorgänger) von $\approx 0,22 \cdot 10^{-5}$ und dem relativen Fehler⁴⁸ $\approx 0,31 \cdot 10^{-5}$. Allerdings ist das kein Indiz, denn auch „ganz viele kleine Dinge können etwas Großes bewirken“.⁴⁹ Für die Existenz der Baumschranke genügt es, die Relation $\tilde{\lambda}_4^s > 0$ für alle $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ zu beweisen. Mit Hilfe der expliziten Formulierung der Baumgraphenkoeffizienten wird dies möglich. Aus (2.140) erhalten wir in Anlehnung an (2.136) die Rekursionsbeziehung

$$\tilde{\lambda}_{2(s+1)}^s = B_{2(s+1)} \quad (2.141)$$

⁴⁵Jede stetige Funktion ist auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig.

⁴⁶unabhängig von (g, t)

⁴⁷und natürlich auch im Rechteck $[0, \tilde{g}] \times [0, 1]$

⁴⁸ $r^s = 2 \frac{\tilde{\lambda}_4^s - \tilde{\lambda}_4^{s-2}}{\tilde{\lambda}_4^s + \tilde{\lambda}_4^{s-2}}$

⁴⁹Sinngemäßes Zitat von K. LANGMANN, welches er in der Mathematikvorlesung zur Veranschaulichung der Divergenz der harmonischen Reihe benutzte.

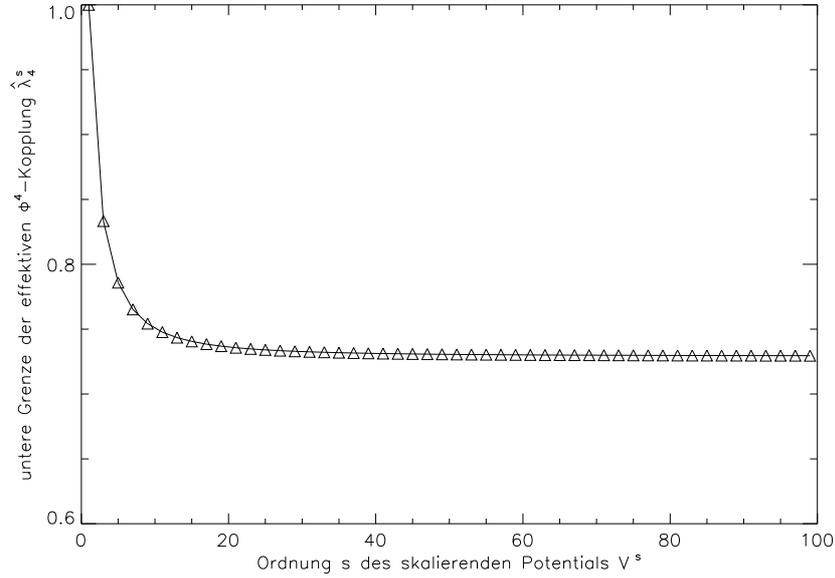


Abbildung 2.2: Diese Grafik unterstützt die Vermutung, daß die untere Grenze der effektiven ϕ^4 -Kopplung $\tilde{\lambda}_4^s$ gegen eine positive, reelle Zahl konvergiert.

$$\tilde{\lambda}_{4n}^s = B_{4n} - \frac{B_{4n+2}^2}{4\tilde{\lambda}_{4(n+1)}^s} \quad n = 1, \dots, \frac{s-1}{2}. \quad (2.142)$$

Zeigen wir nun induktiv für alle perturbativen Ordnungen $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ die Ungleichung

$$0 < \tilde{\lambda}_{4n}^s \leq B_{4n} \quad n = 1, \dots, \frac{s+1}{2}, \quad (2.143)$$

so sind wir fertig. Mit Hilfe des Lemmas 2.6.6 zeigt man leicht den Induktionsanfang ($n = \frac{s+1}{2}$) und die obere Schranke im Induktionsschritt. In der Abschätzung gegen Null nutzen wir ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} & 4 |B_{2(2n)}| |B_{2(2n-2)}| - |B_{2(2n-1)}|^2 \\ = & |B_{2(2n-1)}|^2 \left\{ 4 \underbrace{\frac{2n-1}{2n}}_{\geq \frac{3}{4}} \underbrace{\frac{4n-3}{4n-1}}_{\geq \frac{5}{7}} \underbrace{\frac{4n-4}{4n-2}}_{\geq \frac{2}{3}} \underbrace{\frac{6n-3}{6n-6}}_{>1} \underbrace{\frac{6n-4}{6n-7}}_{>1} \underbrace{\frac{6n-5}{6n-8}}_{>1} - 1 \right\} \\ \geq & \frac{3}{7} |B_{2(2n-1)}|^2 > 0. \end{aligned}$$

Aus (2.137) folgt nun, daß für alle s eine maximale Kopplung $g_s > 0$ und

eine Konstante $C_s > 0$ existieren, so daß für $g \in [0, g_s]$:

$$V^s(t, \phi, g) \geq g\lambda_0(g, t) + g\lambda_2(g, t)\phi^2 + C_s g\phi^4 \quad (2.144)$$

Was fehlt, ist die Abschätzung in der g -Norm. Die (Beträge der) stetigen Koeffizienten λ_0 und λ_2 seien auf $[0, g_s] \times [0, 1]$ durch C_0 und C_2 beschränkt. Definieren wir nun eine Funktion b durch

$$2\sqrt{C_s g}b(g) := \frac{b_{QU}(g)}{2} + C_2 g, \quad (2.145)$$

so gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} C_s g\phi^4 &= \left(\sqrt{C_s g}\phi^2 - b(g) \right)^2 + 2\sqrt{C_s g}\phi^2 b(g) - b(g)^2 \\ &\geq \frac{b_{QU}(g)}{2}\phi^2 + C_2 g\phi^2 - b(g)^2. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Aus (2.145) leiten wir mit Hilfe von⁵⁰ $b_{QU}(g) = O(g^\rho) \not\subseteq O(g)$ die Beziehung $b(g) = O(g^{\frac{1}{2}})$ ab. Da auch $a_{QU}(g) = O(g^\rho) \not\subseteq O(g)$ gilt, erhalten wir mit der Definition

$$\mathcal{T}_t^s = (1 - \mathcal{P}^s) \circ \mathcal{T}_t \quad (2.147)$$

die Repräsentation

$$e^{-\mathcal{T}_t^s(V^\infty)} \leq e^{C_0 g + b(g)^2 - a_{QU}(g)} Z_{QU}(\phi, g) = e^{O(g)} Z_{QU}(\phi, g). \quad (2.148)$$

Mit $\sigma_1 \leq 1$ und eventueller Redefinition der maximalen Kopplung g_s folgt der

Satz 2.6.11

Es sei $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$. Dann existiert ein $X^1 = X^1(s) \in \mathcal{I}$, so daß für alle $g \in [0, g_1]$

$$\|e^{-\mathcal{T}_t^s(V^\infty)}\|_g \leq e^{C_{1g}\sigma_1} \quad (2.149)$$

Man setzt $t = 0$ und sieht, daß e^{-V^s} die zweite Eigenschaft eines approximierten Fixpunktes 2.5.3 erfüllt.

⁵⁰Zur Notation: Wir fassen den Ausdruck $O(f(g))$ als eine Funktionenmenge auf, deren Elemente h die Eigenschaft innewohnt, für $g \rightarrow 0$ die Relation $\lim_{g \rightarrow 0} \frac{h(g)}{f(g)} < \infty$ zu erfüllen. $h = O(f(g))$ entspricht somit $h \in O(f(g))$.

2.6.7 Die Güte des skalierenden Potentials

Obiger Titel ist ein wenig irreführend, denn natürlich geht es in diesem Paragraphen um die Güte Δ der Funktion e^{-V^s} . Wir beginnen mit der Definition einer weiteren Interpolationsformel, die wir mit Hilfe von Lemma 2.6.2 konstruieren. Es seien $s \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, 1]$.

$$\mathcal{R}_t^s(V)(\phi, g) = \int d\mu_{\gamma t}(\zeta) e^{-\mathcal{T}_t^s(V)(\phi + \frac{\zeta}{\beta}, g)} \quad (2.150)$$

Diese Abbildung ist für V^s mit $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ wohldefiniert,⁵¹ und es gelten

$$\mathcal{R}_0^s(V^s)(\phi, g) = e^{-\mathcal{T}_0^s(V^s)(\phi, g)} = e^{-(1-\mathcal{P}^s) \circ \mathcal{T} \times \delta^*(V^s)(\phi, g)} = e^{-V^s(\phi, g)} \quad (2.151)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^s(V^s)(\phi, g) &= \int d\mu_\gamma(\zeta) e^{-(1-\mathcal{P}^s) \circ \mathcal{T}_1(V^s)(\phi + \frac{\zeta}{\beta}, g)} \\ &= \int d\mu_\gamma(\zeta) e^{-(1-\mathcal{P}^s)(\alpha V^s)(\beta\phi + \zeta, \delta g)} \\ &= \mathcal{R} \times \delta^*(e^{-V^s})(\phi, g). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Ferner wissen wir, daß \mathcal{R}_t^s stetig differenzierbar in t ist, da es sich um eine Komposition von in t differenzierbaren Funktionen handelt (siehe hierzu auch Lemma 2.6.1). Eine Anwendung des Mittelwertsatzes bringt uns dann zu einer ersten Abschätzung der Güte Δ .

$$\begin{aligned} |\Delta(e^{-V^s})(\phi, g)| &= |\mathcal{R}_1^s(V^s)(\phi, g) - \mathcal{R}_0^s(V^s)(\phi, g)| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \chi} \mathcal{R}_\chi^s(V^s)(\phi, g) \Big|_{\chi \in (0,1)} \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}_t^s(V^s)(\phi, g) \right| \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $\frac{\zeta}{\beta} \rightarrow \zeta$ und Anwendung des Satzes 2.6.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}_t^s(V^s)(\phi, g) &= \int d\mu_{\gamma\beta^{-2t}}(\zeta) \left\{ \frac{\gamma}{2\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right\} e^{-\mathcal{T}_t^s(\phi + \zeta, g)} \\ &= \int d\mu_{\gamma\beta^{-2t}}(\zeta) e^{-\mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi + \zeta, g)} \{ \dots \} \end{aligned}$$

⁵¹da auch \mathcal{T}_t^s für die skalierten Potentiale definiert ist

mit

$$\{\dots\} = \frac{\gamma}{2\beta^2} \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi + \zeta, g) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi + \zeta, g).$$

Für $s \rightarrow \infty$ ist $\{\dots\}$ nach 2.6.2 identisch Null und somit $\Delta(e^{-V^\infty}) = 0$. Dies gilt für das skalierende Potential, welches einen Approximanten des echten Fixpunktpotentials darstellt, natürlich nicht. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) &= (1 - \mathcal{P}^s) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \mathcal{T}_t(V^s)(\phi, g) \\ &= \frac{\gamma}{2\beta^2} (1 - \mathcal{P}^s) \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t(V^s)(\phi, g) \right)^2 \\ &= \frac{\gamma}{2\beta^2} (1 - \mathcal{P}^s)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t(V^s)(\phi, g) \right)^2 \\ &= \frac{\gamma}{2\beta^2} (1 - \mathcal{P}^s) \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 \\ &= \frac{\gamma}{2\beta^2} \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 - \\ &\quad \frac{\gamma}{2\beta^2} \mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2. \end{aligned}$$

Man beachte, daß der Projektor $1 - \mathcal{P}^s$ mit Differentialoperatoren in ϕ und t vertauscht, da er nur die Variable g angreift. Wir erkennen dies auch explizit in der Integraldarstellung des Projektors.

Die Abschätzungsformel der Güte vereinfacht sich also zu

$$|\Delta(e^{-V^s})(\phi, g)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{\gamma}{2\beta^2} \int d\mu_{\gamma\beta^{-2t}}(\zeta) e^{-\mathcal{T}_t^s(\phi+\zeta, g)} \{\dots\} \quad (2.153)$$

mit

$$\{\dots\} = \left| \mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi + \zeta, g) \right)^2 \right|. \quad (2.154)$$

Zur Behandlung des $\{\dots\}$ -Terms nutzen wir

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_{n,m} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n a_{m,n+1-m} + \sum_{n=N+1}^{2N-1} \sum_{m=n+1-N}^N a_{m,n+1-m}. \quad (2.155)$$

Nun gilt es, die quadrierte Ableitung des interpolierten skalierenden Potentials zu bestimmen. Diese Aufgabe lösten wir schon im Beweis zur Baumgraphendifferentialgleichung 2.6.3. Allerdings wirkte dort nicht der Projektor \mathcal{P}^s . Aus diesem Grund ordnen wir die Summe hier in Potenzen von g .

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 \\
\stackrel{(2.155)}{=} & \left\{ \sum_{n=1}^{s+1} \sum_{m=1}^n + \sum_{n=s+2}^{2s+1} \sum_{m=n-s}^{s+1} \right\} 4m(n+1-m)g^{n-1}(\lambda_{2m}\lambda_{2(n+1-m)})(g, t)\phi^{2n} \\
= & \left\{ \sum_{n=1}^{s+1} + \sum_{n=s+2}^{2s+1} \right\} g^{n-1}\tilde{\mu}_{2n}(g, t)\phi^{2n}
\end{aligned}$$

Die neu definierten $\tilde{\mu}_{2n}$ sind Polynome in (g, t) . Folglich wirkt der Projektor \mathcal{P}^s , der alle Potenzen von kleinerer Ordnung als $s+1$ vernichtet, nur auf den ersten Summanden. Wir erhalten⁵²

$$\mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 =: \sum_{n=1}^{s+1} g^{s+1}\mu_{2n}(g, t)\phi^{2n} + \sum_{n=s+2}^{2s+1} g^{n-1}\mu_{2n}(g, t)\phi^{2n}.$$

Sofern $g \in [0, \tilde{g}]$ gilt für den Betrag dieser Projektion

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 \right| \\
& \leq g^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{s+1} g^{\frac{s-n}{2}+1} |\mu_{2n}(g, t)| \left(g^{\frac{1}{4}}\phi \right)^{2n} + g^{\frac{s}{2}} \sum_{n=s+2}^{2s+1} g^{\frac{n-s}{2}-1} |\mu_{2n}(g, t)| \left(g^{\frac{1}{4}}\phi \right)^{2n} \\
& \leq C g^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{2s+1} \left(g^{\frac{1}{4}}\phi \right)^{2n}. \tag{2.156}
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$C := \max_{n,t,g} g^{\nu(n)\left(\frac{s-n}{2}+1\right)} |\mu_{2n}(g, t)| < \infty \tag{2.157}$$

mit

$$\nu(n) := \begin{cases} +1 & 1 \leq n \leq s+1 \\ -1 & s+2 \leq n \leq 2s+1. \end{cases} \tag{2.158}$$

Das Maximum C existiert, da $g^{\nu(n)}|\mu_{2n}|$ in $g=0$ regulär und die betrachtete Menge $\{1, \dots, 2s+1\} \times [0, 1] \times [0, \tilde{g}]$ kompakt ist.

⁵²Für $n \geq s+2$ gilt $\tilde{\mu}_{2n} = \mu_{2n}$, für $n \leq s+1$ überleben in $g^{n-1}\tilde{\mu}_{2n}(g, t)$ nur Summanden der Ordnung g^{s+1} . Diese werden mit abgespaltem g^{s+1} -Term in μ_{2n} verwahrt.

Den bisher noch ungenutzten Exponentialfaktor $e^{-\mathcal{T}_t^s(\phi+\zeta.g)}$ schätzen wir mit (2.137) ab. Dann dominieren wir die in polynomialer Form auftretenden Felder, indem wir den Faktor $e^{-\frac{\tilde{c}_s}{2}g\phi^4}$ extrahieren und ausnutzen, daß für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha > 0$ die Ungleichung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} x^n e^{-\alpha x^2} < \infty \quad (2.159)$$

gültig ist. Für alle $(\phi, g) \in \mathcal{P}_{\tilde{g}}$ gilt somit

$$e^{-\frac{\tilde{c}_s}{2}g\phi^4} \left| \mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2 \right| \leq C g^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{2s+1} C_n =: D g^{\frac{s}{2}}.$$

Analog zu (2.145) - (2.148) erhalten wir

$$|\Delta(e^{-V^s})(\phi, g)| \leq C_{\Delta} g^{\frac{s}{2}} Z_{QU}(\phi, g). \quad (2.160)$$

Wählen wir s groß genug, so gelten sicher $\sigma_{\Delta} = \frac{s}{2} > \frac{D}{4-D}$ und folgender

Satz 2.6.12

Es sei $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$. Dann existiert ein $X^{\Delta} = X^{\Delta}(s) \in \mathcal{I}$ mit $\sigma_{\Delta} > \frac{D}{4-D}$, so daß für alle $g \in [0, g^{\sigma_{\Delta}}]$:

$$\|\Delta(e^{-V^s})\|_g \leq C_{\Delta} g^{\Delta} \quad (2.161)$$

komplettiert gemeinsam mit Satz 2.6.11 die Aussage, daß in Dimensionen $2 < D < 4$ das skalierte Potential V^s mit $\frac{s}{2} > \frac{D}{4-D}$ gemäß der Definition 2.5.3 einen approximierten Fixpunkt darstellt. Wir schreiben diese Bedingung an s in der Form⁵³

$$s \geq \left\lceil \frac{4+D}{4-D} \right\rceil. \quad (2.162)$$

Minimalen Berechnungsaufwand bietet also die perturbative Ordnung s , die die Gleichung in (2.162) erfüllt⁵⁴. Veranschaulicht wird dies in der Grafik 2.3. Allerdings muß man beachten, daß diese Wahl die Größe des Blockparameters L beeinflusst (2.80). Obwohl bei $\sigma_{\Delta} = \frac{s}{2}$ für alle $D \in (2, 4)$ die Ungleichung $(4-D)\sigma_2 - D > 0$ per Definition von σ erfüllt ist, und somit L in jeder Dimension finit ist, existieren kritische Dimensionen⁵⁵ $D_{n \geq 4} = 4 \frac{n-1}{n+1}$, für die

$$\lim_{\substack{D \rightarrow D_n \\ D < D_n}} (4-D)\sigma_{\Delta} - D = 0 \quad (2.163)$$

⁵³Wir benutzen, daß man den nächst größeren Integer einer Zahl x durch $[x+1]$ berechnet.

⁵⁴Sollte dieses s gerade sein, müssen wir es natürlich um eins inkrementieren.

⁵⁵Die Dimensionen $D_{n \geq 2} = 4 \frac{2n-1}{2n+1}$ sind gerade die Dimensionen, bei denen zu einer Fixpunktapproximante höherer Ordnung übergegangen werden muß.

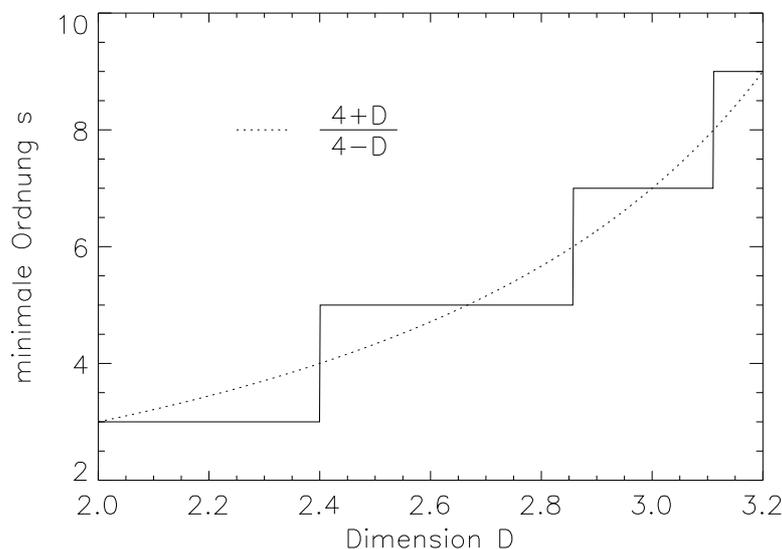


Abbildung 2.3: Diese Grafik veranschaulicht, welche Ordnung s die störungstheoretischen Fixpunktapproximanten in Abhängigkeit von der Dimension D mindestens besitzen müssen. In $D = 3$ Dimensionen muß Störungstheorie der Ordnung 7 betrieben werden.

gilt und folglich L divergiert. Dies veranschaulicht auch Abbildung 2.4. Man behebt dieses Problem jedoch, indem man zu einem approximierten Fixpunkt höherer Ordnung übergeht.

Eine andere Vorgehensweise läßt den Blockparameter konstant (z.B. $L = 2$) und betreibt Störungstheorie bis zu einer so hohen Ordnung s , daß die Abschätzung (d) im Beweis zu Lemma 2.5.5 ebenfalls gilt. Wir halten dieses Verfahren allerdings für ineffizient, da die Berechnung der störungstheoretischen Approximanten numerisch erfolgt.

2.7 Konstruktion der ϕ_3^4 -Trajektorie

Bei der Konstruktion des approximierten Fixpunktes e^{-V^s} griffen wir, wie in Kapitel 2.6 zu sehen ist, auf Störungstheorie der Ordnung s zurück. Hierbei nahmen wir an, daß sich die Koeffizienten der Reihe V^s eindeutig rekursiv bestimmen lassen. In $D = 3$ Dimensionen treten allerdings zwei nicht lösbare

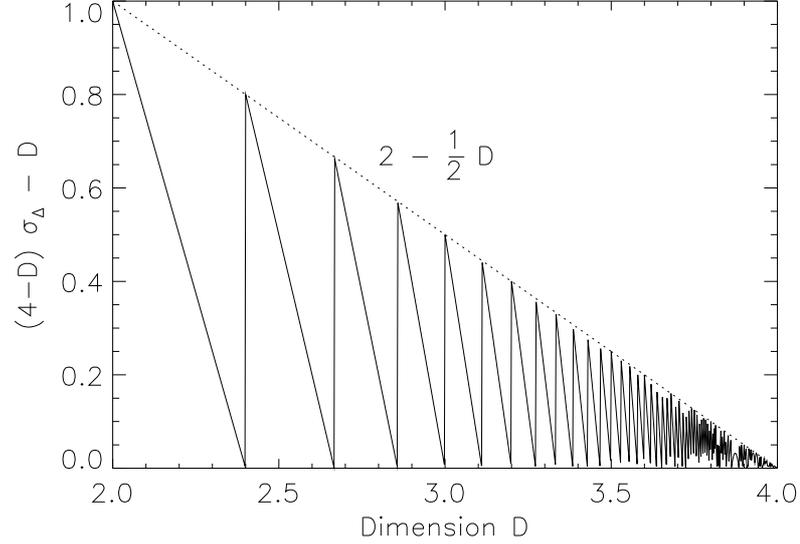


Abbildung 2.4: Der inverse Exponent der unteren Blockingparameterschranke konvergiert für die kritischen Dimensionen D_n linksseitig gegen Null.

Koeffizientengleichungen auf: die Massenresonanz $(1, 2)$ und die Vakuumresonanz $(0, 3)$.⁵⁶ Mit dem von ROLF und WIECZERKOWSKI erdachten Verfahren [RW] gelingt es jedoch, die Resonanzen bei einer perturbativen Lösung der erweiterten RG-Fixpunktgleichung zu eliminieren.

Die bisher nur in ihrer Kopplung g parametrisierten Trajektorien werden durch einen Parameter κ ergänzt, der über die Relation $\kappa = \kappa(g) = \log g$ explizit von g abhängt und somit der Reparametrisierung $\kappa \mapsto \log \kappa + \log \delta$ obliegt. Im folgenden sind die Koeffizienten $V_{2n,r}^\infty$ κ -abhängig, und wir erklären die formale Potenzreihe

$$V^\infty(\phi, g, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=\max\{1, n-1\}}^{\infty} V_{2n,r}^\infty(\kappa) g^r \phi^{2n} \quad (2.164)$$

mit

$$V_{2n,r}(\kappa) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} V_{2n,r,k}^\infty \kappa^j. \quad (2.165)$$

⁵⁶Arbeitet man mit der normierten RGT, ist die Vakuumresonanz natürlich nicht vorhanden.

Der Ansatz einer oberen Grenze $\left[\frac{r}{2}\right]$ ermöglicht eine rekursive Berechnung der endlich vielen Koeffizienten $V_{2n,r,k}^\infty$ zu gegebener Ordnung in g und ϕ . Erweitern wir die Reparametrisierungsfunktion δ dann noch um den Parameter κ

$$\delta(g, \kappa) = (\delta g, \kappa + \log \delta), \quad (2.166)$$

ist die RGT $\mathcal{T} \times \delta^*$ für zwei-parametrig Potentiale erklärt, und wir bestimmen die Koeffizienten $V_{2n,g,\kappa}^\infty$ wiederum so, daß $\mathcal{T} \times \delta^*(V^\infty) = V^\infty$ und die Randbedingungen einer ϕ^4 -Trajektorie erfüllt sind. Beim Lösen der Fixpunktgleichung behandeln wir g und κ als unabhängige Variablen. Statt der beiden Resonanzen treten nun allerdings zwei frei wählbare Konstanten auf, zu denen verschiedenartig parametrisierte Kurven gehören. Sie werden i.a. zu Null gesetzt.

Aus V^∞ gewinnen wir wie zuvor die skalierenden Potentiale V^s . Natürlich bezieht sich der Projektor \mathcal{P}^s immer noch auf die Kopplung g , denn sie ist ja nach der Substitution $\kappa = \log g$ der einzige Kurvenparameter. Aus diesem Grund gilt auch $O(\kappa) = O(\log g) = O(g^0)$, so daß logarithmische Terme bei Ordnungsbetrachtungen unberücksichtigt bleiben.

Desweiteren merken wir noch an, daß die skalierenden Potentiale V^s im Kurvenparameter g formal einmal stetig differenzierbar sind, da sie keine Terme der Form $\log g$ bzw. $g \log g$ enthalten. Diese Eigenschaft macht einen Zusatzparameter der Form $\kappa = \log g$ überhaupt erst sinnvoll, da er sonst für $g = 0$ nicht definiert wäre. Ferner sehen wir hier, wie wichtig es ist, daß unsere Transformation $\mathcal{T} \times \delta^*$ die stetige Differenzierbarkeit des Argumentes erhält.

Wir wollen noch folgende Notation vereinbaren: Führen wir in Funktionen, die von (ϕ, g, κ) abhängen, die Substitution $\kappa = \log g$ aus, so verkürzen wir das Argument auf (ϕ, g) , z.B. $V^{(s)}(\phi, g, \log g) \equiv V^{(s)}(\phi, g)$.

Satz 2.7.1

1. $\forall r \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall \epsilon \in (0, r] \exists g_0 \in \mathbb{R}^+ \forall g \in [0, g_0] : |g^r \log^k g| \leq g^{r-\epsilon}$
2. $\forall r \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}_0 \exists g_0 \in \mathbb{R}^+ \forall g \in [0, g_0] : |g^r \log^k g| \geq g^r$

Beweis: Alle Funktionen der Form $f_{\epsilon,k} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad g \mapsto |g^\epsilon \log^k g|$ mit $\epsilon > 0, k \in \mathbb{N}_0$ lassen sich mit $f_{\epsilon,k}(0) := 0$ stetig fortsetzen (L'Hospital). Folglich existiert ein $g_0 \in \mathbb{R}^+$, so daß $g^\epsilon |\log^k g| \leq 1 \quad \forall g \in [0, g_0]$ und man zeigt (1). Für alle $g \in (0, e^{-1})$ gilt $|\log g| \geq 1$ und man erhält (2).

□

Aus dieser Abschätzung folgt

Korollar 2.7.2

Es seien $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in (0, 1)$ und $r \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein $g_0 \in \mathbb{R}^+$, so daß $\forall g \in [0, g_0]$ gilt:

$$ag^r \log^k g \geq \begin{cases} (-1)^k ag^{r-\epsilon} & (a \geq 0 \wedge k \in 2\mathbb{N} + 1) \vee (a < 0 \wedge k \in 2\mathbb{N}) \\ (-1)^k ag^r & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieses Korollars gelingt es uns nun, das in g und $\log g$ entwickelte Potential nach unten gegen ein Potential in g abzuschätzen, dessen Struktur der in Kapitel 2.6 benutzten Form gleicht. Dies ist möglich, da die Baumgraphenkoeffizienten der Logarithmuskorrekturen verschwinden. Wir zeigen somit zunächst für $V^\infty = \mathcal{T}_0(V^\infty)$ die Relationen

$$\begin{aligned} V_{2n, n-1, 0}(0) &= V_{2n, n-1}(0) \\ V_{2n, n-1, j}(0) &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \forall j \in \{1, \dots, [\frac{n-1}{2}]\} . \end{aligned} \quad (2.167)$$

Beweis: Wir betrachten im folgenden Potentiale mit normalgeordneten Feldkomponenten. Es seien also

$$V(\phi, g, \kappa) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_{r,j}(\phi) g^r \kappa^j$$

und

$$V_{r,j}(\phi) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{r+1} V_{2n, r, j} : \phi^{2n} & j \leq [\frac{r}{2}] \\ 0 & j > [\frac{r}{2}] . \end{cases}$$

Die Koeffizienten $V_{2(r+1), r, j}$ unterscheiden sich nicht von denen, die in einem nichtnormalgeordneten Potential auftauchen. Entwickeln wir $\mathcal{T} \times \delta^*$ gemäß (2.27) in Kumulanten

$$\mathcal{T} \times \delta^*(V)(\phi, g, \kappa) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \left\langle [\alpha V(\cdot, \delta g, \kappa + \log \delta);]^i \right\rangle_{\gamma, \beta \phi}^T,$$

erhalten wir für V^∞ in beliebiger Ordnung (r, j) mit $j \leq [\frac{r}{2}]$

$$\begin{aligned} V_{r,j}^\infty(\phi) &\equiv \sum_{i=1}^r \sum_{t=j}^{\infty} \sum_{\sum_{k=1}^i s_k = r} \sum_{\sum_{k=1}^i j_k = t} A_{r,j,i,t} \langle \alpha V_{s_1, j_1}^\infty, \dots, \alpha V_{s_i, j_i}^\infty \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T \\ &=: \sum_{t=j}^{\infty} \alpha A_{r,j,1,t} \langle V_{r,j}^\infty \rangle_{\gamma, \beta \phi} + K_{r,j}(V^\infty)(\phi) . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten bestimmen sich über

$$V_{2n,r,j} = \sum_{t=j}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} B_{2n,r,j,t} V_{2n,r,t} + \frac{1}{(2n)!} (P_{2n,1}, K_{r,j}(V^\infty))_1$$

Hierbei ist $B_{2n,r,j,t} = \alpha\beta^{2n} A_{r,j,1,t} = \binom{t}{j} \alpha\beta^{2n} \delta^r (\log \delta)^{t-j}$. Nun zeigen wir die Behauptung des Lemmas per Induktion. Der Induktionsanfang $r = 1$ ist trivial, da der ϕ^4 -Term in g^1 logarithmusfrei ist. Zur Bestimmung von $V_{2(r+1),r,t}^\infty$ benötigen wir $K_{r,j}(V)(\phi)$, welches eine Superposition von Kumulanten

$$\begin{aligned} & \langle V_{s_1,j_1}^\infty, \dots, V_{s_i,j_i}^\infty \rangle_{\gamma,\beta\phi}^T \\ &= \sum_{n_1=0}^{s_1+1} \dots \sum_{n_i=0}^{s_i+1} V_{2n_1,s_1,j_1}^\infty \dots V_{2n_i,s_i,j_i}^\infty \langle : \phi^{2n_1} : , \dots , : \phi^{2n_i} : \rangle_{\gamma,\beta\phi}^T \\ &= \sum_{n_1=0}^{s_1+1} \dots \sum_{n_i=0}^{s_i+1} \sum_{n=0}^{n_{max}} C_n^{n_1, \dots, n_i} V_{2n_1,s_1,j_1}^\infty \dots V_{2n_i,s_i,j_i}^\infty : \phi^n : \end{aligned}$$

darstellt. Der bei obiger Konstruktion entstehende Vertex mit maximaler Beinzahl $: \phi^{n_{max}} :$ besitzt somit

$$n_{max} = (2n_1 - 1) + \sum_{k=2}^{i-1} (2n_k - 2) + (2n_i - 1) = 2 \left(\sum_{k=1}^i n_k - i + 1 \right)$$

Beine, und es folgt

$$n_{max} = 2(r+1) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, i\} : n_k = s_k + 1.$$

Der $: \phi^{2(r+1)} :$ -Anteil in $K_{r,j}(V^\infty)$ bestimmt sich somit zu

$$\propto \sum_{i=2}^r \sum_{t=j}^{\infty} \sum_{\sum_{k=1}^i s_k=r} \sum_{\sum_{k=1}^i j_k=t} V_{2(s_1+1),s_1,j_1}^\infty \dots V_{2(s_i+1),s_i,j_i}^\infty.$$

Da nun aber $j \geq 1$ ist, existiert für alle $t \geq j$ ein $k \in \{1, \dots, i\}$, so daß $j_k \geq 1$. Da aber $s_k < r$ (wegen $i > 1$), folgt nach Induktionsvoraussetzung $V_{2(s_k+1),s_k,j_k} = 0$. Somit ist

$$\int d\mu_1(\phi) : \phi^{2(r+1)} : K_{r,j}(V^\infty)(\phi) = 0.$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der $V_{2(r+1),r,j}$ reduziert sich für $j \geq 1$ zu

$$V_{2(r+1),r,j}^\infty = \sum_{t=j}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} B_{2(r+1),r,j,t} V_{2(r+1),r,t}^\infty.$$

Beginnend mit $j = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ bestimmen sich die Koeffizienten rekursiv zu Null, da die Faktoren $B_{2(r+1),r,j,t} \neq 1$. Für $V_{2(r+1),r,0}$ erhalten wir die Bestimmungsgleichung (2.40) und folglich dieselben Baumgraphenkoeffizienten wie bei der Einfachentwicklung.

□

Obiges Lemma verallgemeinern wir nun für alle $t \in [0, 1]$.

Satz 2.7.3

Es sei $\mathcal{T}_t(V^\infty)$ das interpolierte perturbative Fixpunktpotential mit t -abhängigen Koeffizienten. Dann sind

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad : \quad V_{2n,n-1,0}(t) \equiv V_{2n,n-1}(t) = b_{2n}(t)$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3} \quad \forall j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\} \quad : \quad V_{2n,n-1,j}(t) = 0 .$$

Beweis: Zu Beginn wollen wir die Frage behandeln, ob die Transformation \mathcal{T}_t Terme der Form $g^r \kappa^l$ mit $l > \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ generieren kann. Es sei g^r durch g^{r_i} erzeugt, d.h. $g^r = \prod g^{r_i} = g^{\sum r_i}$. Dann gilt für den Exponenten der zugehörigen κ -Potenz $\sum l_i \leq \sum \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor \leq \lfloor r/2 \rfloor$, und es ist gezeigt, daß V^∞ unter \mathcal{T}_t formerhaltend ist.

Für die nun κ -abhängigen Baumgraphen mit $n \geq 2$ folgt aus Satz 2.6.3

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \dot{V}_{2n,n-1,j}(t) \kappa^j = \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \sum_{j_1=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \alpha_{n,m} V_{2m,m-1,j_1}(t) V_{2(n+1-m),n-m,j_2}(t) \kappa^{j_1+j_2} ,$$

wobei $\alpha_{n,m} = \frac{2\gamma}{\beta^2} m(n+1-m)$. Da wir g und κ als unabhängig betrachten, lösen wir obige Gleichung durch Koeffizientenvergleich in κ . Man erkennt sofort, daß die Funktionen $V_{2n,n-1,0}(t)$ derselben Differentialgleichung gehorchen wie die Baumgraphenkoeffizienten $b_{2n}(t)$. Aus (2.167) ergibt sich

$$\mathcal{T}_0(V^\infty)(\phi, g, \kappa) = \alpha \mathcal{T}_1(V^\infty)(\beta \phi, \delta g, \log \delta + \kappa) ,$$

für $n \geq 2$ wiederum

$$V_{2n,n-1,0}(0) = (L^2)^{2-n} V_{2n,n-1,0}(1) ,$$

und der erste Teil des Satzes ist gezeigt. Der Beweis der zweiten Aussage folgt über Induktion: Für $n = 3$ gilt $\dot{V}_{6,2,1}(t) = 0$ und aufgrund obiger Forderung $V_{6,2,1}(t) = 0$. Im Induktionsschritt nutzen wir aus, daß die Indizes

j_1, j_2 nicht gleichzeitig Null und $m, n+1-m$ kleiner gleich $n-1$ sind, so daß also $\dot{V}_{2n, n-1, j \geq 1} = 0$. Mit oben geforderter Randbedingung erhalten wir die Behauptung.

□

Nennen wir den $(g, \log g)$ -abhängigen Koeffizienten eines interpolierten Feldes ϕ^{2n} wieder $g^{n-1} \lambda_{2n}(g, t)$, so erhalten wir mit Hilfe des Satzes 2.7.3 für $n \in N_{\geq 2}$

$$\lambda_{2n}(g, t) = b_{2n}(t) + O(g) . \quad (2.168)$$

Man beachte, daß die Logarithmuskorrekturen in $O(g)$ mit g -Faktoren gepaart sind. Somit existiert zu gegebenem $s \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ und $\epsilon \in (0, 1)$ nach Lemma 2.7.2 ein $g_0 = g_0(s, \epsilon) \in \mathbb{R}^+$, so daß alle auftretenden $g \log g$ -Terme durch g -Potenzen, deren Ordnung größer $n-1$ ist, ersetzt werden können. Da nur endlich viele Korrekturterme auftreten, ist die Existenz einer solchen Schranke für den Kopplungsparameter gesichert.

Für das abgeschätzte Potential gilt:

$$\lambda_{2n}(g, t) \geq b_{2n}(t) + O(g^{1-\epsilon}) =: \tilde{\lambda}_{2n}(g, t) \implies \tilde{\lambda}_{2n}(0, t) = b_{2n}(t) \quad (2.169)$$

Nun werden wir zeigen, daß die in g und $\log g$ perturbativ entwickelten skalierenden Potentiale den Bedingungen eines approximierten Fixpunktes genügen. Auf dieselbe Weise wie im Beweis des Satzes 2.6.11 konstruieren wir eine untere Schranke für $\mathcal{T}_t^s(V^s)$. Somit erhalten wir sogar dasselbe \tilde{C} . Als obere Kopplungsparameterschranke g_1 wählen wir das Minimum der Grenzen, die 2.6.11 und 2.7.2 fordern. Es gilt somit für alle $(\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) &= \sum_{n=0}^{s+1} g^{\max\{n-1, 1\}} \lambda_{2n}(g, t) \phi^{2n} \\ &\geq \sum_{n=0}^{s+1} g^{\max\{n-1, 1\}} \tilde{\lambda}_{2n}(g, t) \phi^{2n} \\ &\geq g \tilde{\lambda}_0(g, t) + g \tilde{\lambda}_2(g, t) \phi^2 + \tilde{C} g \phi^4 \end{aligned} \quad (2.170)$$

Hieraus folgern wir nun die Endlichkeit der g -Norm für $g \in [0, g_1]$.

Wir zeigen nun, daß auch die Güte $\Delta(V^s)$ den Bedingungen eines approximierten Fixpunktes genügt. Hierzu verfahren wir genauso wie im Kapitel 2.6.7. Die Abschätzung von $\mathcal{P}^s \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{T}_t^s(V^s)(\phi, g) \right)^2$ läuft problemlos, d.h.

$$C := \max_{n, t, g} g^{\nu^{(n)} \left(\frac{s-n}{2} + 1 \right)} |\mu_{2n}(g, t)| < \infty . \quad (2.171)$$

$L - 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$100g_{max}$	1.98541	2.35698	2.39793	2.40206	2.40247	2.40251

Tabelle 2.1: Die Funktion der durch die Baumgraphenschranke gegebenen Maximalkopplung ist fallend in L . Aus diesem Grund betrachten wir in dieser Tabelle $L \rightarrow 1$. Zur Berechnung wurde ein $g \log g$ -Potential 7. Ordnung in $D = 3$ benutzt. ≈ 0.025 scheint eine obere Schranke für g zu sein.

Für $0 \leq n \leq s + 1$ regularisiert $g^{\frac{s-n}{2}+1} = O(g^{\frac{1}{2}})$ eventuell in $\mu_{2n}(g, t)$ auftauchende Singularitäten, die durch alleinstehende Logarithmen verursacht werden. Die Terme mit $s+2 \leq n \leq 2s+1$ wurden nicht durch \mathcal{P}^s beschnitten, und somit sind die Koeffizienten $\mu_{2n}(g, t)$ regulär in $g = 0$.

2.8 Numerische Ergebnisse

Ziel dieses Abschnittes war es, die ϕ^4 -Trajektorie bis zu einer möglichst maximalen Kopplung g_{max} zu berechnen, um z.B. den Limes $g \rightarrow \infty$ zu bestimmen/abzuschätzen. Sollte er existieren, entspricht er einem Fixpunkt der RGT.

- Der Limes entspricht dem Hochtemperaturfixpunkt Z_{QU} . In diesem Fall hätten wir zwei RGT-invariante Trajektorien, die Z_{UV} und Z_{QU} verbinden, sich aber in ihren Ein-/Auslaufrichtungen unterscheiden (Ableitungen an den Stellen $g = 0$ und $g = \infty$). Es würde die Frage aufkommen, ob eine ganze Schar invarianter Trajektorien existiert, die den trivialen und den quadratischen Fixpunkt verbinden.
- Die ϕ^4 -Trajektorie endet in einem nichttrivialen Fixpunkt. In diesem Fall liefert die Konstruktion der Kurve den Fixpunkt mit.
- Die Trajektorie endet nicht in einem Fixpunkt.

Die von uns benutzte Konstruktion ist nur für kleine Kopplungen g geeignet, da wir an vielen Stellen Restriktionen an g stellen müssen. Einen fundamentalen Einfluß hat die von uns benutzte Norm, die immer eine Relation zur Gauß-Trajektorie verlangt. Ziel der Optimierung dieses Konstruktionschemas ist es, alle g -Abhängigkeiten zu extrahieren. Deshalb stellt auch die Größe von g_{max} ein Maß für die Qualität unseres Verfahrens dar.

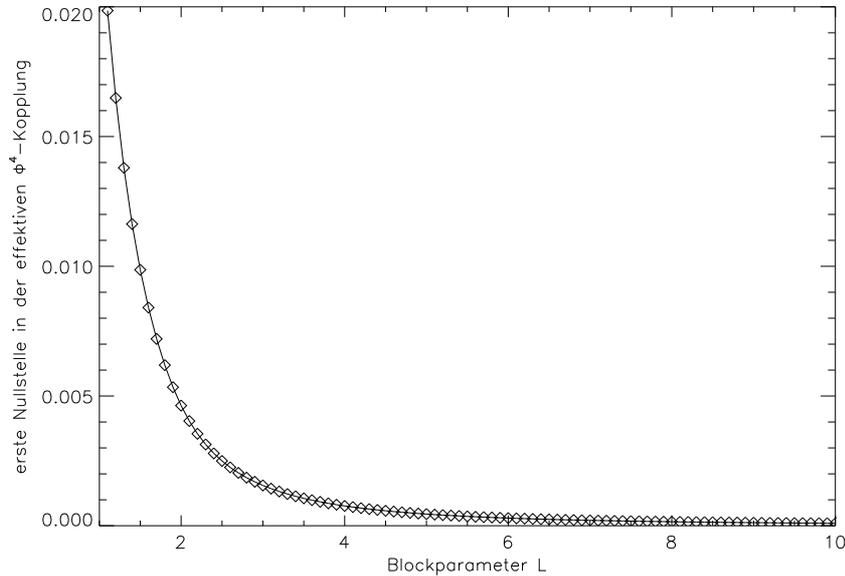


Abbildung 2.5: Die maximale Kopplung der Baumgraphenschranke ist streng monoton fallend in dem Blockparameter L .

Wir berechnen nun die Grenzkopplung in $D = 3$ Dimensionen, die sich aus der Baumgraphenschranke ergibt. Dazu bestimmen wir mittels Computeralgebra die Störungsreihe 7. Ordnung in g und $\log g$ und ermitteln numerisch die erste positive Nullstelle der g -abhängigen, effektiven ϕ^4 -Wechselwirkung $\tilde{\lambda}_4^7(g, 0)$ (2.138). Wie man in der Abbildung 2.5 sieht, ist diese obere Schranke für die maximale Kopplung L abhängig, für $L \rightarrow 1$ scheint sie, wie Tabelle 2.8 zeigt, gegen einen Wert ≈ 0.024 zu konvergieren. Obwohl wir L beliebig klein machen können, müssen wir die Restriktion (2.80) beachten. In unserem Fall ($D = 3$ und $\sigma_\Delta = 3.5$) erhalten wir eine minimale Untergrenze von $L \approx 30$ und folglich eine sehr kleine maximale Kopplung. Nun mag man die perturbative Reihe bis zu Ordnungen > 7 bestimmen, doch dazu später mehr.

Eine weitere interessante Frage ist, inwieweit die Grenzkopplung g_{max} von der Dimension D abhängt. Hierzu haben wir Störungsrechnung in der minimalen Ordnung $s = \lceil \frac{4+D}{4-D} \rceil$ betrieben und bei konstantem $L = 2$ die erste positive Nullstelle der effektiven ϕ^4 -Kopplung berechnet. Wir benutzten $D_n = 2 + \frac{n}{100}$ mit $n = 1, \dots, 111$. Diese Wahl gewährleistet für alle $D_n \neq 3$ Resonanzfreiheit und folglich eine einfachere numerische Berechnung. Die Obergrenze $D_{111} = 3.11$ ergibt sich aus der begrenzten Rechnerleistung, da für $D = 3.12$

schon Störungstheorie bis zur 9. Ordnung betrieben werden muß.⁵⁷ Doch auch für den Bereich $\{D_n\}$ lassen sich interessante Aussagen machen. Für $2.01 \leq D_n \leq 2.85$ ⁵⁸ und $2.96 \leq D_n \leq 2.99$ ist die effektive Kopplung auf \mathbb{R}_0^+ nullstellenfrei, und die Baumgraphenabschätzung demnach für alle Kopplungen gültig. Bei $D_6 = 4 \frac{6-1}{6+1} = 2.857\dots$ müssen wir von der Ordnung $s = 5$ zur Ordnung $s = 7$ übergehen (siehe hierzu auch Abbildung 2.3). Folge ist ein skalierendes Potential $V^{2.86}$, welches sich bis zur 5. Kopplungsordnung nur geringfügig von $V^{2.86}$ unterscheidet ($(1 - \mathcal{P}^5)(V^{2.86} - V^{2.85}) \approx 0$), aber zusätzliche Terme in g^6 und g^7 aufweist. Als Konsequenz besitzt $\tilde{\lambda}_4^7$ nun Nullstellen, deren Lage stetig von D abzuhängen scheint, siehe 2.6 oben. Dies ist jedoch nicht wahr, denn für 2.95 und 2.96 verändert die effektive Kopplung ihr Großkopplungsverhalten von $\lim_{g \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_4^7(D = 2.95) = -\infty$ zu $\lim_{g \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_4^7(D = 2.96) = \infty$. Dieser Prozeß kann nicht stetig verlaufen. Die aufgrund dieses Verhaltens bis dato sichere Nullstelle verschwindet wieder, da auch im Bereich endlicher Kopplungen Positivität vorliegt. Für $D = 3$ erhalten wir wieder ein endliches g_{max} , welches sich doch deutlich von den folgenden g -Grenzwerten, die nicht aus einer Doppelentwicklung gewonnen wurden, unterscheidet 2.6 unten. Auch das gegensätzliche Steigungsverhalten zwischen den Dimensionen 3.04 und 3.05 deutet eine Nichtdifferenzierbarkeit oder Unstetigkeit (evtl. in Form einer Singularität) an.

Wir erkennen somit, daß die Abhängigkeit $g_{max} = g_{max}(D)$ nicht von so einfacher Natur ist wie die Abhängigkeit von L . Auch wenn wir eine einheitliche Störungsordnung s benutzen, die selbstverständlich nur bis zu einer gewissen Dimension ausreicht, bleibt ein komplexes Gefüge zurück. Grund ist die Kettenbruchkonstruktion, die durch geringe Änderung der Koeffizienten $V_{2n,r}$ bzw. $V_{2n,r,k}$, Null- und Polstellen erzeugt/vernichtet und asymptotisches Verhalten ändert. Berechnen wir die Potentiale, die nur bis zur dritten oder fünften Ordnung bestimmt werden mußten, bis zur siebten Ordnung, so ändert sich der Grenzwert nicht.

Was läßt sich zu der Frage sagen, ob für $D \rightarrow 4$ die Kopplungsschranke endlich bleibt? Wenn wir beweisen können, daß $\tilde{\lambda}_4^s$ für $s \rightarrow \infty$ gegen eine positive reelle Zahl konvergiert, wissen wir auch um die Existenz einer positiven Grenzkopplung.

Zudem haben wir gesehen, wie gering die Parametrisierungslänge unser Trajektorie ist. Obwohl wir nur eine der vielen Restriktionen an g betrachtet

⁵⁷Wir haben hierzu ein *Maple V*-Programm geschrieben. In einer Hochsprache wären Berechnungen höherer Ordnungen gewiß kein Problem gewesen, für die qualitative Betrachtung der dimensional Abhängigkeit reicht die 9. Ordnung jedoch aus.

⁵⁸Für $s = 3, 5$ verkommt $\tilde{\lambda}_4^s$ zu einer ganzrationalen Funktion.

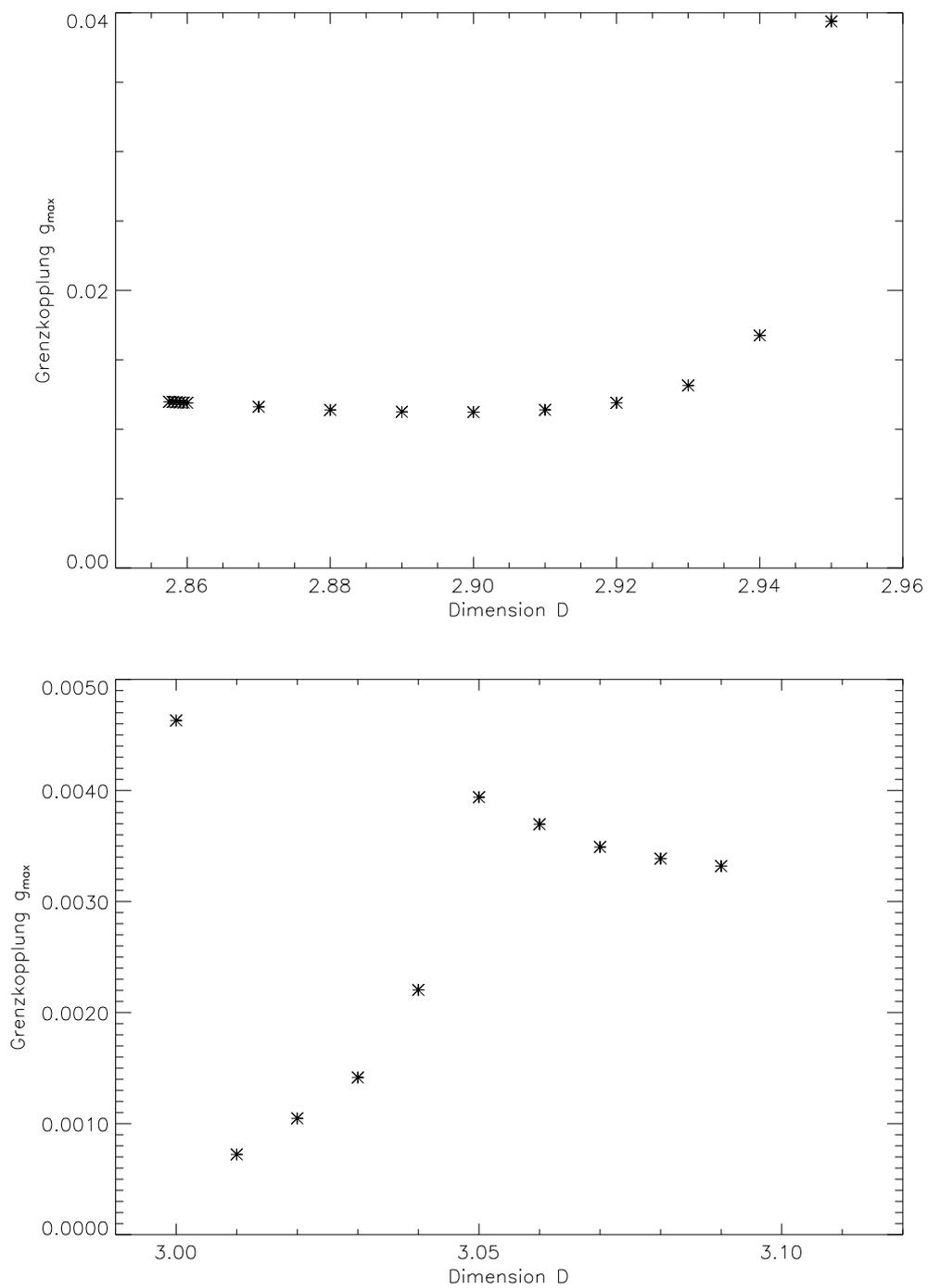


Abbildung 2.6: Erste positive Nullstellen der effektiven ϕ^4 -Kopplung mit $s = \left[\frac{4+D}{4-D} \right]$. Bei $D = 3$ wurde eine Doppelreihenentwicklung benutzt.

haben, wissen wir, daß $g_0 \ll 1$. Es ist noch ein weiter Weg zu einer Konstruktion mit $g_0 = \infty$.

Kapitel 3

Perturbative Konstruktion der ϕ_3^4 -Trajektorie auf dem Gitter

In diesem Abschnitt werden wir die ϕ_3^4 -Trajektorie auf dem kubischen Gitter $\Lambda(a)$ perturbativ berechnen. Dazu benutzen wir viele Erkenntnisse aus der hierarchischen Approximation, deren Gültigkeit sich (formal) auf die GRG überträgt.

Wir beginnen mit der Konstruktion von Operatoren, die eine Interpolation zwischen Gitter- und Kontinuumsformulierung der RG ermöglichen [GK84, Wie98]. Mit diesen definieren wir die Gitterkerne der ϕ_3^4 -Trajektorie über Kontinuumsfunktionen. Aus der Störungstheorie erhalten wir Bestimmungsgleichungen für die kontinuierlichen, gittertranslationsinvarianten Impulskerne der Kurve, die durch das Einfügen einer Gitterinterpolationsfunktion auf dieselbe Weise wie in [Wie97d, Wie97b] behandelt werden können. Wir geben ein explizites und ein implizites Verfahren zur Berechnung an. Die auch auf dem Gitter auftretenden Resonanzen werden wie schon im hierarchischen Modell durch Doppelentwicklung gelöst [Wie97b].

3.1 Der Operator $A^{(\infty)}$

Der kinetische Anteil unserer Theorie wird durch die perfekte, masselose Gitterkovarianz $\nu = \nu_{perf}$ beschrieben, die wir im Kapitel 1.3.1 hergeleitet haben. Die GRGT begegnet uns somit in der Form:

$$R(Z)(\phi) = \frac{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\phi + \zeta)}{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\zeta)}. \quad (3.1)$$

Hierbei sind $A = \nu C^\dagger \nu^{-1}$ und $\Gamma = \nu - A\nu A^\dagger$. Da wir nicht - wie im hierarchischen Bild - über so mächtige mathematische Hilfsmittel (z.B. *contraction mapping*) verfügen, um den Raum der Wirkungen Z geeignet zu behandeln,¹ betrachten wir für perturbative Betrachtungen im folgenden die Transformation für Potentiale

$$\mathcal{T}(V)(\phi) = -\ln \langle e^{-V} \rangle_{\Gamma, A\phi} + \ln \langle e^{-V} \rangle_{\Gamma, 0} . \quad (3.2)$$

Aufgrund der Normierung schränken wir uns OBdA wieder auf die Äquivalenzklasse² $V(0) = 0$ ein. Das freie Feld, also $V = 0$, ist trivialer Fixpunkt, und Linearisierung an diesem liefert analog (2.14)³

$$\mathcal{DT}(V)(\phi) = \langle V \rangle_{\Gamma, A\phi} - \langle V \rangle_{\Gamma, 0} . \quad (3.3)$$

Als nächstes konstruieren wir einen Operator, mit dessen Hilfe wir ein Feld vom Kontinuum $\Lambda(0)$ auf das Gitter $\Lambda(a)$ transferieren können und *vice versa*. Benutzen wir als Ausgangsgitter für den Operator S nicht die Gitterkonstante a , sondern $\frac{a}{L^n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, so erhalten wir $S_n : \mathcal{H}(\frac{a}{L^{n-1}}) \rightarrow \mathcal{H}(\frac{a}{L^n})$ mit $S_0 = S$. Diese Operatoren können wir hintereinanderschalten und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$S^n : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(\frac{a}{L^n}) \quad S^n(\phi)(x) = S_n \circ \dots \circ S_1(\phi)(x) = L^{n\sigma} \phi(L^n x) . \quad (3.4)$$

Wir wollen einige Worte über den Fall $n \rightarrow \infty$ verlieren, der ein Gitterfeld auf das Kontinuum übertragen würde.⁴ Für $x = 0$ gilt $S^n(\phi)(0) = L^{n\sigma} \phi(0)$. Da $\sigma = \frac{D}{2} - 1 > 0$ für $D \in (2, \infty)$, existiert $S^\infty(\phi)(0)$ nur, wenn $\phi(0) = 0$, und ist identisch Null. Da $\mathcal{H}(a)$ isomorph zum l_1 ist, folgt OBdA die Eigenschaft $|\phi(x)| < \frac{1}{|x|}$ für $|x| \rightarrow \infty$. Für $x \neq 0$ wählt man n groß genug, so daß $|S^n(\phi)(x)| < L^{(\sigma-1)n} \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$ für $D \in (2, 4]$. Dies stimmt mutig, doch sollte man nicht vergessen, daß die Interpolation zwischen Gitter und Kontinuum nicht richtig funktioniert, da man z.B. einen Punkt des \mathbb{R}^D mit irrationaler Komponente aus einem Gitter mit rationaler Gitterkonstante a nicht gewinnen kann. Würden wir unsere euklidische Raum-Zeit mit \mathbb{Q}^D identifizieren und $a \in \mathbb{Q}$ fordern, wäre $S^{(n)}$ wohldefiniert und die Interpolation perfekt.

¹Dieser Tatbestand stellt eher ein Unvermögen unsererseits dar, Funktionalräume mathematisch exakt zu fassen.

²bezüglich $V_1 \sim V_2 : \Leftrightarrow V_1 - V_2 \in \mathbb{R}$

³Man muß sich natürlich die Frage stellen, inwieweit eine Parameterableitung nach ϵ analog (3.3) gültig ist. Hier handelt es sich ja um eine unendliche Vertauschung von Integration und Differentiation. Wir wollen uns mit solchen Problemen in Zukunft nicht aufhalten und eine Wohldefiniertheit annehmen.

⁴Ein endliches Gitter würde nach unendlich vielen Stauchungen auf den Ursprung kontrahiert werden.

Wir definieren einen neuen A-Kern gemäß

$$A^{(n)} : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{a}{L^n}\right) \quad A^{(n)} := S^n A^n . \quad (3.5)$$

Da $A^n = \nu (C^\dagger)^n \nu^{-1}$, erfüllt $A^{(n)}$ die Aufgabe eines n -maligen Reblockens mit anschließender n -maliger Kontraktion. Desweiteren gilt die Relation

$$A^{(n)} A = S^n A^{n+1} = S_{n+1}^{-1} S^{n+1} A^{n+1} = S_{n+1}^{-1} A^{(n+1)} . \quad (3.6)$$

Definieren wir nun den Operator $A^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)}$ und gehen davon aus, daß dieser Grenzoperator existiert, so leitet sich aus (3.6) die *intertwiner* Eigenschaft

$$A^{(\infty)} A = S_\infty^{-1} A^{(\infty)} \quad (3.7)$$

ab. $A^{(\infty)}$, der Gitterfelder in Kontinuumsfelder transferiert, zeigt auf, daß dem Operator A im Kontinuum der Dilatationsoperator S_∞^{-1} entspricht. Die Möglichkeit, mittels des Operators $A^{(\infty)}$ vom Gitter ins Kontinuum zu wechseln, nutzen wir aus, um die Berechnung der ϕ^4 -Trajektorie auf die Kontinuumsergebnisse zurückzuführen.

Nach einigem Rechenaufwand erhalten wir für den *intertwiner* $A^{(\infty)}$ die Impulsraumdarstellung

$$A^{(\infty)}(x, z) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left[e^{iqx} \frac{\tilde{\chi}(q)}{q^2} \right]_{\Lambda(\frac{2\pi}{a})}(p) e^{-ipz} \frac{1}{\tilde{\nu}(p)} \quad (3.8)$$

mit

$$[F(q)]_{\Lambda(a)}(p) := \sum_{Q \in p + \Lambda(a)} F(Q) \quad (3.9)$$

und

$$\tilde{\chi}(p) = \prod_{\mu=1}^D \frac{\sin\left(\frac{p_\mu a}{2}\right)}{\frac{p_\mu a}{2}} e^{-i\frac{p_\mu a}{2}} . \quad (3.10)$$

Man zeigt leicht, daß $A^{(\infty)}$ invariant gegenüber den Symmetrieoperationen des Gitters ist.

3.2 Störungsrechnung auf dem Gitter

Im hierarchischen Bild waren die normalgeordneten Monome Eigenfunktionen der linearisierten RGT. Das ist auf dem Gitter nicht so. Wir erhalten

mit (B.13) und (B.2)

$$\begin{aligned} & : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_\nu \\ \xrightarrow{\langle \cdot \rangle_{\Gamma, A\phi}} & : A\phi(x_1) \dots A\phi(x_n) :_{A\nu A^\dagger} \\ = & \frac{\partial^n}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \exp \left\{ (\phi, A^\dagger J) - \frac{1}{2} (A^\dagger J, \nu A^\dagger J) \right\} \Big|_{J=0}. \end{aligned}$$

Die „Kettenregel“ für Funktionalableitungen

$$\frac{\partial}{\partial J(x)} A^\dagger J(y) = A(x, y) = \int d^D z A(x, z) \frac{\partial}{\partial (A^\dagger J)(z)} A^\dagger J(y)$$

liefert dann

$$\begin{aligned} & : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_\nu \tag{3.11} \\ \xrightarrow{\langle \cdot \rangle_{\Gamma, A\phi}} & \int_{\otimes \Lambda(a)} d^D z_1 \dots d^D z_n A(x_1, z_1) \dots A(x_n, z_n) : \phi(z_1) \dots \phi(z_n) :_\nu. \end{aligned}$$

Bei den A -Kernen handelt es sich um ausgeschmierte δ -Distributionen, die für $|x - y| \gg 1$ exponentiell abfallen. Wegen $\lim_{a \rightarrow 0} A(x, y) = \delta(x, y)$ werden die normalgeordneten Felder auf dem Kontinuum wieder zu Eigenfunktionen der RGT. Die „Eigenfunktionen“ der normierten RGT \mathcal{DT} schreiben sich als

$$\overline{: \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_\nu} := : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_\nu - : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_\nu \Big|_{\phi=0}. \tag{3.12}$$

In Zukunft werden wir die normierten, normalgeordneten Monome mit der üblichen Darstellung ohne Überstrich identifizieren. Die normalordnende Kovarianz ν ergänzen wir nur in benötigten Fällen.

Wir wollen in diesem Kapitel wiederum ein skalierendes Paar bestimmen, das aus einer unter der RG-invarianten Potentialkurve V und einer Reparametrisierungsfunktion β besteht. Die zugehörigen formalen Potenzreihen definieren wir wie in (2.24) und (2.25). Für die Feldkomponenten setzten wir an:⁵

$$V_r(\phi) = \sum_{n=1}^{r+1} \frac{1}{(2n)!} \int_{\otimes \Lambda(a)} d^D x_1 \dots d^D x_{2n} V_{2n,r}^{latt}(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) : \tag{3.13}$$

Die Funktionale V_r sind Taylor-Polynome $2(r+1)$. Grades in unendlich vielen Variablen $\{\phi(x)\}_{x \in \Lambda(a)}$. Die Wahl der normalgeordneten Darstellung ist auf

⁵Die explizite Darstellung von $V_{4,1}^{latt}$ und $V_{2,1}^{latt}$ geben wir später.

dem Gitter nicht zwingend, liefert aber beim Übergang zum Kontinuumsformalismus eine Basis aus Eigenfunktionen. Für eine rigorose Berechnung der ϕ^4 -Trajektorie wird die lineare Hülle der normalgeordneten Monome zu groß sein, für eine perturbative Konstruktion, die sich wie schon in 2.3 auf die lineare Transformation reduziert, ist dieser Raum jedoch sehr gut geeignet.

Per Definition sind die V_r symmetrisch in ϕ .⁶ Der Ansatz einer Obergrenze $r+1$ ist - wie schon in der hierarchischen Approximation (2.35) - eine Folge der Verwendung eines Feldpolynoms vierter Ordnung in der linearen Ordnung. Die weiteren Eigenschaften werden von dem Vertex $V_{2n,r}^{latt}$ bestimmt.⁷ Da die normalgeordneten Monome invariant unter Permutation der Argumente sind (dies ist eine Folge der Symmetrie der Kovarianz ν), fordern wir dies auch für die Vertices:

$$\forall \pi \in S_{2n} \quad : \quad V_{2n,r}^{latt}(x_1, \dots, x_{2n}) = V_{2n,r}^{latt}(\pi(x_1), \dots, \pi(x_{2n})) \quad (3.14)$$

Desweiteren weisen die Vertices Gittersymmetrien auf, von denen wir besonders die Translationsinvarianz

$$\forall a \in \Lambda(a) \quad : \quad V_{2n,r}^{latt}(x_1, \dots, x_{2n}) = V_{2n,r}^{latt}(x_1 - a, \dots, x_{2n} - a) \quad (3.15)$$

betonen. Auf diese Weise gewähren wir die Invarianz des Potentialfunctionals gegenüber verschobenen, gedrehten oder gespiegelten Feldern.

Mittels des Operators $A^{(\infty)}$ erzeugen wir die Gitterkerne nun durch Kontinuumskerne. Grundgedanke ist die Rückführung des Problems auf die bereits in [Wie97d] gelöste perturbative Behandlung der diskreten RGT auf der euklidischen vierdimensionalen Raum-Zeit. Über $V_{2n,r}^{cont} : \bigotimes_{i=1}^{2n} \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$V_{2n,r}^{latt}(x_1, \dots, x_{2n}) = \int_{\bigotimes \mathbb{R}^D} d^D y_1 \dots d^D y_{2n} V_{2n,r}^{cont}(y_1, \dots, y_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} A^{(\infty)}(y_i, x_i) . \quad (3.16)$$

Damit (3.14) gilt, muß auch $V_{2n,r}^{cont}$ unter Permutation der Argumente invariant sein. Die Forderung (3.15) und $A^{(\infty)}(x, y) = A^{(\infty)}(x - a, y - a)$ für $a \in \Lambda(a)$ bedingen die Translationsinvarianz der Kontinuumsvertices. Ferner existiere die Fourier-Transformierte, die sich als

$$\tilde{V}_{2n,r}^{cont}(p_1, \dots, p_{2n}) = (2\pi)^D \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i - Q \right) \hat{V}_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) \quad (3.17)$$

⁶Man zeigt dies direkt mit Hilfe der Definition (B.2).

⁷Im weiteren Verlauf identifizieren wir die Begriffe Vertex, Vertexfunktion und Kern eines Vertex.

schreibt. Wir nennen $\hat{V}_{2n,r}$ einen reduzierten Impulskern. Man beachte, daß $\hat{V}_{2n,r}$ i.a. unter Permutation der Argumente nicht invariant ist, da für $\sum p_i \notin \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ der Integrand verschwindet, und der reduzierte Impulskern somit beliebige Werte annehmen kann. Für Gesamtimpulse, die auf dem Impulsgitter $\Lambda(\frac{2\pi}{a})$ liegen, gilt jedoch die Vertauschungseigenschaft. Mit der Definition $\lim_{a \rightarrow 0} \Lambda(\frac{2\pi}{a}) = \{0\}$ werden auch die Kontinuumsvertices translationsinvariant. Für die assoziierten Kontinuumskerne im Ortsraum ergibt sich

$$\begin{aligned} & V_{2n,r}^{cont}(x_1, \dots, x_{2n}) \quad (3.18) \\ = & \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{iQx_{2n}} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \dots \frac{d^D p_{2n}}{(2\pi)^D} e^{i \sum p_i (x_i - x_{2n})} \hat{V}_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) . \end{aligned}$$

Mittels (3.11)⁸ erhält man

$$\begin{aligned} & V_{2n,r}^{latt}(x_1, \dots, x_{2n}) \quad (3.19) \\ \xrightarrow{\mathcal{DT}} & \int_{\otimes \Lambda(a)} d^D y_1 \dots d^D y_{2n} V_{2n,r}^{latt}(y_1, \dots, y_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} A(y_i, x_i) \\ \stackrel{(3.16)}{=} & \int_{\otimes \mathbb{R}^D} d^D y_1 \dots d^D y_{2n} V_{2n,r}^{cont}(y_1, \dots, y_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} A^{(\infty)} A(y_i, x_i) \\ \stackrel{(3.7)}{=} & \int_{\otimes \mathbb{R}^D} d^D y_1 \dots d^D y_{2n} V_{2n,r}^{cont}(y_1, \dots, y_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} L^{-\sigma} A^{(\infty)}(L^{-1} y_i, x_i) \\ \stackrel{L^{-1} \underline{y}_i \rightarrow y_i}{=} & \int_{\otimes \mathbb{R}^D} d^D y_1 \dots d^D y_{2n} L^{2n(D-\sigma)} V_{2n,r}^{cont}(Ly_1, \dots, Ly_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} A^{(\infty)}(y_i, x_i) \end{aligned}$$

Man kann die Wirkung der linearen RGT auf eine Skalentransformation der Kontinuumskerne $V_{2n,r}^{cont}$, welche die Gitterkerne $V_{2n,r}^{latt}$ generieren, reduzieren.

$$V_{2n,r}^{cont}(x_1, \dots, x_{2n}) \xrightarrow{\mathcal{DT}} L^{n(D+2)} V_{2n,r}^{cont}(Lx_1, \dots, Lx_{2n}) \quad (3.20)$$

Die Eigenfunktionen der linearisierten RGT werden durch homogene n -Punkt-Funktionen erzeugt. Ist k der Homogenitätsgrad, so ergibt sich der Eigenwert $L^{n(D+2)+k}$. Die einfachsten homogenen Kerne sind Produkte von δ -Distributionen, für die $k = -D$ ist. Ihnen entsprechen im Kontinuum normalgeordnete Produkte von Feldern, die auf dem Gitter durch A -Kerne verschmiert sind. Auch partielle Ableitungen von δ -Distributionen sind homogen

⁸Diese Gleichung gilt auch für die normierten, normalgeordneten Monome.

und liefern einen Faktor $\frac{1}{L}$ pro Ableitung nach $x_{i,j}$ ($j \in \{1, \dots, D\}$). Im Kontinuum ist der entsprechende Eigenvektor ein normalgeordnetes Produkt aus Feldern und deren Ableitungen. Diese Elemente darf man bei der Suche nach relevanten, marginalen und irrelevanten (verschmierten) Eigenvektoren nicht vergessen.

Mit einer Definition der Impulskerne $V_{2n,r}^{cont}$ über unendlich oft differenzierbare reduzierte Kerne $\hat{V}_{2n,r}$ stellen wir sicher, daß die V_r eine Superposition aus (verschmierten) Feldern samt ihrer Ableitungen darstellen. Mehr hierzu in Kapitel 3.3.3

Im Impulsraum schreibt sich der transformierte Kern (3.20) wie folgt:

$$\begin{aligned}
& L^{n(D+2)} V_{2n,r}^{cont}(Lx_1, \dots, Lx_{2n}) \\
\stackrel{Lp \rightarrow p}{=} & L^{D-n(D-2)} \int_{\otimes \mathbb{R}^D} \frac{d^D p_1 \dots d^D p_{2n}}{(2\pi)^D \dots (2\pi)^D} e^{i \sum_{i=1}^{2n} p_i x_i} \hat{V}_{2n,r} \left(\frac{p_1}{L}, \dots, \frac{p_{2n}}{L} \right) \\
& \times (2\pi)^D \sum_{Q \in \Lambda \left(\frac{2\pi}{a} \right)} \delta \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i - LQ \right) \\
= & L^{D-n(D-2)} \int_{\otimes \mathbb{R}^D} \frac{d^D p_1 \dots d^D p_{2n}}{(2\pi)^D \dots (2\pi)^D} e^{i \sum_{i=1}^{2n} p_i x_i} \hat{V}_{2n,r} \left(\frac{p_1}{L}, \dots, \frac{p_{2n}}{L} \right) \\
& \times (2\pi)^D \sum_{Q \in \Lambda \left(\frac{2\pi}{a} \right)} \delta \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i - Q \right) T \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

wobei

$$T : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R} \quad T \Big|_{\Lambda \left(\frac{2\pi}{a} \right)}(Q) = \begin{cases} 1 & Q \in \Lambda \left(\frac{2\pi}{a} L \right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.22}$$

Die ϕ^4 -Trajektorie ist durch die vorgegebene lineare Kopplungsparameterordnung

$$V_{2,1}^{cont}(x_1, x_2) = 0 \tag{3.23}$$

$$V_{4,1}^{cont}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=2}^4 \delta(x_1 - x_i) \tag{3.24}$$

definiert. Diese Anfangsbedingung gilt auch für das Kontinuum. Die perturbative Behandlung der Gleichung $\mathcal{T}(V)(\phi, g) = V(\phi, \beta(g))$ verläuft wie in

Abschnitt 2.3. Die nach Kumulanten entwickelte RGT schreibt sich als⁹

$$\mathcal{T}(V)(\phi, g) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{\sum_{i=1}^m r_i=r} \langle [V_{r_1}, \dots, V_{r_m}] \rangle_{\Gamma, A\phi}^T \right\} g^r. \quad (3.25)$$

$V(\phi, \beta(g))$ gleicht (2.28). Die in erster Ordnung entstehenden Eigenwertgleichungen legen ob (3.23) und (3.24) b_1 eindeutig fest. Der 4-Punkt-Vertex besitzt den Homogenitätsgrad $-3D$, so daß mit (3.20) wie schon in (2.30)

$$b_1 = L^{4-D} \quad (3.26)$$

folgt. Wir legen eine ganz bestimmte Parametrisierung der Trajektorie durch die Wahl der linearen β -Funktion fest (vgl. (2.38)), und erhalten mit den Ersetzungen $\alpha \Leftrightarrow 1$, $\gamma \Leftrightarrow \Gamma$, $\beta \Leftrightarrow A$ und $K_r(V) \Leftrightarrow -K_r(V)$ aus (2.39) für $r \geq 2$ die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} & L^{n(D+2)-r(4-D)} V_{2n,r}^{cont}(Lx_1, \dots, Lx_{2n}) - V_{2n,r}^{cont}(x_1, \dots, x_{2n}) \\ &= L^{-r(4-D)} K(V)_{2n,r}^{cont}(x_1, \dots, x_{2n}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hierbei ist $K(V)_{2n,r}^{cont}(x_1, \dots, x_{2n})$ der erzeugende Kontinuums-kern des $:\phi(x_1) \dots \phi(x_{2n})$ -Anteils im vollständig bestimmten Term $K(V)_r$. (3.27) lösende Vertices erfüllen die (entsprechend substituierte) Gleichung (2.39), sind jedoch nicht eindeutig. Für die reduzierten Impulskerne ergibt sich

$$\begin{aligned} & L^{\sigma(n,r)T} \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \hat{V}_{2n,r} \left(\frac{p_1}{L}, \dots, \frac{p_{2n}}{L} \right) - \hat{V}_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) \\ &= L^{-r(4-D)} \hat{K}(V)_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$\sigma(n, r) = D - n(D - 2) - r(4 - D). \quad (3.29)$$

Der Grund für die Berechnung im Impulsraum liegt im besseren *power counting*. Wie wir noch sehen werden, bereitet die Berechnung der Vertices Probleme, deren Exponent $\sigma \geq 0$ ist. In der Impulsdarstellung ist deren Anzahl für $2 < D < 4$ endlich. Für $D = 3$ ergibt sich

$$\sigma(n, r) = 3 - n - r. \quad (3.30)$$

Da die Bestimmungsgleichungen erst für $r \geq 2$ gelten, und \mathcal{T} normiert ist ($n > 0$), existiert kein relevanter ($\sigma > 0$) Vertex. Der Massenvertex $\hat{V}_{2,2}$ ist marginal ($\sigma = 0$) und alle übrigen Impulskerne sind irrelevant ($\sigma < 0$).

⁹Man beachte, daß es sich im folgenden immer um normierte Kumulanten handelt, d.h. $\langle [V_{r_1}, \dots, V_{r_m}] \rangle_{\Gamma, A\phi}^T \hat{=} \langle [V_{r_1}, \dots, V_{r_m}] \rangle_{\Gamma, A\phi}^T - \langle [V_{r_1}, \dots, V_{r_m}] \rangle_{\Gamma, 0}^T$.

Man beachte die Äquivalenz von (3.29) und (2.42). Die HRG bestätigt ihren Ruf als Testfeld für das volle Modell.

Eine wichtige Eigenart der Störungstheorie auf dem Gitter ist, daß die Vertices $V_{2n,r}^{cont}$ gegenüber Kontinuumstranslationen nicht invariant sind, so daß eine äquivalente Behandlung gemäß [Wie97d] nicht möglich ist. Begründet liegt dies darin, daß die Operatoren A und Γ nur gittertranslationsinvariant sind und in die $K(V)_r$ einfließen.

Desweiteren wollen wir betonen, daß die mittels (3.28) bestimmten reduzierten Impulskerne zwar T -abhängig sind, durch die extrahierte δ -Distribution jedoch nur die Werte $\sum p_i \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ zur ϕ^4 -Trajektorie beitragen. Alle anderen Impulskonstellationen sind auf dem Gitter irrelevant und somit frei wählbar. Bei der Verwendung einer kontinuierlichen T -Funktion erübrigen sich jedoch Fallunterscheidungen im Definitionsbereich.

3.3 Explizite Berechnung reduzierter Impulskerne

Ziel dieses Paragraphen ist es, eine analytische Funktion T mit den Eigenschaften (3.22) zu finden, die eine explizite Berechnung der reduzierten Impulskerne $\hat{V}_{2n,r}$ ermöglicht.

Mit Hilfe der Funktion [Wal]

$$\hat{S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \hat{S} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\frac{a}{2\pi}x)^2}{1-(\frac{a}{2\pi}x)^2}\right) & |x| < \frac{2\pi}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.31)$$

aus dem Raum der Testfunktionen¹⁰ definieren wir

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{S}\left(x + \frac{2\pi}{a}Lk\right) \quad (3.32)$$

$$T : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R} \quad T(p) = \prod_{\mu=1}^D S(p_\mu) . \quad (3.33)$$

Die auf diese Weise konstruierte T -Funktion ist unendlich oft differenzierbar und erfüllt die Eigenschaft (3.22). Siehe hierzu auch Abbildung 3.1.

¹⁰Das ist der Raum aller finiten (=kompakter Träger), unendlich oft differenzierbaren Funktionen über \mathbb{R} .

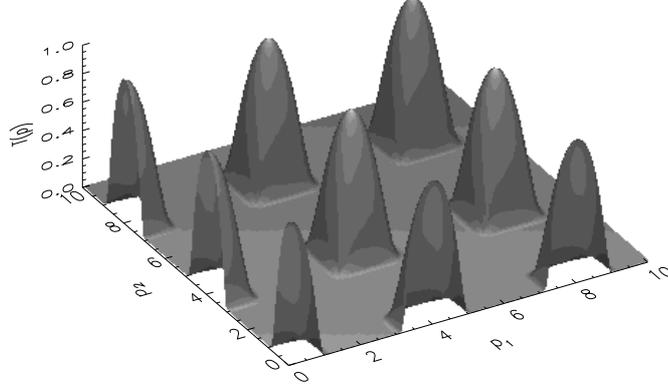


Abbildung 3.1: Eine 3-dimensionale Darstellung der T -Funktion für $D = 2, a = 2\pi$ und $L = 4$.

3.3.1 Berechnung der irrelevanten Kerne

Wir beginnen mit dem irrelevanten Fall, d.h. $\sigma := \sigma(n, r) < 0$. Gleichung (3.28)¹¹ wird dann von

$$\hat{V}(p_1, \dots, p_{2n}) = - \sum_{k=0}^{\infty} L^{k\sigma} T_k \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \hat{K}(V) \left(\frac{p_1}{L^k}, \dots, \frac{p_{2n}}{L^k} \right) \quad (3.34)$$

eindeutig gelöst. Wir setzen voraus, daß

$$\hat{K}(V) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD}) \quad (3.35)$$

und benutzen die Definition

$$T_k(Q) := \prod_{m=0}^{k-1} T \left(\frac{Q}{L^m} \right). \quad (3.36)$$

Beweis: (3.28) ist eine Gleichung der Form $\hat{V}(p) = F(\hat{V}(p/L))$. Durch sukzessives Einsetzen erhält man für $S \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\hat{V}(p) = - \sum_{k=0}^{S-1} L^{k\sigma} T_k \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \hat{K}(V) \left(\frac{p_1}{L^k}, \dots, \frac{p_{2n}}{L^k} \right)$$

¹¹Wir vernachlässigen im folgenden die Indizes $(2n, r)$ und den Vorfaktor des $\hat{K}(V)$ -Anteils

$$+L^{S\sigma}T_S\left(\sum_{i=1}^{2n}p_i\right)\hat{V}\left(\frac{p_1}{L^S},\dots,\frac{p_{2n}}{L^S}\right). \quad (3.37)$$

Man zeigt dies explizit mit dem Prinzip der vollständigen Induktion. Unter der Annahme, daß \hat{V} stetig ist,¹² folgt aus $\sup_{\mathbb{R}^D}|T|=1$ und der Wahl eines genügend großen S

$$\left|L^{S\sigma}T_S\left(\sum_{i=1}^{2n}p_i\right)\hat{V}\left(\frac{p_1}{L^S},\dots,\frac{p_{2n}}{L^S}\right)\right|\leq 2L^{S\sigma}\left|\hat{V}(0,\dots,0)\right|\xrightarrow{S\rightarrow\infty}0. \quad (3.38)$$

Der Beweis der Eindeutigkeit läuft analog, denn die Differenz \hat{V}_D zweier Lösungen erfüllt die homogene Differenzgleichung, d.h. $\hat{K}(V)=0$, so daß man $\hat{V}_D=0$ erhält.

Desweiteren ist die Reihendarstellung (3.34) gleichmäßig konvergent, was man auf ähnliche Art und Weise wie zuvor mit Hilfe des Majorantenkriteriums beweist: Es sei $K\subset\bigotimes_{i=1}^{2n}\mathbb{R}^D$ kompakt. OBdA sei K eine Kugel, so daß für alle $(p_1,\dots,p_{2n})\in K$ und $k\in\mathbb{N}_0$ die Relation $\frac{p_i}{L^k}\in K$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\left|L^{k\sigma}T_k\left(\sum_{i=1}^{2n}p_i\right)\hat{K}(V)\left(\frac{p_1}{L^k},\dots,\frac{p_{2n}}{L^k}\right)\right|\leq(L^\sigma)^k\sup_K|\hat{K}(V)|. \quad (3.39)$$

Da die Summanden stetig sind, ist dies sogleich ein Beweis für die Stetigkeit der reduzierten Kerne. Mit Hilfe der Eigenschaft $\hat{V},T_k\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$ und des 3. Vertauschungssatzes [For91] erarbeiten wir ebenso $\hat{V}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$.

3.3.2 $\hat{V}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$

Nun haben wir die Eigenschaft $\hat{V}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$ aus der Voraussetzung (3.35) abgeleitet. Daß dies gerechtfertigt war, zeigt man per Induktion über der Ordnung r . Aus der Gittertranslationsinvarianz der Vertices $V_{2n,r}^{cont}$ folgt für die assoziierten, reduzierten Impulskerne ($k\in\{1,\dots,2n\}$ beliebig)

$$\hat{V}_{2n,r}(p_1,\dots,p_{2n})=\int\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{2n}d^Dx_i\frac{1}{a^D}\int_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]^D}d^Dx_k e^{-i\sum_{i=1}^{2n}p_i x_i}V_{2n,r}^{cont}(x_1,\dots,x_{2n}). \quad (3.40)$$

¹²Beweis folgt.

Diese Formel zeigt man unter Benutzung der Relation [Pur96]

$$\sum_{y \in \Lambda(a)} e^{-iy p} = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{2\pi}{a} \delta(p - Q) . \quad (3.41)$$

Aus (3.40) erhält man in erster Ordnung¹³

$$\hat{V}_{2,1}(p_1, p_2) = 0 \quad (3.42)$$

$$\hat{V}_{4,1}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \prod_{\mu=1}^D \text{si} \left(\frac{a p_\mu}{2} \right) \Big|_{p=\sum_{i=1}^4 p_i} . \quad (3.43)$$

Da $\text{si} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ist der Induktionsanfang ($r = 1$) komplett. Man beachte, daß für $a = 0$ die Kontinuumseigenschaft $\hat{V}_{4,1}(p_1, \dots, p_4) = 1$ folgt.¹⁴

Für den Induktionsschritt machen wir uns die Mühe, das Gitterpotential ins Kontinuum zu transferieren, um es dort von einer ebenfalls in das Kontinuum expandierten RGT bearbeiten zu lassen. Abschließend führen wir eine Gitterrücktransformation durch. Siehe hierzu auch [Wie98]. Diese Prozedur ermöglicht es uns, viele Ergebnisse der Kontinuumstheorie zu benutzen. Einziges Problem ist die nicht vorhandene Kontinuumstranslationsinvarianz der auf das Kontinuum gebrachten Fluktuationskovarianz und des kontinuierlichen Propagators. Ohne dieses Handicap könnte man die RG auf dem Gitter vollständig auf das gelöste Problem im Kontinuum zurückführen.

Es sei nun O ein Gitteroperator $\mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(a)$. Dann definieren wir den korrespondierenden Kontinuumsoperator $\mathcal{H}(0) \rightarrow \mathcal{H}(0)$ über

$$O^{(\infty)} = A^{(\infty)} O A^{(\infty)\dagger} . \quad (3.44)$$

Wir erhalten somit $\nu^{(\infty)}$ und $\Gamma^{(\infty)}$, welche die Eigenschaft

$$\nu^{(\infty)} - \Gamma^{(\infty)} = S^{-1} \nu^{(\infty)} S^{-1\dagger} \quad (3.45)$$

erfüllen. Die Fluktuationskovarianz ist eine nach Skalen zerlegte Kovarianz $\nu^{(\infty)}$. In dieser Gleichung finden wir das Grundprinzip der RG wieder.

Definieren wir nun die kontinuierliche RGT R^{cont} über $T^{(\infty)}$ und S^{-1} und die ϕ^4 -Trajektorie V^{cont} analog zu (3.13), indem wir kontinuierliche Felder bezüglich der normalordnenden Kovarianz $\nu^{(\infty)}$ und durch die kontinuierlichen Impulskerne $\hat{V}_{2n,r}^{cont}$ erzeugte Ortskerne benutzen, so gilt

$$V(\phi) = V^{cont}(A^{(\infty)} \phi) \quad (3.46)$$

¹³ $\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

¹⁴In diesem Fall existiert nur $\sum p_i = 0$.

und folglich¹⁵

$$R(V)(\phi) = R^{cont}(V^{cont})(A^{(\infty)}\phi) . \quad (3.47)$$

Weitere Informationen finden sich bei [Wie98, GK84]. Aufgrund der Multilinearität der Kumulanten sind die $K_r(V)$ eine Superposition von trunkierten Erwartungswerten normalgeordneter Felder, deren Kerne Produkte der bereits berechneten \mathcal{C}^∞ -Kerne $V_{2n,r}$ sind. In die trunkierten Erwartungswerte fließen nun die normalordnende und die Fluktuationskovarianz ein. Nach WIECZERKOWSKI [Wie98] ergibt sich z.B. für $\nu^{(\infty)} = \nu_a^{(\infty)}$

$$\hat{\nu}_a^{(\infty)}(p_1, p_2) = - \left\{ \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{p_1^2 p_2^2}{(p_1 + P)^2} \prod_{\mu=1}^D \frac{(p_1)_\mu (p_2)_\mu}{(p_1 + P)_\mu^2} \right\}^{-1} . \quad (3.48)$$

Für $p_1 + p_2 \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ ergibt sich nach Substitution von P die Symmetrie

$$\hat{\nu}_a^{(\infty)}(p_1, p_2) = \hat{\nu}_a^{(\infty)}(p_2, p_1) . \quad (3.49)$$

Der reduzierte Impulskern ist singular. Dies ist nicht verwunderlich, da auch schon die perfekte masselose Gitterkovarianz für $p = 0$ divergent war. Für $a \rightarrow 0$ erhalten wir den freien Propagator $\nu(p_1, p_2) = -p_2^2$.

Diese infrarote Divergenz zerstört das Argument der unendlichen Differenzierbarkeit jedoch nicht. Im Kontinuum trat $\nu^{(\infty)}$ nur in Impulsraum-Faltungen mit $\Gamma^{(\infty)}$ auf. Die durch einen Exponential-*cutoff* regularisierte Fluktuationskovarianz vererbt ihre Beschränktheit in Null samt Differenzierbarkeit auf die Faltung, so daß die Kerne der Kumulanten unendlich oft differenzierbar bleiben [Wie97d].

Auf dem Gitter folgt mit (3.45), daß $\Gamma^{(\infty)}$ auf dem feineren Gesamtimpuls-gitter $\Lambda(\frac{2\pi}{aL})$ lebt. Man berechnet

$$\Gamma^{(\infty)}(p_1, p_2) = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{aL})} \delta(p_1 + p_2 + Q) \hat{\Gamma}^{(\infty)}(p_1, p_2) \quad (3.50)$$

mit¹⁶

$$\hat{\Gamma}^{(\infty)}(p_1, p_2) = T(p_1 + p_2) \hat{\nu}_a^{(\infty)}(p_1, p_2) - L^2 \hat{\nu}_a^{(\infty)}(Lp_1, Lp_2) . \quad (3.51)$$

¹⁵Das renormierte Potential ist ein Kontinuumpotential, dessen Impulskerne die renormierten Gitterkerne generieren.

¹⁶Man beachte, daß $\hat{\nu}_{La}^{(\infty)}(p_1, p_2) = L^2 \hat{\nu}_a^{(\infty)}(Lp_1, Lp_2)$.

T sei eine \mathcal{C}^∞ -Funktion entsprechend (3.22) mit der Ersetzung $a \rightarrow La$. Für $p_1 + p_2 \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ folgt:

$$\hat{\Gamma}^{(\infty)}(p_1, p_2) = (1 - L^2) \frac{1}{p_2^2} C_L(p_1, p_2) \quad (3.52)$$

C_L regularisiert den freien Propagator $\frac{1}{p_2^2}$. Leider können wir dies nicht zeigen. In Analogie zum Kontinuum, wo man den freien Propagator z.B. mit dem exponentiellen IR- und UV-Regulator

$$C_L^{cont}(p) = e^{-p^2} - e^{-(Lp)^2} = (L^2 - 1)p^2 + O(p^4) \quad (3.53)$$

versieht, sollte auch hier die Relation $C_L(p_1, p_2) = O(p_2)$ gelten. Ein weiteres Problem finden wir für $p_1 + p_2 \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) - \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Für diese Impulspaare verschwindet die T -Funktion, und es bleibt die divergente, reskalierte normalordnende Kovarianz zurück. Das Zeigen der Polfreiheit der Fluktuationskovarianz ist eine reizvolle Aufgabe, der wir uns hier jedoch nicht widmen wollen¹⁷.

Wir gehen im weiteren davon aus, daß $\hat{\Gamma}^{(\infty)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$. Aus

$$K_2(V)(\phi) = - \langle V^{cont}, V^{cont} \rangle_{\Gamma^{(\infty)}, S^{-1}A^{(\infty)}\phi}^T \quad (3.54)$$

ergibt sich mit $u^{(\infty)}(x, y) = L^{2-D} \nu^{(\infty)}(\frac{x}{L}, \frac{y}{L})$ und der Kumulantenformel (B.20)

$$\begin{aligned} & K_{4,2}^{cont}(x_1, \dots, x_4) \quad (3.55) \\ &= 3L^4 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \Gamma^{(\infty)}(Lx_1, Lx_3)^2 \\ &\quad + 6L^4 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \Gamma^{(\infty)}(Lx_1, Lx_3) u^{(\infty)}(Lx_1, Lx_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & K_{6,2}^{cont}(x_1, \dots, x_6) \quad (3.56) \\ &= 20L^{6-D} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_4 - x_5) \delta(x_4 - x_6) \Gamma^{(\infty)}(\frac{x_1}{L}, \frac{x_4}{L}). \end{aligned}$$

Den aus drei Summanden bestehenden Massenvertex haben wir der Einfachheit halber weggelassen. Die reduzierten Impulskerne berechnen wir unter Benutzung von (3.40) zu

$$\begin{aligned} & \hat{K}_{4,2}(p_1, \dots, p_4) \quad (3.57) \\ &= L^{4-D} \sum_{S \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}L)} \prod_{\mu=1}^D \text{si} \left(\frac{aF_\mu}{2} \right) \Big|_{F=S-\sum_{i=1}^4 p_i} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}L)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \end{aligned}$$

¹⁷können

$$\begin{aligned}
 & 3\hat{\Gamma}^{(\infty)}\left(p, \frac{Q}{L} - p\right)\hat{\Gamma}^{(\infty)}\left(\frac{S - p_1 - p_2}{L} - p, \frac{p_1 + p_2 - Q}{L} + p\right) \\
 & + 6\hat{\Gamma}^{(\infty)}\left(p, \frac{Q}{L} - p\right)\hat{u}^{(\infty)}\left(\frac{S - p_1 - p_2}{L} - p, \frac{p_1 + p_2 - Q}{L} + p\right)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \hat{K}_{6,2}(p_1, \dots, p_6) \tag{3.58} \\
 & = 20L^{6-2D} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}L)} \prod_{\mu=1}^D \text{si}\left(\frac{aF_\mu}{2}\right) \Big|_{F=Q-\sum_{i=1}^6 p_i} \hat{\Gamma}^{(\infty)}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{L}, \frac{Q}{L} - \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{L}\right).
 \end{aligned}$$

Für $a \rightarrow 0$ ergibt sich wieder das Kontinuumsresultat. Wir beweisen die \mathcal{C}^∞ -Eigenschaft für $\hat{K}_{6,2}$ und beginnen mit dem Zeigen von gleichmäßiger Konvergenz. Für jedes Kompaktum $K \subsetneq \mathbb{R}^{6D}$ existiert ein $R > 0$, so daß $|\hat{\Gamma}^{(\infty)}|$ aufgrund seines ultravioletten *cutoffs* für $|Q| > R$ beschränkt ist. Dies gilt auch für alle partiellen Ableitungen.¹⁸ Wir reduzieren unsere Betrachtungen somit auf die si-Reihe mit positiven Indizes und $a = D = 1$. Die reskalierte Summe $x = \frac{a}{2} \sum p_i$ sei durch M beschränkt. OBdA seien $Ln\pi - M > 0$ und L ungerade. Dann gilt unter Benutzung eines Additionstheorems:

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{si}(Ln\pi - x) \right| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{Ln}}{Ln\pi - x} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{Ln\pi - (-1)^n M} < \infty \tag{3.59}$$

Die Konvergenz der Majorante folgt aus dem Leibniz-Kriterium, und Stetigkeit liegt auf der Hand. Da si eine \mathcal{C}^∞ -Funktion ist, deren Ableitungen sich ebenso abschätzen lassen, folgt unendliche Differenzierbarkeit für den $\hat{K}_{6,2}$ -Vertex.

Die erweiterte Faltung der 4-Punkt-Funktion $\hat{K}_{4,2}$ wirkt da schon etwas komplizierter. Für $a \rightarrow 0$ erhalten wir mit Hilfe der Identifikation $\hat{\Gamma}^{(\infty)}(p) = \hat{\Gamma}^{(\infty)}(-p) = \hat{\Gamma}^{(\infty)}(p, -p)$ das Kontinuumsresultat

$$\hat{K}_{4,2}^{cont}(p_1, \dots, p_4) = \frac{L^{4-D}}{(2\pi)^D} \left\{ 3\hat{\Gamma}^{(\infty)} \star \hat{\Gamma}^{(\infty)}\left(\frac{p_1 + p_2}{L}\right) + 6\hat{\Gamma}^{(\infty)} \star \hat{u}^{(\infty)}\left(\frac{p_1 + p_2}{L}\right) \right\}. \tag{3.60}$$

Hierbei bezeichnet \star die Faltung. Die Berechnung von $\hat{K}_{4,2}^{cont}$ findet sich in [Wie97d]. Den Beweis der Analytizität auf dem Gitter bleiben wir schuldig.

3.3.3 Eigenschaft differenzierbarer Impulskerne \hat{V}

Wir betrachten in diesem Kapitel die kontinuierliche, gittertranslationsinvariante RGT und zeigen, daß unsere Wahl der Potentialdarstellung über

¹⁸Natürlich mit einem anderen R .

normalgeordnete Felder äquivalent zu einer Konstruktion ist, die auch normalgeordnete Produkte abgeleiteter Felder in die Superposition involviert. Neben der Gittertranslationsinvarianz bildet die unendliche Differenzierbarkeit der Impulskerne die Grundlage dieser Aussage.

Wir betrachten im folgenden \hat{V} als Funktion von p_1, \dots, p_{2n-1} und Q und bilden die formale Taylor-Reihe.¹⁹ Durch Einsetzen in (3.18) erhalten wir für einen Kontinuumskernel

$$\begin{aligned} & V(x_1, \dots, x_{2n}) \tag{3.61} \\ &= \sum_k \frac{(-i)^{|k|}}{k!} \partial_p^k \hat{V}(0) \prod_{i=1}^{2n-1} \partial_{x_i}^{k_i} \delta(x_i - x_{2n}) \int_{\Lambda(a)} d^D y \partial_{x_{2n}}^{k_{2n}} \delta(x_{2n} - y). \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir den Multiindex $k = k_{m,\mu}$ mit $m \in \{1, \dots, 2n\}$ und $\mu \in \{1, \dots, D\}$. $\partial_{x_i}^{k_i}$ steht somit für $\prod_{\mu=1}^D \partial_{x_{i,\mu}}^{k_{i,\mu}}$. Man beachte, daß $\partial_{p_{2n}}^{k_{2n}} = \partial_Q^{k_{2n}}$. Mit (3.61) und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\otimes_{i=1}^{2n} \mathbb{R}^D} \prod_{i=1}^{2n} d^D x_i V(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) :_{\nu(\infty)} \\ &= \sum_k \frac{i^{|k|}}{k!} \partial_p^k \hat{V}(0) \int_{\Lambda(a)} d^D y : \partial_y^k \phi(y) :_{\nu(\infty)}. \tag{3.62} \end{aligned}$$

Hierbei gilt : $\partial_y^k \phi(y) := \prod_{i=1}^{2n} \partial_{x_i}^{k_i} \phi(x_i) :_{x_i=y}$.

An dieser Darstellung sieht man sehr schön, daß die ϕ^4 -Trajektorie durch die $\partial_p^k \hat{V}_{2n,r}(0)$ vollständig festgelegt ist und in der linearen Hülle der : $\partial_y^k \phi(y) :_{\nu(\infty)}$, $y \in \Lambda(a)$ lebt.

Die Anfangsbedingungen (3.23) und (3.24) schreiben sich entsprechend:²⁰

$$\hat{V}_{2,1}(0, 0) = 0 \tag{3.63}$$

$$\hat{V}_{4,1}(0, 0, 0, 0) = 1 \tag{3.64}$$

3.3.4 Berechnung der marginalen Kerne

Im marginalen Fall ($\sigma = 0$) erhält man aus der Bestimmungsgleichung (3.28) durch Einsetzen von $p = 0$ die Bedingung

$$\hat{K}(V)(0) = 0. \tag{3.65}$$

¹⁹Einen exakten Zugang bietet die Darstellung über Taylor-Polynom und Restglied.

²⁰Für $|k| = 0$ ist $\hat{V}(p_1 = 0, \dots, p_{2n-1} = 0, Q = 0) = \hat{V}(p_1 = 0, \dots, p_{2n} = 0)$.

Wie wir im folgenden sehen werden, ist gerade diese Gleichung für $D = 3$ nicht erfüllt, wir beheben das Problem jedoch wie schon im hierarchischen Bild durch eine Doppelentwicklung.

Die Lösung von (3.28) bestimmt sich analog (3.37) zu²¹

$$\hat{V}(p_1, \dots, p_{2n}) = \hat{V}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} T_k \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \hat{K}(V) \left(\frac{p_1}{L^k}, \dots, \frac{p_{2n}}{L^k} \right). \quad (3.66)$$

Sie ist, wie man leicht zeigt, bis auf die frei wählbare Konstante $\hat{V}(0)$ eindeutig. Desweiteren gilt $\hat{V} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$.

Beweis: Die unendliche Reihe in (3.66) ist gleichmäßig konvergent, denn für Impulse p_i aus einer beliebigen, kompakten Kugel $\overline{U_R(0)}$ gilt (Multiindex!):

$$\left| T_k \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right) \hat{K}(V) \left(\frac{p_1}{L^k}, \dots, \frac{p_{2n}}{L^k} \right) \right| \leq \left| \nabla \hat{K}(V)(\zeta) \frac{p}{L^k} \right| \leq \sup_{U_R(0)} \hat{K}(V) \frac{R}{L^k} \quad (3.67)$$

Die Eigenschaft (3.65) ermöglicht die Extraktion der Majorante $\frac{1}{L^k}$. Direkte Folge der gleichmäßigen Konvergenz ist die Stetigkeit von $\hat{V}_{2n,r}$. Für partielle Ableitungen ergibt sich die Majorante direkt durch den Faktor L^{-k} der inneren Funktion $L^{-k}p$.

□

3.3.5 Berechnung der nicht-relevanten Kerne

Obwohl relevante Kerne in $D = 3$ Dimensionen nicht auftreten, wollen wir die Problemstellung kurz behandeln. Das vorgestellte Verfahren greift auch im marginalen Fall.

Wir gehen davon aus, daß \hat{V} Taylor-entwickelbar ist. Unter Benutzung der Multiindexschreibweise erhalten wir durch das Bilden der partiellen Ableitung ∂_p^s der Differenzgleichung²²

$$\sum_{k=0}^{|s|} L^{\sigma-k} \sum_{|v|=k, v \subseteq s} \left(\partial_p^v \hat{V} \right) \left(\frac{p}{L} \right) (\partial_p^{s-v} T)(p) - \partial_p^s \hat{V}(p) = \partial_p^s \hat{K}(V)(p) . \quad (3.68)$$

²¹Der marginale reduzierte Kern läßt sich für große Impulse logarithmisch abschätzen, d.h. $|\hat{V}(p)| \leq A + B \log |p|$ [Wie97b].

²²Wir schreiben im folgenden $T(p)$ für $T(\sum_{i=1}^{2n} p_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^{2n} p_{i,D})$. Da die innere Ableitung eins ist, treten beim Ableiten keine Probleme auf.

Da s und v Multiindizes sind, muß der Ausdruck $s - v$ mengentheoretisch interpretiert werden. Mit $p = 0$ folgt aus $T(0) = 1$ für $|s| \neq \sigma$

$$\partial_p^s \hat{V}(0) = \frac{1}{L^{\sigma-s} - 1} \left\{ \partial_p^s \hat{K}(V)(0) - \sum_{k=0}^{|s|-1} L^{\sigma-k} \sum_{|v|=k, v \subseteq s} \left(\partial_p^v \hat{V} \right)(0) \left(\partial_p^{s-v} T \right)(0) \right\}. \quad (3.69)$$

Für Ableitungen der Ordnung σ muß die Bedingung

$$\partial_p^s \hat{K}(V)(0) = \sum_{k=0}^{|s|-1} L^{\sigma-k} \sum_{|v|=k, v \subseteq s} \left(\partial_p^v \hat{V} \right)(0) \left(\partial_p^{s-v} T \right)(0) \quad (3.70)$$

erfüllt sein. Anders als im hierarchischen Modell tritt diese Forderung jedoch nicht nur bei den marginalen, sondern auch bei den relevanten (n, r) -Tupeln auf. $\partial_p^s \hat{V}(0)$ ($|s| = \sigma$) wird in Folge der gewählten Parametrisierung (bis heute die lineare β -Funktion) frei wählbar.

Ein großer Nachteil im Vergleich zu den Lösungen (3.34) und (3.66) ist jedoch, daß wir keine Aussage darüber machen können, ob die Taylor-Reihe, die durch (3.69) definiert wird, konvergiert. Obwohl wir vermuten, daß der Faktor $L^{\sigma-k}$ für $s \gg \sigma$ die Konvergenz sicherstellen wird, ist es uns bis dato nicht gelungen zu zeigen, daß das Restglied für $s \rightarrow \infty$ verschwindet.

Durch die künstlich eingeführte Funktion T ist es nicht mehr möglich, wie in [Wie97d] durch partielles Ableiten den Grad L^σ der Differenzgleichung zu verringern *und* Forminvarianz zu wahren. Diese Eigenschaft ermöglicht eine Bestimmung der Taylor-Koeffizienten $\partial_p^k \hat{V}(0)$ für $|p| \leq \sigma$ und die Berechnung des Restgliedes durch (3.34) aus einer Bestimmungsgleichung mit renormierten $\sigma < 0$ ($T(p) = 1$ im Kontinuum).

Aus diesem Grund wollen wir abschließend ein letztes Verfahren zur Bestimmung der Impulsvertices vorstellen, welches sich auf [Wie97d] stützt, doch weniger explizit ist.

3.4 Implizite Berechnung reduzierter Impulskerne

Es sei wieder $K_r(V) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2nD})$ vorausgesetzt. Wir betrachten für beliebiges $Q \in \mathbb{R}^D$ die Menge

$$\mathcal{M}_{2n}(Q, \epsilon) = \left\{ (p_1, \dots, p_{2n}) \mid \left\| \sum_{i=1}^{2n} p_i - Q \right\|_2 \leq \epsilon \right\} \quad (3.71)$$

und definieren

$$U_{2n}(\epsilon) = \bigcup_{Q \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}L\right)} \mathcal{M}_{2n}(Q, \epsilon) \quad (3.72)$$

$$N_{2n}(\epsilon) = \bigcup_{Q \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)} \mathcal{M}_{2n}(Q, \epsilon) - U_{2n}(\epsilon). \quad (3.73)$$

Dann ist die T -Funktion gemäß (3.22) auf $U_{2n}(0)$ identisch eins und verschwindet für Impulse aus $N_{2n}(0)$. (3.28) gleicht somit auf $U_{2n}(0)$ der Bestimmungsgleichung in [Wie97d]. Wir erweitern diese Gleichung auf \mathbb{R}^{2nD} und lösen sie gemäß WIECZERKOWSKI. Die zugehörige Lösung sei $\hat{V}_{2n,r}^{(W)}$. Für $(p_1, \dots, p_{2n}) \in N_{2n}(\epsilon)$ ergibt sich direkt

$$\hat{V}_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) = \hat{K}(V)_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}). \quad (3.74)$$

Wir suchen nun eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $\hat{V}_{2n,r}$ mit den Eigenschaften

$$\hat{V}_{2n,r} \Big|_{U_{2n}(\epsilon)} = \hat{V}_{2n,r}^{(W)} \Big|_{U_{2n}(\epsilon)} \quad (3.75)$$

$$\hat{V}_{2n,r} \Big|_{N_{2n}(\epsilon)} = \hat{K}(V)_{2n,r}(p_1, \dots, p_{2n}) \Big|_{N_{2n}(\epsilon)}. \quad (3.76)$$

Es ist $\epsilon > 0$ beliebig. Hier zeigt sich wieder die fundamentale Eigenschaft einer Gittertheorie, durch Impulsvertices an Stellen, wo der Gesamtimpuls auf dem diskretisierten Impulsgitter liegt, vollständig definiert zu sein.

Daß die Konstruktion der Funktion $\hat{V}_{2n,r}$ möglich ist, wollen wir an einem vereinfachten Beispiel verdeutlichen: Wir reduzieren den Definitionsbereich auf \mathbb{R} und redefinieren $U_{2n}(\epsilon) := (-\infty, -\epsilon]$ und $N_{2n}(\epsilon) := [\epsilon, \infty)$. Gelingt es uns nun, eine unendlich oft differenzierbare Funktion $S_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $S_\epsilon(p) = 0$ für $p \leq -\epsilon$ und $S_\epsilon(p) = 1$ für $p \geq \epsilon$ zu konstruieren, so besitzt die Abbildung

$$\hat{V}_{2n,r}(p) := (1 - S_\epsilon(p))\hat{V}_{2n,r}^{(W)}(p) + S_\epsilon(p)\hat{K}(V)_{2n,r}(p) \quad (3.77)$$

gerade die von uns gewünschten Eigenschaften.

Nehmen wir an der Testfunktion (3.31) die Substitution $\frac{2\pi}{a} = \epsilon$ vor, so haben wir eine Funktion \hat{S}_ϵ konstruiert, die außerhalb von $(-\epsilon, \epsilon)$ verschwindet. Man erhält $S_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ durch

$$S_\epsilon(p) = \frac{\int_{-\infty}^p \hat{S}_\epsilon(q) dq}{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_\epsilon(q) dq}. \quad (3.78)$$

3.5 Doppelreihenentwicklung in $D = 3$ Dimensionen

In $D = 3$ Dimensionen existieren neben dem marginalen ϕ^2 -Vertex in 2. Ordnung nur irrelevante Impulskerne. Die Bestimmungsgleichung (3.65) wird von der Funktion $\hat{V}_{2,2}$ im Kontinuum nicht erfüllt [Wie97b]. Auch auf dem Gitter tritt die $(n, r) = (1, 2)$ -Resonanz auf. Sie ist wiederum eine Folge der (willkürlichen) Parametrisierung $\beta(g) = Lg$. Wir beheben das Problem durch eine Doppelentwicklung.

Auf diese Weise erhalten wir eine störungstheoretische Behandlung analog der HRG in drei Dimensionen und bestimmen durch die Rückführung des Gitters auf das Kontinuum die ϕ^4 -Trajektorie perturbativ gemäß [Wie97b].

Kapitel 4

Konstruktionsversuch der ϕ_4^4 -Trajektorie im Hierarchischen Modell

In diesem Abschnitt präsentieren wir einige Ansätze der Konstruktion der ϕ_4^4 -Trajektorie im hierarchischen Modell. Wir stützen uns dabei auf die Arbeiten [Por90] und [Alb91].

Im Kapitel 2 haben wir an vielen Stellen gesehen, daß die dort präsentierte Konstruktion nur für $2 < D < 4$ gültig ist. Wir wollen hier die wesentlichen Faktoren noch einmal aufführen.

- Die Benutzung einer linearen β - bzw. δ -Funktion (2.38), (2.45) ist unsinnig, da sie zur Identität verkommen. Ursache ist, daß die ϕ_4^4 -Kopplung in $D = 4$ Dimensionen marginal ist. In der Störungstheorie erweist sich diese Wahl sogar als falsch (Abschnitt 2.3.2).
- Der Trajektorienraum \mathcal{V}_{g_0} ist nicht konstruierbar, da keine Gauß-Trajektorie bezüglich der linearen δ -Funktion existiert (Kapitel 2.4).¹
- Zur Berechnung der RG-Trajektorie benötigen wir skalierende Potentiale, die Polynome in Kopplung g und Feld ϕ darstellen. Für $D \rightarrow 4$ führt dies zur Verwendung der kompletten, formalen Störungsreihe (2.162). Diese ist praktisch nicht berechenbar und nicht konvergent (Abschnitt 2.6.4).

¹Für $D \rightarrow 4$ gilt $Z_{QU}(0) = Z_{UV}$ und $Z_{QU}(g > 0) = Z_{QU}$ - die Trajektorie „verbindet“ also nicht mehr den trivialen Fixpunkt mit dem Hochtemperaturfixpunkt.

- Die Bedingung (2.88) bringt mit sich, daß eine (nichtstörungstheoretische) Fixpunktapproximante bereits ein Fixpunkt der RGT sein muß.

Wir verwenden im folgenden die RGT in der Form

$$\mathcal{R}(Z)(\phi) = \left\{ \langle Z \rangle_{\gamma, \beta \phi} \right\}^\alpha . \quad (4.1)$$

Diese Formulierung vermeidet eine α -Integration vor der Gaußschen Faltung. \mathcal{T} sei die RGT für Potentiale. Die charakterisierenden Parameter bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} \alpha &= L^4 > 1 \\ \beta &= L^{-1} < 1 \\ \gamma &= 1 - L^{-2} < 1 . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Eine mögliche δ -Funktion ist das Inverse der in Abschnitt 2.3.2 bestimmten kubischen β -Funktion

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \sum_{n=1}^3 b_n g^n \\ &= g - 36(L^4 - 1)g^2 + (432 - 3456L^2 - 2592L^4 + 3456L^6 + 2160L^8)g^3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man beachte, daß die β -Funktion (4.3) mittels der Transformation $\tilde{\mathcal{T}} = U^{-1}\mathcal{T}U$ gewonnen wurde, wobei $U(V) = \alpha V$ ist. Aus der Eigenschaft, daß (\tilde{V}, β) ein skalierendes Paar zu $\tilde{\mathcal{T}}$ ist, folgt, daß auch $(U(\tilde{V}), \beta)$ ein skalierendes Paar zu \mathcal{T} darstellt. Wir dürfen die Trajektorie somit mit der obigen β -Funktion konstruieren.

Die störungstheoretische Konstruktion einer Gauß-Trajektorie gelingt nicht, da die δ -Funktion selbst eine unendliche Reihe ist. Setzt man $b(g)$ wie im Beweis zu 2.4.1 als Potenzreihe in g^ρ an, so läßt sich die Invarianzgleichung $b(g) = b'(\delta(g))$ (vgl. mit (2.60)) nicht mehr nach Potenzen in g ordnen. Für $\rho = 0$ ergibt sich z.B. nur die triviale Lösung.

4.1 Existenz der Trajektorie

Bei der perturbativen Behandlung im Kapitel 2.3 wurde uns der gravierende Unterschied zwischen einer Konstruktion in $D < 4$ und $D = 4$ Dimensionen aufgezeigt. Mit Hilfe der linearen δ -Funktion findet man in $D < 4$ für die Bestimmungsgleichungen sowohl in der hierarchischen (2.42) als auch in der Gitterapproximation (3.29) dieselben Exponenten. Diese zeigen auf, daß für

$2 < D < 4$ nur endlich viele relevante Vertices existieren. Für $D = 4$ ist σ nicht mehr ordnungsabhängig und der Massen- und ϕ^4 -Vertex sind in jeder Ordnung der Störungstheorie relevant bzw. marginal.

Diese Eigenschaft korrespondiert mit den Ergebnissen der perturbativen Behandlung der skalaren Feldtheorie. Die dort auftauchende Gleichung für den oberflächlichen Divergenzgrad der Feynman-Graphen (*superficial degree of divergence*) ist identisch mit (2.42) und (3.29). Man spricht von einer renormierbaren Theorie, wenn es möglich ist, die Divergenzen in jeder Ordnung durch Renormierung der nackten Kopplungen oder Einfügen von Countertermen zu beheben ($D = 4$). Eine Theorie heißt superrenormierbar, wenn in der gesamten Störungsreihe nur endlich viele divergente Graphen existieren ($D < 4$). Die Theorie ist gewiß nicht renormierbar, wenn der Divergenzgrad mit der Ordnung steigt.² Die Begriffe renormierbar und superrenormierbar übertragen sich in die Wilson-Renormierungsgruppe, wenn man sie auf die Anzahl der marginalen und relevanten Impulskerne bezieht.³

In $D = 4$ Dimensionen sehen wir uns also mit dem Problem konfrontiert, daß der Kopplungsterm, in welchem wir die Trajektorie parametrisieren, marginal ist. Dies bedeutet, daß wir keine pauschale Aussage darüber machen können, wie sich die ϕ^4 -Kopplung unter der RGT verhält (wachsend oder fallend), da der ϕ^4 -Vertex in der Zentrumsmannigfaltigkeit der RGT liegt.⁴ Es ist somit völlig unklar, welche ϕ^4 -Theorien, definiert durch

$$V_{\mu_0, g_0}(\phi) = \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0\phi^4, \quad (4.4)$$

nach Z_{UV} fließen. Oder ob überhaupt ϕ^4 -artig gestörte Theorien in die Universalitätsklasse der freien Theorie fallen.

Rigoreuse Aussagen sind also nur möglich, wenn wir Kontrolle über den RG-fluß bewahren. Hierzu betrachten wir einen durch das Potential

$$V(\phi) = \sum_{n=1}^s \frac{k_{2n}}{(2n)!} \phi^{2n} \quad (4.5)$$

²Es können jedoch in allen Graphen sog. primitive Divergenzen auftauchen. Die Konvergenz eines Feynman-Graphen ist genau dann gewährleistet, wenn die Summe aus oberflächlichem Divergenzgrad und Divergenzgrade in allen Untergraphen kleiner als Null ist (*Weinberg's Theorem*).

³Man beachte, das ein $2n$ -Impulskern eine Potenzreihe eines ϕ^{2n} -Vertex samt seiner Ableitungen repräsentiert.

⁴Exakter: Die Zentrumsmannigfaltigkeit tangiert den Eigenraum zu ϕ^4 in Z_{UV} .

erzeugten Boltzmann-Faktor. Dann bildet (4.1) die Theorie (4.5) auf die effektive Theorie

$$\mathcal{T}_0(V)(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{k}_{2n}}{(2n)!} \phi^{2n} \quad (4.6)$$

ab - die Transformation generiert neue Wechselwirkungsterme. Hierbei ist

$$\tilde{k}_{2n} = \tilde{k}_{2n}(k_2, \dots, k_{2s}) \quad (4.7)$$

OBdA kann man sogleich einen unendlich dimensionalen Raum von Kopplungen benutzen, und beginnt den ersten Iterationsschritt mit $k_{2n} = 0$ für $n > s$. Betrachtet man die trunkierte Transformation \mathcal{R}_0^s , der ein Polynomprojektor in ϕ vom Grad $2s$ nachgeschaltet ist, so erhalten wir eine Abbildung $\mathcal{R}_0^s : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ mit der Zuweisungsvorschrift (4.7). Die Flußgleichungen schreiben sich als

$$\tilde{k}_{2n}(k_2, \dots, k_{2s}) = \frac{\partial^{2n}}{\partial \phi^{2n}} \mathcal{T}_0(V)(0) . \quad (4.8)$$

Mittels obiger Gleichung können wir die renormierten Kopplungen ganz bestimmter Feldterme explizit berechnen. In [Por90] betrachtet man Ausgangspotentiale der Form (4.4) und erhält

$$\mathcal{R}(e^{-V_{\mu_0, g_0}})(\phi) = e^{-V_{\mu_1, g_1}(\phi)} + H(\phi) . \quad (4.9)$$

Hierbei sind $\mu_1 = \mu_1(\mu_0, g_0)$ und $g_1 = g_1(\mu_0, g_0)$ über (4.8) berechnet und $H = H(\mu_0, g_0)$ über die Differenz $H := \mathcal{R}(e^{-V_{\mu_0, g_0}}) - e^{-V_{\mu_1, g_1}}$ definiert. Es folgt, daß $H(\phi) = O(\phi^6)$ ist, und so liegt die Erweiterung [Alb91] auf der Hand, sogleich von einem Startpotential der Form $e^{-V_{\mu_0, g_0}} + H_0$ mit $H_0(\phi) = H_{\mu_0, g_0}(\phi) = O(\phi^6)$ auszugehen. Entsprechend (4.9) erhält man

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ g_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \mu_1(\mu_0, g_0, H_0) \\ g_1(\mu_0, g_0, H_0) \\ H_1 \end{pmatrix} . \quad (4.10)$$

Das weitere Vorgehen wollen wir hier nur kurz skizzieren. Das exakte Verfahren findet sich in den oben genannten Referenzen. Zur Untersuchung des Flußverhaltens taylornt man die Gleichungen für die Massen- und die ϕ^4 -Kopplung exakt (mit Restglied) an.⁵ Konstruiert man einen Banachraum der Korrekturterme H über $H(\phi) = h(g^{\frac{1}{4}}\phi)$, so lassen sich die bei der

⁵Man substituiert die Kovarianz γ durch γt und entwickelt in t .

Entwicklung entstehenden Ableitungen von H mit Hilfe der gewichteten Supremumsnorm $\|h\| = \sup_{|\operatorname{Im}(x)| < C} |h(x)e^{cx^2}|$ abschätzen. Man erhält für den n -ten RG-Schritt Gleichungen der Form

$$\mu_{n+1} = L^2 \left\{ \mu_n + \frac{1}{2} \gamma g_n - \gamma \mu_n^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 g_n \mu_n + \gamma^2 \mu_n^3 \right\} + O(g_n^{\frac{3}{2}}) \quad (4.11)$$

$$g_{n+1} = g_n - 4\gamma \mu_n g_n - \frac{7}{2} \gamma^2 g_n^2 + 10\gamma^2 g_n \mu_n^2 + O(g_n^{\frac{3}{2}}). \quad (4.12)$$

Die abgeschätzten Ableitungen der Korrekturterme in H beinhalten Potenzen von $g_n^{\frac{1}{2}}$ und fließen in den Ausdruck $O(g_n^{\frac{3}{2}})$ ein. Das grundsätzliche Verhalten der effektiven Kopplungen unter \mathcal{DT} ($g \rightarrow g$ und $\mu \rightarrow L^2 \mu$) findet sich auch in der vollen Transformation. Das intuitive Gefühl, die Massenkopplung würde bei jeder Wahl von (μ_0, g_0) bei unendlicher Iteration ob des L^2 Faktors explodieren, wird z.B. in [GK84], [Por90] oder [Alb91] widerlegt:

Satz 4.1.1

$$\forall |g| \ll 1 \quad \exists \mu_c(g) = g^{\frac{1}{2}} O(g^{\frac{1}{2}}) \quad : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^n(e^{-V_{\mu_c, g}}) = Z_{UV} \quad (4.13)$$

Für die renormierte Massen- und ϕ^4 -Kopplung bedeutet dies eine gleichmäßige Konvergenz gegen Null.⁶ Die kritische Massenkopplung $\mu_c(g)$ muß aus der Menge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\alpha_n, \beta_n] = [\lim \alpha_n, \lim \beta_n]$ stammen⁷. Da man die genaue Struktur der Intervallgrenzen nicht kennt, erhalten wir nur einen Beweis für die Existenz einer kritischen Massenkopplung, aber nicht ihre explizite Abhängigkeit von g .

Für den effektiven, irrelevanten Term findet man in [Alb91]

$$h_{n+1}(\phi) = \frac{1}{L^2} \mathcal{L}_0(h_n) + g_n^{\frac{1}{2}} F + O(\|h_n\|^2, g_n^{\frac{1}{2}} \|h_n\|, g_n^{-\frac{1}{2}} \mu_n \|h_n\|, g_n, \mu_n). \quad (4.14)$$

Arbeitet man mit der kritischen Masse, d.h. $\mu_0 = \mu_c(g_0)$, so gilt $O(g_n^{-\frac{1}{2}} \mu_n \|h_n\|) = O(g_n^{\frac{1}{2}} \|h_n\|)$. Benutzen wir nun noch, daß die Normen des linearen Operators \mathcal{L}_0 und der Funktion F beschränkt sind,⁸ und wir L beliebig groß wählen dürfen, folgen $\|h_{n+1}\| < \|h_n\|$ und die Konvergenz des Restes h_n gegen Null.

⁶Die gleichmäßige Konvergenz ist für μ_c als Funktion von g zu verstehen. Er leitet sich aus den Eigenschaften $|g_n| < \frac{C}{n+1}$ und $|\mu_n + \frac{1}{2} \gamma \frac{L^2}{L^2-1} g_n| < D g_n^{\frac{3}{2}}$ ab.

⁷Es gilt die Relation $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subsetneq [\alpha_n, \beta_n]$.

⁸Die Funktion F heißt bei Albuquerque h_0 .

Mit Hilfe der Anfangstheorien (4.9) unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 und additiver Wirkungen H_0 gelingt es uns, einen diskreten RG-fluß zu konstruieren, der in den trivialen Fixpunkt läuft. Es bleibt die offene Frage, ob diese Punktfolgen den Eigenschaften einer ϕ^4 -Trajektorie genügen.

4.2 Konstruktionsversuch

Dieses Kapitel trägt seinen Namen nicht zu unrecht, da die vorgestellte Konstruktion nicht rigoros ist. Ursache ist die Verwendung eines nicht vollständigen Vektorraumes von Korrekturen. Komplettiert man diesen, so gilt es, weitere Abschätzungen zu beweisen, was uns bis dato nicht gelungen ist. Wir wollen das Verfahren dennoch vorstellen, um an entsprechenden Stellen auf Probleme, offene Fragen und Ideen einzugehen.

Wir verwenden im folgenden die RGT (4.1) mit einer δ -Funktion der Form

$$\delta(g) = g + O(g^2). \quad (4.15)$$

Für unsere Konstruktion reicht auch⁹ $\delta(g) = g + o(g)$, allerdings erfüllt das Inverse der kubischen β -Funktion (4.3) die Gleichung (4.15), so daß wir mit dieser Definition arbeiten werden. Desweiteren sei δ stetig differenzierbar. Auch diese Eigenschaft weist $\delta = \beta^{-1}$ nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ($\beta'(g) \neq 0$) auf. Die Reparametrisierung δ läßt sich nach oben und unten wie folgt abschätzen:

$$\forall C > 1 \exists g_0 \in \mathbb{R} : g \leq \delta(g) \leq Cg \quad (4.16)$$

Bei der Suche nach einer Funktion $Z(\phi, g)$, die einen Fixpunkt der erweiterten RGT $\mathcal{R} \times \delta^*$ darstellt, teilen wir die Wirkungen analog dem Verfahren in $2 < D < 4$ Dimensionen in einen approximativen Fixpunkt Z_1 und einen Rest H . Es sei im folgenden

$$Z_1(\phi, g) = e^{-V_1(\phi, g)} := e^{-g:\phi^4:1} = e^{-g(\phi^4 - 6\phi^2 + 3)}. \quad (4.17)$$

Es handelt sich hierbei um den linearen Anteil des perturbativen Fixpunkt-potentials. Man beachte, daß Z_1 kein Fixpunkt der erweiterten linearisierten Transformation $\mathcal{DT}(Z_1)(\phi, \delta(g))$ ist. Die Wahl von (4.17) stellt auf dem ersten Blick einen Rückschritt dar, da dem Verfahren aus Kapitel 2 die Tendenz innewohnt, für $D \rightarrow 4$ immer bessere störungstheoretische Approximanten

⁹ $f(g) \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{g \rightarrow 0} \frac{f(g)}{g} = 0$

zu benutzen. Die lineare Näherung reichte dort nur für Probleme in $D < \frac{4}{3}$ [Wie97a].¹⁰ Dennoch kann diese Approximante als Testobjekt dienen, um uns fehlende Restriktionen aufzuzeigen.

Wir schreiben die Invarianzgleichung nach H um und erhalten

$$\mathcal{F}(H)(\phi, g) := \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1 + H)(\phi, g) - Z_1(\phi, g) . \quad (4.18)$$

Als nächstes konstruieren wir einen Banachraum, auf dem \mathcal{F} selbstabbildend ist. Dazu benötigen wir die Konstanten

$$\lambda, g_0 \in \mathbb{R}^+ . \quad (4.19)$$

In Zukunft sei g_0 immer so gewählt, daß alle Abschätzungen gültig sind. Wir kennzeichnen das Auftreten solcher Re-Definitionen durch die Angabe eines g_0 über dem Relationszeichen, z.B. $A \stackrel{g_0}{\leq} B$. Sofern keine Mehrdeutigkeiten auftreten nennen wir alle Konstanten, die in Abschätzungen auftauchen, C , so daß z.B. eine Ungleichung der Form $x < 3C < C$ zulässig ist.

Der Banachraum der Korrekturen \mathbb{B} bestehe aus reelwertigen Funktionen $H(\phi, g)$ über \mathcal{P}_{g_0} , die folgende Eigenschaften besitzen:

$$H(\cdot, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \quad (4.20)$$

$$H(\phi, \cdot) \in \mathcal{C}^1([0, g_0]) \quad (4.21)$$

$$H(\cdot, g) \in \mathbb{Z}_2(\mathbb{R}) \quad (4.22)$$

$$H(\mathbb{R}, g) \subseteq \mathbb{R} \quad (4.23)$$

$$H(\phi, 0) = 0 \quad (4.24)$$

$$\partial_g H(\phi, 0) = 0 \quad (4.25)$$

$$H(0, g) = 0 \quad (4.26)$$

Hierbei gewährleisten (4.24) und (4.25), daß $Z_1 + H$ die Anfangsbedingungen einer ϕ^4 -Trajektorie 2.2.1 erfüllt. (4.26) sorgt dafür, daß $Z_1 + H_1$ normiert ist. Fordern wir nun noch, daß

$$\max_{n=0,1} \sup_{g \in [0, g_0]} \sup_{\phi \in G^{(k)}(g)} |\partial_g^n H(\phi, g) e^{\lambda g \phi^2}| < \infty , \quad (4.27)$$

so wird \mathcal{B} zu einem \mathbb{R} -Vektorraum und durch die Norm

$$\|H\| := \max_{n=0,1} \sup_{g \in [0, g_0]} \sup_{\phi \in \mathbb{R}} |\partial_g^n H(\phi, g) e^{\lambda g \phi^2}| \quad (4.28)$$

¹⁰Es gilt $\sigma_\Delta = \frac{1}{2}$.

komplettiert.

Für den weiteren Verlauf der Konstruktion sind die Selbstabbildungs- und Kontraktionseigenschaften von \mathcal{F} essentiell. Es gelingt (uns) jedoch nicht, diese für Objekte $\partial_g F(H)$ zu zeigen. Das vorgestellte Verfahren ist somit nicht vollständig oder unmöglich. Wir sind nur in der Lage, die ϕ^4 -Trajektorie bezüglich der „Norm“

$$\|H\| := \sup_{g \in [0, g_0]} \sup_{\phi \in \mathbb{R}} |H(\phi, g) e^{\lambda g \phi^2}|, \quad (4.29)$$

zu berechnen. Diese vervollständigt jedoch nicht den Raum \mathbb{B} , da dieser bezüglich der Kopplung g aus \mathcal{C}^1 -Funktionen besteht. Die partielle Differenzierbarkeit der Korrekturterme ist jedoch eine notwendige Voraussetzung, denn

- die ϕ^4 -Trajektorie ist per Definition in $g = 0$ differenzierbar. Es folgt Differenzierbarkeit in einer Umgebung von Null, die sich OBdA über $[0, g_0]$ erstreckt (Definition 2.2.1),
- die Konstruktion stützt sich auf eine Interpolation, die Differenzierbarkeit in g voraussetzt (4.35).

Desweiteren gewährleistet die Norm (4.29) natürlich nicht, daß die Ableitungen $\partial_g H$ beschränkt sind. Dies sind die wunden Punkte der Konstruktion.

Man prüft schnell nach, daß eine Funktion $\mathcal{F}(H)$ ebenfalls die Eigenschaften (4.20) bis (4.25) besitzt. So gilt z.B.

$$\begin{aligned} & \partial_g \mathcal{F}(H)(\phi, 0) & (4.30) \\ = & -\alpha \langle Z_1(\cdot, 0) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-1} \int d\mu_\gamma(\zeta) \delta'(0) : (\beta \phi + \zeta)^4 : + : \phi^4 : = 0 . \end{aligned}$$

Die Eigenschaft $\mathcal{F}(H)(0, g)$ folgt nur bei Verwendung der normierten RGT. Obwohl wir diese Transformation im Konstruktionsbeweis nicht benutzen, wollen wir OBdA gemäß (4.26) normierte H voraussetzen. Statt der Bedingung (4.27) zeigen wir die

4.3 Existenz eines invarianten Balls

Eine wichtige Voraussetzung zur Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach ist die Selbstabbildungseigenschaft. Diese wollen wir nun bezüglich (4.29)

zeigen. Definieren wir für $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ die abgeschlossene, konvexe Menge

$$B^{(\mu)} = \left\{ H \in B \mid \|H\| \leq \mu \right\}, \quad (4.31)$$

so müssen wir die Existenz eines $\mu > 0$ zeigen, so daß

$$\mathcal{F} : B^{(\mu)} \rightarrow B^{(\mu)} \quad (4.32)$$

gilt. Die Wahl der RGT mit äußerem α , das OBdA eine natürliche Zahl sei, erlaubt folgende Zerlegung

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\phi, g) \quad (4.33) \\ &= \underbrace{\langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}^\alpha - Z_1(\phi, g)}_{=: \Delta(\phi, g)} + \sum_{k=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}^{\alpha-k} \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}^k. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Sätze 4.5.1, 4.5.2 und 4.5.3 gelingt es uns, fast alle Summanden aus (4.33) abzuschätzen. Es bleibt der Term

$$\alpha \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}^{\alpha-1} \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}. \quad (4.34)$$

Dieser Ausdruck ist auch bei den Arbeiten von Porcht und Albuquerque problembehaftet. Da für $H \in \mathcal{B}$ die Eigenschaft $H(\phi, 0) = 0$ gilt, ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi} &= \int_0^1 ds \partial_s \langle H(\cdot, s\delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi} \\ &= \delta(g) \sup_{s \in [0,1]} \int d\mu_\gamma(\zeta) |\partial_g H(\beta\phi + \zeta, s\delta(g))| \\ &\stackrel{g_0}{\leq} Cg \|H\|. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Es folgt

$$\left| \mathcal{F}(H)(\phi, g) e^{\lambda g \phi^2} \right| \leq C_\Delta g + \alpha C_1 g \|H\| + \sum_{k=2}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} C_k \|H\|^k \stackrel{g_0}{\leq} \mu. \quad (4.36)$$

Es ist natürlich möglich, alle Terme mit Hilfe der Interpolation (4.35) abzuschätzen. Wir wollen dieses Hilfsmittel, das in der Norm (4.29) ungültig ist, jedoch nur dort benutzen, wo keine anderen Abschätzungen greifen.

Als zweiten Schritt gilt es die Ungleichung

$$\|\partial_g \mathcal{F}(H)\| \leq \mu \quad (4.37)$$

zu zeigen. Mit dieser Abschätzung haben wir uns bisher nicht sehr intensiv beschäftigt. Die Wahrscheinlichkeit, aus der differenzierten Abbildung \mathcal{F} kleine Faktoren in g oder $\|H\|$ zu extrahieren, wirkt auf den ersten Blick gering. Unsere Skepsis begründet sich in folgendem Argument:

Ableiten nach g generiert einen Term ($k=1$)

$$\begin{aligned} & \alpha \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-1} \partial_g \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi} \\ &= \alpha \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-1} \delta'(g) \langle \partial_g H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Da $\delta'(g) = O(1)$, müssen wir $\langle \partial_g H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}$ analog (4.35) interpolieren. Das so entstehende $\partial_g^2 H$ findet sich jedoch nicht mehr in \mathcal{B} und kann folglich nicht über die Norm abgeschätzt werden.

Eine Lösungsidee stellt die Einschränkung des Banachraumes auf \mathcal{C}^∞ -Funktionen in g dar. Auf diese Weise würde $|\partial_g^n H| \leq \|H\|$ für alle n gelten. Dann gilt es jedoch zu beweisen, daß alle Terme $|\partial_g^n \mathcal{F}(H)(\phi, g)| e^{-\lambda g \phi^2}$ durch μ beschränkt sind.

4.3.1 Ein anderer Weg

In [Por90] und [Alb91] tritt die Abschätzung des Problemterms (4.34) ebenfalls auf. Dort haben die Autoren den Vorteil, daß ihre Korrekturterme von der Ordnung $O(\phi^6)$ sind. Sie erreichen dies, weil der abgespaltene Summand (4.9) durch die renormierten Massen- und ϕ^4 -Kopplungen (4.8) generiert wird. Dieses Vorgehen kommt für uns jedoch nicht in Frage, da wir die unter $\mathcal{R} \times \delta^*$ invarianten, in g parametrisierten Kopplungen des ϕ^2 - und ϕ^4 -Vertex nicht kennen. Das *construction mapping* soll uns diese im Limes ja gerade erzeugen.

Dehnt man das Integrationsgebiet auf die g -abhängigen komplexen Streifen

$$G^{(k)}(g) = \left\{ \phi \in \mathbb{C} \mid g^{\frac{1}{4}} |\operatorname{Im} \phi| < k \right\} \quad (4.39)$$

aus und betrachtet den Raum der dort holomorphen Funktion, so wird dieser, sofern man sich auf stetige Funktionen in g beschränkt, durch die Supremumsnorm (4.29) komplettiert. Die Einschränkung auf $G^{(k)}(g)$ ermöglicht die Abschätzung des Betrages von $e^{-g\phi^2}$ gegen eine Konstante.¹¹ Den Pro-

¹¹Es liegt auf der Hand, im Komplexen mit der Norm $\|H\| = \sup_{\mathcal{P}_{g_0}} |H(\phi, g) e^{\lambda g^{\frac{1}{2}} \phi^2}|$ zu arbeiten. Mit ihr ist es möglich, Polynome in $g^{\frac{1}{4}} \phi$ zu dominieren. Bei unseren Rechnungen machte es jedoch keinen Unterschied, welche Norm wir benutzten.

blemterm spaltet man nun entsprechend

$$\begin{aligned}
& \alpha \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi}^{\alpha-1} \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta\phi} \\
&= \alpha \int_0^1 ds \partial_s \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta\phi}^{\alpha-1} \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta\phi} \\
& \quad + Z_1(\beta\phi, \delta(g))^{\alpha-1} H(\beta\phi, \delta(g))
\end{aligned} \tag{4.40}$$

auf. Zur Behandlung des zweiten Summanden taylornt man $H(\beta\phi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}(\beta\phi)^2}$ in der reskalierten Feldvariablen $\beta\phi$ an.¹²

$$\begin{aligned}
H(\beta\phi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}(\beta\phi)^2} &= \sum_{n=1}^2 \frac{1}{(2n)!} \partial_\chi^{2n} H(\chi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}\chi^2} \Big|_{\chi=0} (\beta\phi)^{2n} \\
& \quad + \frac{1}{6!} \partial_\chi^6 H(\chi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}\chi^2} \Big|_{\substack{\chi=\beta\phi s \\ s \in (0,1)}} (\beta\phi)^{2n}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Die zusätzliche e -Funktion wird durch Multiplikation mit $e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\beta\phi)^2}$ wieder entfernt. Dieser Term dominiert dann auch die bei der Entwicklung entstehenden Potenzen in $\beta\phi$.

Die Elemente aus \mathcal{B} besitzen im Gegensatz zu den Korrekturen in [Por90] und [Alb91] sehr wohl quadratische und quartische Anteile. Sie bereiten jedoch keine Probleme, denn es gilt:

$$\partial_\chi^2 H(\chi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}\chi^2} \Big|_{\chi=0} = \partial_\chi^2 H(\chi, \delta(g)) \Big|_{\chi=0} \tag{4.42}$$

$$\partial_\chi^4 H(\chi, \delta(g))e^{\frac{\varepsilon}{2}\chi^2} \Big|_{\chi=0} = \partial_\chi^4 H(\chi, \delta(g)) \Big|_{\chi=0} - 6c \partial_\chi^2 H(\chi, \delta(g)) \Big|_{\chi=0} \tag{4.43}$$

Mittels der Cauchyschen Ungleichung und Benutzung eines Radius von $R = \frac{k}{2}g^{-\frac{1}{4}}$ ($\Rightarrow U_R(0) \subsetneq G^{(k)}(g)$) lassen sich (4.42) und (4.43) gegen $Cg^{\frac{1}{2}}\|H\|$ abschätzen. Da man auch die Ungleichung

$$Z_1(\beta\phi, \delta(g))^{\alpha-1} \stackrel{g_0}{\leq} C|e^{-\lambda g \phi^2}| \tag{4.44}$$

für komplexes $\phi \in G^{(k)}(g)$ herleiten kann (Satz 4.5.4), verläuft die Abschätzung des Betrages des Taylor-Polynoms durch $Cg^{\frac{1}{2}}\|H\||e^{-\lambda g \phi^2}|$ problemlos. Der vorangestellte Faktor α wird von der Wurzel in g dominiert.

Einziger Knackpunkt bei dieser Beweisführung ist das Restglied. Die Idee, die bei den Beweisen von Pordt und Albuquerque Anwendung findet, ist die Abschätzung durch L , da man durch das Monom $(\beta\phi)^6$ einen Faktor

¹²Man beachte (4.22) und (4.26).

$\alpha\beta^6 = L^{-2}$ extrahieren kann. Mit diesem kann man für große L die benötigten kleinen Vorfaktoren erzeugen. Im Restglied taucht nun allerdings die künstlich integrierte Exponentialfunktion explizit auf. Ihre Kopplungsfreiheit im Exponenten führt bei einer Cauchy-Abschätzung zu Problemen: Als Radius wählen wir $R = (1 - \beta)k g^{-\frac{1}{4}}$. Auf diese Weise erfüllen wir $U_R(\beta\phi_s) \subsetneq G^{(k)}(g)$. Damit folgt jedoch

$$\sup_{\psi \in \partial U_R(\beta\phi_s)} \left| e^{-\lambda\delta(g)\psi^2 + \frac{\xi}{2}\psi^2} \right| \xrightarrow{g \rightarrow 0} \infty \quad (4.45)$$

da $\operatorname{Re}^2(\phi)$ für $g \rightarrow 0$ divergiert.

Eine weitere Möglichkeit ist, die Taylor-Potenzen $\beta\phi$ nicht durch einen künstlichen Faktor zu dominieren, sondern mit Hilfe von Z_1 . Da wir die Abschätzung (4.44) auch mit \sqrt{g} statt g und 2λ statt λ führen können, siehe 4.5.4, gelingt eine Abschätzung der Form

$$|Z_1(\beta\phi, \delta(g))^{\alpha-1}| \stackrel{g_0}{\leq} C \left| e^{-\lambda g^{\frac{1}{2}}\phi^2} \right| \left| e^{-\lambda g\phi^2} \right|. \quad (4.46)$$

Wir vollführen also eine Taylor-Entwicklung des nackten $H(\beta\phi, \delta(g))$ und schätzen die Ableitungen mit der Cauchy-Formel ab. Mit diesem Verfahren gelingt es, das Restglied zu kontrollieren: Wir adjungieren den Cauchy-Faktor $g^{\frac{3}{2}}$ an ϕ^6 und dominieren durch $|e^{-\lambda g^{\frac{1}{2}}\phi^2}|$. Nun benötigen wir für die ϕ -Monome 2. und 4. Grades ebenfalls die Cauchy-Faktoren $g^{\frac{1}{2}}$ und g . Die g -Potenzen können somit nicht mehr die Vorfaktoren „klein machen“. Was bleibt, ist z.B. der Massenkoeffizient $8C\alpha\beta^2 k^{-2} = 8CL^2 k^{-2}$.

Nun mag man glauben, daß nur eine genügend große Wahl von k genügt, um die Vorfaktoren der $\|H\| |e^{-\lambda g\phi^2}|$ -Terme zu verringern. Tut man dies, muß man jedoch genaue Kenntnis über die L -Abhängigkeit der Koeffizienten besitzen. All unsere Berechnungen haben bisher ergeben, daß die Vorfaktoren in einem solchen Maße von L abhängen, daß eine Dominierung durch geeignete Wahl von k nicht möglich ist.

Das heißt jedoch nicht, daß es unmöglich ist.

4.4 Die Kontraktionseigenschaft

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß eine Zahl $0 < q < 1$ existiert, so daß für alle $H_1, H_2 \in \mathbb{B}^{(\mu)}$ die Beziehung

$$\|\mathcal{F}(H_1) - \mathcal{F}(H_2)\| \leq q \|H_1 - H_2\| \quad (4.47)$$

erfüllt ist. Gemeinsam mit den Eigenschaften, daß $\mathcal{B}^{(\mu)}$ als abgeschlossene Untermenge des Banachraumes \mathcal{B} vollständig und \mathcal{F} nach (4.3) selbstabbildend sind, gewinnen wir wiederum aus dem *contraction mapping theorem* [Sma80] die Erkenntnis, daß \mathcal{F} einen Fixpunkt in $\mathcal{B}^{(\mu)}$ besitzt. Man konstruiert diesen, indem man einen beliebigen Startpunkt aus $\mathcal{B}^{(\mu)}$ (z.B. 0) unendlich oft iteriert. Die ϕ^4 -Trajektorie bestimmt sich zu

$$Z_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(0). \quad (4.48)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(H_1) - \mathcal{F}(H_2)| \\ & \leq \sum_{n=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} \left| \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-n} \left\{ \langle H_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^n - \langle H_2(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^n \right\} \right| \\ & = \sum_{n=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-n} \left| \langle (H_1 - H_2)(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi} \right| \\ & \quad \times \left| \sum_{k=0}^{n-1} \langle H_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^k \langle H_2(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{n-1-k} \right|. \end{aligned}$$

Für diese Rechnung nutzt man die Relation $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$ und die Linearität der Gaußschen Mittelwertbildung aus. Das weitere Vorgehen hängt vom Summenindex n ab. Für alle n gilt

$$\left| \langle (H_1 - H_2)(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi} \right| \leq \|H_1 - H_2\|. \quad (4.49)$$

Im Falle $n = \alpha$ müssen wir sogar gegen $\|H_1 - H_2\| e^{-\lambda g \phi}$ abschätzen, da die Ungleichung $\langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{\alpha-n} \leq C e^{-\lambda g \phi^2}$ nur für $n \neq \alpha$ gilt.

Für den Betrag der inneren Summe in (4.49) existiert die obere Schranke

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \langle H_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^k \langle H_2(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma, \beta \phi}^{n-1-k} \right| \leq n \mu^{n-1}, \quad (4.50)$$

die man durch entsprechende Wahl von μ für $n \neq 1$ beliebig klein machen kann.

Der Fall $n = 1$ bedarf einer Sonderbehandlung. Analog zu (4.35) arbeiten wir aus dem Ausdruck $\|H_1 - H_2\|$ einen g -Faktor heraus.

Die Abschätzung des Terms $|\partial_g \mathcal{F}(H)(\phi, g) e^{-\lambda g \phi^2}|$ steht noch aus. Wir rechnen jedoch mit ähnlichen Problemen wie in (4.3).

4.5 Abschätzungen

Die folgenden Abschätzungen sind zu einem großen Teil für reelle Felder hergeleitet. Sie bewahren ihre Gültigkeit jedoch auch auf dem komplexen Streifen (4.39). Fast alle auftauchenden Konstanten sind L -abhängig. Dies spielt jedoch keine Rolle, da L ein beliebiger, aber fester Parameter ist. Desweiteren sind die (vom Blockparameter abhängigen) Konstanten immer an Potenzen in g oder $\|H\|$ gekoppelt, so daß kleine g_0 oder μ die Koeffizienten dominieren.

Satz 4.5.1 (Die Güte der linearen Approximante)

$$\exists g_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0} \quad : \quad |\Delta(\phi, g)| \leq C g^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda g \phi^2}$$

Beweis: Wir definieren

$$R_s(\phi, g) = \left\{ \int d\mu_{\gamma_s}(\zeta) e^{-\langle V_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma(1-s), \beta\phi + \zeta}} \right\}^\alpha =: r_s(\phi, g)^\alpha. \quad (4.51)$$

Diese Interpolation ist fast identisch mit (2.150). Sie beschneidet δ jedoch nicht in g und legt die RGT mit externem α zugrunde. Ferner leiten wir in diesem Abschnitt die Güte-Ungleichung über die Cauchy-Formel her. Es wäre aber genauso gut möglich, den Beweis mit kleinen Änderungen analog Kapitel 2.6.7 zu führen.

Aus den Eigenschaften $R_0(\phi, g) = Z_1(\phi, \delta(g))$ und $R_1 = \mathcal{R} \times \delta^*(Z_1)$ folgt die Beziehung

$$\Delta(\phi, g) = \int_0^1 ds \partial_s \{ R_s(\phi, g) + Z_1(\phi, s\delta(g) + (1-s)g) \}. \quad (4.52)$$

Mit Hilfe der Relationen $|\delta(g) - g| \stackrel{g_0}{\leq} C_1 g^2$, $|s\delta(g) + (1-s)g| \stackrel{g_0}{\geq} 4C_2 g$ und $:\phi^4 := \frac{1}{2}(\phi^2 - 6)^2 + \frac{1}{2}\phi^4 - 15 \geq \frac{\phi^4}{2} - 15$ erhält man

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 ds \partial_s Z_1(\phi, s\delta(g) + (1-s)g) \right| \\ & \leq C_1 g^2 |:\phi^4:| e^{-C_2 g \phi^4} e^{-C_2 g \phi^4 + 60C_2 g} \\ & \leq C_1 g \left\{ (g^{\frac{1}{4}} \phi)^4 + 6g^{\frac{1}{2}} (g^{\frac{1}{4}} \phi)^2 + 3g \right\} e^{-C_2 (g^{\frac{1}{4}} \phi)^4} e^{g(\frac{\lambda^2}{4C_2} + 60C_2)} e^{-g\lambda\phi^2} \\ & \stackrel{g_0}{\leq} C g e^{-g\lambda\phi^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Für die differenzierte Interpolierte gilt $|\alpha r_s^{\alpha-1} \partial_s r_s| \leq C |\partial_s r_s|$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\partial_s r_s(\phi, g)| &\stackrel{[\text{Wie97a}]}{=} 2\gamma \int d\mu_{\gamma s}(\zeta) \left\{ \partial_{\beta\phi} e^{-\frac{1}{2}\langle V_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma(1-s), \beta\phi+\zeta}} \right\}^2 \\ &= 2\gamma \int d\mu_{\gamma s}(\zeta) \left| \partial_{\psi} e^{-\frac{1}{2}\delta(g):\psi^4:_{1-\gamma(1-s)}} \right|_{\psi=\beta\phi+\zeta}^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Die Funktion $\exp\{-\frac{1}{2}\delta(g):\psi^4:_{1-\gamma(1-s)}\}$ ist für $\psi \in \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Schätzen wir den Betrag der ψ -Ableitung über die Cauchysche Ungleichung mit einem Kreisradius $R = \delta(g)^{-\frac{1}{4}}$ ab¹³ und benutzen [Por90]

$$\forall \psi \in \mathbb{R} \quad \forall \chi \in \mathbb{C} \quad \forall s \in [0, 1] \quad \exists a, b \in \mathbb{R} : \text{Re} : (\phi + \chi)^4 :_{1-\gamma(1-s)} \geq \frac{\phi^2}{2} - a|\chi|^4 - b \quad (4.55)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} (4.54) &\leq 2\gamma \int d\mu_{\gamma s}(\zeta) \delta(g)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\delta(g)(\beta\phi+\zeta)^2 + a + b\delta(g)} \\ &\stackrel{g_0}{\leq} C g^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda g \phi^2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Die Gaußsche Integration der quadratischen Form führt man exakt aus (Satz 2.1.2) und schätzt dann ab.

□

Satz 4.5.2 (Potenzierte Gaußsche Erwartungswerte von Z_1)

$$\exists g_0, C \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0} : \langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta\phi}^n \leq C e^{-\lambda g \phi^2}$$

Beweis: Man benutzt $\delta(g) \stackrel{g_0}{\geq} g$ (4.16) und¹⁴ $\psi^4 :_1 \geq \psi^4 - 6\psi^2 \geq r\psi^2 - \frac{1}{4}(r+6)^2$ für beliebiges, reelles r . Es folgt mit Re-Definition von C nach Gaußscher Integration

$$\langle Z_1(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta\phi} \leq C \int d\mu_{\gamma s}(\zeta) e^{-gr(\beta\phi+\zeta)^2} \leq C e^{-g \frac{2r\beta^2}{1+2\gamma sgr} \phi^2}. \quad (4.57)$$

Wählt man $2r\beta^2 > \lambda$, so existiert ein s -unabhängiges g_0 , und die Behauptung des Satzes für $n = 1$ folgt. Für $n > 1$ gilt sie trivialerweise.

¹³Da der Δ -Term für $g = 0$ verschwindet, sei OBdA $g \neq 0$. Desweiteren liegt jeder abgeschlossene Kreis um ψ im Holomorphiegebiet \mathbb{C} , und die Cauchysche Ungleichung $|f^{(n)}(\psi)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|\chi|=R} |f(\psi + \chi)|$ ist anwendbar.

¹⁴ $\psi^4 = (\psi^2 - \frac{r+6}{2})^2 + (r+6)\psi^2 - \frac{1}{4}(r+6)^2$

Satz 4.5.3 (Potenzierter Gaußscher Erwartungswert von H)

$$\forall n > \frac{1}{2}L^2 \exists g_0 \in \mathbb{R}^+ \forall s \in [0, 1] \quad \forall (\phi, g) \in \mathcal{P}_{g_0} : \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta \phi}^n \leq \|H\|^n e^{-\lambda g \phi^2}$$

Beweis: Mit $\delta(g) \stackrel{g_0}{\geq} g$ (4.16) erhält man die Abschätzung

$$\left| \langle H(\cdot, \delta(g)) \rangle_{\gamma s, \beta \phi} \right|^n \leq \|H\|^n e^{-\lambda g \frac{2n\beta^2}{1+2\gamma s \lambda g} \phi^2}. \quad (4.58)$$

Für kleine g_0 nähert sich der Nenner im Exponenten beliebig nahe der Eins. g_0 ist nicht vom Interpolationsparameter s abhängig, da $1 + 2\gamma s \lambda g$ in diesem monoton steigend ist und so g_0 für $s = 1$ bestimmt wird.

$$\frac{2n\beta^2}{1 + 2\gamma s \lambda g} \stackrel{g_0}{\geq} 1 \quad (4.59)$$

erfordert die notwendige Bedingung $2n > L^2$. Wir merken an, daß diese Eigenschaft für $n = \alpha$ gewiß erfüllt ist.

□

Satz 4.5.4 (Abschätzung von Z_1 mit komplexem Feld)

$$\exists C, g_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall g \in [0, g_0] \quad \forall \phi \in G^{(k)}(g) : \left| Z_1(\beta \phi, \delta(g))^{\alpha-1} \right| \stackrel{g_0}{\leq} C \left| e^{-\lambda g \phi^2} \right|$$

Beweis: Für alle $\phi \in G^{(k)}(g \neq 0)$ und $\zeta, r \in \mathbb{R}$ gilt:¹⁵

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left((\beta \phi + \zeta)^4 :_1 \right) &\geq \{2r - 6\beta^2 \operatorname{Im}^2(\phi) - 6\} (\beta \operatorname{Re}(\phi) + \zeta)^2 - r^2 \\ &\geq \left\{ 2r - 6\beta^2 k^2 g^{-\frac{1}{2}} - 6 \right\} (\beta \operatorname{Re}(\phi) + \zeta)^2 - r^2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Vergessen wir nicht $\delta(g) \stackrel{g_0}{\geq} g$ und $g^{\frac{1}{2}} \stackrel{g_0=1}{\geq} g$, so führt die Wahl von $r = Cg^{-\frac{1}{2}}$ mit $(2C - 6\beta^2 k^2 - 6g^{\frac{1}{2}}) > \lambda(\alpha - 1)^{-1}$ zum Ziel.

□

¹⁵Man benutzt hierbei $\operatorname{Re}^4(z) \geq 2r \operatorname{Re}^2(z) - r^2$ für alle komplexen z und reellen r .

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Konstruktion der ϕ^4 -Trajektorie in zwei verschiedenen Modellen (HRG/GRG). Dabei hätten die Behandlungsmethoden unterschiedlicher nicht sein können: Der rigorosen Beweisführung in der hierarchischen Approximation stand die Störungstheorie auf dem Gitter gegenüber - eine Konsequenz der wesentlich höheren Komplexität des „großen Bruders“.

Betrachtet man den Berechnungsaufwand in der HRG

- Konstruktion eines geeigneten Banachraumes
- Beweis von Invarianz- und Kontraktionseigenschaften durch Norm-Abschätzungen
- Suche nach geeigneten approximierten Fixpunkt-Trajektorien
- Berechnung der Approximanten durch Störungstheorie,

so liegt es auf der Hand, daß die in der GRG oder der kontinuierlichen RG zu lösenden Probleme um ein Vielfaches komplexer sind. Zudem ist die Mathematik einer reellen oder komplexen Veränderlichen besser verstanden und erforscht als das Gebiet des Pfadintegrals [GJ81].¹⁶ Dies macht die Konstruktion in der hierarchischen Approximation jedoch nicht trivial.

Das wesentliche Defizit der Berechnungen im 2. Kapitel besteht in der Beschränkung der Kopplung g durch g_0 . Obwohl dieser Tatbestand gegenüber der Störungstheorie, deren perturbative Reihe nur für $g = 0$ konvergiert, einen großen Vorteil ausmacht, sind wir von dem eigentlichen Ziel, dem Ausführen des Limes $g \rightarrow \infty$, noch weit entfernt. Es gilt also das Verfahren in der Hinsicht zu verbessern, daß alle g -abhängigen Abschätzungen unabhängig von einer Maximalkopplung g_0 werden. C. WIECZERKOWSKI hat

¹⁶Dieses Zitat soll die Verdienste der Autoren J. GLIMM und A. JAFFE nicht schmälern, sondern betonen!

sich dieses Problems angenommen und präsentiert in der Überarbeitung von [Wie97a] ein allgemeineres Lösungsprinzip.

Eine sinnvolle Erweiterung des Verfahrens ist sicherlich der Beweis, daß auch Baumgraphenpotentiale approximierte Fixpunkte generieren. Da sie die Baumschranke trivialerweise erfüllen, muß man nur noch die Güte-Abschätzung zeigen. Der Vorteil von Baumgraphen liegt auf der Hand: sie sind mit der Koeffizientenformel (2.124) in jeder Ordnung explizit berechenbar. Desweiteren sind die Kettenbrüche, die bei der Berechnung einer Obergrenze für die Baumgraphenschranke entstehen, einfacherer Natur.

Eine weitere interessante Aufgabe stellt die Bestimmung des Grenzwertes der effektiven ϕ^4 -Untergrenze $\tilde{\lambda}_4^\infty$ dar.

Das weitere Vorgehen bei der Behandlung des Problems in $D = 4$ Dimensionen ist klar: es gilt die Konstruktion zu komplettieren. Das Manko unseres Verfahrens ist, daß der approximierte Fixpunkt nicht „gut genug“ ist. Die Korrekturterme enthalten quadratische Felder und ϕ^4 -Anteile. Da wir in vier Dimensionen nicht wie in $D < 4$ mittels eines $\delta < 1$ große Terme dominieren können, müssen wir die RGT-internen Parameter α und β benutzen. Die linearisierte RGT zeigt uns (Eigenwerte), daß dieses Vorhaben nur für Feldpotenzen der Ordnung sechs gelingt. Aus diesem Grund sehen wir die besten Chancen in einer Aufteilung des Potentialraumes: Ein zweidimensionaler Raum für Massen- und ϕ^4 -Kopplung und ein „Restraum“- in der Hoffnung, daß die Behandlung des endlich dimensional, nicht trivialen Problems (eine relevante und eine marginale Richtung) lösbar ist.

Auf dem Gitter gelang die perturbative Behandlung mittels der T -Funktion, die es uns ermöglichte, die Ideen der Kontinuumslösung [Wie97d, Wie97b] zu adaptieren. Ein großer Nachteil ist die fehlende Berechnung des reduzierten Γ -Kernes, den man für eine allgemeine Form der Beweise benötigt. Aus diesem Grund ist auch die Berechnung der zweiten Ordnung noch nicht beendet.

Allerdings stellt sich die Behandlung der Kontinuumstheorie in drei Dimensionen auch nicht so einfach dar wie in $D = 4$. So ist es uns z.B. nicht gelungen, die Faltungen, die sich bei der Berechnung der Impulskontinuumskerne in zweiter Ordnung ergeben, vgl. z.B. (3.60), explizit zu lösen. Numerisch kann man jedoch zeigen, daß der Impulskern $\tilde{K}_{2,2}^{cont}(0)$ nicht verschwindet und eine Doppelpentwicklung in g und $\log g$ notwendig ist.

Anhang A

Notation

\mathbb{N}_k	$= \{k, k + 1, \dots\}$
\mathbb{Z}_k	$= \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \dots, \overline{k-1}\}, \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$
M_\star	Die Gruppe M reduziert um das neutrale Element. Bei einem Körper bezieht sich dies auf die Addition.
$[(x_1, \dots, x_n)]$	$= ([x_1], \dots, [x_n])$
$\mathcal{C}^n(U)$	Menge der auf ¹ U n -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathbb{Z}_2(U)$	Menge der Abbildungen $Z : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Z(\phi) = Z(-\phi)$ für alle $\phi \in U$
Kovarianz	Reeller ² , symmetrischer, positiv definiten Operator ³
$S_\epsilon(U)$	$= U \times i(-\epsilon, \epsilon)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}$
$\mathcal{O}(U)$	Die Menge der auf dem Bereich ⁴ $U \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen
$l_p, \ \cdot\ _p$	$l_p = \left\{ (a_n) \mid \left(\sum_n a_n ^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$ ist bezüglich der Norm $\ (a_n)\ _p = \left(\sum_n a_n ^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ein Banachraum.
$L(\mathcal{H}(a))$	$= \{f : \mathcal{H}(a) \rightarrow \mathcal{H}(a) \mid f \text{ linear}\}$

¹OBdA sei U offen. Ansonsten definieren wir $\mathcal{C}^n(U) = \bigcap_{U \subset \tilde{U} \text{ offen}} \mathcal{C}^n(\tilde{U})$.

² O reell $\Leftrightarrow O(x, y) \in \mathbb{R}$ für alle x, y

³auch positiver Operator oder Operator > 0

⁴offene, nichtleere Teilmenge

Anhang B

Formelsammlung

Wir geben eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse über die Normalordnung und das Gaußsche Maß. Weitere Informationen finden sich z.B. in [GJ81, Geh97, GS96, Rol96].

B.1 Normalordnung

Die Normalordnung begegnet uns in vielen Bereichen der Physik. Normalgeordnete Ausdrücke liefern häufig die kanonische Formulierung eines Problems. In der Feldtheorie steht der Normalordnungsbegriff im allgemeinen für das Entfernen der divergierenden Nullpunktsenergie aus den Zuständen. Im Kontext der RG erweisen sich die normalgeordneten Monome als Basis von Eigenvektoren bezüglich der linearisierten RGT am trivialen Fixpunkt.

Wir betrachten das erzeugende Funktional

$$: e^{(\phi, J)} :_{\nu} = e^{(\phi, J) - \frac{1}{2}(J, \nu J)} . \quad (\text{B.1})$$

ϕ und J seien Elemente eines Hilbertraumes - in unserem Fall Felder auf dem Kontinuum \mathbb{R}^D oder dem Gitter $\Lambda(a)$, ν eine beliebige Kovarianz. Ein bezüglich ν normalgeordnetes polynomiales Funktional wird über die Funktionalableitung [MM94] definiert.¹

$$: \phi(x_1)^{m_1} \dots \phi(x_n)^{m_n} :_{\nu} \quad (\text{B.2})$$

¹Auf dem Gitter muß die Funktionalableitung nicht definiert werden, da man die Feld-Spins $\phi(x)$, $x \in \Lambda(a)$ explizit mit den üblichen Differentiationsregeln für eindimensionale reellwertige Funktionen ableiten kann.

$$= \frac{\partial^{|m|}}{\partial J(x_{1,1}) \dots J(x_{1,m_1}) \dots J(x_{n,1}) \dots J(x_{n,m_n})} : e^{(\phi, J)} :_\nu \Big|_{\substack{J=0 \\ x_{i,j}=x_i}} \quad (\text{B.3})$$

Man sieht sofort, daß die Normalordnung linear ist und erhält z.B.

$$: \phi(x_1) :_\nu = \phi(x_1) \quad (\text{B.4})$$

$$: \phi(x_1)\phi(x_2) :_\nu = \phi(x_1)\phi(x_2) - v(x_1, x_2) . \quad (\text{B.5})$$

Die Normalordnung von Polynomen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man, wenn man auf dem Gitter $\Lambda(1)$ arbeitet, die ultralokale Kovarianz $\nu(x, y) = \nu\delta(x, y)$ benutzt und $\phi = \phi(x)$ setzt. Die normalgeordneten Monome sind reskalierte Hermite-Polynome:

$$P_{n,\nu}(\phi) =: \phi^n :_\nu = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\nu}}\right) \quad (\text{B.6})$$

Eine weitere Definition der normalgeordneten Polynome, die auch auf beliebige Funktionale ausgeweitet werden kann, ergibt sich aus der Anwendung des Differentialoperators $\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}, \nu\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\}$ auf das polynomiale Funktional. Die Äquivalenz zeigt man durch Berechnung von (B.1), indem man den Normalordnungsoperator auf $\exp(\phi, J)$ anwendet.

Mit $J(x) = J\delta(x - x_1)$ folgt die „Vereinfachung“

$$: \phi(x_1)^n :_\nu := \frac{\partial^n}{\partial J^n} \exp\left\{J\phi(x_1) - \frac{1}{2}\nu(x_1, x_1)J^2\right\} \Big|_{J=0} . \quad (\text{B.7})$$

Für n -Punkt-Funktionen setzen wir $J(x) = \sum_{m=1}^n J_m\delta(x - x_m)$ und betrachten entsprechende Mehrfachableitungen. Mit Hilfe dieses Tricks zeigt man z.B. leicht die Fusionsformel [Rol96]

$$\begin{aligned} & : \phi(x_1)^{n_1} :_\nu : \phi(x_2)^{n_2} :_\nu \\ &= \sum_{m=0}^{\min\{n_1, n_2\}} m! \binom{n_1}{m} \binom{n_2}{m} \nu(x_1, x_2)^m : \phi(x_1)^{n_1-m} \phi(x_2)^{n_2-m} :_\nu . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B.2 Gaußsche Maße

Für n -dimensionale Kovarianzen γ ist das Gaußsche Maß auf dem \mathbb{R}^n

$$d\mu_\gamma(\phi) := \frac{d^n\phi}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(\phi, \gamma^{-1}\phi)} \quad (\text{B.9})$$

wohldefiniert und auf eins normiert. (\cdot, \cdot) bezeichnet das euklidische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n . Äquivalent dazu ist die Definition über die charakteristische Funktion

$$\int d\mu_\gamma(\phi) e^{(\phi, J)} := e^{\frac{1}{2}(J, \gamma J)} \quad \forall J \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.10})$$

Sollte $n \rightarrow \infty$ oder der zugrunde liegende Raum gar von überabzählbarer Dimension sein, d.h. es existiert keine abzählbare Basis, wie z.B. beim Kontinuums-Pfadintegral, so wollen wir Gleichung B.10 als alleinige Definition betrachten. Dabei muß dann die Wohldefiniertheit des Exponenten gewährleistet sein. Im abzählbar unendlich dimensionalen Fall kann man z.B. das Maß auf den Folgenraum l_2 einschränken und fordern, daß die Kovarianz in der Operatornorm finit ist. Es folgt

$$\|(J, \gamma J)\|_2 \leq \|\gamma\| \|J\|_2^2 < \infty. \quad (\text{B.11})$$

Da aber schon die physikalische Kovarianz $\frac{1}{p^2}$ unbeschränkt ist, müssen wir zur Regularisierung häufig künstliche *cutoffs* einführen, die nach einer Berechnung wieder entfernt werden.

Zitieren wir den Satz von Bochner [Geh97], so folgt die Wohldefiniertheit der Definition (B.10) aus der Eigenschaft, daß $e^{-\frac{1}{2}(J, \gamma J)}$ als in J stetige, positiv (semi)definite Funktion Fourier-Transformierte eines endlichen, positiven Maßes ist.²

Mit Hilfe des Gaußschen Maßes definieren wir die Integraltransformation

$$\langle Z \rangle_{\gamma, \phi} := \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\phi + \zeta) \quad (\text{B.12})$$

und nennen sie das Gaußsche Mittel mit Kovarianz γ und Mittel ϕ .

Zwischen (B.12) und der Normalordnung besteht ein fundamentaler Zusammenhang:

$$\langle : Z(\cdot) :_\nu \rangle_{\gamma, \phi} = : Z(\phi) :_{\nu - \gamma}. \quad (\text{B.13})$$

Für polynomiale Funktionale beweist man diesen Zusammenhang, indem man das Gaußsche Mittel der erzeugenden Funktion $: e^{(\phi, J)} :$ berechnet.

Für zwei Kovarianzen γ_1, γ_2 gilt die Faltungsformel für Gaußsche Maße:

$$\int d\mu_{\gamma_1 + \gamma_2}(\zeta) Z(\phi + \zeta) = \int d\mu_{\gamma_1}(\zeta_1) d\mu_{\gamma_2}(\zeta_2) Z(\phi + \zeta_1 + \zeta_2) \quad (\text{B.14})$$

²Man erhält (B.10) mit der Substitution $J \rightarrow iJ$.

Eine weitere Abbildung stellen die trunkierten Erwartungswerte³, auch Kumulanten genannt, dar, definiert über⁴

$$\langle [O_1; \dots; O_n] \rangle_{\gamma, \beta \phi}^T := \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \left\langle e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i O_i(\cdot)} \right\rangle_{\gamma, \beta \phi} \Big|_{\lambda_i=0}. \quad (\text{B.15})$$

Einfache Rechnungen liefern

$$\langle [O] \rangle^T = \langle O \rangle \quad (\text{B.16})$$

$$\langle [O_1; O_2] \rangle^T = \langle O_1 O_2 \rangle - \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Hierbei ist (B.17) nichts anderes als die Korrelationsfunktion der Operatoren O_1 und O_2 . Eine wichtige Eigenschaft der Kumulanten ist ihre Multilinearität, d.h.

$$\langle [\dots, \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2, \dots] \rangle^T = \lambda_1 \langle [\dots, O_1, \dots] \rangle^T + \lambda_2 \langle [\dots, O_2, \dots] \rangle^T, \quad (\text{B.18})$$

die direkt aus der Linearität von (B.12) folgt.

Für die störungstheoretische Behandlung der RG benötigt man in 2. Ordnung folgende Kumulantenformel:

$$\begin{aligned} & \langle : \phi(x_1)^{n_1} :_{\nu}, : \phi(x_2)^{n_2} :_{\nu} \rangle_{\gamma, \psi}^T \quad (\text{B.19}) \\ &= \sum_{m=1}^{\min(n_1, n_2)} m! \binom{n_1}{m} \binom{n_2}{m} : \psi(x_1)^{n_1-m} :_{\nu-\gamma} : \psi(x_2)^{n_2-m} :_{\nu-\gamma} \gamma(x_1, x_2)^m. \end{aligned}$$

Eine andere Darstellung dieser Kumulante findet man, wenn man die Formeln (B.17), (B.8) und (B.13) benutzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \langle : \phi(x_1)^{n_1} :_{\nu}, : \phi(x_2)^{n_2} :_{\nu} \rangle_{\gamma, \psi}^T \\ &= \sum_{m=1}^{\min(n_1, n_2)} m! \binom{n_1}{m} \binom{n_2}{m} : \psi(x_1)^{n_1-m} \psi(x_2)^{n_2-m} :_{\nu-\gamma} \\ & \quad \times \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} \binom{m}{l} \nu(x_1, x_2)^{m-1} \gamma(x_1, x_2)^m. \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

³Die Definition ist unabhängig von der Art der Mittelwertbildung und der Operatoren.

⁴ $\langle [O;]^n \rangle^T = \langle \underbrace{[O; \dots; O]}_{n \text{ mal}} \rangle^T$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Blockmitteloperator B_L	18
1.2	Der adjungierte Blockmitteloperator B_L^\dagger	19
1.3	Der Blockmitteloperator C_L	20
1.4	Der Blockmitteloperator C_L^\dagger	20
2.1	Mannigfaltigkeiten in Abhängigkeit von D	36
2.2	Die Baumgraphenschranke	71
2.3	Minimale Ordnung Störungstheorie	77
2.4	Divergierender Blockparameter L	78
2.5	Explizite Baumgraphenschranke in $D = 3$	85
2.6	Grenzkopplungen aus der Baumgraphenschranke	87
3.1	Die T -Funktion	98

Literaturverzeichnis

- [Alb91] P. ALBUQUERQUE. La liberté asymptotique du modèle ϕ_4^4 dans l'approximation hiérarchique et le théorème de la variété centrale. Diplomarbeit, Universität Genf, 1991.
- [BG95] G. BENFATTO UND G. GALLAVOTTI. *Renormalization Group*. Princeton University Press, 1995.
- [Dys69] F. J. DYSON. Nonexistence of Spontaneous Magnetization in a One-Dimensional Ising Ferromagnet. *Commun. Math. Phys.*, 12, 1969.
- [FL94] W. FISCHER UND I. LIEB. *Funktionentheorie*. vieweg, 1994.
- [For91] O. FORSTER. *Analysis 2*. vieweg studium 31, 1991.
- [Geh97] B. GEHRMANN. Störungstheoretische und numerische Berechnung von Renormierungsgruppen-Fixpunkten und kritischen Exponenten. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1997.
- [GH86] J. GUCKENHEIMER UND P. HOLMES. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, 1986.
- [GJ81] J. GLIMM UND A. JAFFE. *Quantum Physics*. Springer-Verlag, 1981.
- [GK84] K. GAWEDZKI UND A. KUPIAINEN. Asymptotic freedom beyond perturbation theory. In K. Osterwalder und R. Stora, Editoren, *critical phenomena, random systems, gauge theories*, Seiten 185–293. Les Houches, 1984.

- [GS96] J. GÖTTKER-SCHNETMANN. Analytische und numerische Untersuchungen hierarchischer Renormierungsgruppenfixpunkte am Beispiel $O(N)$ -invarianter Modelle. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1996.
- [HC64] A. HURWITZ UND R. COURANT. *Funktionentheorie*, Kapitel Die Umkehrung der analytischen Funktionen. Springer-Verlag, 1964.
- [Kad66] L. P. KADANOFF. *Physics*, 2, 1966.
- [MM94] I. MONTVAY UND G. MÜNSTER. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [MV92] R. MEISE UND D. VOGT. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg Verlag, 1992.
- [OL] H.-H. OSTMANN UND H. LIERMANN. *Grundzüge der Mathematik I*, Kapitel Zahlentheorie.
- [Por90] A. PORDT. *Convergent Multigrid Polymer Expansions and Renormalization for Euclidean Field Theory*. Doktorarbeit, II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg, 1990.
- [Por93] A. PORDT. Renormalization Theory for Hierarchical Models. *Helv. Phys. Acta*, 66:105–154, 1993.
- [PPW94] K. PINN, A. PORDT UND C. WIECZERKOWSKI. Algebraic Computation of Hierarchical Renormalization Group Fixed Points and their ϵ -Expansions. *J. Statist. Phys.*, 77(977), 1994.
- [Pur96] H.-G. PURWINS. *Angewandte Physik I*, Kapitel III Signalanalyse, §1 Fourier-Transformation. Vorlesungsskript, 1995/1996.
- [Rol96] J. ROLF. Störungstheoretische und numerische Methoden zur Beschreibung von Renormierungsgruppenfixpunkten und -trajektorien. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1996.
- [RW] J. ROLF UND C. WIECZERKOWSKI. The Hierarchical ϕ^4 -Trajectory by Perturbation Theory in a Running Coupling and its Logarithm. *hep-lat/9508031*.
- [Ryd96] L. H. RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.

- [Slo] N. SLOANE. Sloane's On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/eisonline.html>.
- [Sma80] D.R. SMART. *Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press, 1980.
- [Wal] W. WALTER. *Einführung in die Theorie der Distributionen*, Kapitel §1 IV. Beispiele, Seiten 3–4.
- [Weg] F. J. WEGNER. The Critical State, General Aspects. In C. Domb und M. S. Grenn, Editoren, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 6.
- [Wie97a] C. WIECZERKOWSKI. Construction of the hierarchical ϕ^4 -trajectory. überarbeitete Version *hep-lat/9809050*, 1997.
- [Wie97b] C. WIECZERKOWSKI. Renormalized $g - \log(g)$ double expansion for the invariant ϕ^4 -trajectory in three dimensions. *Nucl. Phys.*, B(506):468–482, 1997.
- [Wie97c] C. WIECZERKOWSKI. Running Coupling Expansion for the Renormalized ϕ_4^4 -Trajectory from Renormalization Invariance. *J. Statist. Phys.*, 89(5/6), 1997.
- [Wie97d] C. WIECZERKOWSKI. The renormalized ϕ_4^4 trajectory by perturbation theory in the running coupling (I). The discrete renormalization group. *Nuclear Physics*, B(488):441–465, 1997.
- [Wie98] C. WIECZERKOWSKI. The renormalized ϕ_3^4 -trajectory in the block spin renormalization group by perturbation theory in a running coupling. unveröffentlicht, 1998.
- [Wil71] K. G. WILSON. Renormalization Group and Critical Phenomena. I+II. *Physical Review*, 1971.
- [WK74] K. G. WILSON UND J. KOGUT. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Letters*, C(12):75–200, 1974.

Danke!

Ich möchte allen danken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. Das interessante Thema stellte mir Christian Wieczerkowski, der immer ein offenes Ohr für meine Ideen und Probleme hatte. Kreative Diskussionen führte ich mit den Teilnehmern der *sci.math*-newsgroup. Mein besonderer Dank gilt Robert Israel, Edward C. Hook und Robin Chapman. Meinen Mitstreitern aus Zimmer 411 - Bernd, Katrin und Jimmy - danke ich für die freundschaftliche Atmosphäre in unserem Büro. Für das sorgfältige Korrekturlesen richtet sich mein Dank an meine Freundin Claudia, meinen Vater, Bernd, Martin und Johannes. Für die Bereitstellung seines Druck-Accounts danke ich Christoph.

Ach ja, mein besonderer Dank gilt allen, die ich vergessen habe und es verdient hätten, hier zu stehen.

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, im Oktober 1998

