

Untersuchung der skalaren Glueballmasse und der Glueball- σ -Mischung

Als Diplomarbeit vorgelegt von
Lorenz Quack

15. März 2010



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der dem Prüfungsamt vorgelegten Arbeit. Die Verbesserungen betreffen hauptsächlich kleinere Flüchtigkeitsfehler.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Theorie	5
1.1. Quantenfeldtheorie	5
1.2. Eichtheorien	7
1.3. Kurzer Abriss der Quantenchromodynamik	9
1.3.1. Chirale Symmetrie und spontane Symmetriebrechung	10
1.3.2. Asymptotische Freiheit	11
1.3.3. Confinement	12
1.4. Pfadintegralformalismus	13
1.4.1. Euklidische Pfadintegrale und Wick-Rotation	14
1.5. Gitterdiskretisierung	18
1.5.1. Gitterwirkung	20
1.6. $N_f = 1$ QCD	22
1.6.1. Skalarer Glueball	23
1.6.2. APE-Smearing	24
1.6.3. σ -Teilchen	24
1.6.4. Massenmischung von Glueball und σ	25
2. Methoden der Massenbestimmung	27
2.1. Grundlagen	27

2.2. Direkter Fit	29
2.3. Effektive Massen	29
2.4. Variationsmethode	30
2.5. Matrix-Methode	32
3. Auswertung und Ergebnisse	35
3.1. $16^3 \times 32$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1440$	36
3.2. $16^3 \times 32$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1443$	41
3.3. $24^3 \times 48$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1443$	46
4. Zusammenfassung und Ausblick	51
A. Anhang	55
A.1. Die SU(3)	55
A.2. Die Dirac-Gleichung	56
A.2.1. Die Dirac-Matrizen	57
A.3. Graßmann-Zahlen	57
Literaturverzeichnis	59

Einleitung

Lange Zeit lebte die Physik von der Beobachtungsgabe und dem Einfallsreichtum findiger Experimentalphysiker. Doch spätestens im 20. Jahrhundert erfuhr die Theoretische Physik einen großen Aufschwung und wurde mit den Erfolgen von Maxwell, Einstein und Feynman zu einem ebenbürtigen Partner der Experimentalphysik. Dies führte unter anderem zur Vereinheitlichung verschiedener Theorien zu dem, was man heute als das „Standardmodell der Teilchenphysik“ (SM) beschreibt.

Die Grundlage des SMs sind Quantenfeldtheorien (QFT), die nahezu alle bekannten elementaren Prozesse auf subatomarer Ebene beschreiben. Paul Dirac gelang es 1928 mit Aufstellung der Dirac-Gleichung (siehe auch Kapitel A.2) zum ersten Mal eine relativistische Theorie (die Elektrodynamik Maxwells) und eine Quantentheorie (die klassische Quantenmechanik) zu einer relativistischen Quantentheorie, der sogenannten Dirac-Theorie, zu verbinden. Aufbauend auf Diracs Arbeit wurde in den 40er Jahren die Quantenelektrodynamik (QED) unter anderen von Richard Feynman entwickelt. Sie beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung quantenfeldtheoretisch und legte damit den Grundstein für das SM. Die QED wurde später von Glashow, Weinberg und Salam um die schwache Wechselwirkung zum „Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung“ erweitert. Starke Wechselwirkungen werden von der Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben, die in den 70er Jahren neben anderen von Gell-Mann entwickelt wurde. Nach einer Quanten-

feldtheorie, die die vierte bekannte fundamentale Wechselwirkung, die Gravitation, beschreibt, wird nach wie vor fieberhaft gesucht.

Das „Standardmodell der Teilchenphysik“ hat überragende Erfolge gefeiert und gilt als ein Meilenstein der Theoretischen Physik. Unter anderem liefert es die bislang präziseste theoretische Vorhersage einer physikalischen Größe. Die experimentellen Werte des magnetischen Moments des Elektrons stimmen bis zur neunten signifikanten Stelle mit den Vorhersagen des SMs überein [Nov00].

Doch sind nicht alle Größen und Vorhersagen leicht aus dem SM abzuleiten. Vor allem die QCD hat sich im niederenergetischen Bereich, der für das Verständnis der Hadronen ausschlaggebend ist, hartnäckig gegen analytische Berechnungen gestäubt. Der Grund dafür liegt in der Kopplung, die für kleine Energien stark ansteigt, so dass eine Entwicklung in der Kopplungskonstante, wie sie in der Elektroschwachen Theorie äußerst erfolgreich eingesetzt wird, unmöglich wird. Um diesen Bereich zugänglich zu machen, kann man verschiedene Ansätze verfolgen. Ein erfolgreicher Ansatz ist die chirale Störungstheorie (engl. chiral Perturbation Theory; χ -PT). Dabei handelt es sich um eine effektive Theorie für den hadronischen Sektor.

Ein anderer Ansatz, der sich als äußerst nützlich erwiesen hat, ist die Diskretisierung der Raum-Zeit. Dies ermöglicht es, numerische Simulation auf dem daraus entstehenden Gitter durchzuführen. Dabei werden auch die Teilchenfelder nur an diskreten Punkten der Raum-Zeit und die Eichfelder nur auf den Verbindungen zwischen diesen Punkten betrachtet. Die dazu nötige Theorie wurde 1974 von Kenneth Wilson entwickelt [Wil74] und seitdem vielfach erweitert und verfeinert. Ein erster Hinweis darauf, dass eine solche Gitter QCD nützlich ist, war, dass sie eine der markantesten qualitativen Eigenschaften der QCD – das Confinement – auf natürlichem Wege reproduziert.

Solche numerischen Simulationen erlauben die nicht-störungstheoretische Vorhersage verschiedener Eigenschaften der Theorie wie zum Beispiel das Teilchenspek-

trum. Wie die Massen allerdings möglichst genau und mit möglichst geringen Fehlern aus der Simulation extrahiert werden können, ist nicht trivial und Gegenstand dieser Arbeit. Insbesondere wird ein neues Verfahren – die Matrix-Methode – benutzt und mit einer althergebrachten Methode verglichen. Dazu werden die Massen der leichtesten von der Theorie vorhergesagten skalaren Mesonen untersucht. Dies geschieht im Rahmen einer QCD mit nur einem Flavour. Bei den skalaren Mesonen der $N_f=1$ QCD handelt es sich um das σ -Teilchen und den skalaren Glueball.

1. Theorie

In diesem Kapitel sollen zunächst die theoretischen Grundlagen für diese Arbeit dargestellt werden.

In Kapitel 1.1 werden die Grundkonzepte und -begriffe der Quantenfeldtheorie kurz vorgestellt. Da alle Theorien im Standardmodell Eichtheorien sind, wird das Eichprinzip in Kapitel 1.2 erläutert. In Kapitel 1.3 werden die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik und die wichtigsten Eigenschaften dieser elementaren Theorie vorgestellt. Mit Kapitel 1.4, in dem in den Pfadintegralformalismus eingeführt wird, begeben wir uns auf den Weg zu einer Gitterdiskretisierung, die in Kapitel 1.5 vollzogen wird. In Kapitel 1.6 wird auf die Besonderheiten einer QCD mit nur einem Flavour eingegangen.

1.1. Quantenfeldtheorie

In einer klassischen Theorie wird das Verhalten von Teilchen, die in diesem Kapitel durch den Index i unterschieden werden, im Wesentlichen durch die Lagrange-Funktion $L\left(\{\vec{x}(t)_i\}, \{\dot{\vec{x}}(t)_i\}\right)$ beschrieben. Aus ihr lässt sich durch Integration die Wirkung erhalten: $S = \int dt L$. Nach dem hamiltonschen Prinzip, haben die Lösungen

der Bewegungsgleichungen eine stationäre Wirkung. Die Bewegungsgleichungen folgen also aus

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Formel (1.1) sind die Euler-Lagrange-Gleichungen. Sie hängen im Allgemeinen von der Menge aller Ortsvariablen und deren Ableitung ab.

Nimmt man nun unendlich viele Ortsvariablen an, so geht die Menge $\vec{x}_i(t)$ in eine kontinuierliche Funktion $\Phi(\vec{x}, t)$ über. Da wir eine lorentzinvariante Formulierung anstreben, fassen wir \vec{x} und t zum Lorentz-Vierervektor x zusammen und erweitern die Lagrange-Funktion $L(\{\vec{x}(t)_i\}, \{\dot{\vec{x}}(t)_i\})$ zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial\Phi(x))$, wobei ∂ die Viererableitung ist. Die Lagrange-Dichte ist mit der Lagrange-Funktion über

$$\int d^3\vec{x} \mathcal{L} = L$$

verknüpft. Die Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist ein Lorentz-Skalar.

Für die Wirkung folgt dann

$$S = \int dt L = \int dt \int d^3\vec{x} \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$$

und die Bewegungsgleichungen folgen aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = 0 \quad , \quad (1.2)$$

wobei hier wie auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit die einsteinsche Summenkonvention angewandt wird. Diese besagt, dass über gleiche Indizes summiert wird.

Eine Quantentheorie, die auf einer solchen Lagrange-Dichte \mathcal{L} mit dem Feld $\Phi(x)$ mit unendlich vielen Freiheitsgraden aufbaut, nennt man Quantenfeldtheorie.

1.2. Eichtheorien

Spätestens seitdem die QED ihren Siegeszug antrat, wurde das so genannte Eichprinzip zu einem Grundpfeiler moderner theoretischer Teilchenphysik. Gemeint ist damit die Invarianz einer Theorie unter bestimmten lokalen Transformationen von nicht beobachtbaren Größen wie zum Beispiel der Wellenfunktion (nur deren Betragsquadrat hat physikalische Bedeutung).

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi' = \Lambda(x)\Phi(x) \quad (1.3)$$

Dabei ist $\Lambda(x) \in \text{SU}(N)$ für eine $\text{SU}(N)$ -Eichtransformation.

Da es sich bei Eichtransformationen um lokale Transformationen handelt (d.h. Λ hängt explizit von x ab), stellt man bei dem Versuch, den kinetischen Term einer Lagrange-Dichte zu formulieren, fest, dass Terme $\bar{\Phi}(x)\Phi(y)$ nicht eichinvariant sind. Daher konstruiert man sich analog zur Differentialgeometrie so genannte Paralleltransporter $U(x, y, \mathcal{C})$, die zwischen den Feldern an den Orten x und y entlang des Weges \mathcal{C} vermitteln. Wir fordern, um eine Eichinvarianz des Ausdrucks $\bar{\Phi}(x)U(x, y, \mathcal{C})\Phi(y)$ sicherzustellen, dass diese Paralleltransporter wie folgt transformieren:

$$U(x, y, \mathcal{C}) \rightarrow \Lambda(x)U(x, y, \mathcal{C})\Lambda^{-1}(y) \quad (1.4)$$

Eine mögliche Definition, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt, ist [MW00]:

$$U(x, y, \mathcal{C}) \equiv P \left[\exp \left(i g_0 \int_y^x dx'^\mu A_\mu^a(x') T_a \right) \right] \quad (1.5)$$

wobei P der Pfadordnungsoperator analog zum Zeitordnungsoperator T ist.

Um zu einer eichinvarianten Lagrange-Dichte zu gelangen, muss man weiterhin die Ableitung ∂_μ durch die kovariante Ableitungen D_μ ersetzen

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = (\partial_\mu - i g_0 A_\mu^a T_a) \quad a = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (1.6)$$

g_0 ist die nackte (d.h. nicht renormierte) Kopplungskonstante, T_a sind Generatoren der $SU(N)$ (siehe dazu auch Appendix A.1) und A_μ^a sind die Eichfelder.

Die Eichfelder transformieren folgendermaßen

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) = \Lambda^{-1}(x)A_\mu^a(x)\Lambda(x) - (\partial_\mu\Lambda^{-1}(x))\Lambda(x) \quad , \quad (1.7)$$

so dass für die Kovariante Ableitung gilt

$$D'_\mu\Phi'(x) = \Lambda^{-1}(x)D_\mu\Phi(x) \quad . \quad (1.8)$$

Diese Eichfelder können als feldtheoretische Beschreibung von Teilchen mit Spin 1 interpretiert werden. Diese Eichbosonen koppeln an die fundamentalen Teilchen der Theorie und vermitteln so eine Wechselwirkung.

Mit Hilfe des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.9)$$

kann eine reine Eichwirkung (Yang-Mills-Wirkung) konstruiert werden:

$$S_g = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \quad (1.10)$$

Das Produkt $F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ und damit auch die Wirkung S_g sind eichinvariant.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich viele dieser Formeln im Falle einer $U(1)$ -Eichgruppe erheblich vereinfachen. So fällt zum Beispiel in Gleichung (1.9) der Selbstkopplungsterm $g_0 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ weg, der z.B. in der QCD dazu führt, dass Gluonen mit sich selbst wechselwirken können und es sogar rein gluonische Bindungszustände, die so genannten Gluebälle, gibt.

Wegen der fundamentalen Bedeutung der Eichinvarianz in der modernen Physik, wird die Eichsymmetrie, die einer Theorie zugrunde liegt, häufig zu ihrer Charakterisierung herangezogen. Die QED zum Beispiel ist eine $U(1)$ -Eichtheorie. Das heißt, man kann den Spinoren eine frei wählbare Phase hinzufügen. Durch das Einführen

des Eichfeldes A_μ , welches Photonen beschreibt, hat man die Eichinvarianz sichergestellt.

Die QCD hingegen ist eine $SU(3)_c$ -Eichtheorie. Der Subskript soll verdeutlichen, dass sich die Symmetrie auf die Farbe (engl. Colour) der Quarks bezieht. Ein kurzer Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der QCD soll in Kapitel 1.3 gegeben werden.

Dem Standardmodell der Teilchenphysik liegt eine kombinierte $SU(3)_c \otimes SU(2)_I \otimes U(1)_Y$ Eichgruppe zugrunde.

1.3. Kurzer Abriss der Quantenchromodynamik

Wie bereits in Kapitel 1.2 erwähnt handelt es sich bei der Quantenchromodynamik (QCD) um eine $SU(3)_c$ -Eichtheorie. Die Lagrange-Dichte setzt sich aus einem fermionischen Teil \mathcal{L}_F und einem Yang-Mills-Teil \mathcal{L}_{YM} zusammen und hat die Form

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{YM} = \sum_{i=1}^{N_f} [\bar{\Psi}_i(x) (\gamma^\mu D_\mu + m_i) \Psi_i(x)] + \frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (1.11)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_0 A_\mu(x) \quad , \quad (1.12)$$

wobei γ^μ die Dirac-Matrizen (Kapitel A.2.1) sind, g_0 die nackte Kopplungskonstante der QCD, A_μ das Gluonfeld und $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor ist. Die Kopplung zwischen Bosonen und Fermionen geschieht über die kovariante Ableitung D_μ .

A_μ und $F_{\mu\nu}$ lassen sich in einzelne Komponenten für jedes der acht Gluonen zerlegen

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 T^a A_\mu^a(x) \quad (1.13)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^8 T^a F_{\mu\nu}^a(x) \quad , \quad (1.14)$$

wobei sich der Feldstärketensor durch das Gluonfeld ausdrücken läßt (siehe (1.9)). Die T^a sind die Generatoren der Farb-Gruppe $SU(3)$ und f_{abc} die dazugehörigen Strukturkonstanten (Kapitel A.1).

1.3.1. Chirale Symmetrie und spontane Symmetriebrechung

Da die Massen der drei leichtesten Quarkflavour up (u), down (d) und strange (s) verglichen mit typischen hadronischen Größenordnungen klein und nahezu entartet sind (vgl. Tabelle 1.1), lohnt es sich, einen Blick auf den Fall

$$m_u = m_d = m_s \equiv m_q = 0 \quad (1.15)$$

zu werfen. In diesem Fall entkoppeln die Anteile der Theorie mit links- und rechts- händiger Chiralität, weshalb man bei (1.15) auch vom chiralen Limes spricht. Die links- beziehungsweise rechtshändigen Anteile erhält man durch Anwendung des entsprechenden Projektionsoperators

$$P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \quad \text{bzw.} \quad P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \quad (1.16)$$

auf die Fermion-Felder

$$\Psi_L = P_L \Psi, \quad \Psi_R = P_R \Psi, \quad \bar{\Psi}_L = \bar{\Psi} P_R \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}_R = \bar{\Psi} P_L \quad . \quad (1.17)$$

Tabelle 1.1.: Ein paar typische Massen der QCD in MeV. Bei $m_{u,d,s}$ handelt es sich um Stromquarkmassen. Man sieht, dass $m_u \approx m_d \approx m_s \ll m_p$, wobei die Protonenmasse m_p stellvertretend für typische, hadronische Massen steht. Alle Werte wurden [AeaPDG08] entnommen. Alle Angaben sind als approximativ zu betrachten.

m_u	m_d	m_s	m_c	m_b	m_t	m_p	m_{π^0}
2,55	5,04	105	1270	4200	171300	938	135

Im chiralen Limes besitzt die Lagrange-Dichte eine globale $U(N_f)_L \otimes U(N_f)_R$ Symmetrie, welche sich in $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A$ zerlegen lässt. Nach dem Noether-Theorem [Noe18] ist mit jeder erhaltenen Symmetrie ein erhaltener Strom und damit eine Erhaltungsgröße verknüpft. Die $U(1)_V$ -Symmetrie entspricht der Baryonenzahl-Erhaltung. Die $U(1)_A$ -Symmetrie hingegen entspricht keiner Erhaltungsgröße, da sie durch eine Quantenanomalie verletzt wird. Die verbleibende $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ -Symmetrie wird spontan zu einer vektoriellen $SU(N_f)_V$ gebrochen [Sch02].

Von spontaner Symmetriebrechung spricht man, wenn die Lagrange-Dichte eine Symmetrie besitzt, die vom Grundzustand nicht realisiert wird. Nach dem Goldstone-Theorem [GSW62] führt die Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie zum Auftreten von masselosen, spinlosen Teilchen, den so genannten Goldstone-Bosonen. Im Falle der chiralen Symmetriebrechung mit $N_f = 3$ sind dies die Pionen, Kaonen und η -Teilchen. Dass keines dieser pseudoskalaren Mesonen in der Natur masselos ist, kann dadurch erklärt werden, dass der chirale Limes (1.15) nicht verwirklicht ist und die chirale Symmetrie durch die Massen explizit gebrochen wird (siehe Tabelle 1.1). Dadurch erhalten auch die Goldstone-Bosonen eine nicht verschwindende Masse, weshalb sie in diesem Fall Pseudo-Goldstone-Bosonen genannt werden.

1.3.2. Asymptotische Freiheit

Die asymptotische Freiheit ist eine Eigenschaft der QCD, die 1973 von Gross, Wilczek und Politzer entdeckt wurde [GW73; Pol73]. Sie beschreibt die Abnahme der Kopplungsstärke bei hohen Energien bzw. kleinen Abständen und wird durch die β -Funktion ausgedrückt:

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \quad (1.18)$$

$$= - \left(\frac{11N_c}{3} - \frac{2N_f}{3} \right) \frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5) \quad , \quad (1.19)$$

wobei (1.18) allgemein und (1.19) für den Spezialfall der QCD mit N_c Farben und N_f Flavours mit 1-Schleifen-Korrekturen gilt. μ ist die Energieskala, die betrachtet wird.

Daran sieht man, dass in einer $SU(N_c)$ -Theorie mit $N_c = 3$ die Kopplung für große Energien abnimmt, solange $N_f \leq 16$ gegeben ist.

1.3.3. Confinement

Confinement ist ein weiteres wichtiges Charakteristikum der QCD. Es handelt sich dabei zunächst um einen experimentellen Befund, nämlich den, dass in der Natur nur farbneutrale Objekte (Farbsingulets) vorkommen. Theoretisch ist dieses Phänomen nicht vollständig verstanden, doch kann es in Gittersimulationen reproduziert werden.

Betrachtet man einen Wilson-Loop¹ in reiner Eichtheorie für $T \rightarrow \infty$, so kann man zeigen, dass

$$\langle \text{Tr}(U(\mathcal{C})) \rangle \propto e^{-TV(R)} \quad , \quad (1.20)$$

wobei $V(R)$ das Potential zwischen zwei Farbladungen, das so genannte statische Quark-Antiquark-Potential, ist.

Dies ist eine in Simulationen messbare Größe. Ist nun $\langle \text{Tr}(U(\mathcal{C})) \rangle \propto e^{-T\sigma R}$, so folgt, dass

$$V(R) = \sigma R \quad (1.21)$$

ist. σ nennt man in diesem Zusammenhang „string tension“. Gilt Gleichung (1.21), so spricht man von statischem Quark Confinement, da die Anziehungskraft zwischen Farbladungen linear mit dem Abstand wächst[MW00].

¹Ein Wilson-Loop ist die Spur über ein Paralleltransporter entlang eines rechteckigen, geschlossenen Pfades mit räumlicher Länge R und zeitlicher Ausdehnung T .

Anschaulich kann man sich vorstellen, dass durch das Auseinanderziehen eines Quark-Antiquark-Paares die Bindungsenergie steigt, bis sie ausreicht, ein neues Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen. Diesen Vorgang nennt man „string breaking“.

Für ein „non-confining“ Modell erwartet man $\langle \text{Tr}(U(\mathcal{C})) \rangle \propto e^{-\alpha(T+R)}$.

1.4. Pfadintegralformalismus

Ein wesentlicher Schritt auf dem Weg zu einer Formulierung der QCD auf dem Gitter ist der Pfadintegralformalismus. Dabei handelt es sich um eine Alternative zur kanonischen Quantisierung der Quantenmechanik. Er hat sich als sehr erfolgreich erwiesen, da er zum einen starke Parallelen zur Statistischen Physik aufweist und zum anderen neue, tiefere Einsichten in die Quantenphysik erlaubt. Die Tatsache, dass im Pfadintegralformalismus nur noch Zahlen statt Operatoren auftreten, macht ihn für eine numerische Behandlung mit dem Computer besonders attraktiv. Der Pfadintegralformalismus wurde maßgeblich 1948 von Richard Feynman entwickelt [Fey48].

Beim Pfadintegralformalismus wird die Übergangsamplitude von einem quantenmechanischen Anfangszustand i zu einem Endzustand f als Integral über alle Pfade von i nach f im Hilbert-Raum betrachtet. Jeder Pfad wird dabei mit der dazugehörigen Wirkung gewichtet

$$\langle f | e^{-iHT} | i \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS} \quad , \quad (1.22)$$

wobei $\mathcal{D}\Phi$ und $\mathcal{D}\Psi$ symbolisch für die Integration über alle bosonischen respektive fermionischen, klassischen Feldkonfigurationen steht und S die zu den Feldkonfigurationen gehörige Wirkung ist. Es gilt $\mathcal{D}\Phi = \prod_j d\Phi_j$, wobei die Felder die Randbedingungen

$$\Phi_j(0, \vec{x}) = \langle \vec{x} | \Phi_i \rangle \quad \text{und} \quad \Phi_j(T, \vec{x}) = \langle \vec{x} | \Phi_f \rangle \quad (1.23)$$

erfüllen müssen. Für die fermionischen Felder gilt Analoges.

Hierbei ist wichtig zu beachten, dass fermionische Felder anti-kommutieren. Um diesem Umstand gerecht zu werden, verwendet man im Pfadintegralformalismus Grassmann-Zahlen (siehe Kapitel A.3) zur Beschreibung fermionischer Freiheitsgrade.

In Quantenfeldtheorien ist das Hauptaugenmerk auf die Vakuumserwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren gerichtet:

$$\langle 0 | T (\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n) | 0 \rangle \quad . \quad (1.24)$$

(1.24) entspricht der greenschen Funktion, wobei \mathcal{O}_i beliebige Feldoperatoren sind und T der Zeitordnungsoperator ist. Er sorgt dafür, dass $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ gilt. Ausdrücke dieser Art können im Pfadintegralformalismus über

$$\langle 0 | T (\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n e^{iS} \quad (1.25)$$

$$\text{mit} \quad Z = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{iS} \quad (1.26)$$

berechnet werden. Die Randbedingungen (1.23) entfallen hier, da es sich um einen Vakuumserwartungswert und nicht um eine Übergangsamplitude handelt. Das Integral ist offensichtlich unendlich dimensional. Beim Übergang zur Gitterformulierung in Kapitel 1.5 wird daraus durch die Endlichkeit des Gitters eine endliche Summe.

1.4.1. Euklidische Pfadintegrale und Wick-Rotation

Ein Problem mit Gleichung (1.25) ist, dass der komplexe Exponent eine Oszillation verursacht, die numerisch nur schwer in den Griff zu bekommen ist. Daher wird

meistens zu einer imaginären Zeit übergegangen: $t \rightarrow -i\tau$. Dadurch lässt sich die greensche Funktion durch ein reelles Integral berechnen:

$$\begin{aligned} G((\vec{x}_1, -i\tau_1), \dots, (\vec{x}_n, -i\tau_n)) &\equiv G_E((\vec{x}_1, \tau_1), \dots, (\vec{x}_n, \tau_n)) \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n e^{-S_E} \\ Z &= \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-S_E} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Der Subskript E steht dabei für „euklidisch“, da aus der Minkowski-Metrik durch den Übergang zur imaginären Zeit eine euklidische Metrik wurde. Deshalb spricht man auch von „Euklidischer Feldtheorie“. Der große Vorteil gegenüber der Feldtheorie mit Minkowski-Metrik ist, dass Feldkonfigurationen, deren Integral vormals stark oszillierte, nun exponentiell unterdrückt sind. Der Exponent erhält also einen dämpfenden Realteil, der die Konvergenz erzwingt. Desweiteren ist nun garantiert, dass $S_E \geq 0$ und dadurch $e^{-S_E} \leq 1$, wodurch es möglich wird, das ganze Integral um die klassische Feldkonfiguration, die per Definition eine minimale Wirkung hat, zu entwickeln.

In dieser Arbeit wird ausnahmslos die euklidische Zeit verwendet. Der Subskript E entfällt fortan.

In der euklidischen Formulierung kann man außerdem Gleichung (1.25) bzw. (1.27) vereinfachen, falls die Operatoren \mathcal{O}_i nur von den Eichfeldern abhängen. Dazu spalten wir zunächst die Wirkung in einen bosonischen und einen fermionischen Teil auf:

$$S = S_g + S_f \quad (1.28)$$

Der fermionische Teil lässt sich dann in der Form

$$S_f = \sum_{x,y \in \text{Gitter}} \{ \bar{\Psi}(y) Q[U] \Psi(x) \} \quad (1.29)$$

schreiben. $Q[U]$ nennt man Fermion-Matrix. Sie hängt von der Menge aller Paralleltransporter U ab.

Nun lassen sich die großmannwertigen fermionischen Felder in Gleichung (1.27) ausintegrieren. Für einen einzelnen Operator gilt

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{O} e^{-S_g - S_f} \\
 &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O} \det(Q[U]) e^{-S_g} \\
 &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{O} e^{-S_{\text{eff}}} \\
 \text{mit} \quad Z &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{\text{eff}}} \\
 \text{und} \quad S_{\text{eff}} &= S_g - \log \det Q[U] \quad ,
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ein großes Problem in der Praxis ist, dass $S_{\text{eff}} \in \mathbb{R}$ nur gilt, falls $\det Q \in \mathbb{R}$ und $\det Q > 0$. Man kann zeigen, dass $\det Q$ reell ist, doch das Vorzeichen ist in Gitterregularisierten Theorien im Allgemeinen unklar und auch nicht trivial zu bestimmen. Dieses Problem ist als Vorzeichenproblem (engl. sign problem) bekannt. In der Praxis ist das Vorzeichen immer positiv, solange man weit vom Kontinuumslimit entfernt ist. Erst in der Nähe des kritischen Punktes treten negative Eigenwerte in der Fermion-Matrix auf. Da wir uns in dieser Arbeit dem kritischen Punkt nicht nähern, gehen wir stets von einer positiven Fermion-Determinante aus.

Hängt der Operator zusätzlich von den fermionischen Feldern ab

$$\mathcal{O} = \Psi_{y_1} \bar{\Psi}_{x_1} \cdots \Psi_{y_n} \bar{\Psi}_{x_n} F[U] \quad ,$$

so ergibt sich der Erwartungswert zu[MM94]

$$\langle \Psi_{y_1} \bar{\Psi}_{x_1} \cdots \Psi_{y_n} \bar{\Psi}_{x_n} F[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{\text{eff}}} F[U] \sum_{z_1, \dots, z_n} \epsilon_{y_1 \cdots y_n}^{z_1 \cdots z_n} Q[U]_{z_1 x_1}^{-1} \cdots Q[U]_{z_n x_n}^{-1} \quad (1.31)$$

$$\text{mit } \epsilon_{y_1 \cdots y_n}^{z_1 \cdots z_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } y_1 \cdots y_n \text{ gerade Permutation von } z_1 \cdots z_n \\ -1 & \text{für } y_1 \cdots y_n \text{ ungerade Permutation von } z_1 \cdots z_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daran wird die Notwendigkeit, schnelle Algorithmen zur Matrixinversion zu implementieren, deutlich.

Ein weiterer Vorteil der euklidischen Formulierung ist, dass eine formale Analogie zur statistischen Mechanik besteht. Diese ist in Tabelle 1.2 zusammengefasst. Sie ermöglicht einen Austausch von Werkzeugen und Erfahrungen zwischen diesen thematisch doch sehr unterschiedlichen Fachgebieten.

Um wieder zur physikalischen Minkowski-Theorie mit reeller Zeit zu gelangen, muss man eine so genannte Wick-Rotation durchführen. Dabei wird die greensche Funktion analytisch so fortgesetzt, dass alle Zeitvariablen gleichzeitig zur reellen Achse gedreht werden.

Tabelle 1.2.: Analogie zwischen euklidischer Feldtheorie und statistischer Mechanik

Statistische Mechanik	Euklidische Feldtheorie
Zustandssumme: $\sum e^{-\beta H}$	Erzeugendes Funktional: $\int \mathcal{D}\Phi e^{-S}$
Hamilton-Funktion: βH	Wirkung: S
Inverse Korrelationslänge: $1/\xi$	Masse: m

1.5. Gitterdiskretisierung

Um Gitter-Simulationen durchführen zu können, müssen die kontinuierlichen Größen wie Felder, Ableitungen, Operatoren und die Wirkung in diskrete überführt werden. An dieser Stelle soll die Formulierung von Kenneth Wilson im Jahre 1974 [Wil74] vorgestellt werden.

Zunächst wollen wir die Felder diskretisieren. Dies ist einfach dadurch zu realisieren, dass man die vormals kontinuierlichen Felder nun nur noch an einzelnen Punkten im Abstand a betrachtet:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(a \cdot n) \quad (1.32)$$

$$\text{mit } x \in \mathbb{R}^4, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n_\mu \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mu = 1, \dots, 4$$

Hierbei gibt n den Gitterpunkt in dem 4-dimensionalen Raum-Zeit-Gitter an, weshalb a auch als Gitterabstand bezeichnet wird.

Partielle Ableitungen werden durch Differenzen ersetzt:

$$\partial_\mu \Psi(x) \rightarrow \Delta_\mu \Psi(x) \equiv \frac{1}{a} (\Psi(x + a\hat{\mu}) - \Psi(x)) \quad , \quad (1.33)$$

wobei $\hat{\mu}$ ein Einheitsvektor in eine der Gitterrichtungen ist.

Entsprechend müssen Integrale durch diskrete Summen ersetzt werden:

$$\int d^4x \rightarrow \sum_{x \in \text{Gitter}} a^4 \quad (1.34)$$

Weiterhin sind die in Kapitel 1.2 eingeführten Paralleltransporter $U(x, y, \mathcal{C})$ von Bedeutung. Zunächst stellen wir fest, dass der kleinste Paralleltransport zwischen zwei Gitternachbarn stattfindet. Ein solcher Paralleltransporter am Ort x zum Nachbarn in Richtung μ bezeichnet man als Link $U(x, \mu)$. Per Konstruktion ist dann ein Ausdruck der Form

$$\Psi(x + a\hat{\mu})U(x, \mu)\Psi(x) \quad (1.35)$$

eichinvariant.

Ein weiterer wichtiger eichinvarianter Ausdruck ist die Plaquette, die einen kleinsten geschlossenen Pfad durch das Gitter darstellt:

$$U(p) \equiv U(x, \mu, \nu) \equiv U_{\mu, \nu}(x) = U(x + a\hat{\nu}, -\nu)U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, -\mu)U(x + a\hat{\mu}, \nu)U(x, \mu) \quad (1.36)$$

Eine Plaquette ist in Abbildung 1.1 symbolisch dargestellt.

Ein Vorteil der Gitterdiskretisierung ist, dass durch den endlichen Gitterabstand eine automatische Regularisierung erfolgt. Durch Fourier-Transformation erkennt man, dass der UV-Cutoff bei $|p_\mu| = \frac{\pi}{a}$ liegt. Allerdings treten durch die Diskretisierung auch verschiedene Nachteile auf. Zum Beispiel werden offensichtlich die Translations- und Rotationssymmetrien durch eine hyperkubische Symmetrie ersetzt. Die dadurch entstehenden Artefakte sollten im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ wieder verschwinden.

Desweiteren sollte einem bewusst sein, dass man neben dem Kontinuumslimites auch das Volumen gegen unendlich gehen lassen muss, um zu einer Kontinuumstheorie zu gelangen. Dieser Übergang ist in der Regel aber einfacher durchzuführen als

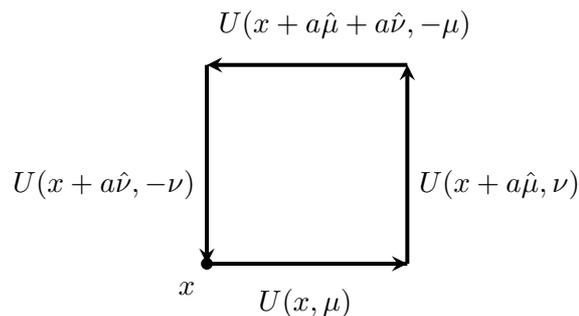


Abbildung 1.1.: Eine Plaquette auf einem Gitter am Ort x in Richtung $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$

$a \rightarrow 0$. In Realität arbeitet man bei Simulationen immer mit endlichen Gittern mit Volumen $V = L^3 \cdot T$, so dass eventuelle Finite-Size-Effekte zu beachten sind.

Ein weiteres Problem, das durch den endlichen Gitterabstand a auftritt, ist, dass durch den Impuls-Cut-Off der Fermionpropagator mehr als eine Polstelle in der Brillouin-Zone hat; namentlich dort, wo

$$p'_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu) = 0 \quad . \quad (1.37)$$

In unserem Fall mit vier Dimensionen hat die Theorie also wider Erwarten $2^4 = 16$ Fermionen statt einem. Man spricht hier von sogenannten „Fermiondoppler“ oder kurz „Doppler“.

1.5.1. Gitterwirkung

Die Gitterwirkung setzt sich wie auch die Kontinuumswirkung aus einem Eichanteil und einem fermionischen Anteil zusammen

$$S = S_g + S_f \quad . \quad (1.38)$$

Die beiden Anteile werden im folgenden getrennt behandelt.

Gitter-Eich-Wirkung

Kenneth Wilson stellte 1974 eine $SU(N)$ -eichinvariante Yang-Mills-Wirkung auf dem Gitter auf [Wil74]:

$$S_g = - \sum_p \frac{\beta}{N} \Re(\text{Tr}(U(p))) \quad , \quad (1.39)$$

wobei $U(p)$ die in Gleichung (1.36) definierte Plaquette und β ein Parameter ist, der so eingestellt werden muss, dass der richtige Kontinuumsimes (siehe Gleichung (1.10)) erreicht wird.

Symanzik entwickelte 1983 mit Hilfe von renormierungsgruppentheoretischen und störungstheoretischen Überlegungen ein Verfahren zur Verbesserung von Gitterwirkungen [Sym83]. Lüscher und Weisz berechneten 1985 dem Symanzik-Programm folgend eine verbesserte Wilson-Wirkung [LW85]. Dabei werden Artefakte, die durch die Gitterdiskretisierung auftreten, teilweise behoben. Treten Gitterartefakte erst ab der Ordnung $\mathcal{O}(a^4)$ auf, spricht man von einer auf Baumgrafen-Näherung verbesserten Symanzik-Wirkung. Konkret geschieht dies dadurch, dass neben der Plaquette auch längere geschlossene Wege verwendet werden. Für Baumgrafen-Näherung werden Wege mit Umfang sechs benötigt.

Gitter-Fermion-Wirkung

Die Formulierung einer fermionischen Wirkung auf dem Gitter stellt sich als problematischer heraus. Ein fundamentales Problem, das bereits in Kapitel 1.5 erwähnt wurde, ist das Auftreten der Fermiondoppler.

Durch verschiedene Ansätze lässt sich der Einfluss der Doppler unterdrücken. Bei dem von Wilson vorgeschlagenen und in dieser Arbeit benutzten Ansatz fügt man der naiven Gitterwirkung einen Term hinzu, der den unphysikalischen Dopplermoden eine zusätzliche Masse verleiht, die im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ gegen unendlich geht. Damit lautet die Wilson-Fermionwirkung [MM94]

$$S_f = \sum_{x \in \text{Gitter}} \left\{ (\bar{\Psi}(x)\Psi(x)) - \kappa \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\bar{\Psi}(x + \hat{\mu}) [r + \gamma_\mu] U_\mu(x)\Psi(x)) \right\} \quad (1.40)$$

$$= \sum_{x,y \in \text{Gitter}} \{ \bar{\Psi}(y) Q[U] \Psi(x) \} \quad , \quad (1.41)$$

wobei die Summation über die N_f Flavour-Freiheitsgrade, die 4 Dirac-Spinor Komponenten und die N_c Colourfreiheitsgrade der Übersichtlichkeit halber unterdrückt

wurde. Der Wilson-Parameter wird meist zu $r = 1$ gewählt und der Hopping-Parameter κ hängt mit der nackten Fermionmasse über

$$\kappa = \frac{1}{2am_0 + 8r} \quad (1.42)$$

zusammen. Die Fermion-Matrix

$$Q[U] = \delta_{y,x} - \kappa \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \delta_{y,x+\hat{\mu}} (r + \gamma_{\mu}) U_{\mu}(x) \quad (1.43)$$

ist bei Simulationen von Fermionen das zentrale Objekt, auf dessen Inversion (siehe auch Kapitel 1.4.1) viel Rechenzeit verwendet wird, da es sich dabei um eine sehr große Matrix handelt. Als Beispiel überlege man sich, dass ein $16^3 \times 32$ Gitter 131072 Gitterpunkte hat. Damit hätte die Matrix bereits über 17 Milliarden Einträge, wobei jeder Eintrag zusätzlich noch Farb-, Flavour- und Diracindizes besitzt.

Die Daten, die dieser Arbeit zu Grunde liegen, wurden alle mit auf Baumgrafennäherung verbesserter Symanzik-Wirkung im Eichsektor und unverbesserter Wilson-Wirkung im fermionischen Sektor erzeugt.

1.6. $N_f = 1$ QCD

Die volle QCD mit sechs Flavours ist eine äußerst komplexe und schwierig zu behandelnde Theorie. Auch bei einer effektiven Theorie mit drei Flavours wie der chiralen Störungstheorie gibt es eine Vielzahl von wechselwirkenden Effekten, die es schwierig machen, einzelne Aspekte der Theorie isoliert zu untersuchen.

Eine Reduktion der Flavours von sechs auf einen vereinfacht die Dynamik der Theorie. Zum Beispiel gibt es in der Einflavour-Theorie keine chirale Symmetrie mehr. Effekte wie eine spontane Brechung dieser Symmetrie treten folglich nicht auf [Cre07]. Eine Konsequenz ist das Fehlen von Pionen, die in der χ -PT als Pseudogoldstonebosonen der chiralen Symmetriebrechung auftreten. Damit verbunden ist allerdings die Schwierigkeit, eine Quarkmasse zu definieren [Cre04].

Mit einer $N_f = 1$ QCD können also Aspekte der QCD untersucht werden, bei denen das Auftauchen von multiplen Flavours und Chiralität eher stören.

Ein weiterer interessanter Aspekt der $N_f = 1$ QCD ist das Vorhandensein einer „orientifold equivalence“ zur $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie im bosonischen Sektor im Limes $N_c \rightarrow \infty$ [ASV03].

Natürlicherweise unterscheidet sich der Teilchengehalt einer Einflavour-Theorie von Theorien mit $N_f > 1$. Wie bereits oben erwähnt existieren keine Pionen. Die leichtesten Hadronen sind die zwei Mesonen η und σ und im baryonischen Sektor findet sich das Δ^{++} . η ist ein Pseudoskalar und σ ein Skalar. Die Namen sind in Übereinstimmung mit [FMM⁺07b; FMM⁺07a; FMM⁺08] gewählt. Desweiteren sind noch verschiedene Gluebälle zu erwarten, von denen der leichteste die Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}$ tragen sollte. J bezeichnet dabei den Gesamtdrehimpuls, P den Eigenwert unter Parität (Raumspiegelung) und C den Eigenwert unter C-Parität (Teilchen-Antiteilchen-Transformation).

1.6.1. Skalarer Glueball

Der gluonische Selbstwechselwirkungsterm in Gleichung (1.9) eröffnet die Möglichkeit eines farblosen, gebundenen Zustandes, der nur aus Gluonen besteht. Einen solchen Zustand nennt man Glueball. Für uns ist vor allem der skalare Glueball mit den Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}$ von Interesse. Diese Quantenzahlen entsprechen der irreduziblen Darstellung A_1^{++} der kubischen Untergruppe O_h [Hei00; MP99]. Demnach ist der folgende aus räumlichen Plaquetten aufgebaute Operator geeignet, skalare Gluebälle zu messen:

$$\mathcal{O}_{Glueball}(\vec{x}, t) = \text{Tr} (U_{12}(\vec{x}, t) + U_{23}(\vec{x}, t) + U_{31}(\vec{x}, t)) \quad (1.44)$$

Die Wahl dieses Operators ist bei weitem nicht eindeutig. Viel mehr handelt es sich hierbei um den „einfachsten“ Operator für den skalaren Glueball.

In einer zukünftigen Arbeit könnte man untersuchen, ob sich der Überlapp durch die Kombination verschiedener Glueball Operatoren verbessern lässt.

1.6.2. APE-Smearing

Beim APE-Smearing ersetzt man die normalen Links durch eine Linearkombination nah verwandter Pfade:

$$U(x, \mu) \rightarrow U(x, \mu) + \epsilon_{\text{APE}} \cdot \sum_{\substack{\hat{\nu}=1,2,3 \\ \hat{\nu} \neq \hat{\mu}}} \{ U_{x+\hat{\nu}+\hat{\mu},-\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\nu} + U_{x-\hat{\nu}+\hat{\mu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu} U_{x,-\nu} \} \quad (1.45)$$

Der Einfluss der erweiterten Pfade wird durch den Parameter ϵ_{APE} kontrolliert. Dieser Prozess ist in Abbildung 1.2 veranschaulicht. Diese Linksubstitution wird für jede Konfiguration N_{APE} mal durchgeführt. Dadurch versucht man, einen besseren Überlapp zwischen den inhärent nicht-lokalen physikalischen Teilchen und den eigentlich stark lokalen Links zu erreichen. Es ist allerdings a priori nicht klar, wie die Parameter ϵ_{APE} und N_{APE} gewählt werden müssen, um den Überlapp zu maximieren.

In Kapitel 3.1 wird die Wahl der Smearingparameter behandelt.

1.6.3. σ -Teilchen

Das σ -Teilchen (häufig auch $f_0(600)$ genannt) ist ein leichtes skalares Meson mit den gleichen Quantenzahlen wie der skalare Glueball $J^{PC} = 0^{++}$. Der genaue physikalische Gehalt ist bis zum heutigen Tage noch ungeklärt. Sicher scheint zu sein, dass es sich um keinen reinen Zustand handelt, sondern um eine Mischung verschiedener Anregungszustände. Hier ist eine (unvollständige) Liste von möglichen Beiträgen zur Sigma-Resonanz[McN08]:

- Gluebälle

- Meson-Moleküle
- Tetraquark-Zustände

Ein Vorteil der $N_f = 1$ QCD ist, dass hier die σ -Resonanz ein stabiles Teilchen ist, da es aufgrund der fehlenden Chiralität keine Pionen gibt, in die das σ -Teilchen zerfallen könnte. Auch der Einfluss von Meson-Molekülen und Tetraquark Zuständen sollte aufgrund der verminderten Flavour Anzahl geringer ausfallen.

In unserer $N_f = 1$ QCD-Simulation haben wir das σ -Teilchen mit dem Interpolationsoperator

$$\mathcal{O}_\sigma(\vec{x}, t) = \bar{\Psi}(\vec{x}, t)\Psi(\vec{x}, t) \quad (1.46)$$

gemessen.

1.6.4. Massenmischung von Glueball und σ

Da der Glueball und das σ -Teilchen die gleichen Quantenzahlen, namentlich $J^{PC} = 0^{++}$, tragen, erwartet man, dass die Zustände mischen. Um die Masseneigenzustände zu finden, eignet sich die Matrix-Methode, die in Kapitel 2.5 erläutert wird.

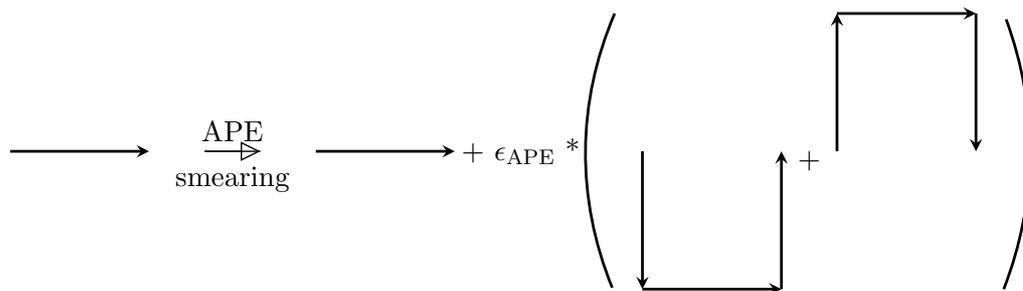


Abbildung 1.2.: Visualisierung des APE-Smearings, bei dem ein normaler Link durch eine Linearkombination verschiedener Pfade ersetzt wird. Die Stärke der Verschmierung wird durch den Parameter ϵ_{APE} gesteuert. Die dritte Raumdimension wurde der einfacheren Darstellung halber unterdrückt.

2. Methoden der Massenbestimmung

2.1. Grundlagen

Grundlage der Massenbestimmung in Gittersimulationen ist die Zeitscheibenkorrelationsfunktion

$$C(\Delta t) = \left\langle S^\dagger(t + \Delta t) \cdot S(t) \right\rangle \quad . \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet $S(t)$ den Zeitscheibenmittelwert des Operators \mathcal{O} zum Zeitpunkt t :

$$S(t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{x}} \mathcal{O}(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

Dabei wurde schon berücksichtigt, dass für die Massenbestimmung nur Zustände mit $|\vec{p}| = 0$ von Interesse sind, da $E_n(\vec{p} = \vec{0}) = m_n$ gilt.

Durch Einfügen eines vollständigen Satzes von Eigenzuständen $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ erhält man die folgende spektrale Darstellung:

$$C(\Delta t) = \sum_{n=0} \left[\left| \langle 0 | S^\dagger(t) | n \rangle \right|^2 e^{-m_n(T-\Delta t)} \pm \left| \langle n | S(t) | 0 \rangle \right|^2 e^{-m_n \Delta t} \right] \quad (2.3)$$

$$= \omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \left(e^{-m_i(t-\Delta t)} \pm e^{-m_i \Delta t} \right) \quad (2.4)$$

Das \pm ist von den verwendeten Operatoren abhängig. Für bosonische Operatoren ist nur das Verhalten unter Zeitumkehr relevant. Ist der Operator symmetrisch unter Zeit-Reflexion, so wird $+$ eingesetzt, ist er anti-symmetrisch, so wird

subtrahiert[Spa98]. Da wir es in dieser Arbeit ausschließlich mit zeitsymmetrischen bosonischen Operatoren zu tun haben, setzen wir immer + ein.

Bei Fermionen spielen zusätzlich zu dem Verhalten unter Zeitumkehr die räumlichen Randbedingungen eine Rolle.

Bei ω_0 handelt es sich um einen Vakuumerwartungswert (engl. Vacuum Expectation Value; VEV), der für skalare Teilchen im Allgemeinen nicht verschwindet. Da dieser in der folgenden Auswertung aus numerischen Gründen häufig störend ist, wird er meist schon bei der Bildung der Korrelationsfunktion subtrahiert:

$$C(\Delta t) = \langle S^\dagger(t + \Delta t) \cdot S(t) \rangle - \langle S^\dagger(t + \Delta t) \rangle \langle S(t) \rangle \quad (2.5)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \left(e^{-m_i \Delta t} + e^{-m_i(T-\Delta t)} \right) \quad (2.6)$$

Durch die periodischen Randbedingungen des Gitters entsteht eine Symmetrie um $\frac{T}{2}$

$$C(\Delta t) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i e^{-\frac{T}{2} m_i} \left(e^{m_i(\frac{T}{2}-\Delta t)} \pm e^{-m_i(\frac{T}{2}-\Delta t)} \right) \quad , \quad (2.7)$$

die man ausnutzen kann, um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu verbessern[Jü06]. Dies geschieht über eine Zeitsymmetrisierung

$$C(\Delta t)|_{[0, \dots, T]} \quad \rightarrow \quad \tilde{C}(\Delta t)|_{[0, \dots, \frac{T}{2}]} = \frac{1}{2} (C(\Delta t) \pm C(T - \Delta t)) \quad . \quad (2.8)$$

Dabei geht das Argument von $\tilde{C}(\Delta t)$ nur noch bis $\frac{T}{2}$.

In dieser Arbeit wird ausschließlich die zeitsymmetrisierte Form des Korrelators \tilde{C} verwendet. Der Einfachheit halber wird im Folgenden auf die Tilde verzichtet.

Um aus dem Korrelator nun die Massen zu gewinnen, bedient man sich verschiedener Verfahren, von denen einige im Folgenden erläutert werden. Weitere Methoden wurden unter anderem in [Jü06] untersucht.

2.2. Direkter Fit

Unter der Annahme, dass die höheren Zustände in Gleichung (2.6) bei gegebenem Δt hinreichend abgeklungen sind, lässt sich nun die Masse des Grundzustandes m_1 durch einen zwei-Parameter-Fit ermitteln.

$$C(\Delta t) \approx \omega_1 \left(e^{-m_1 \Delta t} + e^{-m_1 (T - \Delta t)} \right) \quad (2.9)$$

Durch die Berechnung der „Effektiven Massen“ kann abgeschätzt werden, ob die angeregten und damit störenden Teilchenzustände mit $i \geq 2$ hinreichend abgeklungen sind. Dieses Verfahren wird im Kapitel 2.3 behandelt.

2.3. Effektive Massen

Das Verfahren der effektiven Massen wird primär dazu genutzt, einen geeigneten Bereich für das direkte Fitverfahren (Kapitel 2.2) zu ermitteln und einen Vergleichswert zu bestimmen. Das direkte Fitverfahren liefert jedoch meist die besseren Ergebnisse, da dabei die gesamte Statistik herangezogen wird, während die effektiven Massen lokal definiert sind.

Die effektive Masse $m_{\text{eff}}(t_1, t_2, T)$ ist für gegebenes t_1 , t_2 und T als die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \langle S^\dagger(t + t_1) S(t) \rangle &= \omega_1 \left(e^{-m_{\text{eff}} t_1} \pm e^{-m_{\text{eff}} (T - t_1)} \right) \\ \langle S^\dagger(t + t_2) S(t) \rangle &= \omega_1 \left(e^{-m_{\text{eff}} t_2} \pm e^{-m_{\text{eff}} (T - t_2)} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

definiert[MM94]. Dieses System lässt sich zu

$$\begin{aligned}
 r_{12} (x^{-\tau_2} \pm x^{\tau_2}) &= (x^{-\tau_1} \pm x^{\tau_1}) & (2.11) \\
 \text{mit } r_{12} &= \frac{\langle S(t+t_1)S(t) \rangle}{\langle S(t+t_2)S(t) \rangle} \\
 \tau_i &= \left(\frac{T}{2} - t_i \right) \\
 x &= e^{-m_{\text{eff}}}
 \end{aligned}$$

umformen.

Lösungen für x kann man mit numerischen Verfahren aus Gleichung (2.11) gewinnen. Die effektive Masse ist dann offensichtlich

$$m_{\text{eff}}(t_1, t_2, T) = -\log x \quad . \quad (2.12)$$

t_2 wird üblicherweise zu $t_2 = t_1 + 1$ gesetzt.

Wenn man m_{eff} in Abhängigkeit von t_1 grafisch darstellt, sollte sich ein Plateau ausbilden. In dem Bereich des Plateaus sollten die Einflüsse höherer Anregungszustände hinreichend unterdrückt sein.

2.4. Variationsmethode

Bereits 1981 wurde von K. Wilson vorgeschlagen, eine Variationsmethode zur Berechnung der Energieniveaus in Gittersimulationen zu nutzen. Diese Idee wurde in den kommenden Jahren und bis zum heutigen Tage eingesetzt [LW90; Ber82; MT83]. Lüscher und Wolff benutzten sie, um exemplarisch ein Energiespektrum von Zwei-Teilchen-Zuständen in einer Φ^4 -Theorie zu bestimmen [LW90]. Es lässt sich immer dann anwenden, wenn man eine Reihe von Interpolationsoperatoren des gleichen Quantenzustandes hat. Ein Beispiel dafür wären Glueball-Operatoren mit unterschiedlichem APE-Smearing (Kapitel 1.6.2).

Ausgangspunkt der Variationsmethode sind die zu den Interpolationsoperatoren $\mathcal{O}_i(x)$ gehörenden Hilbert-Operatoren $\hat{\mathcal{O}}_i$, mit denen Zustände im Hilbert-Raum konstruiert werden können:

$$|\Phi_i\rangle = e^{-t_0 \hat{H}/2} \hat{\mathcal{O}}_i |0\rangle \quad , \quad (2.13)$$

wobei \hat{H} der Hamilton-Operator ist [BDMvH⁺09].

Um die Grundzustandsenergie zu erhalten, kann man nun das folgende Variationsprinzip zu Grunde legen:

$$\lambda(t, t_0) = \max_{\{\alpha_i\}} \frac{\langle \Phi | e^{-(t-t_0)\hat{H}} | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \quad \text{mit} \quad |\Phi\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\Phi_i\rangle \quad \text{und} \quad t > t_0 \quad (2.14)$$

Offensichtlich ist $\lambda \propto e^{-(t-t_0)E_1}$, wobei E_1 die Grundzustandsenergie ist.

Interessanterweise ist $\lambda(t, t_0)$ gleichzeitig der größte Eigenwert eines generalisierten Eigenwertproblems (engl. generalized eigenvalue problem; gev) [LW90]:

$$C(\Delta t)\Psi = \lambda(\Delta t, t_0)C(t_0)\Psi \quad (2.15)$$

Dabei ist $C(\Delta t)$ wie schon in Kapitel 2.1 die Korrelationsfunktion der Zeitscheibenmittelwerte. Diese wird nun aber für verschiedene Kombinationen von Operatoren \mathcal{O}_i berechnet, so dass sich eine Korrelationsmatrix ergibt:

$$C_{ij}(\Delta t) = \left\langle S_i^\dagger(t + \Delta t) \cdot S_j(t) \right\rangle - \left\langle S_i^\dagger(t + \Delta t) \right\rangle \left\langle S_j(t) \right\rangle \quad (2.16)$$

Wird die Korrelationsmatrix aus N Operatoren gebildet, so gibt es N linear unabhängige Lösungen zum generalisierten Eigenwertproblem (Gleichung (2.15)). Lüscher und Wolff haben in [LW90] gezeigt, dass man dann die Energie des n -ten Zustandes durch folgende Gleichungen berechnen kann:

$$E_n = \lim_{t \rightarrow \infty} E_n^{\text{eff}}(t, t_0) \quad (2.17)$$

$$E_n^{\text{eff}}(t, t_0) = -\partial_t \ln(\lambda_n(t, t_0)) \equiv -\frac{1}{a} [\ln(\lambda_n(t+a, t_0)) - \ln(\lambda_n(t, t_0))] \quad , \quad (2.18)$$

wobei λ_n der n -t größte Eigenwert von Gleichung (2.15) ist, so dass der größte Eigenwert $\max_i (\{\lambda^i\})$ zum niedrigsten Zustand $\min_i (\{m_i\})$ gehört.

Auf den Eigenwerten können dann wieder die Methoden des direkten Fits und der effektiven Massen angewendet werden. Der Vorteil der Variationsmethode ist, dass die Information aller Operatoren genutzt wird, um einen optimalen Überlapp mit dem gesuchten Zustand zu erreichen.

Desweiteren kann man zeigen [BDMvH⁺09], dass für $t_0 \geq t/2$ mit $t - t_0 = \text{const.}$ der Fehler ϵ der effektiven Energien

$$E_n^{\text{eff}}(t, t_0) = E_n + \epsilon_n(t, t_0) \quad (2.19)$$

exponentiell mit $e^{-\Delta E_{N+1,n} t}$ abfällt, wobei $\Delta E_{N+1,n} = E_{N+1} - E_n$ die Energielücke zwischen dem gesuchten Zustand n und dem $N+1$ -ten Zustand ist. Dabei bezieht sich N auf die Anzahl der verwendeten Interpolationsoperatoren.

2.5. Matrix-Methode

Ein weiteres Verfahren, das mehrere Interpolationsoperatoren in Form einer Korrelationsmatrix nutzt, ist die Matrix-Methode[Mon10]. Dabei werden die Beiträge zu den M Eigenzuständen der Hamilton-Funktion an die Einträge der Korrelationsmatrix gefittet.

Für die Korrelationsmatrix aus N Operatoren (Gleichung (2.16)) führen wir die Notation

$$C(t_2, t_1) = \begin{pmatrix} C(t_2, t_1)_{aa} & C(t_2, t_1)_{ab} & \cdots & C(t_2, t_1)_{aN} \\ C(t_2, t_1)_{ba} & C(t_2, t_1)_{bb} & \cdots & C(t_2, t_1)_{bN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_2, t_1)_{Na} & C(t_2, t_1)_{Nb} & \cdots & C(t_2, t_1)_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

ein.

Die einzelnen Einträge der Matrix

$$C(t_2, t_1)_{ab} = (a|1)_{t_2} (b|1)_{t_1} + (a|2)_{t_2} (b|2)_{t_1} + \dots + (a|M)_{t_2} (b|M)_{t_1} \quad (2.21)$$

setzen sich aus verschiedenen Beiträgen der Eigenzustände der Hamilton-Funktion zusammen. Dabei haben wir die Kurzform

$$(a|i)_t := \langle 0 | \mathcal{O}_a(t) | i \rangle$$

eingeführt, wobei $|i\rangle$ der i -te der M betrachteten Eigenzustände des Hamilton-Operators ist.

Analog zu Kapitel 2.1 kann man zeigen, dass der Beitrag des i -ten Eigenzustandes zu $C(t_2, t_1)_{ab}$ für einen bosonischen Operator mit positiver Zeitsymmetrie auf einem Gitter mit temporaler Größe T

$$(a|i)_{t_2} (b|i)_{t_1} = (a|i)_0 (b|i)_0 \left[e^{-tm_i} + e^{-(T-t)m_i} \right] \quad (2.22)$$

$$\text{mit } t = t_2 - t_1$$

ist (vgl. Gleichung (2.6)).

Die Fit-Parameter im direkten Fit waren ω_i und m_i . Im Gegensatz dazu haben wir nun die $(\alpha|i)_0$ mit $\alpha = a, \dots, N$ und die m_i . Dabei ist natürlich $i = 1, \dots, M$. Daraus folgt die Gesamtzahl der Fit-Parameter

$$N_P = M(N + 1) \quad . \quad (2.23)$$

Aus der Simulation erhalten wir die $C(t_2, t_1)_{ab}$. Das entspricht

$$N_C = (t_2 - t_1 + 1) \frac{N(N + 1)}{2} \quad (2.24)$$

Datenpunkten, an die wir die N_P Parameter mit nicht-linearen Fits anfitten können.

Auch hier gilt wieder, dass es genügt, einige wenige niedrige Zustände zu betrachten, da höhere Zustände exponentiell unterdrückt werden und für $t, (T - t) \gg 1$

verschwinden. Dies rechtfertigt, die Betrachtung der im Allgemeinen unendlich vielen Eigenzustände auf die M niedrigsten einzuschränken.

In der Praxis bedient man sich gängiger Software-Bibliotheken wie den „NAG Numerical Libraries“ [Num] oder der „GNU Scientific Library“ [GNU], um die nicht-linearen numerischen Fits effizient durchzuführen.

In dieser Arbeit wird hauptsächlich dieses Verfahren eingesetzt.

3. Auswertung und Ergebnisse

Die Daten, die dieser Arbeit zu Grunde liegen, wurden mit Hilfe eines Polynomial-Hybrid-Monte-Carlo (PHMC) Update-Algorithmus erzeugt. Im Eichsektor wurde eine auf Baumgrafen-Näherung verbesserte Symanzik-Wirkung und im Fermionischen Sektor eine (unverbesserte) Wilson-Wirkung eingesetzt. Dabei wurden zwei Gitter mit $L^3 \times T = 16^3 \times 32$ und $24^3 \times 48$ Gitterpunkten benutzt. Neben der Untersuchung der Massen lassen sich mit Hilfe des größeren Gitters eventuelle Finite-Size-Effekte abschätzen.

In Gittersimulationen wird die Masse m üblicherweise nur als Produkt mit dem Gitterabstand a gemessen. So wird die Masse in dieser Arbeit auch überwiegend angegeben. Um den dimensionslosen Wert am in eine physikalische Größe umzurechnen, kann man sich des Sommer-Parameters r_0 bedienen. Er entspricht einer physikalischen Länge von $r_0 \approx 0.5$ fm. Auf dem Gitter lässt sich für jedes κ das Verhältnis r_0/a aus dem statischen Quark-Antiquark-Potential bestimmen[GL10]. Damit lassen sich Gitterlängen und Massen bei Bedarf in physikalische Einheiten umrechnen.

Das statische Quark-Antiquark-Potential hängt seinerseits von dem Simulationsparameter β ab. Auf beiden Gittern wurde $\beta = 4.0$ gewählt, was einem $r_0/a = 3.74(3)$ für $\kappa = 0.1440$ und $r_0/a = 3.83(5)$ für $\kappa = 0.1443$ entspricht[FMM⁺08].

Weiterhin seien zwei Bemerkung vorab gemacht.

- Die Informationsdichte in den Grafiken ist recht hoch, so dass einige Erläuterungen hilfreich sind. Auf der x-Achse sind mit Ausnahme der ersten Abbildung 3.1 sowohl t_1 als auch t_2 dargestellt (in besagter Abbildung sind es N_{APE} und t_2). Dabei sind die Fits nach festen t_1 gruppiert. Weiter rechts auf der x-Achse liegende Gruppierungen entsprechen höheren t_1 und innerhalb dieser Gruppierungen steigt t_2 an. Die Farbkodierung entspricht wie in den Legenden erläutert verschiedenen N_{APE} oder bei Matrix-Fits den verschiedenen Massen m_i . Auch hier bildet die erste Abbildung eine Ausnahme. Sie stellt t_1 farblich kodiert dar.
- Die Fitalgorithmen hängen empfindlich von den Startwerten ab. Ein Beispiel für schlecht gewählte Startwerte ist in Abbildung 3.1 gezeigt. Man sieht, dass die Fehler mancher Punkte ungewöhnlich groß sind und manche Punkte gar nicht dargestellt werden. An letzteren Punkten ist der Fitalgorithmus nicht konvergiert.

3.1. $16^3 \times 32$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1440$

Glueball

Die Gluebälle wurden mit dem einfachen Plaquette-Operator aus Gleichung (1.44) bestimmt. Die Eichlinks wurden APE-verschmiert.

An dem Punkt $\kappa = 0.1440$ wurden ~ 25000 Konfigurationen erzeugt.

Um optimale Parameter ϵ_{APE} und N_{APE} und damit einen guten Wert für die skalare Glueballmasse zu bestimmen, wurde der Glueball-Operator für verschiedene Parameter an jeweils 4000 Konfigurationen gemessen und anschließend die niedrigste Masse mit Hilfe direkter Fits und der Matrix-Methode bestimmt.

Exemplarisch ist in Abbildung 3.1 ein solcher Test mit $\epsilon_{\text{APE}} = 0.1$ geplottet. Es handelt sich dabei um Matrix-Fits mit jeweils zwei geschmierten Operatoren. Auf

der x-Achse ist $N_{\text{APE}}^{(1)}$ des einen Operators aufgetragen, während der zweite Operator $N_{\text{APE}}^{(2)} = N_{\text{APE}}^{(1)} + 5$ hatte.

Man erkennt an diesem Beispiel einige interessante Eigenschaften, die sich auch bei allen anderen Tests zeigten:

- Wird t_1 (in der Grafik farbkodiert) erhöht, steigt der Fehler stark an. Schon bei $t_1 = 4$ sind keine sinnvollen Aussagen mehr möglich.
- Es ist durchaus möglich, dass der Wert für die Masse durch smearing zunächst ansteigt, bevor er zu sinken beginnt (vgl. Abb. 3.1 $t_1=3$ bzw. blaue Datenpunkte).
- Wird $t_2 - t_1$ zu klein gewählt, kann die Masse sowohl unter- als auch überschätzt werden. In Abbildung 3.1 stabilisiert sich die Masse für $t_1 = 3$ erst bei $t_2 \approx 10$.
- Wird die Masse mit $t_1 = 1$ bestimmt, liegt sie fast immer höher als für $t_1 > 1$. Dies wird durch die Theorie (Kapitel 2.1) vorhergesagt und bestätigt schön die exponentielle Dämpfung höherer Zustände durch steigendes t_1 .

Mit den besten Parametern wurden dann alle 25000 Konfigurationen ausgewertet. Dabei wurden sowohl herkömmliche Fits als auch die Matrix-Methode aus Kapitel 2.5 verwendet. Die entsprechenden Plots sind für $\epsilon_{\text{APE}} = 0.2$ und $\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ in Abbildung 3.2 und 3.3 beziehungsweise in 3.4 und 3.5 dargestellt.

In Tabelle 3.1 sind die Massen der verschiedenen Durchläufe aufgelistet. Der mit $am = 0.71 \pm 0.18$ „beste“ Wert für die skalare Glueballmasse wurde mit $\epsilon_{\text{APE}} = 0.2$ und $N_{\text{APE}} = 20$ durch einen direkten Fit erzielt. Da wir uns der wahren Masse von oben annähern, war eine niedrige Masse bei gleichzeitig niedrigem Fehler Kriterium bei der Auswahl des „besten“ Wertes.

Die Matrixfits ergeben zwar im Vergleich mit der herkömmlichen Methode ein konsistenteres Bild, haben dafür aber einen leicht größeren Fehler. Allerdings bewegen sich die geringen Abweichungen der Methoden deutlich im Bereich der Fehler.

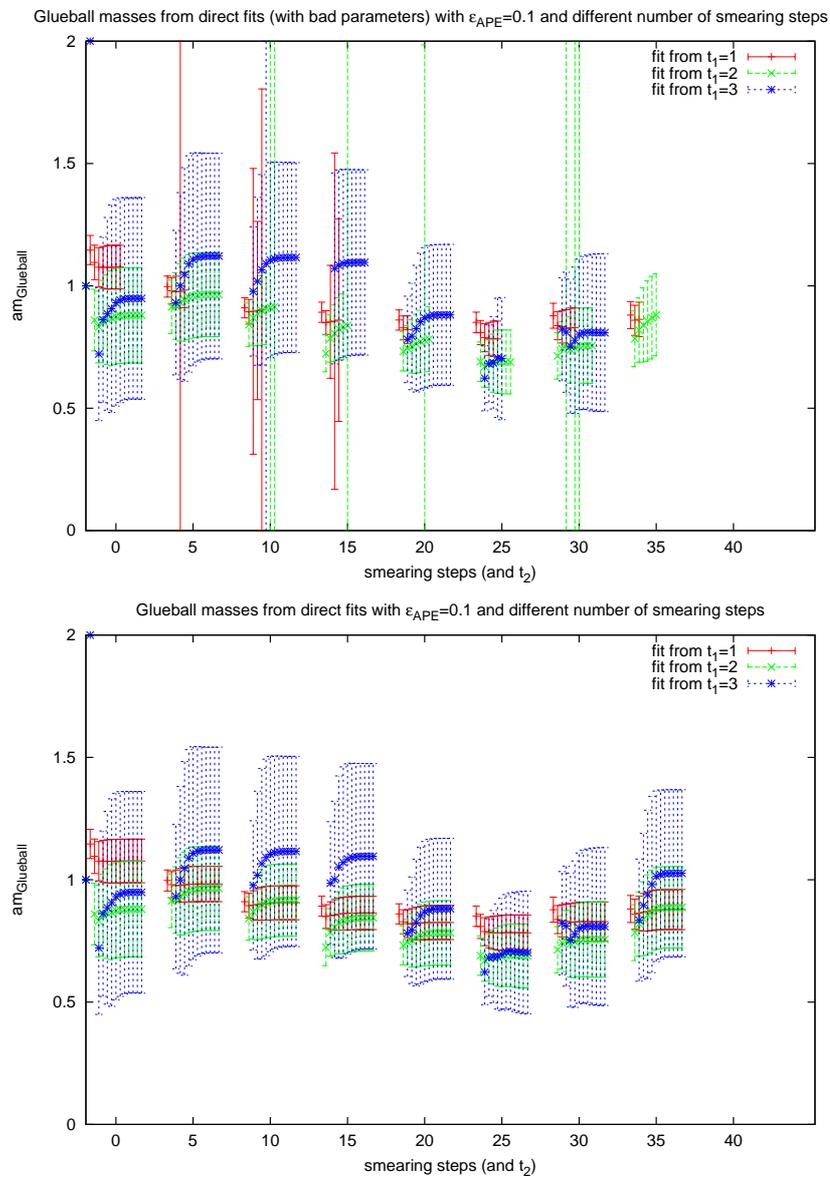


Abbildung 3.1.: In dieser Abbildung wurde zweimal der gleiche Datensatz gefittet. Lediglich die Startwerte des Fitalgorithmus wurden unterschiedlich gewählt. Dies soll verdeutlichen, dass die Wahl der Startparameter große Auswirkung auf die Konvergenz der Fitalgorithmen hat.

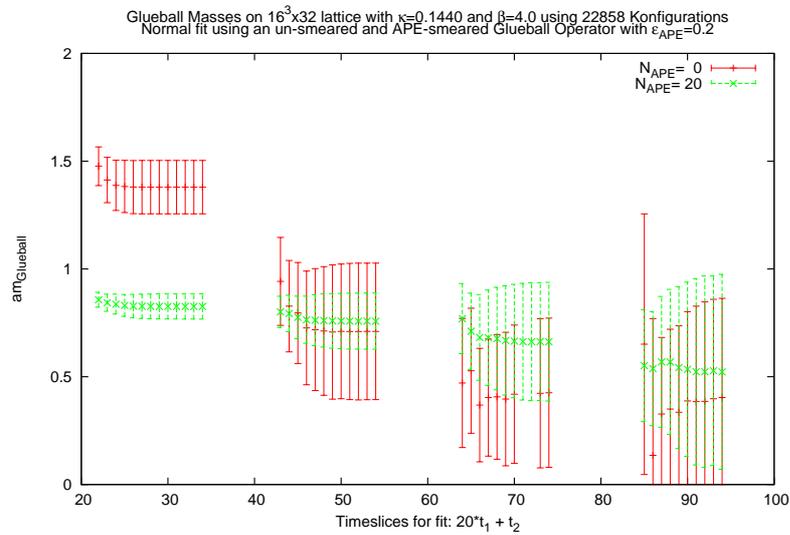


Abbildung 3.2.: Skalare Glueballmasse aus direkten Fits für $\epsilon_{APE} = 0.2$ und verschiedene N_{APE} .

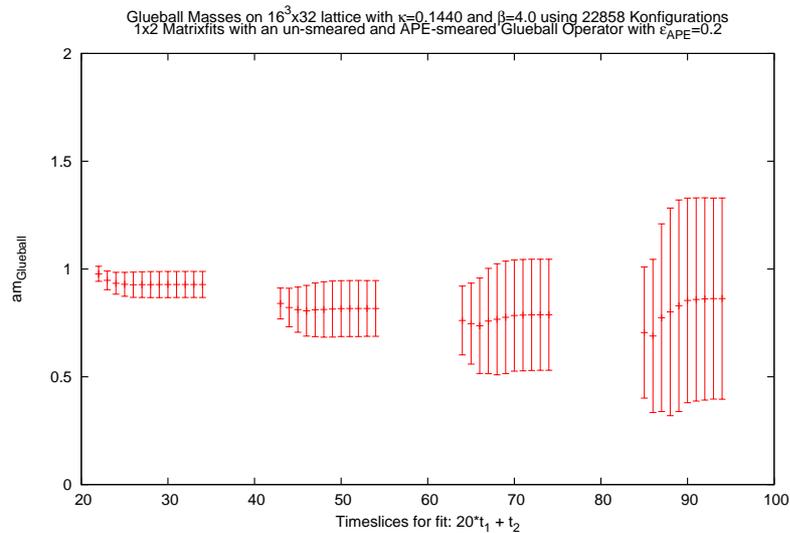


Abbildung 3.3.: Skalare Glueballmasse aus Fits mit der Matrix-Methode. Die Matrix wurde mit einem ungeschmierten und einem mit $\epsilon_{APE} = 0.2$ und $N_{APE} = 20$ geschmierten Glueball-Operator gebildet.

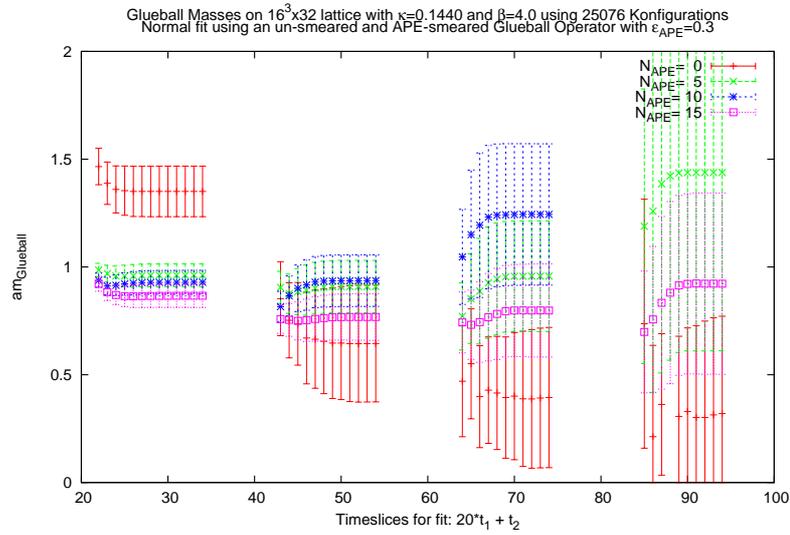


Abbildung 3.4.: Skalare Glueballmasse aus direkten Fits für $\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ und verschiedene N_{APE} .

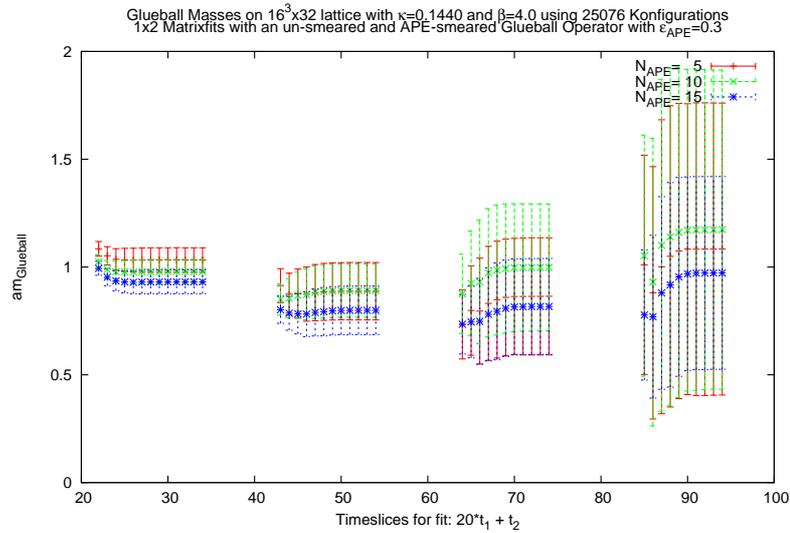


Abbildung 3.5.: Skalare Glueballmasse aus drei Matrix-Fits. Die Matrizen wurden jeweils mit einem ungeschmierten und einem geschmierten Operator gebildet ($\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ und N_{APE} siehe Legende).

σ -Glueball-Mischung

Mit der Matrix-Methode ist es prinzipiell möglich, Massen aus unterschiedlichen Operatoren, die Zustände mit gleichen Quantenzahlen beschreiben, zu extrahieren. In diesem Abschnitt verwenden wir Operatoren für den skalaren Glueball und das skalare Meson σ . Beide haben $J^{PC} = 0^{++}$. Für den Glueball Operator benutzen wir dabei die in Kapitel 3.1 gewonnenen Smearingparameter. Die Ergebnisse der Matrix-Fits sind in Abbildung 3.6 und Tabelle 3.2 wiedergegeben.

Die niedrigste Masse aus den Matrix-Fits interpretiert man als die Masse des leichtesten skalaren Mesons, also des σ -Teilchens. Man sieht, dass sie mit $am = 0.32$ deutlich unter der Masse von $am_\sigma = 0.538$, die nur aus dem σ -Operator bestimmt wurde, liegt. Daraus lässt sich schließen, dass die Mischung mit Gluebällen nicht zu vernachlässigen ist.

3.2. $16^3 \times 32$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1443$

Am Punkt $\kappa = 0.1443$ wurden 12200 Konfigurationen erzeugt, die wie in Kapitel 3.1 behandelt wurden. Zunächst wurden verschiedene Kombinationen von Smearingpa-

Tabelle 3.1.: Skalare Glueball Massen aus Fits mit verschiedenen Smearingparametern.

Fitmethode	ϵ_{APE}	N_{APE}	N_{Konf}	am_{Glueball}
direkter Fit	0.2	20	22858	0.71 ± 0.18
Matrix-Methode	0.2	0; 20	22858	0.75 ± 0.19
direkter Fit	0.3	15	25076	0.73 ± 0.16
Matrix-Methode	0.3	0; 15	25076	0.75 ± 0.17

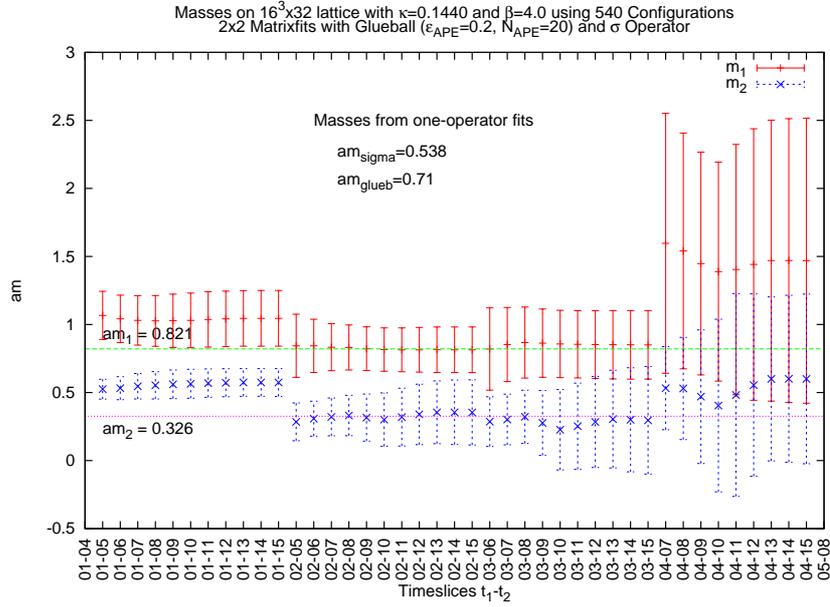


Abbildung 3.6.: Massen aus Matrix-Fit mit einem geschmierten Glueball-Operator mit $\epsilon_{APE} = 0.2$ und $N_{APE} = 20$ und einem σ -Operator. Die angegebenen „one-operator“ Massen beziehen sich auf die Ergebnisse in [FMM⁺07b; FMM⁺07a; FMM⁺08], die ohne Matrix-Methode berechnet wurden.

Tabelle 3.2.: Daten der Matrix-Fits bei $\kappa = 0.1440$. Der Glueball-Operator wurde mit $\epsilon_{APE} = 0.2$ und $N_{APE} = 20$ geschmiert.

Zeitscheiben	am_i		am_{σ}^a
1 - 15	0.57 ± 0.10	1.05 ± 0.20	0.538 ± 0.041
2 - 11	0.32 ± 0.21	0.81 ± 0.16	
3 - 15	0.28 ± 0.33	0.85 ± 0.25	

^a Die Masse für σ ist zum Vergleich angegeben und wurde [FMM⁺08] entnommen.

rametern mit niedriger Statistik ausprobiert, um dann mit guten Parametern die volle Statistik auszuwerten.

In einem weiteren Schritt wurden dann Matrixfits mit dem σ -Operator durchgeführt.

Glueball

In Abbildung 3.7 sind die Ergebnisse der normalen Fits für den ungeschmierten und den mit $\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ und $N_{\text{APE}} = 5$ geschmierten Glueball-Operator zu sehen. Die Fehler sind deutlich größer als bei $\kappa = 0.1440$. Dies ist zum einen auf die nur halb so große Statistik zurückzuführen, zum anderen aber sicherlich dadurch begründet, dass wir uns näher an κ_c^1 befinden. An Abbildung 3.7 wird auch die Wichtigkeit des Smearings deutlich, da unter anderem die Fehler deutlich reduziert werden können.

Eine tabellarische Übersicht über die Ergebnisse findet man in Tabelle 3.3.

σ -Glueball-Mischung

Obwohl bei $\kappa = 0.1443$ nur 358 Konfigurationen des σ -Operators zur Verfügung standen, ließen sich dennoch mit der Matrix-Methode erfolgreich zwei Massenzustände extrahieren. Die Fits sind in Abbildung 3.8 zu sehen. Es sei explizit darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zu den bisherigen Plots hier auch die Fits mit $t_1 = 0$ dargestellt sind. Für $t_1 \geq 3$ waren keine Fits mehr möglich. Charakteristische Daten dieser Fits sind in Tabelle 3.4 zu finden.

Auch hier findet man eine deutlich niedrigere Masse als durch den reinen σ -Operator. Dies ist konsistent mit der Glueballmischung, die wir schon bei $\kappa = 0.1440$ in Kapitel 3.1 festgestellt haben.

¹ κ_c ist der Punkt, an dem die Quark-Masse $m_q = 0$

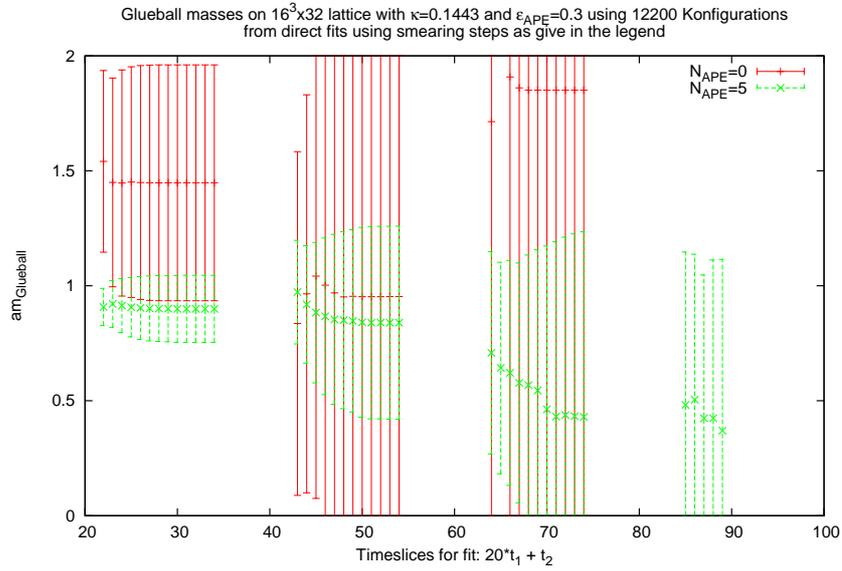


Abbildung 3.7.: Glueballmasse aus direkten Fits von ~ 12200 Konfigurationen bei $\kappa = 0.1443$ und $\beta = 4.0$ für einen ungeschmierten und einen mit $\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ und $N_{\text{APE}} = 5$ geschmierten Glueball-Operator.

Tabelle 3.3.: Daten der direkten Fits bei $\kappa = 0.1443$, $\epsilon_{\text{APE}} = 0.3$ und $N_{\text{APE}} = 5$

Zeitscheiben	am_{Glueball}
1 - 15	0.90 ± 0.15
2 - 15	0.84 ± 0.42
3 - 15	0.43 ± 0.80

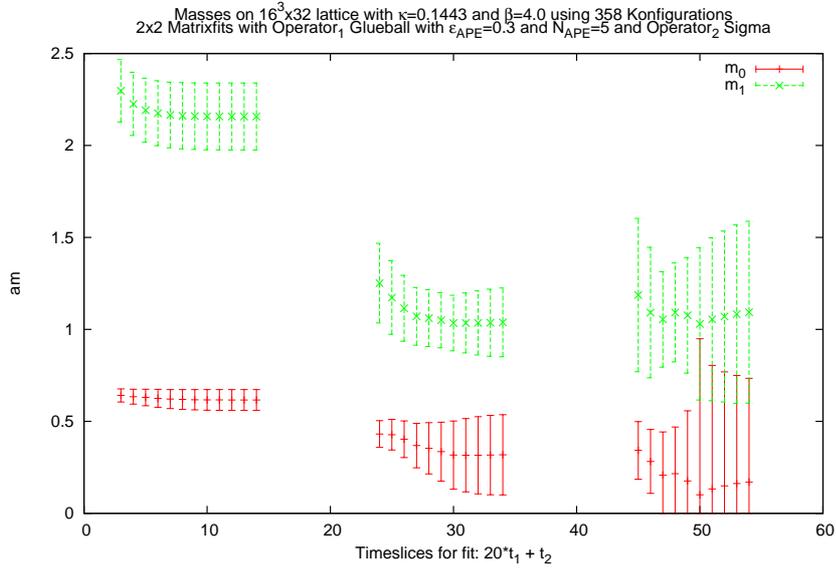


Abbildung 3.8.: Massen aus einem Matrix-Fit von 358 Konfigurationen auf einem $16^3 \times 32$ Gitter bei $\kappa = 0.1443$. Die Matrix wurde aus einem mit $\epsilon_{APE} = 0.3$ und $N_{APE} = 5$ geschmierten Glueball-Operator und dem σ -Operator gebildet.

Tabelle 3.4.: Daten der Matrix-Fits bei $\kappa = 0.1443$. Der Glueball-Operator wurde mit $\epsilon_{APE} = 0.3$ und $N_{APE} = 5$ geschmiert.

Zeitscheiben	am_i		am_σ^a
0 - 15	0.62 ± 0.06	2.16 ± 0.18	0.485 ± 0.046
1 - 12	0.32 ± 0.21	1.03 ± 0.17	
2 - 15	0.17 ± 0.57	1.09 ± 0.50	

^a Die Masse für σ ist zum Vergleich angegeben und wurde [FMM⁺08] entnommen.

3.3. $24^3 \times 48$; $\beta = 4.0$; $\kappa = 0.1443$

Im Punkt $\kappa = 0.1443$ wurden auf einem $24^3 \times 48$ Gitter 470 Konfigurationen für den skalaren Glueball und das σ -Teilchen erzeugt und ausgewertet. Durch einen Vergleich mit dem $16^3 \times 32$ Gitter bei gleichem κ lassen sich so eventuelle Finite-Size-Effekte abschätzen.

Skalarer Glueball

Auf dem $24^3 \times 48$ Gitter gab es erneut erhebliche Schwierigkeiten, verlässliche Massen aus den Daten zu extrahieren. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 3.9 zu sehen. Während die Daten für das σ -Teilchen einer Plausibilitätsprüfung standhalten, kommen bei den Daten des skalaren Glueballs Zweifel auf. Während sie für $t_1 = 1$ schnell ein Plateau bilden, ist ein solches schon für $t_1 = 2$ nicht mehr deutlich zu erkennen. Daher lässt sich leider nicht abschätzen, ob die Annahme, dass die höheren Anregungszustände unterdrückt sind, hinreichend erfüllt ist. Weiterhin sind die Fehler für $t_1 = 1$ bedauerlicherweise mit 1.13 ± 0.61 sehr groß, was die Aussagekraft weiter schmälert.

σ -Teilchen

Die Daten für das σ -Teilchen auf dem $24^3 \times 48$ Gitter bei $\kappa = 0.1443$ und $\beta = 4.0$ sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Sie zeigen ein konsistentes Bild über den gesamten dargestellten Datensatz. Die Massen der verschiedenen Zeitscheiben sind in Tabelle 3.5 zusammen gefasst. Ihre Unterschiede liegen jedoch bequem innerhalb der Fehler.

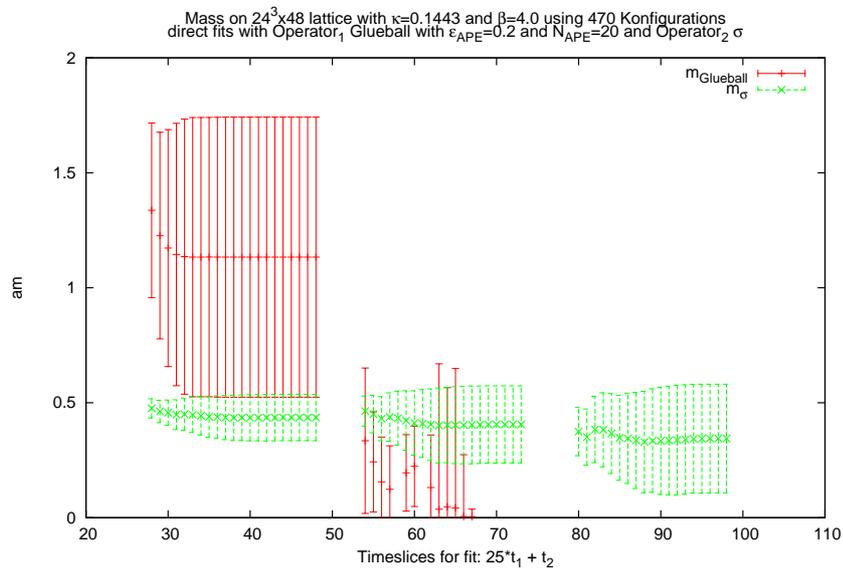


Abbildung 3.9.: Glueball- und σ -Massen aus direkten Fits bei $\kappa = 0.1443$ auf dem $24^3 \times 48$ Gitter. Beim Glueball-Operator wurde mit $\epsilon_{APE} = 0.2$ und $N_{APE} = 20$ geschmiert.

Tabelle 3.5.: Daten der direkten Fits bei $\kappa = 0.1443$ auf einem $24^3 \times 48$ Gitter.

Zeitscheiben	am_σ	am_{Glueball}
1 - 16	0.43 ± 0.10	1.13 ± 0.61
2 - 17	0.40 ± 0.17	unbestimmbar
3 - 18	0.34 ± 0.24	unbestimmbar

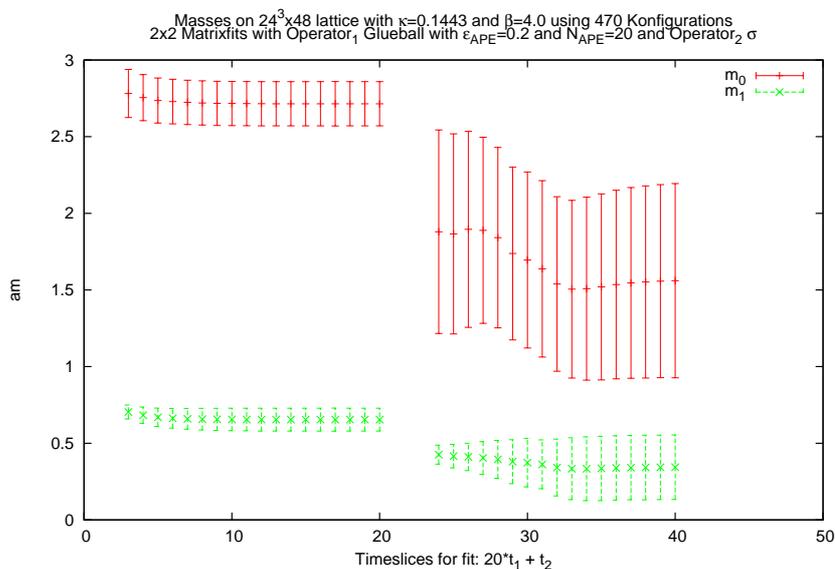


Abbildung 3.10.: Massen aus einem Matrix-Fit von 470 Konfigurationen auf einem $24^3 \times 48$ Gitter bei $\kappa = 0.1443$. Die Matrix wurde aus einem mit $\epsilon_{APE} = 0.2$ und $N_{APE} = 20$ geschmierten Glueball-Operator und dem σ -Operator gebildet.

σ -Glueball-Mischung

Neben den Fits für die einzelnen Operatoren wurde mit Hilfe der Matrix-Methode versucht, Masseneigenzustände zu bestimmen. Für das $24^3 \times 48$ Gitter ist das Ergebnis in Abbildung 3.10 zu sehen. Im Vergleich zu den direkten Fits scheint die Matrix-Methode wieder stabilere Fits zu produzieren.

In Tabelle 3.6 sind die Ergebnisse denen des $16^3 \times 32$ Gitters gegenübergestellt. Man sieht, dass Finite-Size-Effekte hier keine Rolle zu spielen scheinen.

Tabelle 3.6.: Vergleich der Ergebnisse der Matrix-Methode auf dem $16^3 \times 32$ und $24^3 \times 48$ Gitter bei $\beta = 4.0$ und $\kappa = 0.1443$. Eventuelle Finite-Size-Effekte scheinen zumindest für die tiefliegende Masse keine Rolle zu spielen.

$am_i(t_1)$	$16^3 \times 32$	$24^3 \times 48$
$am_0(0)$	0.62 ± 0.06	0.65 ± 0.07
$am_1(0)$	2.16 ± 0.18	2.72 ± 0.14
$am_0(1)$	0.32 ± 0.21	0.33 ± 0.20
$am_1(1)$	1.03 ± 0.17	1.51 ± 0.56

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse der Massen, die noch einmal in Tabelle 4.1 zusammengefasst sind, sind in Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen und anderen Ergebnissen wie zum Beispiel [FMM⁺07b; FMM⁺08].

Neben der Bestimmung der Massen war Ziel dieser Arbeit, die Tauglichkeit der Matrix-Methode als Werkzeug zur Massenbestimmung zu untersuchen. Der Autor betrachtet die Matrix-Methode, trotz der gegebenen Schwierigkeiten zum Beispiel bei der Wahl der Startparameter der Fitalgorithmen, als nützliches Werkzeug für die Auswertung von Gittersimulationen. Gerade für geschmierte Operatoren erhält man über einen größeren Bereich stabile Fits, so dass die genaue Wahl der verwendeten Smearingparameter weniger ins Gewicht fällt.

In dieser Arbeit wurden in der Matrix-Methode ausschließlich 2×2 Matrizen benutzt. Eine interessante Fortführung dieser Untersuchungen könnte das Verhalten der Methode bei Verwendung von $N \times N$ Matrizen erörtern. Eine weitere Verbesserung würde darin bestehen, wenn es gelänge, die Wahl der Startparameter für die Fitalgorithmen noch weiter zu verbessern. Dadurch würde man eine große Fehlerquelle ausschalten.

Ich möchte nun mit den Worten Kenneth G. Wilsons, dem Begründer der Gitter Eichtheorie, schließen:

„Our knowledge of the true nature of the theory of strong interactions is still limited and uncertain.“[Wil05]

Tabelle 4.1.: Zusammenfassung der Massen

Teilchen		Gitter	am	
Skalarer Glueball		$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1440$	0.71 ± 0.18	
		$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1443$	0.84 ± 0.42	
		$24^3 \times 48$ bei $\kappa = 0.1443$	1.13 ± 0.61	
σ -Teilchen		$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1440$	0.538 ± 0.041^1	
		$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1443$	0.485 ± 0.046^1	
		$24^3 \times 48$ bei $\kappa = 0.1443$	0.43 ± 0.10	
σ -Glueball-Mischung		m_0	$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1440$	0.33 ± 0.22
			$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1443$	0.32 ± 0.21
			$24^3 \times 48$ bei $\kappa = 0.1443$	0.33 ± 0.20
		m_1	$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1440$	0.82 ± 0.16
			$16^3 \times 32$ bei $\kappa = 0.1443$	1.03 ± 0.17
			$24^3 \times 48$ bei $\kappa = 0.1443$	1.51 ± 0.56

¹Diese Ergebnisse wurden nicht im Rahmen dieser Arbeit produziert. Sie sind [FMM⁺08] entnommen.

A. Anhang

A.1. Die SU(3)

Allgemein hat eine SU(N) $N^2 - 1$ Generatoren. Die acht Generatoren der SU(3) werden üblicherweise mit T_i bezeichnet, wobei $i = 1, \dots, 8$. Sie erfüllen die folgende Kommutatorrelation:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{A.1})$$

Die total-antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} haben die Werte

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.2})$$

und alle übrigen sind gleich 0.

Die Generatoren der SU(3) lassen sich als Matrizen darstellen. Diese sind nur bis auf die Wahl einer Basis eindeutig bestimmt. Eine übliche Wahl ist durch die Gell-Mann-Matrizen in folgender Weise gegeben:

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad a = 1, \dots, 8 \quad (\text{A.3})$$

Dies ist vollkommen analog zur SU(2), wo sich die Generatoren τ_a aus den Pauli-Matrizen σ_a gewinnen lassen:

$$\tau_a = \frac{\sigma_a}{2} \quad a = 1, 2, 3$$

Die Gell-Mann-Matrizen gehen auf Murray Gell-Mann zurück und haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & (A.4) \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sie können zur Bildung der Generatoren einer $SU(3)$ herangezogen werden (siehe Kapitel A.1).

A.2. Die Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung wurde 1928 von Paul Dirac formuliert und bildet die Basis der relativistischen Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie. Sie beschreibt das Verhalten von Fermionen bzw. fermionischen Feldern. Sie leitet sich aus der Lagrange-Dichte der Dirac-Theorie eines geladenen Fermions mit Masse m her:

$$\mathcal{L} = i \hbar \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi - mc \bar{\Psi} \Psi \quad (A.5)$$

$$\Rightarrow 0 = (i \hbar \gamma_\mu \partial^\mu - mc) \Psi, \quad (A.6)$$

wobei die γ_μ die Dirac-Matrizen (A.2.1), Ψ der Dirac-Spinor, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und \hbar das reduzierte plancksche Wirkungsquantum sind. Der sogenannte Lorentzindex μ läuft von 1 bis 4.

A.2.1. Die Dirac-Matrizen

Die Dirac-Matrizen γ_μ sind 4 x 4-Matrizen und haben in der Dirac-Darstellung folgende Gestalt:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix},$$

(A.7)

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & i & & \\ & & i & \\ -i & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Alle ausgelassenen Einträge sind gleich 0. Andere, aber äquivalente Darstellungen sind die Weyl-Darstellung und die Majorana-Darstellung, die hier aber nicht explizit angegeben werden.

A.3. Graßmann-Zahlen

Die von Hermann Graßmann entwickelte Graßmann-Algebra ist für einen Satz von N Generatoren $\eta_i, i = 1, \dots, N$ durch

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

(A.8)

definiert.

Eine wichtige Konsequenz dieser Eigenschaft ist, dass

$$\eta_i^2 = \eta_i \eta_i = -\eta_i \eta_i = 0$$

(A.9)

gilt.

Um eine konsistente Analysis mit Graßmann-Zahlen zu konstruieren, definiert man die folgenden Ableitungs- und Integrationsregeln.

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} 1 = 0 \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_j = \delta_{ij} \tag{A.11}$$

$$\int 1 d\eta_i = 0 \tag{A.12}$$

$$\int \eta_j d\eta_i = \delta_{ij} \tag{A.13}$$

Literaturverzeichnis

- [AeaPDG08] C. Amsler et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Phys. Lett. B* 667 (2008).
<http://pdg.lbl.gov>
- [ASV03] A. Armoni, M. Shifman und G. Veneziano. Exact Results in Non-Supersymmetric Large N Orientifold Field Theories. *Nucl. Phys. B* 667 (2003) 170.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0302163>
- [BDMvH⁺09] B. Blossier, M. Della Morte, G. von Hippel, T. Mendes und R. Sommer. On the generalized eigenvalue method for energies and matrix elements in lattice field theory. *JHEP* 0904 (2009) 094.
<http://arxiv.org/abs/0902.1265>
- [Ber82] B. Berg. Glueball Calculations in Lattice Gauge Theories. *J. Phys. Colloques* 43 (1982) 272.
[doi:10.1051/jphyscol:1982355](https://doi.org/10.1051/jphyscol:1982355)
- [Cre04] M. Creutz. Ambiguities in the up quark mass. *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 162003.
[doi:10.1103/PhysRevLett.92.162003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.162003)
- [Cre07] M. Creutz. One flavor QCD. *Ann. Phys.* 322 (2007) 1518.
[doi:10.1016/j.aop.2007.01.002](https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.01.002)

- [Fey48] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.* 20 (1948) 367.
<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>
- [FMM⁺07a] F. Farchioni, I. Montvay, G. Münster, E. E. Scholz, T. Sudmann und J. Wuilloud. Hadron masses in QCD with one quark flavour. *Eur. Phys. J. C* 52 (2007) 305.
<http://arxiv.org/abs/0706.1131>
- [FMM⁺07b] F. Farchioni, I. Montvay, G. Münster, E. E. Scholz, T. Sudmann und J. Wuilloud. Hadron spectrum of QCD with one quark flavor. *PoS LAT* 135 (2007).
<http://arxiv.org/abs/0710.4454>
- [FMM⁺08] F. Farchioni, I. Montvay, G. Münster, E. E. Scholz, T. Sudmann und J. Wuilloud. Hadron spectrum of QCD with one quark flavor. *PoS LAT* 128 (2008).
<http://arxiv.org/abs/0810.0161>
- [GL10] C. Gattringer und C. B. Lang. Quantum Chromodynamics on the Lattice. Springer-Verlag, 2010.
doi:10.1007/978-3-642-01850-3
- [GNU] GNU Project. GNU Scientific Library.
<http://www.gnu.org/software/gsl/>
- [GSW62] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.* 127 (1962) 965.
doi:10.1103/PhysRev.127.965

- [GW73] D. J. Gross und F. Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343.
[doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343)
- [Hei00] F. Heitger. Darstellungstheorie der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der N=1 SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Theoretische Physik (2000).
<http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/Arbeiten/heitgerf.ps.gz>
- [Jü06] H. Jürgens. Methoden der Spektrumanalyse. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Theoretische Physik (2006).
- [LW85] M. Lüscher und P. Weisz. On-shell Improved Lattice Gauge Theories. *Commun. Math. Phys.* 97 (1985) 59.
[doi:10.1007/BF01206178](https://doi.org/10.1007/BF01206178)
- [LW90] M. Lüscher und U. Wolff. How to Calculate the Elastic Scattering Matrix in Two-Dimensional Quantum Field Theories by Numerical Simulation. *Nucl. Phys. B* 339 (1990) 222.
[doi:10.1016/0550-3213\(90\)90540-T](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90540-T)
- [McN08] C. McNeile. Lattice status of gluonia/glueballs. *Nucl. Phys. B* 186 (2008) 264.
<http://arXiv.org/abs/0809.2561v1>
- [MM94] I. Montvay und G. Münster. Quantum Fields on a Lattice. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.
[doi:10.2277/0521599172](https://doi.org/10.2277/0521599172)

- [Mon10] I. Montvay. Persönliche Mitteilungen (2009/10).
- [MP99] C. J. Morningstar und M. Peardon. The glueball spectrum from an anisotropic lattice study. *Phys. Rev. D* 60 (1999) 034509.
doi:10.1103/PhysRevD.60.034509
- [MT83] C. Michael und I. Teasdale. Extracting Glueball Masses From Lattice QCD. *Nucl. Phys. B* 215 (1983) 433.
doi:10.1016/0550-3213(83)90674-0
- [MW00] G. Münster und M. Walzl. Lattice Gauge Theory - A Short Primer (2000).
<http://arxiv.org/abs/hep-lat/0012005>
- [Noe18] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* (1918) 235.
- [Nov00] S. F. Novaes. Standard Model: An Introduction (2000).
<http://arXiv.org/abs/hep-ph/0001283>
- [Num] Numerical Algorithms Group. NAG Numerical Libraries.
<http://www.nag.com/numeric/>
- [Pol73] H. D. Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1346.
doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [Sch02] S. Scherer. Introduction to Chiral Perturbation Theory. *Adv. Nucl. Phys.* 27 (2002) 277.
<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0210398>
- [Spa98] K. Spanderen. Monte-Carlo-Simulationen einer SU(2) Yang-Mills-Theorie mit dynamischen Gluinos. Doktorarbeit, Westfälische

Wilhelms-Universität Münster, Institut für Theoretische Physik
(1998).

- [Sym83] K. Symanzik. Continuum limit and improved action in lattice theories: (I). Principles and φ^4 theory. *Nucl. Phys. B* 226 (1983) 187.
[doi:10.1016/0550-3213\(83\)90468-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90468-6)
- [Wil74] K. G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D* 10 (1974) 2445.
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>
- [Wil05] K. G. Wilson. The Origins of Lattice Gauge Theory. *Nucl. Phys. B* 140 (2005) 3.
<http://arxiv.org/abs/hep-lat/0412043>

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Lorenz Quack, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit selbstständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den _____ Unterschrift: _____

Danksagung

Ich möchte den folgenden Personen für ihre Unterstützung danken.

- Zunächst einmal ein herzliches Dankeschön an meine Eltern. Ihr habt mich immer geistig, moralisch und nicht zuletzt auch finanziell unterstützt. Danke!
- Alexander Ferling, du hast mir vor allem in der Anfangszeit hier im Institut wertvolle Unterstützung gegeben.
- Für die Durchsicht der Arbeit, Korrekturen und Verbesserungsvorschläge möchte ich Federico Farchioni, Alexander Ferling und Irmgard Quack danken.
- Danke an meine Freunde aus Freiburg und Münster, die mit mir die Höhen und Tiefen des Studiums durchschritten haben.

