

Ward-Identitäten  
in der  
N=1 Super-Yang-Mills-Theorie

Als Diplomarbeit im November 1997 vorgelegt von  
Silke Luckman

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik I  
Wilhelm-Klemm-Straße 9  
48149 Münster







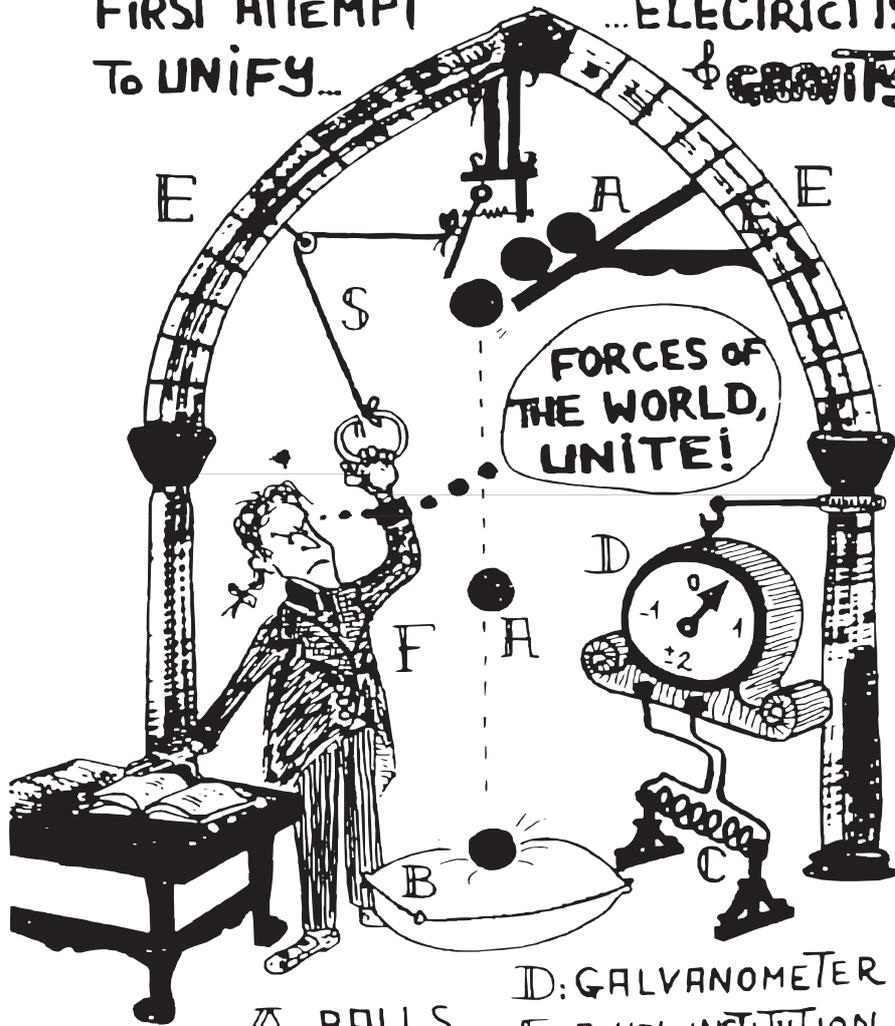
Ward-Identitäten  
in der  
 $N = 1$  Super-Yang-Mills-Theorie

Als Diplomarbeit im November 1997 vorgelegt von  
Silke Luckmann

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik I  
Wilhelm-Klemm-Straße 9  
48149 Münster



FIRST ATTEMPT  
TO UNIFY... ELECTRICITY  
& GRAVITY



A: BALLS  
B: CUSHION  
C: COIL

D: GALVANOMETER  
E: ROYAL INSTITUTION  
F: M. FARADAY  
S: STRING



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Das Wess-Zumino-Modell</b>	<b>8</b>
1.1 Off-shell-Kontinuums-Wirkung . . . . .	8
1.1.1 SUSY-Transformationen . . . . .	9
1.2 On-shell-Kontinuums-Wirkung . . . . .	11
1.2.1 SUSY-Transformationen . . . . .	12
1.3 Integrierte Kontinuums-Ward-Identitäten . . . . .	14
1.4 Naive Diskretisierung . . . . .	19
1.5 Gitter-Supersymmetrie . . . . .	20
1.6 Gitter-Ward-Identitäten . . . . .	22
1.6.1 Naiver Kontinuumslikes . . . . .	22
<b>2 N=1 Super-Yang-Mills-Theorie</b>	<b>24</b>
2.1 Minkowski-Raum; $d = 4$ . . . . .	24
2.1.1 SUSY-Transformationen . . . . .	26
2.2 Euklidischer Raum; $d = 4$ . . . . .	30
2.2.1 SUSY-Transformationen . . . . .	31
2.3 Kommutation der SUSY-Transformationen mit den Eichtransfor- mationen . . . . .	35
2.4 Unintegrierte Kontinuums-Ward-Identitäten . . . . .	37
<b>3 N=1 Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter</b>	<b>43</b>
3.1 Notationen . . . . .	43
3.1.1 Gitter-Eichfelder . . . . .	43
3.1.2 Wilson-Wirkung . . . . .	44
3.2 Gitterwirkung . . . . .	46
3.3 SUSY-Transformationen auf dem Gitter . . . . .	48
3.4 Kommutation der SUSY-Transformationen mit den Eichtransfor- mationen . . . . .	49
3.4.1 Gitter-Eichtransformationen . . . . .	50
3.5 Verhalten der Wirkung unter den SUSY-Transformationen . . . . .	53
3.5.1 Fermion-Wirkung . . . . .	53

---

3.5.2	Eichfeldwirkung . . . . .	58
3.6	Superstrom . . . . .	66
3.6.1	Verbesserung des Superstromes . . . . .	67
3.6.2	Verbesserung der Transformationen . . . . .	82
3.6.3	Weitere Verbesserungsvorschläge . . . . .	87
3.7	Gitter-Ward-Identität . . . . .	88
<b>Zusammenfassung</b>		<b>90</b>
<b>A Dirac-Matrizen</b>		<b>92</b>
A.1	Eigenschaften der Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum . . . . .	92
A.2	Zusammenhang zwischen Dirac-Matrizen im euklidischen Raum und im Minkowski-Raum . . . . .	93
<b>B Grassmann-Variablen</b>		<b>96</b>
B.1	Definition . . . . .	96
B.2	Ableitungen von Grassmann-Variablen . . . . .	96
<b>C Die Gruppe SU(2)</b>		<b>98</b>
<b>D Majorana-Spinor</b>		<b>100</b>
<b>E Leibniz-Regel</b>		<b>103</b>
<b>F Fierz-Identität</b>		<b>104</b>
<b>G Bianchi-Identität</b>		<b>107</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>109</b>

# Einleitung

Zur Zeit sieht es so aus, als gäbe es zwei verschiedene Sorten von Teilchen: Die erste Gruppe besteht aus *Quarks* und *Leptonen*, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind und der Fermi-Dirac-Statistik genügen (*Fermionen*). Unsere Materie ist aus diesen Teilchen aufgebaut. Die zweite Gruppe besteht aus den sogenannten *Eich-Bosonen* (*Bosonen*). Diese Teilchen haben ganzzahligen Spin und erfüllen die Bose-Einstein-Statistik. Sie vermitteln die wechselwirkenden Kräfte zwischen den Fermionen.

Viele Experimente zeigen einen klaren Beweis für vier Arten von Wechselwirkungen in der Natur: die starke, die schwache, die elektromagnetische und die gravitative Wechselwirkung.

Gegenwärtig wird die Natur durch das sogenannte *Standardmodell* beschrieben. Dabei bleiben trotz seines großen Erfolges noch einige wichtige Fragen ungeklärt:

- Warum gibt es genau drei Typen von Quarks und Leptonen?
- Warum ist der Anteil an Materie so viel höher als an Antimaterie?
- Gibt es vielleicht noch mehr Sorten von Teilchen und Kräften, die bei höheren Energien entdeckt werden könnten?
- Sind die Quarks und Leptonen wirklich fundamental oder haben sie auch eine Substruktur?
- Wie kann man die Gravitation mit den anderen Kräften vereinheitlichen?
- Woraus besteht die dunkle Materie, die große Teile des Universums ausmacht?

Weitere Indizien für die Fehlerhaftigkeit des Standardmodells werden in den Abbildungen 0.1, 0.2 und 0.3 aufgezeigt. (Sämtliche Abbildungen stammen aus dem Buch von P. LANGACKER [13].) Eine sehr vielversprechende Erweiterung dieses Modells ist die Supersymmetrie, kurz SUSY genannt, die eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen beschreibt. Danach sollte es zu jedem „normalen“ Teilchen einen sogenannten „Superpartner“ geben, der abgesehen vom Spin die gleichen Eigenschaften wie das Teilchen selbst hat. Nach der Theorie der Supersymmetrie gibt es somit zu jedem normalen Fermion einen Superpartner, der

ein Boson ist, während zu jedem normalen Boson als Superpartner ein Fermion existieren sollte, wie die nachfolgende Tabelle zeigt.

Spektrum der SUSY-Teilchen				
Teilchen		Spin	Superteilchen	Spin
Quark	$q$	1/2	Squark	$\tilde{q}$ 0
Lepton	$l$	1/2	Slepton	$\tilde{l}$ 0
Neutrino	$\nu$	1/2	Sneutrino	$\tilde{\nu}$ 0
Photon	$\gamma$	1	Photino	$\tilde{\gamma}$ 1/2
Gluon	$g$	1	Gluino	$\tilde{g}$ 1/2
W-Boson		1	Wino	$\tilde{W}$ 1/2
Z-Boson		1	Zino	$\tilde{Z}$ 1/2
Higgs-Boson	$H$	0	Higgsino	$\tilde{H}$ 1/2
Graviton	$G$	2	Gravitino	$\tilde{G}$ 3/2

Bringt man jedoch Fermionen und Bosonen zusammen in ein Multiplett, so führt dies zu einer radikalen Erweiterung des Symmetriebegriffes. Man hat dann Symmetrieralgebren, die neben den Kommutatoren auch Antikommutatoren enthalten. Das Auftreten von antikommutierenden Zahlen hängt mit dem Paulischen Ausschließungsprinzip zusammen, wonach jeder Zustand maximal mit einem Fermion besetzt werden kann. Beschäftigt man sich mit Supersymmetrie, so muß man neben den  $c$ -Zahlen, die in der klassischen Physik für die Bosonen verwendet werden, auch die sogenannten Grassmann- oder  $a$ -Zahlen für die Fermionen benutzen. Eine kurze Einführung in den Umgang mit Grassmann-Variablen findet sich im Anhang B.

Durch die Supersymmetrie, bzw. durch Symmetrien allgemein, hat man nun die Möglichkeit, scheinbar zusammenhanglose Objekte oder Begriffe mit einem einzigen Gesetz zu beschreiben. Die Supersymmetrie stellt einen gemeinsamen Rahmen für die Beschreibung von Fermionen und Bosonen zur Verfügung. Dies geschieht durch „neue“ mathematische Operationen, die zu den vier gewöhnlichen Raum-Zeit-Dimensionen vier weitere hinzufügen. Diese bilden zusammen eine Art Hyperraum. Die vier zusätzlichen Dimensionen sind für die Anpassung an die speziellen geometrischen Eigenschaften der Fermionen erforderlich. Für die Elementarteilchen bedeuten die supersymmetrischen Operationen eine Transformation von einem Boson in ein Fermion und umgekehrt.

Wenn die Supersymmetrie exakt wäre, hätten die Teilchen und ihre Superpartner gleiche Massen. Da man – bis jetzt – keine supersymmetrischen Teilchen gefunden hat, muß die Supersymmetrie gebrochen sein. Hätten beispielsweise die Selektro- nen die gleiche Masse wie die Elektronen, würde dies die Selektro- nen durch die

elektromagnetische Kraft ebenfalls an Protonen binden [11]. Solche derart zusammengesetzten Atome hätten grundlegend andere Eigenschaften als „normale“ Atome: Die Elektronen müßten als Fermionen im Atom unterschiedliche Energieniveaus besetzen. Die Selektoren hingegen könnten als Bosonen die gleichen Energieniveaus einnehmen. Solche seltsamen Atome hat man allerdings nie beobachtet, und man schließt daraus, daß die Masse der Selektoren größer sein muß als die Masse der Elektronen. Damit ist die Supersymmetrie gebrochen.

Da gebrochene Symmetrien in der Physik keine Seltenheit sind (Beispiel: elektroschwache Wechselwirkung), sollte dies allein kein Grund zum Zweifeln an der Supersymmetrie sein. Einige Argumente, die für die Supersymmetrie sprechen, sind:

- Supersymmetrische Quantenfeldtheorien haben weniger „böartige“ Divergenzen als „gewöhnliche“ Theorien.
- SUSY stellt die einzige Möglichkeit für eine nicht-triviale Kombination einer internen Symmetriegruppe mit der Poincaré-Gruppe dar (letzte mögliche Symmetrie der S-Matrix ([6], [10])).
- Die lokale SUSY liefert automatisch eine Vereinheitlichung der Gravitation mit der starken und der elektroschwachen Wechselwirkung (*Supergravitation*).
- SUSY löst in den allumfassenden Theorien das sogenannte *Hierarchieproblem*.

Die drei Eichkopplungen des Standardmodells (SM) sind abhängig von der Energieskala, bei der sie gemessen werden (laufende Kopplungen). In den *Grand Unified Theories* (GUTs) geht man davon aus, daß sich die drei Kopplungen bei höheren Energien schneiden werden. Neue Rechnungen zeigen, daß dies beim Standardmodell nicht der Fall ist. Dadurch wird erneut bestätigt, daß das Standardmodell keine endgültige Theorie darstellt, sondern allenfalls als Niederenergie-Limes einer GUT verstanden werden kann. Die Abbildung 0.1 skizziert den Verlauf der drei Eichkopplungen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  in Abhängigkeit von der Skala für das Standardmodell und für das *minimale supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) [13]. Dieses ist die einfachste Version der Supersymmetrie mit minimalem Teilchenumfang.

- In der SUSY verschmelzen alle Kräfte bei hohen Energien.
- Das leichteste supersymmetrische Teilchen, das stabil ist und somit nicht in leichtere Teilchen zerfällt, wird auf der Suche nach Kandidaten für die dunkle Materie favorisiert.

Trotz dieser rein theoretischen Motivation für die Supersymmetrie gibt es viele Experimentalphysiker, die sich auf die Suche nach Signalen für SUSY begeben haben.

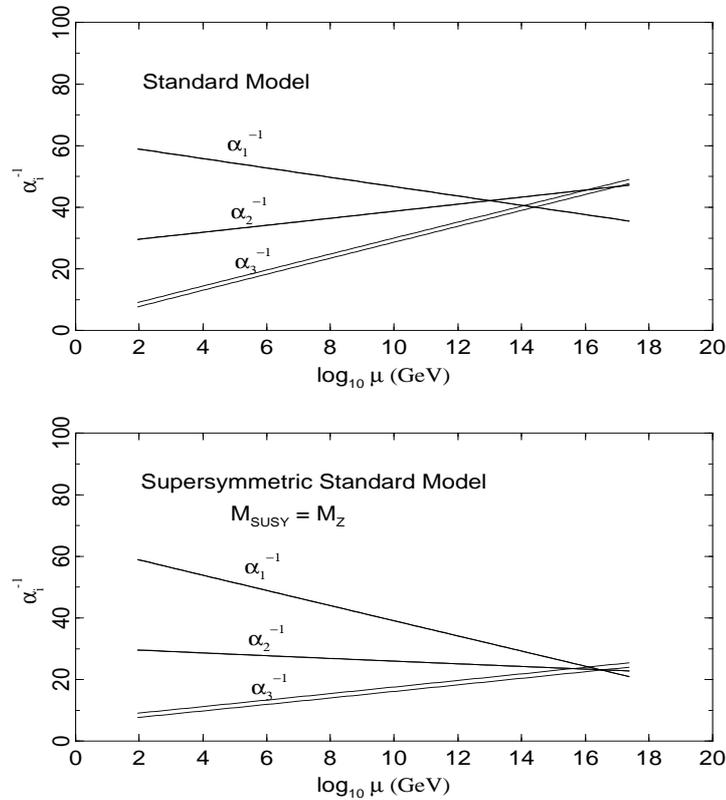


Abbildung 0.1: Laufende Kopplungen in (a) dem Standardmodell (SM) und (b) in dem minimalen supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) mit zwei Higgs-Dubletts für  $M_{SUSY} = M_Z$ .  $M_Z$  bezeichnet die Masse des  $Z$ -Bosons. Man sieht, daß sich die Kopplungen im MSSM bei  $\simeq 10^{16}$  GeV vereinigen. Die Fehler bei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind kleiner als die Strichstärke. (Aus [13].)

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Kapitel. Kapitel 1 erläutert das „einfachste“ supersymmetrische Modell von J. WESS und B. ZUMINO in zwei Dimensionen. (Nach L.H. RYDER [20] ist diese Bezeichnung inkorrekt, denn: „*Nothing in this subject is simple!*“.) Dabei werden die Unterschiede zwischen der on- und off-shell Darstellung aufgezeigt und es werden die zugehörigen Wirkungen aufgestellt. Für diese Darstellungen definiert man dann supersymmetrische Transformationen. Da jede Symmetrietransformation nach dem Noether-Theorem einen erhaltenden Strom liefert, wird im Anschluß ein Superstrom berechnet. Abschließend berechnet man für diesen Superstrom Ward-Identitäten [9]. Nachdem man die obigen Rechnungen im Kontinuum durchgeführt hat, stellt man nun diese

Überlegungen auf einem Gitter an.

Nach einem Vorschlag von K.G. WILSON brachte man 1974 Eichtheorien auf ein kubisches Gitter und betrachtete nun anstelle des Raum-Zeit-Kontinuums nur diskrete Punkte. Rückt man die Gitterpunkte immer dichter zusammen, so ergibt sich aus der Gitter-Eichtheorie im Grenzfall gerade wieder die Kontinuums-Theorie.

Die Einführung des Gitters ermöglicht Rechnungen, die im Kontinuum nicht durchführbar sind. Danach wird dieser Vorgang durch den Übergang zur kontinuierlichen Raum-Zeit wieder rückgängig gemacht.

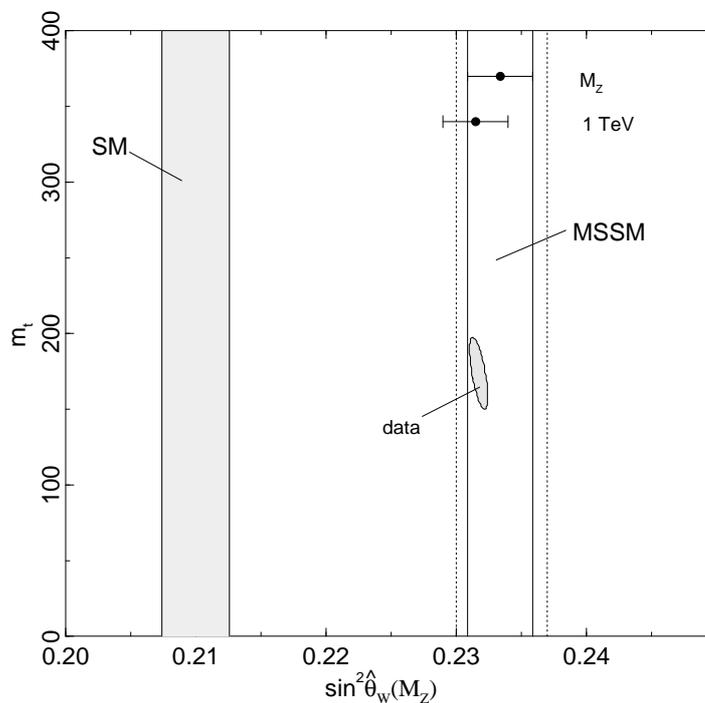


Abbildung 0.2: 90% Konfidenzbereiche für  $\sin^2(\hat{\theta}_W(M_Z))$  gegen  $m_t$  verglichen mit den Vorhersagen des Standardmodells (SM) und des minimalen supersymmetrischen Standardmodells (MSSM).  $m_t$  ist die Masse des top-Quarks. Zum Vergleich sind die Vorhersagen für degenerierte SUSY-Massen bei  $M_Z$  und 1 TeV aufgetragen. (Aus [13].)

Stellt man sich dieses Gitter als eine Aneinanderreihung von gestapelten vierdimensionalen Würfeln vor, so steht jeder Gitterpunkt bzw. Gitterplatz für eine bestimmte Position in der vierdimensionalen Raum-Zeit.

Zwischen benachbarten Gitterpunkten besteht eine Beziehung, die im Modell der Verbindungslinie entspricht. In dieser Modellvorstellung schließen vier Verbindungs-

dungslinien ein Quadrat ein, das in der Gittertheorie als „Plakette“ bezeichnet wird. Auf den Verbindungslinien oder den Plaketten gibt es allerdings im Gegensatz zum Kontinuum keine zusätzlichen Punkte. Die Teilchen der Kontinuums-Theorie, die auf das Gitter gebracht werden sollen, werden in ihren unterschiedlichen Zuständen nur auf den Gitterplätzen definiert. Hingegen werden die Feldstärken ausschließlich auf den Verbindungslinien („links“) definiert.

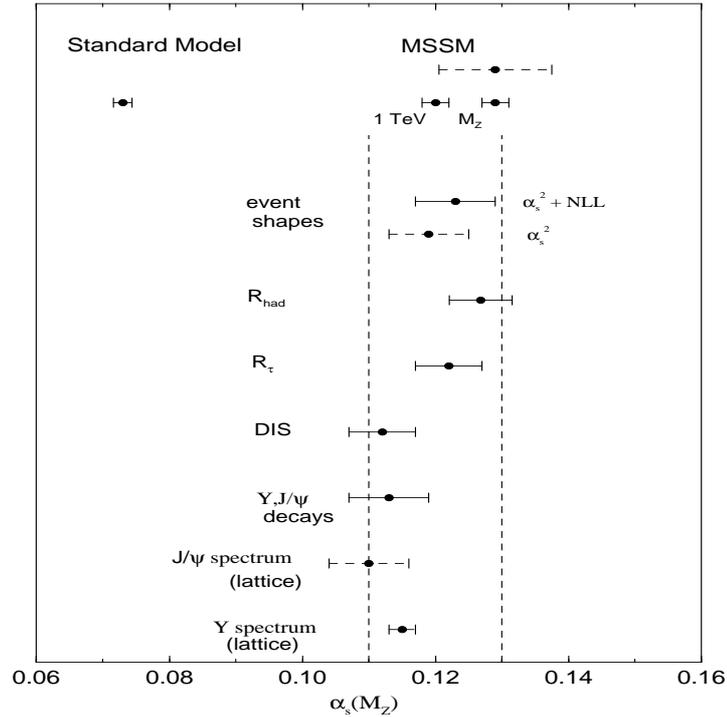


Abbildung 0.3: Vorhersagen für  $\alpha_s(M_Z)$  (Kopplung der QCD) von  $\alpha^{-1}$  und  $\hat{s}_z^2$  in gewöhnlichen und SUSY-GUTs. Die gestrichelten Linien repräsentieren die experimentelle Reichweite  $0.12 \pm 0.01$ . In dem minimalen supersymmetrischen Standardmodell enthält der Fehlerbalken die theoretische Unsicherheiten, die in quadratischer Ordnung hinzugefügt werden. Die kleineren Fehlerbalken sind für degenerierte SUSY-Teilchen-Massen bei  $M_Z$  und 1 TeV. (Aus [13].)

Im zweiten Kapitel wendet man dann die im vorangegangenen Kapitel angesprochenen Methoden auf die N=1 Super-Yang-Mills-Theorie an. N=1 Supersymmetrie beschreibt den einfachsten Fall, in dem neben den Generatoren der Poincaré-Gruppe noch ein Majorana-Spinor mit seinem adjungierten Spinor auftritt. Je nach Anzahl der neu einzuführenden Generatoren (Majorana-Spinoren) bezeichnet man die zugehörige Supersymmetrie als N=1 Supersymmetrie, N=2 Supersymmetrie usw. Die Rechnungen für den Superstrom werden sowohl im Minkowski-Raum als auch im euklidischen Raum durchgeführt. Im Unterschied

zu Kapitel 1 werden abschließend statt der integrierten Ward-Identitäten die un-integrierten Ward-Identitäten für den erhaltenen Strom berechnet.

Das dritte Kapitel widmet sich ausschließlich der Gitter-N=1 Super-Yang-Mills-Theorie. Dabei wird bei vielen Rechnungen und Ergebnissen der Kontinuums-limes gebildet, um die Gittertheorie zu überprüfen. Abschließend werden Vorschläge für einen Gitter-Superstrom gemacht.

# Kapitel 1

## Das Wess-Zumino-Modell

Das erste supersymmetrische Modell der vierdimensionalen relativistischen Quantenfeldtheorie wurde 1974 von J. WESS und B. ZUMINO [22] entwickelt. Dabei handelt es sich um ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in Wechselwirkung mit zwei Spin-0-Teilchen. Die Teilchen sind durch Symmetrietransformationen miteinander verknüpft und sitzen deshalb im selben Multiplett<sup>1</sup>. Man hat dann ein fermionisches Feld, das durch einen Majorana-Spinor repräsentiert wird, und zwei bosonische Felder, die durch ein skalares und ein pseudoskalares Feld dargestellt werden. Alle Felder besitzen hier die gleiche Masse.

In zwei Dimensionen reduziert sich das Modell auf:

- 1 bosonisches Feld  $\phi(x)$  und
- 1 Majorana-Spinor  $\psi(x)$ .

Das liegt daran, daß in der Supersymmetrie die Anzahl der fermionischen Freiheitsgrade mit der Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade übereinstimmen müssen. Wenn  $d$  die Anzahl der Dimensionen darstellt und  $d$  außerdem noch gerade ist, dann hat ein gewöhnlicher Dirac-Spinor  $2^{\frac{d}{2}}$  Komponenten. Das entspricht  $2^{\frac{d}{2}}$  Freiheitsgraden.

Ein Majorana-Spinor beschreibt Teilchen, die ihrem Antiteilchen entsprechen. Somit halbiert sich die Anzahl der Komponenten bei einem Majorana-Spinor und dieser besitzt nur  $2^{\frac{d}{2}-1}$  Freiheitsgrade.

Soll jetzt  $N_F = N_B$  gelten, hat man folglich  $2^{\frac{d}{2}-1}$  reelle Skalarfelder. Damit gibt es für  $d = 2$  ein reelles Skalarfeld und für  $d = 4$  zwei reelle Skalarfelder.

### 1.1 Off-shell-Kontinuums-Wirkung

Die Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen. Man möchte also eine Wirkung haben, die sowohl Fermionen als auch Bosonen enthält.

---

<sup>1</sup>Es handelt sich hierbei um ein **chirales Supermultiplett**.

Eine mögliche Wirkung ist zum Beispiel [8]:

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \underbrace{\left[ (\partial_\mu \phi(x))^2 + \bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) P'(\phi) + 2FP(\phi) - F^2 \right]}_{\mathcal{L}(x)}. \quad (1.1)$$

Dabei sind  $\phi(x)$  und  $F$  reelle skalare Felder;  $F$  ist ein sogenanntes *Hilfsfeld*.  $\psi(x)$  ist ein zweikomponentiger Majorana-Spinor und  $P(\phi)$  ein beliebiges Polynom in  $\phi$ , das sogenannte Superpotential. Zur Vereinfachung werde ich mich im folgenden auf das „minimale“ Superpotential beschränken, welches noch eine Wechselwirkung beschreibt:

$$P(\phi(x)) = m\phi(x) + \lambda\phi^2(x). \quad (1.2)$$

### 1.1.1 SUSY-Transformationen

Supersymmetrie-Transformationen sollen die Wirkung invariant lassen und die skalaren Felder und das Spinor-Feld mischen. Das geschieht über einen „Mischungsparameter“  $\epsilon$ , der ebenfalls ein Majorana-Spinor ist:

$$\delta\phi(x) = \bar{\epsilon}\psi(x), \quad (1.3)$$

$$\delta\psi(x) = [\not{\partial}\phi(x) - F]\epsilon, \quad (1.4)$$

$$\delta\bar{\psi}(x) = -\bar{\epsilon}[\not{\partial}\phi(x) + F], \quad (1.5)$$

$$\delta F = -\bar{\epsilon}\not{\partial}\psi(x), \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \delta P(\phi) &= P'(\phi)\delta\phi(x) \\ &= P'(\phi)\bar{\epsilon}\psi(x), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \delta P'(\phi) &= P''(\phi)\delta\phi(x) \\ &= P''(\phi)\bar{\epsilon}\psi(x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Diese Formulierung des Wess-Zumino-Modells wird off-shell-Darstellung genannt. Man unterscheidet in supersymmetrischen Theorien zwischen der on-shell- und der off-shell-Darstellung. Enthalten die Darstellungen noch Hilfsfelder, wie hier das Feld  $F$ , so spricht man von der off-shell-Formulierung der Theorie.

Schaut man sich die Feldgleichungen an, so sieht man, daß diese in zwei Klassen separieren:

1. Es gibt **rein algebraische Gleichungen** für Felder. Diese beschreiben keine Propagation in Raum und Zeit und man nennt diese Felder, deren Bewegungsgleichungen keine dynamischen Freiheitsgrade haben, Hilfsfelder.
2. Man hat die gewöhnlichen **Wellengleichungen** für die anderen Felder, welche daher dynamische Freiheitsgrade beschreiben.

Wenn man zeigen möchte, daß die Wirkung invariant unter den supersymmetrischen Transformationen ist, reicht es aus, wenn man zeigen kann, daß die Lagrangedichte bis auf eine totale Divergenz verschwindet.

Mit den Transformationsregeln ergibt sich für die Variation der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) &= \partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\delta\phi(x) + \delta F(x)P(\phi) + F(x)\delta P(\phi) - F(x)\delta F(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \delta\bar{\psi}(x)\not{\partial}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\not{\partial}\delta\psi(x) + \delta\bar{\psi}(x)\psi(x)P'(\phi) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}(x)\delta\psi(x)P'(\phi) + \bar{\psi}(x)\psi(x)\delta P'(\phi) \right\} \\
&= \partial_\mu\phi(x)\bar{\epsilon}\partial_\mu\psi(x) - \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)P(\phi) + \bar{\epsilon}\psi(x)F(x)P'(\phi) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)F(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\epsilon}[\not{\partial}\phi(x) + F]\not{\partial}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\not{\partial}[\not{\partial}\phi(x) - F]\epsilon \right. \\
&\quad \left. - \bar{\epsilon}[\not{\partial}\phi(x) + F]\psi(x)P'(\phi) + \bar{\psi}(x)[\not{\partial}\phi(x) - F]\epsilon P'(\phi) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\bar{\psi}(x)\psi(x)P''(\phi)\bar{\epsilon}\psi(x)}_{=0} \right\} \\
&= (\partial_\mu\phi(x))\bar{\epsilon}\partial_\mu\psi(x) - \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)P(\phi) + \bar{\epsilon}\psi(x)F(x)P'(\phi) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)F(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\partial_\nu\psi(x)\partial_\mu\phi(x) - \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)F(x) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\epsilon\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)}_{=\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi(x)\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)} - \underbrace{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\epsilon\partial_\mu F(x)}_{=\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi(x)\partial_\mu F(x)} \right. \\
&\quad \left. - \bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi(x)\underbrace{\partial_\mu\phi(x)P'(\phi)}_{=\partial_\mu P(\phi)} - \bar{\epsilon}\psi(x)P'(\phi)F(x) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\epsilon\partial_\mu\phi(x)P'(\phi)}_{=\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi(x)} + \underbrace{\bar{\psi}(x)\epsilon F(x)P'(\phi)}_{=-\bar{\epsilon}\psi(x)F(x)P'(\phi)} \right\} \\
&= -\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi(x) \quad = \partial_\mu P(\phi) \quad = -\bar{\epsilon}\psi(x)F(x)P'(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial_\mu \phi(x)) \bar{\epsilon} \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \left[ 2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu \right] \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi(x) \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) F(x) + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu F(x) \\
&\quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) P(\phi) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x)}_{= \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \psi(x) \partial_\nu \phi(x)} + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi(x) \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \\
&\quad + \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} \gamma_\mu \psi(x) F(x) \right\} - \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ \gamma_\mu \psi(x) P(\phi) \right\} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \phi(x) \psi(x) \right\} + \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} \gamma_\mu \psi(x) F(x) \right\} \\
&\quad - \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ \gamma_\mu \psi(x) P(\phi) \right\} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \mathcal{J}_\mu(x). \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathcal{J}_\mu(x) = \frac{1}{2} \gamma_\mu \left[ \not{\partial} \phi(x) + F(x) - 2P(\phi) \right] \psi(x) \tag{1.10}$$

der Superstrom.

## 1.2 On-shell-Kontinuums-Wirkung

In diesem Abschnitt wird die Wirkung des Wess-Zumino-Modells nach der Eliminierung des Hilfsfeldes  $F$  betrachtet.

Man kann die Hilfsfelder aus der Wirkung eliminieren, indem man ihre Feldgleichungen auf die Lagrangedichte und die Transformationsregeln anwendet. Das Resultat ist die on-shell-Lagrangedichte.

Es gibt mehrere Wege, um zu verstehen, wieso diese Hilfsfelder in supersymmetrischen Theorien auftauchen und warum Unterschiede zwischen der on- und off-shell-Darstellung bestehen. Die Wurzel des Problems liegt in dem Unterschied zwischen dem Vektorraum für die off-shell-Darstellung (Felder über  $x^\mu$ ) und dem Vektorraum für die on-shell-Darstellung (Cauchy-Daten für die Feldgleichungen). In beiden Fällen muß die Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade mit der Anzahl der fermionischen Freiheitsgrade übereinstimmen. Es gibt jedoch für verschiedene Spins eine unterschiedliche Beziehung zwischen Cauchy-Daten und Feldern [21].

Die Feldgleichung für  $F(x)$  erhält man nun folgendermaßen:

$$\frac{\delta S}{\delta F(x)} \equiv 0 = 2P(\phi) - 2F(x). \quad (1.11)$$

Daraus ergibt sich für  $F(x)$ :

$$F(x) = P(\phi) = m\phi(x) + \lambda\phi^2(x). \quad (1.12)$$

Man erhält dann folgende on-shell-Wirkung:

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \underbrace{\left[ (\partial_\mu \phi(x))^2 + \bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) P'(\phi) + P(\phi)^2 \right]}_{\mathcal{L}(x)}. \quad (1.13)$$

### 1.2.1 SUSY-Transformationen

$$\delta\phi(x) = \bar{\epsilon} \psi(x), \quad (1.14)$$

$$\delta\psi(x) = [\not{\partial}\phi(x) - P(\phi)]\epsilon, \quad (1.15)$$

$$\delta\bar{\psi}(x) = -\bar{\epsilon} [\not{\partial}\phi(x) + P(\phi)], \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \delta P(\phi) &= P'(\phi) \delta\phi(x) \\ &= P'(\phi) \bar{\epsilon} \psi(x), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \delta P'(\phi) &= P''(\phi) \delta\phi(x) \\ &= P''(\phi) \bar{\epsilon} \psi(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Für die Variation der Lagrangedichte ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi(x)) \partial_\mu \delta\phi(x) + \frac{1}{2} \left\{ \delta\bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \not{\partial} \delta\psi(x) + \delta\bar{\psi}(x) \psi(x) P'(\phi) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}(x) \delta\psi(x) P'(\phi) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta P'(\phi) \right\} + P(\phi) \delta P(\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi(x)) \bar{\epsilon} \partial_\mu \psi(x) + P(\phi) P'(\phi) \bar{\epsilon} \psi(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\epsilon} [\not{\partial}\phi(x) + P(\phi)] \not{\partial} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \not{\partial} [\not{\partial}\phi(x) - P(\phi)] \epsilon \right. \\ &\quad \left. - \bar{\epsilon} [\not{\partial}\phi(x) + P(\phi)] \psi(x) P'(\phi) + \bar{\psi}(x) [\not{\partial}\phi(x) - P(\phi)] \epsilon P'(\phi) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\bar{\psi}(x) \psi(x) P''(\phi) \bar{\epsilon} \psi(x)}_{=0} \Big\} \\
= & (\partial_\mu \phi(x)) \bar{\epsilon} \partial_\mu \psi(x) + \bar{\epsilon} \psi(x) P(\phi) P'(\phi) \\
& + \frac{1}{2} \Big\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) P(\phi) + \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \epsilon \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \\
& - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \epsilon \partial_\mu P(\phi) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \underbrace{\partial_\mu \phi(x) P'(\phi)}_{= \partial_\mu P(\phi)} - 2 \bar{\epsilon} \psi(x) P(\phi) P'(\phi) \\
& + \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \epsilon \partial_\mu \phi(x) P'(\phi) \Big\}. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Mit

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \epsilon = -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x), \tag{1.20}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \epsilon = \bar{\epsilon} \gamma_\nu \gamma_\mu \psi(x) \quad \text{und} \tag{1.21}$$

$$\bar{\psi}(x) \epsilon = \bar{\epsilon} \psi(x) \tag{1.22}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} = & (\partial_\mu \phi(x)) \bar{\epsilon} \partial_\mu \psi(x) + \frac{1}{2} \Big\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) P(\phi) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi(x) \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) \\
& - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) \Big\}. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Unter Benutzung von

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu \tag{1.24}$$

läßt sich die Variation von  $\mathcal{L}$  schreiben als:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}(x) = & \underbrace{(\partial_\mu \phi(x)) \bar{\epsilon} \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} [2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu] \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x)}_{= \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(x)} \\
& + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi(x) \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \\
& - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) P(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \psi(x) \partial_\nu \phi(x) + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi(x) \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu P(\phi) - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) P(\phi) \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \left[ \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \phi(x) \psi(x) \right] - \bar{\epsilon} \partial_\mu \left[ \frac{1}{2} \gamma_\mu \psi(x) P(\phi) \right] \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \mathcal{J}_\mu. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Man erhält wieder einen Superstrom, der durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\mathcal{J}_\mu(x) = \frac{1}{2} \gamma_\mu \left[ \not{\partial} \phi(x) - P(\phi) \right] \psi(x). \tag{1.26}$$

### 1.3 Integrierte Kontinuums-Ward-Identitäten

Unter Ward-Identitäten versteht man im wesentlichen Gleichungen, die aus Eichinvarianzen der Wirkung folgen und in jeder Ordnung der Störungsrechnung erhalten sind. Man kann sie aus Symmetrien der Greenschen Funktionen ableiten. Ward-Identitäten tragen hauptsächlich zur Überprüfung der Renormierbarkeit von physikalischen Theorien bei und sind somit notwendig, um eine physikalisch sinnvolle Interpretation der Theorie zu sichern.

- Für die Berechnung der Ward-Identitäten definiert man zunächst eine Partitionsfunktion mit Quellen:

$$Z[J(x), \theta(x)] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\theta}(x)\psi(x)} \tag{1.27}$$

und betrachtet dann die Variation von  $Z$  bezüglich dieser Quellen.

In der gewöhnlichen Partitionsfunktion treten die Quellen  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  immer gemeinsam in der Form  $\bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta$  auf, wobei  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  unabhängig voneinander sind. Da es sich in diesem Fall jedoch um Majorana-Spinoren handelt, sind  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  über die Beziehung  $\bar{\theta} = \theta^T C$  miteinander verknüpft. Somit ist  $\bar{\theta}$  kein unabhängiger Freiheitsgrad und bei Majorana-Spinoren reicht eine Quelle  $\bar{\theta}\psi$  aus.

In der Partitionsfunktion ist  $\mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F$  definiert durch:

$$\mathcal{D}\phi := \prod_x d\phi(x), \quad \mathcal{D}\psi := \prod_x d\psi(x), \quad \mathcal{D}F := \prod_x dF(\phi). \tag{1.28}$$

- Zudem definiert man den Erwartungswert einer Funktion  $O(\phi(x), \psi(x), F(\phi))$  in Abhängigkeit von den Feldern  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  und  $F(\phi)$  als:

$$\begin{aligned} \langle O(\phi(x), \psi(x), F(\phi)) \rangle &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F O(\phi(x), \psi(x), F(\phi)) \\ &\quad * e^{-S}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dabei ist  $Z$  gegeben durch

$$Z = Z[J(x) = 0, \theta(x) = 0] \quad (1.30)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F e^{-S}. \quad (1.31)$$

Die Wirkung ist, wie oben gezeigt, invariant unter den supersymmetrischen Transformationen. Geht man zudem davon aus, daß sich das Integrationsmaß von  $Z$  bei diesen Transformationen nicht ändert, sind nur die Variationen der Quellterme nicht-trivial. Man erhält dann für die Variation von  $Z$ :

$$\begin{aligned} \delta Z[J(x), \theta(x)] &= - \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left[ \underbrace{\delta S}_{=0} + \int d^4x J(x) \delta\phi(x) + \int d^4x \bar{\theta}(x) \delta\psi(x) \right] \\ &\quad * e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\theta}(x)\psi(x)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Gleichung (1.32) stellt zunächst nur eine Umbenennung dar. Ein Wechsel der Integrationsvariablen in  $Z[J, \theta]$  kann aber den Wert des Integrals nicht ändern! Man kann somit folgendes schließen:

$$\delta Z = 0. \quad (1.33)$$

Mit (1.32) ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left[ \int d^4x J(x) \delta\phi(x) + \int d^4x \bar{\theta}(x) \delta\psi(x) \right] \\ * e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\theta}(x)\psi(x)} = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\equiv \delta Z. \quad (1.35)$$

Die Ward-Identitäten ergeben sich aus dieser Variation durch Bildung der Ableitungen nach den Quellen.

I.)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta Z[J(x), \theta(x)]}{\partial J(x)} \right|_{J=\theta=0} &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left\{ \delta\phi(x) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \int d^4v J(v) \delta\phi(v) + \int d^4v \bar{\theta}(v) \delta\psi(v) \right] (-\phi(x)) \right\} \\
&\quad * e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\theta}(x)\psi(x)} \Big|_{J=\theta=0} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \delta\phi(x) e^{-S} \tag{1.36}
\end{aligned}$$

$$= 0.$$

$$\text{Daraus folgt } \langle \delta\phi(x) \rangle = 0. \tag{1.37}$$

Mit den off-shell-Transformationsregeln erhält man

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} \langle \psi(x) \rangle &= 0 \\
\Leftrightarrow \langle \psi(x) \rangle &= 0. \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Diese Aussage ist trivial, da im Vakuum  $\langle \psi(x) \rangle = 0$  gilt.  $\langle \psi(x) \rangle \neq 0$  würde eine spontane Brechung der Lorentzinvarianz bedeuten.

II.)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta Z[J(x), \theta(x)]}{\partial \theta(x)} \right|_{J=\theta=0} &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left( \frac{\partial}{\partial \theta(x)} \int d^4x \delta\bar{\psi}(x) \theta(x) \right) e^{-S} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F (-\delta\bar{\psi}(x)) e^{-S} \tag{1.39} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Somit gilt: } -\langle \delta\bar{\psi}(x) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \delta\psi(x) \rangle = 0, \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
\text{denn: } \langle \delta\bar{\psi}(x) \rangle &= \langle \delta\bar{\psi}(x) \rangle^T \\
&= \langle \delta\psi(x)^T C \rangle^T \\
&= \langle C^T \delta\psi(x) \rangle \\
&= -C \langle \delta\psi(x) \rangle = 0; \\
\Rightarrow \langle \delta\psi(x) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Mit den off-shell-Transformationsregeln erhält man

$$\begin{aligned}\langle \partial\phi(x) - F(x)\mathbf{1} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle F(x)\mathbf{1} \rangle &= \gamma_\mu \langle \partial_\mu\phi(x) \rangle.\end{aligned}\quad (1.41)$$

Der Erwartungswert von  $\partial_\mu\phi(x)$  ist aber aufgrund der Lorentzinvarianz Null. Deshalb gilt:

$$\langle F(x) \rangle = 0.^2 \quad (1.42)$$

Das ist eine nicht-triviale Aussage. Ein Erwartungswert von  $F$ , der von Null verschieden wäre, hätte eine spontane Brechung der Supersymmetrie zur Folge.

Die Supersymmetrie wird spontan gebrochen, wenn das Minimum des Potentials positiv ist. Das supersymmetrische Potential kann beim Wess-Zumino-Modell geschrieben werden als  $\langle U \rangle = \frac{1}{2} \langle F^2 \rangle$ . Somit liegt das Minimum bei  $\langle F \rangle = 0$ .

$\langle F \rangle \neq 0$  bedeutet also tatsächlich, daß die Supersymmetrie spontan gebrochen ist. Dieses ist wichtig für die anschließende Betrachtung auf dem Gitter. Mit (1.42) haben wir die einfachste, nicht-triviale Ward-Identität gefunden.

III.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \delta Z[J(x), \theta(x)]}{\partial\theta(y)\partial J(x)} &= \frac{\partial}{\partial\theta(y)} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left\{ \delta\phi(x) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \int d^4v J(v)\delta\phi(v) + \int d^4v \delta\bar{\psi}(v)\theta(v) \right] \phi(x) \right\} \\ &\quad * e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\psi}(x)\theta(x)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \left\{ \delta\bar{\psi}(y)\phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \delta\phi(x) - \left( \int d^4v J(v)\delta\phi(v) + \int d^4v \delta\bar{\psi}(v)\theta(v) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. * \bar{\psi}(y) \right\} e^{-S - \int d^4x J(x)\phi(x) - \int d^4x \bar{\psi}(x)\theta(x)}. \quad (1.43)\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Diese Ward-Identität wird auch **Baby-Ward-Identität** genannt, da sie weder Propagatoren noch n-Punkt-Funktionen enthält.

Nullsetzen der Quellen ergibt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \delta Z[J(x), \theta(x)]}{\partial \theta(y) \partial J(x)} \right|_{J=\theta=0} &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}F \\ &\quad \left\{ \delta \bar{\psi}(y) \phi(x) + \delta \phi(x) \bar{\psi}(y) \right\} e^{-S} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Also folgt:

$$\langle \delta \bar{\psi}(y) \phi(x) \rangle + \langle \delta \phi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = 0. \quad (1.45)$$

Setzt man diesmal die on-shell-Transformationsregeln ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \langle (-\not{\partial} \phi(y) - P(\phi(y))) \phi(x) \rangle + \langle \delta \phi(x) \bar{\psi}(y) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{\epsilon} \langle (-\not{\partial} \phi(y) - P(\phi(y))) \phi(x) \rangle + \bar{\epsilon} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow -\langle (\not{\partial} \phi(y) + P(\phi(y))) \phi(x) \rangle + \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle - \langle (\not{\partial} \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle^T - \langle (\not{\partial} \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y) \rangle^T &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle [\psi(y) \bar{\psi}(x)]^T \rangle - \langle [(\not{\partial} \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y)]^T \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

i.)

$$\begin{aligned} [\psi(y) \bar{\psi}(x)]^T &= -\bar{\psi}(x)^T \psi(y)^T \\ &= -(\psi(x)^T C)^T \psi(y)^T \\ &= -C^T \psi(x) \psi(y)^T \\ &= C \psi(x) \psi(y)^T \\ &= C \psi(x) \psi(y)^T \underbrace{CC^{-1}}_{=\mathbf{1}} \\ &= C \psi(x) \bar{\psi}(y) C^{-1}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

ii.)

$$\begin{aligned} [(\not{\partial} \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y)]^T &= (\gamma_\mu^T \partial_\mu \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y) \\ &= (-C \gamma_\mu C^{-1} \partial_\mu \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y) \\ &= C (-\not{\partial} \phi(x) + P(\phi(x))) \phi(y) C^{-1}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Aus (1.47) und (1.48) folgt:

$$\begin{aligned}
C \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle C^{-1} + C \langle [\not{\partial} \phi(x) - P(\phi(x))] \phi(y) \rangle C^{-1} &= 0; \\
\Rightarrow \underbrace{\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle}_{\text{Fermionenpropagator}} + \underbrace{\langle [\not{\partial} \phi(x) - P(\phi(x))] \phi(y) \rangle}_{\text{2-Punkt-Funktion}} &= 0. \quad (1.49)
\end{aligned}$$

Diese Ward-Identität ist von entscheidender Bedeutung, da sie eine Beziehung zwischen der Zwei-Punkt-Funktion der Fermionen und der Zwei-Punkt-Funktion der Bosonen herstellt.

## 1.4 Naive Diskretisierung

Damit man Supersymmetrie auf dem Gitter betreiben kann, sind zunächst einige neue Definitionen notwendig:

- Symmetrischer Ableitungsoperator:

$$D_{xy}^\mu = \frac{1}{2a} [\delta_{y, x+ae_\mu} - \delta_{y, x-ae_\mu}], \quad (1.50)$$

- „Wilson-Massen“-Operator:

$$K_{xy} = m\delta_{x,y} - \frac{r}{2a} \sum_{\mu=1}^2 [\delta_{x, y+ae_\mu} + \delta_{x, y-ae_\mu} - 2\delta_{x,y}]. \quad (1.51)$$

Dabei sind  $x$  und  $y$  Raumzeitpunkte auf dem Gitter,  $a$  ist die Gitterkonstante und  $e_\mu$  ist ein Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung.

Bei der Diskretisierung von Fermionen auf dem Gitter stellt sich einem zunächst immer ein Problem: Möchte man ein Fermion auf dem Gitter darstellen, so kommt es notwendigerweise zu einer Fermionen-Verdopplung. Das bedeutet, daß man statt eines Fermions  $2^d$  Fermionen auf dem Gitter hat, wenn  $d$  die Anzahl der Dimensionen angibt. Geht man von einigen wenigen, physikalisch sinnvollen Annahmen aus, so gibt es ein sogenanntes „No-go“-Theorem von H. B. NIELSEN und M. NINOMIYA [17], [18], nach dem diese Fermionendoppler eine unumgängliche Eigenschaft des Gitters sind.

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, um diese Doppler auf Kosten anderer physikalischer Eigenschaften zu beseitigen. Die einfachste ist diejenige, die K. G. WILSON gewählt hat [23]. Er hat den zusätzlichen Teilchen einfach eine Masse in Höhe

des „cut-off's“ gegeben. Damit tauchen sie in der Gittertheorie nicht mehr auf. Diese Methode bricht allerdings explizit die chirale Symmetrie auf dem Gitter. Eine Möglichkeit, dieses zu vermeiden, ist die Einführung sogenannter *staggered Fermionen* [12], die aber wiederum das Problem der Nichtlokalität mit sich bringen.

Betrachtet man Wilson-Fermionen, so findet man in der Gittertheorie immer einen zusätzlichen Massenterm mit dem Wilson-Parameter  $r$ , der im naiven Kontinuum-Limes verschwindet.

Mit Hilfe der obigen Definitionen (1.50), (1.51) ergibt sich die naiv diskretisierte Form der off-shell-Wirkung auf dem Gitter zu

$$S_L = \sum_{x,y} \left[ \frac{1}{2} \phi_x (-\square)_{xy} \phi_y + \frac{1}{2} \bar{\psi}_x (\not{D} + P'_{xy}) \psi_y \right] + \sum_x \left[ F_x P_x - \frac{1}{2} F_x^2 \right], \quad (1.52)$$

wobei gilt:

$$\square_{xy} = \left( \sum_{\mu} D_{\mu} D_{\mu} \right)_{xy}, \quad (1.53)$$

$$P_x = \sum_y K_{xy} \phi_y + \lambda \phi_x^2, \quad (1.54)$$

$$P'_{xy} = K_{xy} + 2\lambda \phi_x \delta_{x,y}. \quad (1.55)$$

Der erste Term in  $S_L$  ergibt sich aus der Kontinuums-Wirkung durch partielle Integration und Vernachlässigung der Randterme.

Analog findet man für die on-shell-Gitterwirkung:

$$S_L = \sum_{x,y} \frac{1}{2} \left[ \phi_x (-\square)_{xy} \phi_y + \bar{\psi}_x (\not{D} + P'_{xy}) \psi_y \right] + \sum_x \frac{1}{2} P_x^2. \quad (1.56)$$

## 1.5 Gitter-Supersymmetrie

Die erhaltenen Gitterwirkungen sind beide lokal. Durch eine naive Diskretisierung der supersymmetrischen Transformationen erhält man Gittertransformationen, die ebenfalls lokal sind. Charakteristisch für die Supersymmetrie auf dem Gitter ist jedoch, daß sie „irgendwo“ Nichtlokalitäten enthält. Dies wurde zuerst von P.H. DONDI und M. NICOLAI festgestellt [4]. Man hat also entweder Nichtlokalitäten in der Wirkung und/oder in den Transformationen.

Daß es nicht ohne Nichtlokalitäten geht, liegt daran, daß die lokale Gitterableitung nicht der *Leibniz-Regel* genügt. D.h., **es gilt nicht:**<sup>3</sup>

$$\nabla_\mu (f \cdot g) = f \nabla_\mu g + (\nabla_\mu f) g. \quad (1.57)$$

Diese Nichtlokalitäten werden formal zu den naiv diskretisierten Transformationen addiert. Man definiert nun die Gitter-off-shell-Transformationen zu:

$$\delta\phi_x = \bar{\epsilon}\psi_x, \quad (1.58)$$

$$\delta\psi_x = [(\mathcal{D}\phi_x) - F_x + \lambda\hat{A}_x(\phi)]\epsilon, \quad (1.59)$$

$$\delta F_x = -\bar{\epsilon}(\mathcal{D}\psi)_x. \quad (1.60)$$

Dabei ist

$$\hat{A}_x = \hat{A}_x^0 + \lambda\hat{A}_x^1 + \lambda^2\hat{A}_x^2 + \dots, \quad (1.61)$$

der Extra-Term in den Transformationsregeln, der die Nichtlokalität impliziert.  $\hat{A}_x$  wird allein durch die Forderung definiert, daß die Variation der Wirkung keinen Beitrag liefern soll. Dabei wurde schon die Annahme gemacht, daß  $\hat{A}_x$  nur von  $\phi$  und nicht von  $\psi$  abhängig sein soll.

Ganz analog ergibt sich eine Gitter-Formulierung für die on-shell-Transformationen:

$$\delta\phi_x = \bar{\epsilon}\psi_x, \quad (1.62)$$

$$\delta\psi_x = A_x(\phi)\epsilon. \quad (1.63)$$

Die diskretisierte Form von  $\partial\phi - P$  beinhaltet hier schon die Definition von  $A_x$ :

$$A_x = A_x^0 + \lambda A_x^1 + \lambda^2 A_x^2 + \dots. \quad (1.64)$$

Obwohl die Transformationen nicht exakt supersymmetrisch sind, in dem Sinne, daß sie die Kontinuums-SUSY-Algebra erfüllen und nicht lokal sind, ist der einzig entscheidende Punkt, daß sie eine exakte Symmetrie der Wirkung repräsentieren.

---

<sup>3</sup>Beweis, siehe Anhang E.

## 1.6 Gitter-Ward-Identitäten

Die Herleitung der Ward-Identitäten auf dem Gitter verläuft in vollständiger Analogie zu der im Kontinuum. Im Unterschied zum Kontinuum werden allerdings, statt der Integrale über die Dimensionen der Raum-Zeit, Summen über alle Gitterpunkte verwendet.

Man erhält dann folgende Identitäten:

1. „Baby“-Ward-Identität

$$\langle F_x \rangle = \lambda \langle \hat{A}_x(\phi) \rangle, \quad (1.65)$$

2. Zwei-Punkt-Funktion-Ward-Identität

$$\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle + \langle A_x(\phi) \phi_y \rangle = 0. \quad (1.66)$$

### 1.6.1 Naiver Kontinuumslikes

Bildet man den Kontinuumslikes bei diesen Ward-Identitäten in naivster Form, so sollten wieder die schon bekannten Kontinuums-Ward-Identitäten herauskommen. Die „Baby“-Ward-Identität, die in der 1-Schleifen-Ordnung nur Tadpole-Diagramme enthält, ist somit dennoch von Interesse.

Außerdem enthält diese Ward-Identität  $F$  als einen Parameter für spontane Symmetriebrechung. Ein weiterer Punkt ist die Einfachheit der Ward-Identität: Wenn nicht einmal diese simple Identität den richtigen Kontinuumslikes ergibt, kann man es von höheren Ward-Identitäten erst recht nicht verlangen. Die „Baby“-Ward-Identität dient somit indirekt zur Überprüfung der Gittertheorie.

Anzumerken ist, daß hier wirklich nur die naivste Form des Kontinuumslikes gebildet wird. Für eine ausführliche Betrachtung verweise ich auf die Literatur, wie zum Beispiel [9].

1. Zunächst betrachte ich die „Baby“-Ward-Identität:

Im Kontinuum ist das Feld  $\hat{A}$  nicht vorhanden. Dieses Feld wurde nur eingeführt, um die explizite Brechung der Supersymmetrie auf dem Gitter zu kompensieren. Im naiven klassischen Kontinuumslikes gibt  $\hat{A}$  deshalb keinen Beitrag und man erhält die richtige Kontinuums-Ward-Identität  $\langle F \rangle = 0$ .

2. Für die Zwei-Punkt-Funktion-Ward-Identität erhält man im naiven Kontinuumslikes:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_x(\phi) = \not{\partial} \phi(x) - P(\phi(x)). \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle + \langle A_x(\phi) \phi_y \rangle &= \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle + \langle [\not{\partial} \phi(x) - P(\phi(x))] \phi(y) \rangle \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Gitter-Ward-Identitäten lassen sich somit durch Bildung des naiven Kontinuumslimes in die zugehörigen Kontinuums-Identitäten überführen.

# Kapitel 2

## N=1 Super-Yang-Mills-Theorie

In diesem Kapitel wird eine supersymmetrische Lagrangedichte konstruiert, die gleichzeitig invariant unter einer nichtabelschen Eichsymmetrie ist. Es stellt sich heraus, daß das einfachste Modell aus der gewöhnlichen Theorie besteht, die die Wechselwirkung zwischen einem Yang-Mills-Feld [20] und einem Majorana-Spinor beschreibt. Beide gehören zu der adjungierten Darstellung der internen Symmetriegruppe  $SU(N)$ .

Ich werde dafür einen Ansatz mit gewöhnlichen Feldern wählen, der mir phänomenologisch anschaulicher erscheint als eine Formulierung mit Superfeldern ([1], [7]), obwohl die Superfelder zugegebenermaßen sehr viel eleganter sind und die gleichen Ergebnisse liefern.

### 2.1 Minkowski-Raum; $d = 4$

Die supersymmetrische Wirkung setzt sich zusammen aus der gewöhnlichen Wirkung für ein nichtabelsches Eichfeld (Yang-Mills-Feld) und einem Zusatzterm, der das Majorana-Teilchen repräsentiert:

$$S = \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2g^2} \left( \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] \right)^2 + i \bar{\lambda}(x) \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \right\}. \quad (2.1)$$

Dann ist die Yang-Mills-Lagrangedichte  $\mathcal{L}(x)$  für das Eichfeld  $A_\mu$  und den Majorana-Spinor  $\lambda$  gegeben durch:

$$\mathcal{L}(x) = \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2g^2} \left( \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] \right)^2 + i \bar{\lambda}(x) \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \right\}. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Die Spur wird im folgenden immer nur über die Farbindizes  $a$  gebildet!

Die Supersymmetrie impliziert, daß jedes der Felder  $A_\mu$  und  $\lambda$  für das andere Feld als Eichteilchen wirkt.

Definiert man den *Feldstärke-Tensor*  $F_{\mu\nu}$  und eine *kovariante Ableitung*  $\mathcal{D}_\mu$  durch

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)], \quad (2.3)$$

$$\mathcal{D}_\mu \lambda(x) = \partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)], \quad (2.4)$$

läßt sich die Wirkung schreiben als:

$$S = \int d^4x \operatorname{Tr} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \right\}}_{\mathcal{L}(x)}. \quad (2.5)$$

Ich beschränke mich bei der Rechnung auf die Eichgruppe  $SU(2)$ . Wegen der formalen Analogie zur QCD bezeichnet man die Indizes in der adjungierten Darstellung<sup>2</sup> von  $SU(2)$  ebenfalls als Farbindizes.

In Komponenten-Notation sind die Felder gegeben durch:

$$\text{Eichfeld} : \quad A_\mu(x) = -ig A_\mu^a(x) T^a, \quad (2.6)$$

$$\text{Majorana-Spinor} : \quad \lambda(x) = \lambda^a(x) T^a. \quad (2.7)$$

Die Majorana-Spinoren sind Grassmann-wertig und befinden sich in der adjungierten Darstellung.

Für die Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra gilt:

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2}, \quad (2.8)$$

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \sigma^{ab}. \quad (2.10)$$

Insbesondere gilt dann für die total antisymmetrischen, reellen Strukturkonstanten:

$$f_{abc} = \epsilon_{abc}. \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Eine Darstellung, die durch die Strukturkonstanten festgelegt ist, bezeichnet man als *adjungierte* Darstellung.

Der Feldstärke-Tensor  $F_{\mu\nu}^a(x)$  lautet wie folgt:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (2.12)$$

Die kovariante Ableitung läßt sich in Komponenten-Notation schreiben als:

$$\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) = \partial_\mu \lambda^a(x) + gf_{abc} A_\mu^b(x) \lambda^c(x). \quad (2.13)$$

Die Indizes  $a, b$  und  $c$  sind Elemente aus  $\{1, 2, 3\}$ .

Mit dieser Notation ergibt sich die Wirkung der Super-Yang-Mills-Theorie zu:

$$S = \int d^4x \left\{ \underbrace{-\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)]^2}_{\mathcal{L}(x)} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) \right\}. \quad (2.14)$$

### 2.1.1 SUSY-Transformationen

Unter supersymmetrischen Transformationen verhalten sich die Felder  $A_\mu^a(x)$  und  $\lambda^a(x)$  wie folgt:

$$\delta A_\mu^a(x) = 2i \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) = -2i \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \epsilon, \quad (2.15)$$

$$\delta \lambda^a(x) = -i \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon, \quad (2.16)$$

$$\delta \bar{\lambda}^a(x) = i \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x). \quad (2.17)$$

Dabei ist  $\epsilon$  ein Raum-Zeit-unabhängiger antikommutierender Majorana-Spinor.

Die Variation der Lagrangedichte lautet:

$$\delta \mathcal{L}(x) = \underbrace{-\frac{1}{2} F^{\mu\nu a}(x) \delta F_{\mu\nu}^a(x)}_{(A)} + \underbrace{\frac{i}{2} \delta \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x)}_{(B)} + \underbrace{\frac{i}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x))}_{(C)}. \quad (2.18)$$

Mit den Transformationsregeln (2.15), (2.16) und (2.17) ergeben sich die einzelnen

Terme zu:

$$(a) : \quad \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x)) = \partial_\mu \delta \lambda^a(x) + g f_{abc} [\delta A_\mu^b(x) \lambda^c(x) + A_\mu^b(x) \delta \lambda^c(x)]; \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x)) = -i \gamma^\tau \partial_\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon + g f_{abc} [2i \gamma^\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) - i \gamma^\tau A_\tau^b(x) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu c}(x) \epsilon], \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} (A) : \quad -\frac{1}{2} F^{\mu\nu a}(x) \delta F_{\mu\nu}^a(x) &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu a}(x) \left\{ \partial_\mu \delta A_\nu^a(x) - \partial_\nu \delta A_\mu^a(x) + g f_{abc} [\delta A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) + A_\mu^b(x) \delta A_\nu^c(x)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu a}(x) \left\{ 2i \epsilon \gamma_\nu \partial_\mu \lambda^a(x) - 2i \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\nu \lambda^a(x) + g f_{abc} 2i [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\nu^c(x) + A_\mu^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^c(x)] \right\} \\ &= -2i F^{\mu\nu a}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \lambda^a(x) - 2i g f_{abc} F^{\mu\nu a}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\nu^c(x) \\ &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + 2i g f_{abc} F^{\mu\nu b}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) A_\nu^c(x) \\ &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon - 2i g f_{abc} F^{\mu\nu b}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^a(x) A_\mu^c(x) \\ &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + 2i g f_{abc} F^{\mu\nu b}(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\ &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(B) : \quad \frac{i}{2} \delta \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \gamma^\tau \mathcal{D}_\tau \lambda^a(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \gamma^\tau \\
&\quad * \left[ \partial_\tau \lambda^a(x) + g f_{abc} A_\tau^b(x) \lambda^c(x) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^c(x) A_\tau^b(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) A_\tau^c(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
(C) : \quad \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x)) &= \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a(x) \left\{ -i \gamma^\tau \partial_\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \right. \\
&\quad \left. + g f_{abc} \left[ 2i \gamma^\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - i \gamma^\tau A_\tau^b(x) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu c}(x) \epsilon \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \partial_\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad + g f_{abc} \left[ - \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \right. \\
&\quad \quad \left. = f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \lambda^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) = 0 \right]^3 \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau A_\tau^b(x) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu c}(x) \epsilon \right] \\
&= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \partial_\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau A_\tau^c(x) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu b}(x) \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Die Addition von (A), (B) und (C) ergibt schließlich wieder die Variation von  $\mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}(x) &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}(x) \epsilon - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) A_\tau^c(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Der Beweis dieser Identität findet sich im Anhang F.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
& - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\tau A_\tau^c(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Multiplikation dreier  $\gamma$ -Matrizen lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben [19]:

$$\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\tau\mu} \gamma_\nu + g_{\mu\nu} \gamma_\tau - g_{\tau\nu} \gamma_\mu + i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma. \tag{2.25}$$

Mit  $\sigma_{\mu\nu} = i(\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu})$  und (2.25) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= i \gamma_\tau \underbrace{(\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu})}_{=0} F^{\mu\nu} \\
&= i \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} \\
&= i \left\{ g_{\tau\mu} \gamma_\nu + g_{\mu\nu} \gamma_\tau - g_{\tau\nu} \gamma_\mu + i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma \right\} F^{\mu\nu} \\
&= \left\{ 2i g_{\tau\mu} \gamma_\nu - \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma \right\} F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Damit kann man die Variation der Lagrangedichte schreiben als:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}(x) &= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
&+ 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \lambda^a(x) \gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
&- i \partial^\tau \bar{\lambda}^a(x) g_{\tau\mu} \gamma_\nu F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&+ \frac{1}{2} \partial^\tau \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&+ i \bar{\lambda}^a(x) g_{\tau\mu} \gamma_\nu \partial^\tau F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&- \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma \partial^\tau F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&- 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
&+ g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma F_{\mu\nu}^b(x) A^{\tau c} \epsilon \\
&= 2i F^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
&- i \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu F^{\mu\nu a}(x) \epsilon + i \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&+ \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \left[ \partial^\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma - \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma \partial^\tau \right] F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&+ g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma F_{\mu\nu}^b(x) A^{\tau c} \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iF^{\mu\nu a}(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + i\bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad + \partial^\tau \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \right\} - \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma \partial^\tau F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \\
&\quad + gf_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_5 \gamma^\sigma F_{\mu\nu}^b(x) A^{\tau c} \epsilon \\
&= \partial_\mu \left\{ iF^{\mu\nu a}(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \right\} + \partial^\tau \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma F^{\mu\nu a}(x) \epsilon \right\} \\
&\quad - \underbrace{\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\sigma \left( \partial^\tau F^{\mu\nu a}(x) + \underbrace{gf_{abc} A^{\tau b}(x) F^{\mu\nu c}(x)}_{\sim [D^\tau, F^{\mu\nu}(x)]} \right) \epsilon}_{=0^4} \\
&= \partial_\mu \left\{ iF^{\mu\nu a}(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\sigma\rho}^\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_5 \gamma^\rho F^{\tau\sigma a}(x) \epsilon \right\} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ -iF^{\mu\nu a}(x) \gamma_\nu \lambda^a(x) - \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\sigma\rho}^\mu \gamma^\rho \gamma_5 \lambda^a(x) F^{\tau\sigma a}(x) \right\} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu S^\mu(x). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Diese Rechnungen zeigen, daß die Yang-Mills-Theorie mit einem Majorana-Spinor in der adjungierten Darstellung automatisch supereichinvariant ist. Der Superstrom  $S_\mu$  ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$S_\mu = -iF^{\mu\nu a}(x) \gamma_\nu \lambda^a(x) - \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\sigma\rho}^\mu \gamma^\rho \gamma_5 \lambda^a(x) F^{\tau\sigma a}(x). \tag{2.28}$$

Dieser ist aufgrund der eichinvarianten Supertransformationen ebenfalls invariant unter Eichtransformationen.<sup>5</sup> Der Superstrom transformiert sich unter Lorentz-Transformationen wie eine Kombination aus einem Majorana-Spinor und einem Vierer-Vektor.

## 2.2 Euklidischer Raum; $d = 4$

Betrachtet man nun eine imaginäre Zeit, d.h., geht man über zum euklidischen Raum, so ergibt sich die Wirkung zu:

$$S = \int d^4x \underbrace{\left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) \right\}}_{\mathcal{L}(x)}. \tag{2.29}$$

<sup>4</sup>Der Beweis dieser Gleichung steht im Anhang G.

<sup>5</sup>Das führt schließlich zu einer wichtigen Symmetrie der S-Matrix. [24]

Die Definitionen des Feldstärketensors und der kovarianten Abbildung sind identisch mit den Definitionen aus dem Minkowski-Raum (2.3), (2.4).

### 2.2.1 SUSY-Transformationen

Die supersymmetrischen Transformationen ändern sich im euklidischen Raum ein wenig. Da man hier nicht zwischen oben- und untenstehenden Indizes unterscheidet, kann man die Transformationen nun schreiben als:

$$\delta A_\mu^a(x) = 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^a(x) = -2i\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu\epsilon, \quad (2.30)$$

$$\delta\lambda^a(x) = -\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a(x)\epsilon, \quad (2.31)$$

$$\delta\bar{\lambda}^a(x) = +\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a(x). \quad (2.32)$$

Die Rechnungen für die Variation der Lagrangedichte verlaufen analog zu denen im Minkowski-Raum:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \underbrace{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(x)\delta F_{\mu\nu}^a(x)}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^a(x)}_{(B)} + \underbrace{\frac{1}{2}\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu\delta(\mathcal{D}_\mu\lambda^a(x))}_{(C)}. \quad (2.33)$$

Mit den obigen Transformationsregeln ergibt sich daraus:

$$(a): \quad \delta(\mathcal{D}_\mu\lambda^a(x)) = \partial_\mu\delta\lambda^a(x) + gf_{abc}[\delta A_\mu^b(x)\lambda^c(x) + A_\mu^b(x)\delta\lambda^c(x)], \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\delta(\mathcal{D}_\mu\lambda^a(x)) &= -\gamma_\tau\partial_\tau\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a(x)\epsilon \\ &+ gf_{abc}\left[2i\gamma_\mu\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b(x)\lambda^c(x) - \gamma_\tau A_\tau^b(x)\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^c(x)\epsilon\right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} (A): \quad \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(x)\delta F_{\mu\nu}^a(x) &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(x)\left\{\partial_\mu\delta A_\nu^a(x) - \partial_\nu\delta A_\mu^a(x) \right. \\ &\quad \left. + gf_{abc}\left[\delta A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) + A_\mu^b(x)\delta A_\nu^c(x)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(x)\left\{2i\bar{\epsilon}\gamma_\nu\partial_\mu\lambda^a(x) - 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\nu\lambda^a(x) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g f_{abc} 2i \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\nu^c(x) + A_\mu^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^c(x) \right] \Big\} \\
= & + 2i F_{\mu\nu}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \lambda^a(x) \\
& + 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\nu^c(x) \\
= & - 2i F_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
& - 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) A_\nu^c(x) \\
= & - 2i F_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
& + 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^a(x) A_\mu^c(x) \\
= & - 2i F_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
& - 2i g f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
= & - 2i F_{\mu\nu}^a(x) \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B) : \quad \frac{1}{2} \delta \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) & = + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau \lambda^a(x) \\
& = + \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \gamma_\tau \left[ \partial_\tau \lambda^a(x) + g f_{abc} A_\tau^b(x) \lambda^c(x) \right] \\
& = + \frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^c(x) A_\tau^b(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
= & + \frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) A_\tau^c(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon, \tag{2.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(C) : \quad \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \delta (\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x)) & = - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \left\{ \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \right. \\
& \quad + g f_{abc} \left[ 2i \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \gamma_\tau A_\tau^b(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^c(x) \epsilon \right] \right\} \\
= & - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g f_{abc} \left[ \underbrace{-i\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x)\lambda^c(x)}_{= i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu \lambda^b(x)\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) = 0} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau A_\tau^b(x)\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^c(x) \epsilon \right] \\
& = -\frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau A_\tau^c(x)\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Variation der Lagrangedichte zu:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) & = -2iF_{\mu\nu}^a(x)\partial_\mu \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\nu \epsilon - 2ig f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x)\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
& \quad + \frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) A_\tau^c(x)\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon \\
& \quad - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\tau A_\tau^c(x)\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Analog zu der Beziehung (2.25) im Minkowski-Raum gilt im Euklidischen:

$$\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \left( 2i\delta_{\tau\mu} \gamma_\nu - i\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \right) F_{\mu\nu}. \quad (2.40)$$

Hiermit erhält man für  $\delta\mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) & = -2iF_{\mu\nu}^a(x)\partial_\mu \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\nu \epsilon \\
& \quad - 2ig f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x)\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\nu \epsilon A_\mu^c(x) \\
& \quad + i\partial_\tau \bar{\lambda}^a(x)\delta_{\tau\mu} \gamma_\nu F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad - \frac{1}{2} i\partial_\tau \bar{\lambda}^a(x)\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad - i\bar{\lambda}^a(x)\delta_{\tau\mu} \gamma_\nu \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + \frac{1}{2} i\bar{\lambda}^a(x)\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
& \quad + 2ig f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x)\bar{\lambda}^a(x)A_\mu^c(x)\gamma_\nu \epsilon \\
& \quad - ig f_{abc} \bar{\lambda}^a(x)\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^b(x)A_\tau^c(x) \epsilon
\end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Siehe Anhang F.

$$\begin{aligned}
&= -2iF_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \\
&\quad + i \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon - i \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \left[ \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 - \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 \partial_\tau \right] F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
&\quad - ig f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^b(x) A_\tau^c(x) \epsilon \\
&= -iF_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon - i \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
&\quad - \partial_\tau \left\{ i \frac{1}{2} \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \right\} + i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \\
&\quad - ig f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^b(x) A_\tau^c(x) \epsilon \\
&= \partial_\mu \left\{ -iF_{\mu\nu}^a(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon \right\} + \partial_\tau \left\{ -\frac{1}{2} i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon \right\} \\
&\quad + i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 \underbrace{\left( \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) + g f_{abc} A_\tau^b(x) F_{\mu\nu}^c(x) \right)}_{\substack{\sim [D_\tau, F_{\mu\nu}(x)] \\ =0^7}} \epsilon \\
&= \partial_\mu \left\{ -iF_{\mu\nu}^a(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon - i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\tau\nu\sigma} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\sigma \gamma_5 F_{\tau\nu}^a(x) \epsilon \right\} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu \left\{ iF_{\mu\nu}^a(x) \gamma_\nu \lambda^a(x) - i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\tau\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \lambda^a(x) F_{\tau\nu}^a(x) \right\} \tag{2.41} \\
&= \bar{\epsilon} \partial_\mu S_\mu(x). \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Man erhält somit wieder einen Superstrom, der jetzt folgende Struktur hat:

$$S_\mu(x) = iF_{\mu\nu}^a(x) \gamma_\nu \lambda^a(x) - i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\tau\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \lambda^a(x) F_{\tau\nu}^a(x). \tag{2.43}$$

Definiert man den *dualen Feldstärketensor* durch

$$F_{\mu\nu}^*(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\tau\nu\sigma} F_{\tau\nu}(x), \tag{2.44}$$

ergibt sich der Superstrom zu:

$$S_\mu(x) = i \left( F_{\mu\sigma}^a(x) + F_{\mu\nu}^{a*}(x) \gamma_5 \right) \gamma_\sigma \lambda^a(x). \tag{2.45}$$

Unter Benutzung der Beziehung (2.40) läßt sich für die Variation der Lagrange-dichte noch eine andere Formulierung finden.

---

<sup>7</sup>Siehe Anhang G.

Nach (2.41) ist  $\delta\mathcal{L}$  gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}(x) &= \bar{\epsilon} \frac{1}{2} \left\{ 2i\gamma_\nu \partial_\mu (F_{\mu\nu}^a(x) \lambda^a(x)) - i\epsilon_{\mu\tau\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \partial_\mu (F_{\tau\nu}^a(x) \lambda^a(x)) \right\} \\
 &= \bar{\epsilon} \frac{1}{2} \left\{ 2i\gamma_\nu \partial_\mu (F_{\mu\nu}^a(x) \lambda^a(x)) - i\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \partial_\tau (F_{\mu\nu}^a(x) \lambda^a(x)) \right\} \\
 &= \bar{\epsilon} \frac{1}{2} \partial_\tau \left\{ (2i\gamma_\nu \delta_{\tau\mu} - i\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5) F_{\mu\nu}^a(x) \lambda^a(x) \right\} \\
 &\stackrel{(2.40)}{=} \bar{\epsilon} \frac{1}{2} \partial_\tau \left\{ \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \lambda^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \right\} \\
 &= \bar{\epsilon} \partial_\tau S_\tau(x). \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Der Superstrom läßt sich dann im Vergleich mit (2.43) etwas eleganter schreiben als:

$$S_\mu(x) = \frac{1}{2} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda^a(x) F_{\rho\tau}^a(x). \tag{2.47}$$

## 2.3 Kommutation der SUSY-Transformationen mit den Eichtransformationen

Die eingeführten supersymmetrischen Transformationen sollten von der Art sein, daß sie mit den Eichtransformationen kommutieren. Im folgenden wird sich zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Die Felder transformieren sich folgendermaßen unter Eichtransformationen:

$$\lambda(x) \xrightarrow{E} \lambda^\omega(x) = \omega(x) \lambda(x) \omega^{-1}(x), \tag{2.48}$$

$$A_\mu(x) \xrightarrow{E} A_\mu^\omega(x) = \omega(x) (A_\mu(x) + \partial_\mu) \omega^{-1}(x), \tag{2.49}$$

$$F_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{E} F_{\mu\nu}^\omega(x) = \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x). \tag{2.50}$$

Betrachtet man infinitesimale supersymmetrische Transformationen, so gehen  $\lambda(x)$  und  $A_\mu(x)$  über in:

$$\lambda(x) \xrightarrow{S} \lambda(x) + \delta\lambda(x), \tag{2.51}$$

$$A_\mu(x) \xrightarrow{S} A_\mu(x) + \delta A_\mu(x). \tag{2.52}$$

Die Variationen sind dabei gegeben durch:

$$\delta A_\mu(x) = 2g \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \quad (2.53)$$

$$\delta \lambda(x) = -\frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \epsilon. \quad (2.54)$$

In Komponenten-Notation erhält man daraus wieder die bekannten Transformationen (2.31), (2.32).

Um die Kommutation der Eichtransformationen mit den SUSY-Transformationen zu zeigen, wird die Anwendung der Transformationen auf die Felder  $A_\mu(x)$  und  $\lambda(x)$  in beide Richtungen betrachtet.

- Wendet man zunächst eine SUSY-Transformation und dann eine Eichtransformation an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\xrightarrow{S} A_\mu(x) + \delta A_\mu(x) \\ &\xrightarrow{E} \omega(x) \left( A_\mu(x) + \delta A_\mu(x) + \partial_\mu \right) \omega^{-1}(x) \\ &= A_\mu^\omega(x) + \omega(x) \delta A_\mu(x) \omega^{-1}(x) \\ &= A_\mu^\omega(x) + \left( \delta A_\mu(x) \right)^\omega. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\left( \delta A_\mu(x) \right)^\omega$  durch  $\omega(x) \delta A_\mu(x) \omega^{-1}(x)$  definiert.

Für  $\lambda(x)$  hat man analog:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &\xrightarrow{S} \lambda(x) + \delta \lambda(x) \\ &\xrightarrow{E} \omega(x) \left( \lambda(x) + \delta \lambda(x) \right) \omega^{-1}(x) \\ &= \lambda^\omega(x) + \left( \delta \lambda(x) \right)^\omega, \\ \text{mit } \left( \delta \lambda(x) \right)^\omega &:= \omega(x) \delta \lambda(x) \omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (2.55)$$

- Wendet man jetzt die Transformationen in umgekehrter Reihenfolge an, so erhält man:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\xrightarrow{E} A_\mu^\omega(x) \\ &\xrightarrow{S} A_\mu^\omega(x) + \delta \left( A_\mu^\omega(x) \right) \\ &= A_\mu^\omega(x) + 2g \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^\omega(x) \\ &= A_\mu^\omega(x) + \omega(x) \delta A_\mu(x) \omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mit der Definition von  $\left( \delta A_\mu(x) \right)^\omega$  folgt somit:

$$\delta \left( A_\mu^\omega(x) \right) \equiv \left( \delta A_\mu(x) \right)^\omega. \quad (2.57)$$

Die analoge Rechnung ergibt für  $\lambda(x)$ :

$$\begin{aligned}
 \lambda(x) &\xrightarrow{E} \lambda^\omega(x) \\
 &\xrightarrow{S} \lambda^\omega(x) + \delta(\lambda^\omega(x)) \\
 &= \lambda^\omega(x) - \frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\omega(x) \epsilon \\
 &= \lambda^\omega(x) - \frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x) \epsilon.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Nach obiger Definition (2.55) gilt also auch hier:

$$\delta(\lambda^\omega(x)) \equiv (\delta\lambda(x))^\omega. \tag{2.59}$$

Damit hat man letztlich gezeigt, daß die SUSY- und die Eichtransformationen kommutieren. Dieses wiederum bedeutet aber, daß die Quantenzahlen der Teilchen und ihrer Superpartner identisch sind. Die Teilchen unterscheiden sich voneinander nur durch ihren Spin.

## 2.4 Unintegrierte Kontinuums-Ward-Identitäten

Zunächst wird wieder das erzeugende Funktional für Greensche Funktionen betrachtet:

$$\begin{aligned}
 Z[J(x), \theta(x)] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \\
 &\quad * e^{-S + \int d^4x J_\mu^\alpha(x) A_\mu^\alpha(x) + \int d^4x \bar{\lambda}^\alpha(x) \theta^\alpha(x)}.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Unter dem Integral führt man eine infinitesimale Transformation durch, wobei sich das Integrationsmaß nicht ändern soll:

$$A \mapsto A' = A + \delta A, \tag{2.61}$$

$$\lambda \mapsto \lambda' = \lambda + \delta\lambda, \tag{2.62}$$

$$\bar{\lambda} \mapsto \bar{\lambda}' = \bar{\lambda} + \delta\bar{\lambda}. \tag{2.63}$$

Damit ergibt sich für das erzeugende Funktional:

$$\begin{aligned}
 Z[J(x), \theta(x)] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \\
 &\quad * e^{\int d^4x [-\mathcal{L}(A', \lambda', \bar{\lambda}') + J_\mu^\alpha(x) A_\mu^\alpha(x) + \bar{\lambda}'^\alpha(x) \theta^\alpha(x)]}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\equiv Z[J(x), \theta(x), \epsilon]. \tag{2.65}$$

Formal gilt diese Gleichung auch für ein ortsabhängiges  $\epsilon$ . Dieses führt man nun ein, um unintegrierte Ward-Identitäten zu erhalten.

Für  $\frac{\delta Z}{\delta \epsilon(x)} \epsilon(x)$  erhält man dann:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \epsilon(x)} \epsilon(x) &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \left\{ -\delta \mathcal{L}(x) + J_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x) + \delta \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x) \right\} \\ &\quad * e^{\int d^4x [-\mathcal{L}(A, \lambda, \bar{\lambda}) + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x)]} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$:= \delta_x Z, \quad (2.67)$$

denn:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \epsilon(x)} &= \frac{\delta}{\delta \epsilon(x)} \int d^4y \mathcal{L}(y, \epsilon(y)) \\ &= \int d^4y \frac{\delta}{\delta \epsilon(x)} \mathcal{L}(y, \epsilon(y)) \\ &= \int d^4y \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon(x)}(y, \epsilon(y)) \underbrace{\frac{\delta \epsilon(y)}{\delta \epsilon(x)}}_{=\delta(x-y)} \\ &= \frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon(x)}(x, \epsilon(x)) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \bar{S}_\mu \epsilon \quad (2.69)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} = \partial_\mu \bar{S}_\mu \quad (2.70)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \epsilon(x)} \epsilon(x) = \delta \mathcal{L}. \quad (2.71)$$

Da die Variation  $\delta Z/\delta \epsilon(x)$  nur zu einem Wechsel der „Dummy“-Variablen in dem Pfadintegral führt, gilt:

$$\frac{\delta Z}{\delta \epsilon(x)} = 0. \quad (2.72)$$

Der Erwartungswert einer Funktion  $O(A, \lambda, \bar{\lambda})$  wird wie gewöhnlich definiert als:

$$\langle O(A_\mu(x), \lambda(x), \bar{\lambda}(x)) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda O(A_\mu(x), \lambda(x)) e^{-S}. \quad (2.73)$$

Dabei ist  $Z$  durch folgenden Ausdruck definiert:

$$Z = Z[J = \theta = 0] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda e^{-S}. \quad (2.74)$$

Durch Bildung der Ableitung nach den Quellen erhält man hieraus die Ward-Identitäten.

Integriert man die so erhaltenen Ward-Identitäten über  $d^4x$ , so erhält man wieder die integrierten Ward-Identitäten aus Kapitel 1. Der Unterschied zu den unintegrierten Ward-Identitäten, die im folgenden berechnet werden, liegt in dem expliziten Auftauchen des Superstromes  $S_\mu$ . Man erhält dadurch Ward-Identitäten speziell für diesen Strom. Bei den integrierten Ward-Identitäten hat man zusätzlich zu dem Funktionalintegral in der Variation von  $Z$  noch ein Integral über  $d^4x$ . Da die Integration über  $\delta\mathcal{L}$  keinen Beitrag gibt, verschwindet der Superstrom in diesen Identitäten. Das Nichtvorhandensein dieser Integrale bei den hier zu berechnenden Ward-Identitäten führt bei der Bildung der Ableitung nach den Quellen in  $\delta_x Z$  zu  $\delta$ -Distributionen. Durch eine Integration über  $d^4x$  verschwinden aber auch diese wieder und das Ergebnis sind die schon aus Kapitel 1 bekannten Ward-Identitäten.

- Die einfachste Ward-Identität ergibt sich durch Nullsetzen der Quellen in  $\delta_x Z$ :

$$\delta_x Z \Big|_{J=\theta=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.75)$$

$$\Leftrightarrow \langle \delta\mathcal{L} \rangle = 0 \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow \langle \partial_\mu S_\mu(x) \rangle = 0. \quad (2.77)$$

Somit ist  $\partial_\mu S_\mu$  auch im Operatorsinn erhalten!

- Die nächst höhere Ward-Identität erhält man durch Ableiten nach  $J$  bzw.  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_x Z}{\partial J_\mu^a(y)} &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \left\{ \delta A_\mu^a(x) \delta(x-y) \right. \\ &\quad \left. + [-\delta\mathcal{L}(x) + J_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x) + \delta \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x)] A_\mu^a(y) \right\} \\ &\quad * e^{\int d^4x [-\mathcal{L}(A, \lambda, \bar{\lambda}) + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x)]}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_x Z}{\partial J_\mu^a(y)} \Big|_{J=\theta=0} &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \\ &\quad \left\{ \delta A_\mu^a(x) \delta(x-y) - \delta\mathcal{L}(x) A_\mu^a(y) \right\} e^{-S} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow \langle \delta A_\mu^a(x) \delta(x-y) \rangle - \langle \delta \mathcal{L}(x) A_\mu^a(y) \rangle = 0. \quad (2.80)$$

Mit den supersymmetrischen Transformationsregeln folgt:

$$2i \bar{\epsilon} \langle \gamma_\mu \lambda^a(x) \delta(x-y) \rangle - \bar{\epsilon} \langle \partial_\tau S_\tau(x) A_\mu^a(y) \rangle = 0. \quad (2.81)$$

Diese Ward-Identität ist trivial, da beide Erwartungswerte aufgrund der Lorentzinvarianz keinen Beitrag geben.

Bildet man die Ableitung von  $\delta_x Z$  nach  $\theta$  statt nach  $J$ , so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_x Z}{\partial \theta^a(z)} &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \left\{ -\delta \bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\delta \mathcal{L}(x) + J_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x) + \delta \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x) \right] \left( -\bar{\lambda}^a(z) \right) \right\} \\ &\quad * e^{\int d^4x \left[ -\mathcal{L}(A, \lambda, \bar{\lambda}) + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x) \right]}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\left. \frac{\partial \delta_x Z}{\partial \theta^a(z)} \right|_{J=\theta=0} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \left\{ -\delta \bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) + \delta \mathcal{L}(x) \bar{\lambda}^a(z) \right\} e^{-S} \quad (2.83)$$

$$\stackrel{!}{=} 0. \quad (2.84)$$

Daraus folgt:

$$-\langle \delta \bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) \rangle + \langle \delta \mathcal{L}(x) \bar{\lambda}^a(z) \rangle = 0. \quad (2.85)$$

Mit den Transformationsregeln ergibt sich daraus:

$$-\bar{\epsilon} \langle \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \delta(x-z) \rangle + \bar{\epsilon} \langle \partial_\mu S_\mu(x) \bar{\lambda}^a(z) \rangle = 0. \quad (2.86)$$

Auch diese Ward-Identität ist trivial, da die einzelnen Erwartungswerte erneut allein aufgrund der Lorentzinvarianz verschwinden.

- Zweifaches Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta_x Z}{\partial \theta^a(z) \partial J_\mu^a(y)} &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \\ &\quad \left\{ -\delta \bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) A_\mu^a(y) \left( \delta A_\mu^a(x) \delta(x-y) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ -\delta\mathcal{L}(x) + J_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x) + \delta\bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x) \right] A_\mu^a(y) \\
 & * \left( -\bar{\lambda}^a(z) \right) \left. \right\} e^{\int d^4x [-\mathcal{L}(A,\lambda,\bar{\lambda}) + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x)]} \\
 \frac{\partial^2 \delta_x Z}{\partial \theta^a(z) \partial J_\mu^a(y)} \Big|_{J=\theta=0} & = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \left\{ -\delta\bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) A_\mu^a(y) \right. \\
 & \left. - \delta A_\mu^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) + \delta\mathcal{L}(x) A_\mu^a(y) \bar{\lambda}^a(z) \right\} \\
 & * e^{\int d^4x [-\mathcal{L}(A,\lambda,\bar{\lambda}) + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \bar{\lambda}^a(x) \theta^a(x)]} \quad (2.87) \\
 & \stackrel{!}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 & - \left\langle \delta\bar{\lambda}^a(x) \delta(x-z) A_\mu^a(y) \right\rangle - \left\langle \delta A_\mu^a(y) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle \\
 & + \left\langle \delta\mathcal{L}(x) A_\mu^a(y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle = 0. \quad (2.88)
 \end{aligned}$$

Mit den Transformationsregeln folgt:

$$\begin{aligned}
 & - \bar{\epsilon} \left\langle \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \delta(x-z) A_\tau^a(y) \right\rangle - 2i \bar{\epsilon} \left\langle \gamma_\mu \lambda^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle \\
 & + \left\langle \partial_\mu S_\mu(x) A_\tau^a(y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle = 0, \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & \left\langle \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \delta(x-z) A_\tau^a(y) \right\rangle + 2i \left\langle \gamma_\mu \lambda^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle \partial_\tau \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \lambda^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) A_\rho^a(y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle = 0. \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

Sowohl der erste, wie auch der letzte Erwartungswert geben abermals keinen Beitrag, da sonst die Lorentzinvarianz gebrochen wäre.

Man verbleibt somit mit folgender Zwei-Punkt-Funktion-Ward-Identität:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \gamma_\mu \lambda^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle = 0 \\
 \Rightarrow & \left\langle \lambda^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \right\rangle = 0. \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

Diese Ward-Identität transformiert sich nicht-trivial unter Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \langle \lambda^a(x) \delta(x-y) \bar{\lambda}^a(z) \rangle &\xrightarrow{E} \\ \langle \omega(x) \lambda^a(x) \omega^{-1}(x) \delta(x-y) \omega(z) \bar{\lambda}^a(z) \omega^{-1}(z) \rangle. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Somit verschwindet dieser Ausdruck schon aus Gründen der Eichinvarianz. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als erhielte man bei dem Zusammenfall der Orte  $x$  und  $z$  aus dieser Ward-Identität das Gluino-Kondensat. Dieses ist jedoch ein Trugschluß. Setzt man die Orte zweier an verschiedenen Punkten wirkenden Operatoren ohne Berücksichtigung spezieller Methoden, wie zum Beispiel des Point-Splitting-Verfahrens, gleich, so erhält man in der Regel keine sinnvollen Aussagen!

Um weitere nicht-triviale Ward-Identitäten zu erhalten, hat man die Möglichkeit entweder höhere Ableitungen nach den Quellen zu bilden oder aber eine Eichfixierung einzuführen.

# Kapitel 3

## N=1 Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

In diesem Kapitel wird das Modell der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf einem vierdimensionalen Gitter berechnet.

### 3.1 Notationen

Die Gitter-Feldtheorie ist eine sehr gute Möglichkeit, um Quantenfelder auf nicht-störungstheoretischer Basis zu regularisieren. Man geht dabei, ausgehend vom Kontinuum, über zu einer diskreten Raum-Zeit.

Dazu führt man ein hyperkubisches Gitter durch

$$\Lambda = a\mathbf{Z} = \left\{ x \mid \frac{x_\mu}{a} \in \mathbf{Z} \right\} \quad (3.1)$$

mit der Gitterkonstanten  $a$  ein, die in jede Raum-Zeit-Richtung identisch ist.

Die skalaren Felder  $f(x)$  sind jeweils auf den Punkten  $x \in \Lambda$  definiert.

Für die Ableitung von Feldern definiert man eine Gitter-Vorwärts- und eine Gitter-Rückwärts-Ableitung durch:

$$\Delta_\mu^f f(x) := \frac{1}{a} \left( f(x + a\hat{\mu}) - f(x) \right), \quad (3.2)$$

$$\Delta_\mu^b f(x) := \frac{1}{a} \left( f(x) - f(x - a\hat{\mu}) \right). \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\hat{\mu}$  ein Einheitsvektor in  $\mu$  Richtung.

#### 3.1.1 Gitter-Eichfelder

Auf dem Gitter versteht man unter elementaren Paralleltransportern jene, die mit den Verbindungen („links“)  $b$  assoziiert werden, die die nächsten Nachbarpunkte miteinander verbinden. So einen Paralleltransporter bezeichnet man auch

als „Link-Variable“:

$$U(b) \equiv U(x + a\hat{\mu}, x) \equiv U_\mu(x) \in G^1. \quad (3.4)$$

Dazu kann man folgende graphische Darstellung verwenden:

Der Paralleltransporter hat folgende Eigenschaft:

$$U(y, x) = U^{-1}(x, y) = U^\dagger(x, y). \quad (3.5)$$

Definiert man den Paralleltransporter auch für negative Richtungen, gilt analog:

$$U_{-\mu}(x) \equiv U(x - a\hat{\mu}, x) = U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}). \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Wilson-Wirkung

Für die Konstruktion eichinvarianter Wirkungen werden geschlossene Kurven benötigt. Die kleinsten geschlossenen Kurven sind die Plaketten, die sich aus vier Verbindungen zusammensetzen. Der zugehörige Paralleltransporter zu einer Plakette, die die Punkte

$$x, \quad x + a\hat{\mu}, \quad x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, \quad x + a\hat{\nu} \quad (3.7)$$

enthält und folgende Orientierung hat:

wird „Plaketten-Variable“ genannt und folgendermaßen abgekürzt:

<sup>1</sup>G benennt hier die jeweilige Eichgruppe.

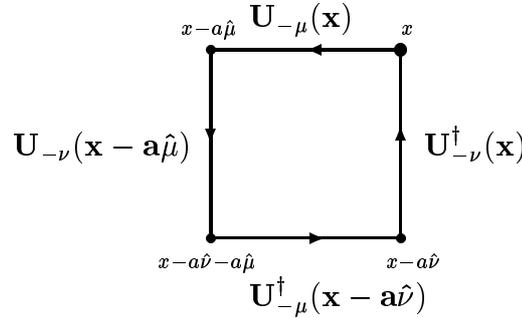
$$U_P \equiv U_{\mu\nu}(x) \equiv$$

$$U(x, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x) \quad (3.8)$$

$$= U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x). \quad (3.9)$$

Für negative Richtungen hat man:

$$\begin{aligned} U_{-\mu-\nu}(x) &= U_{-\nu}^\dagger(x) U_{-\mu}^\dagger(x - a\hat{\nu}) U_{-\nu}(x - a\hat{\mu}) U_{-\mu}(x) \\ &= U_\nu(x - a\hat{\nu}) U_\mu(x - a\hat{\nu} - a\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}). \end{aligned} \quad (3.10)$$



Für die Yang-Mills-Theorie hat man im Kontinuum ein Eichfeld  $A_\mu(x)$ . Dieses wird nun auf dem Gitter definiert durch:

$$U_\mu(x) \equiv e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu^2(x) + \dots \quad (3.11)$$

Mit

$$A_\nu(x + a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x) + O(a^2) \quad (3.12)$$

und der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^F e^G = e^{F+G + \frac{1}{2}[F,G] + \frac{1}{12}[F,[F,G]] + \frac{1}{12}[[F,G],G] + \dots} \quad (3.13)$$

erhält man

$$U_{\mu\nu}(x) = e^{-a^2 G_{\mu\nu}(x)}. \quad (3.14)$$

Dabei ist  $G_{\mu\nu}(x)$  gegeben durch:

$$G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + O(a), \quad (3.15)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (3.16)$$

$F_{\mu\nu}$  bezeichnet den Gluon-Feldtensor auf dem Gitter. Das Gluinofeld wird, analog zum Kontinuum, durch  $\lambda$  dargestellt. Ausführlichere Rechnungen hierzu folgen in anschließenden Rechnungen, wie zum Beispiel (3.81).

### 3.2 Gitterwirkung

Die Wirkung für die N=1 Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter setzt sich zusammen aus der WILSON-Wirkung für die bosonischen Komponenten und dem WILSON-DIRAC-Operator für die Gluinos:

$$S = S_E + S_F. \quad (3.17)$$

Dabei ist  $S_E$ , die Standard-Wilson-Wirkung für das SU(2)-Eichfeld, als eine Summe über alle Plaketten gegeben durch:

$$S_E = \frac{1}{a^4} \frac{1}{g^2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} (U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x)) \right]. \quad (3.18)$$

Mit  $S_F$  wird der fermionische Teil der Gitterwirkung bezeichnet. Dieser wird nach G. CURCI und G. VENIZIANO [3] definiert durch:

$$\begin{aligned} S_F = \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_\mu \left[ \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right] \right. \\ \left. + \left( M_0 + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Eine äquivalente Formulierung in der adjungierten Darstellung wird nach I. MONTVAY [15] definiert durch:

$$\begin{aligned} S_F = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\psi}^a(x) \psi^a(x) \right. \\ \left. - \frac{K}{a} \sum_{\mu=1}^4 \left[ \bar{\psi}^a(x + a\hat{\mu}) V_\mu^{ab}(x) (r + \gamma_\mu) \psi^b(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi}^a(x) \left( V_\mu^{ab}(x) \right)^T (r - \gamma_\mu) \psi^b(x + a\hat{\mu}) \right] \right\}. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  in (3.20) drückt die Majorana-Natur des Gauginos aus.

$K$  ist der Hopping-Parameter:

$$K = 1 / (2aM_0 + 8r). \quad (3.21)$$

Die Matrix  $V$  für das Eichfeld in der adjungierten Darstellung wird definiert durch:

$$\begin{aligned} V_\mu^{ab}(x) &\equiv V_\mu^{ab}[U(x)]. \\ &\equiv 2\text{Tr} [U_\mu^\dagger(x) T^a U_\mu(x) T^b]. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Diese hat folgende Eigenschaften [15]:

$$V_\mu^{ab}(x) = (V_\mu^{ab}(x))^* = \left( (V_\mu^{ab}(x))^{-1} \right)^T. \quad (3.23)$$

Dabei wirken die Transposition und die Inversion jeweils auf die adjungierten Farbindizes.

Diese beiden Formulierungen der Gitterwirkung sind einander äquivalent. Man kann sie ineinander überführen, indem man folgende Normierung einführt:

$$\psi^a(x) = \sqrt{aM_0 + 4r} \lambda^a(x), \quad (3.24)$$

$$\bar{\psi}^a(x) = \sqrt{aM_0 + 4r} \bar{\lambda}^a(x). \quad (3.25)$$

Im naiven Kontinuumsimes erhält man aus (3.19):

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_\mu \right. \\ &\quad \left[ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu (1 + aA_\mu(x)) (\lambda(x) + a\Delta_\mu^f \lambda(x)) (1 - aA_\mu(x)) \right. \\ &\quad \left. - (\bar{\lambda}(x) + a\Delta_\mu^f \lambda(x)) \gamma_\mu (1 - aA_\mu(x)) \lambda(x) (1 + aA_\mu(x)) \right] \\ &\quad \left. + M_0 Tr(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)) + O(a^2) \right\} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2a} Tr \left[ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu (\lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x) + aA_\mu(x)\lambda(x) - a\lambda(x)A_\mu(x)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu (\lambda(x) + a\lambda(x)A_\mu(x) - aA_\mu(x)\lambda(x)) - a\partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right] \right. \\ &\quad \left. + M_0 Tr(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)) + O(a^2) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [A_\mu(x), \lambda(x)] \right) \right. \\ &\quad \left. + M_0 Tr(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)) \right\} + O(a) \\ &= \int d^4x \left\{ \bar{\lambda}^d(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^a(x) Tr(T^d T^a) \right. \\ &\quad \left. - ig \bar{\lambda}^d(x) \gamma_\mu A_\mu^b(x) \lambda^c(x) Tr \left( T^d \underbrace{[T^b, T^c]}_{=if_{bca} T^a} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_0 \bar{\lambda}^a(x) \lambda^b(x) \text{Tr}(T^a T^b) \Big\} + O(a) \\
= & \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \left[ \partial_\mu \lambda^a(x) + g f_{abc} A_\mu^b(x) \lambda^c(x) \right] \right. \\
& \left. + M_0 \left( \bar{\lambda}^a(x) \lambda^a(x) \right) \right\} + O(a). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun eine masselose Theorie, so erhält man wieder das gewohnte Ergebnis aus der Kontinuums-Physik:

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x). \tag{3.27}$$

Der Kontinuumsliches für die Eichfeldwirkung ergibt sich mit  $U_{\mu\nu} = e^{-a^2 G_{\mu\nu}}$  zu:

$$\begin{aligned}
S_E & \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{g^2} \frac{1}{a^4} \int d^4x \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right] \right\} \\
& = \frac{1}{2g^2} \frac{1}{a^4} \int d^4x \text{Tr} \left( -a^4 F_{\mu\nu}^2(x) \right) + O(a) \\
& = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \left\{ g^2 F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^b(x) \text{Tr}(T^a T^b) \right\} + O(a) \\
& = \frac{1}{4} \int d^4x \left\{ F_{\mu\nu}^a(x) \right\}^2 + O(a). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

### 3.3 SUSY-Transformationen auf dem Gitter

Die supersymmetrischen Transformationen müssen nun so gewählt werden, daß sie im naiven Kontinuumsliches die supersymmetrischen Kontinuums-Transformationen ergeben. Zudem müssen sie mit den Gitter-Eichtransformationen kommutieren und sie sollten die Supersymmetrie auf dem Gitter möglichst gut erhalten.

Eine sinnvolle Wahl ist:

$$\delta U_\mu(x) = -2ag U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \tag{3.29}$$

$$\delta \lambda(x) = -\frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \epsilon, \tag{3.30}$$

$$\delta \bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x). \tag{3.31}$$

Dabei ist  $\mathcal{G}$  zunächst noch unbestimmt, bis auf die Eigenschaft, daß  $\mathcal{G}$  im Kontinuumsliches den Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  ergibt.

Bildung des naiven Kontinuumslimites ergibt für die Transformationen:

i.)

$$\begin{aligned}
 \delta U_\mu(x) &= \delta(e^{-aA_\mu(x)}) \\
 &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(1 - aA_\mu(x)) + O(a^2) \\
 &= -a\delta A_\mu(x) \\
 &= -2ag\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x).
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Somit folgt  $\delta A_\mu(x) = 2g\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x)$ , was mit der Kontinuumsstransformation (2.53) übereinstimmt.

ii.)

$$\begin{aligned}
 \delta\lambda(x) &= -\frac{i}{g}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\epsilon \\
 &\xrightarrow{a \rightarrow 0} -\frac{i}{g}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\epsilon.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Auch dieser Ausdruck gibt den richtigen Kontinuumslimites (2.54).

Die Variation von  $U_\mu^\dagger(x)$  berechnet sich aus der Variation von  $U_\mu(x)$ . Dazu nutzt man aus, daß  $U$  eine unitäre Matrix ist und somit folgende Bedingung erfüllt:

$$U_\mu^\dagger(x)U_\mu(x) = \mathbf{1}. \tag{3.34}$$

Daraus folgt nun aber:

$$\begin{aligned}
 \delta(U_\mu^\dagger(x)U_\mu(x)) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\delta U_\mu^\dagger(x))U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x)\delta U_\mu(x) &= 0. \\
 \Rightarrow \delta U_\mu^\dagger(x) &= -U_\mu^\dagger(x)\delta U_\mu(x)U_\mu^\dagger(x) \\
 &\stackrel{(3.29)}{=} 2ag\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu^\dagger(x).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.4 Kommutation der SUSY-Transformationen mit den Eichtransformationen

Wie im Kontinuum sollten natürlich auch die supersymmetrischen Transformationen mit den Eichtransformationen kommutieren.

### 3.4.1 Gitter-Eichtransformationen

Unter Eichtransformationen verhalten sich die Felder auf dem Gitter wie folgt:

$$\lambda(x) \xrightarrow{E} \lambda^\omega(x) = \omega(x) \lambda(x) \omega^{-1}(x), \quad (3.36)$$

$$U_\mu(x) \xrightarrow{E} U_\mu^\omega(x) = \omega(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \omega^{-1}(x). \quad (3.37)$$

Die Kommutation zeigt man nun wie gewohnt durch Anwendung der Transformationen auf die Gitterfelder in beide Richtungen (siehe Kapitel 2.3).

- Betrachtet man zuerst das Verhalten der Felder unter SUSY-Transformationen und danach unter Eichtransformationen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &\xrightarrow{S} U_\mu(x) + \delta U_\mu(x) \\ &\xrightarrow{E} \omega(x + a\hat{\mu}) [U_\mu(x) + \delta U_\mu(x)] \omega^{-1}(x) \\ &= U_\mu^\omega(x) + (\delta U_\mu(x))^\omega, \end{aligned} \quad (3.38)$$

wobei  $(\delta U_\mu(x))^\omega$  definiert ist durch:

$$(\delta U_\mu(x))^\omega := \omega(x + a\hat{\mu}) \delta U_\mu(x) \omega(x). \quad (3.39)$$

Für  $\lambda(x)$  erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &\xrightarrow{S} \lambda(x) + \delta \lambda(x) \\ &\xrightarrow{E} \omega(x) [\lambda(x) + \delta \lambda(x)] \omega^{-1}(x) \\ &= \lambda^\omega(x) + (\delta \lambda(x))^\omega, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\text{mit } (\delta \lambda(x))^\omega := \omega(x) \delta \lambda(x) \omega^{-1}(x). \quad (3.41)$$

- Wendet man nun zunächst eine Eichtransformation und dann eine SUSY-Transformation an, so gilt für  $U_\mu(x)$ :

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &\xrightarrow{E} U_\mu^\omega(x) \\ &\xrightarrow{S} U_\mu^\omega(x) + \delta(U_\mu^\omega(x)) \\ &= U_\mu^\omega(x) - 2ag U_\mu^\omega(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^\omega(x) \\ &= U_\mu^\omega(x) \\ &\quad - 2ag \omega(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \underbrace{\omega^{-1}(x) \omega(x)}_{\mathbf{1}} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \omega^{-1}(x) \\ &= U_\mu^\omega(x) + \omega(x + a\hat{\mu}) \delta U_\mu(x) \omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Daraus ergibt sich mit (3.39) folgender Zusammenhang:

$$\delta(U_\mu^\omega(x)) \equiv (\delta U_\mu(x))^\omega. \quad (3.43)$$

Analog hat man für  $\delta\lambda^\omega(x)$ :

$$\begin{aligned} \lambda^\omega(x) &\xrightarrow{E} \lambda^\omega(x) \\ &\xrightarrow{S} \lambda^\omega(x) + \delta(\lambda^\omega(x)) \\ &= \lambda^\omega(x) - \frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}^\omega(x) \epsilon. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Damit die Eichtransformationen mit den SUSY-Transformationen kommutieren, muß somit für  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^\omega(x)$  gelten:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^\omega(x) = \omega(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x). \quad (3.45)$$

Dann folgt aus (3.44):

$$\delta(\lambda^\omega(x)) \equiv (\delta\lambda(x))^\omega. \quad (3.46)$$

Eine mögliche Wahl für  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  sind somit Terme, die aus offenen Plaketten  $U_{\mu\nu}$  bestehen.

Der einfachste Ausdruck für  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  ist:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2a^2} (U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x)). \quad (3.47)$$

Bildet man den naiven Kontinuumsimes, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= -\frac{1}{2a^2} (e^{-a^2 G_{\mu\nu}(x)} - e^{a^2 G_{\mu\nu}(x)}) \\ &= -\frac{1}{2a^2} (1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)) \\ &= F_{\mu\nu}(x) + O(a). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Im Kontinuumsimes gibt  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  somit den Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$ . Es bleibt damit nur noch das Verhalten von  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  unter Eichtransformationen zu untersuchen.

Die Link-Variablen gehen unter Anwendung von Eichtransformationen über in:

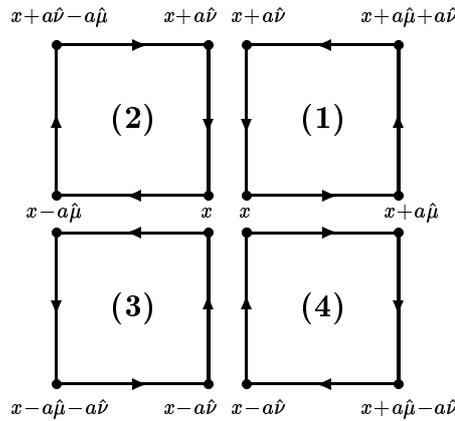
$$\begin{aligned} U_\mu(x) &\xrightarrow{E} (U_\mu(x))^\omega = \omega(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \omega^{-1}(x), \\ U_\mu^\dagger(x) &\xrightarrow{E} (U_\mu^\dagger(x))^\omega = \omega(x) U_\mu^\dagger(x) \omega^{-1}(x + a\hat{\mu}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Für die Plaketten-Variablen  $U_{\mu\nu}$  folgt dann:

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(x) &\xrightarrow{E} (U_{\mu\nu}(x))^\omega \\
&= (U_\nu^\dagger(x))^\omega (U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu}))^\omega (U_\nu(x+a\hat{\mu}))^\omega (U_\mu(x))^\omega \\
&= \omega(x) U_\nu^\dagger(x) \underbrace{\omega^{-1}(x+a\hat{\nu}) \omega(x+a\hat{\nu})}_{=\mathbf{1}} U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu}) \\
&\quad * \underbrace{\omega^{-1}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) \omega(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})}_{=\mathbf{1}} U_\nu(x+a\hat{\mu}) \\
&\quad * \underbrace{\omega^{-1}(x+a\hat{\mu}) \omega(x+a\hat{\mu})}_{=\mathbf{1}} U_\mu(x) \omega^{-1}(x) \\
&= \omega(x) U_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x). \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Hiermit erfüllt das oben gewählte  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  die geforderte Transformationsbedingung (3.45).

Durch eine Symmetrisierung erhält man für  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  einen sogenannten „Clover“-Term.<sup>2</sup> Der Clover-Term setzt sich aus vier symmetrisch um den Punkt  $x$  angeordneten Plaketten zusammen:



$$(1) = U_{\mu\nu}(x), \tag{3.51}$$

$$(2) = U_{-\mu\nu}(x), \tag{3.52}$$

$$(3) = U_{-\mu-\nu}(x), \tag{3.53}$$

$$(4) = U_{\mu-\nu}(x). \tag{3.54}$$

Mit diesen Termen ergibt sich  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  zu:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4a^2} \left( U_{\mu\nu}(x) - U_{-\mu\nu}(x) + U_{-\mu-\nu}(x) - U_{\mu-\nu}(x) \right). \tag{3.55}$$

<sup>2</sup>clover (engl.): Kleeblatt

Der naive Kontinuumslimites für  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  berechnet sich daraus zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= -\frac{1}{4a^2} \left( 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) \right. \\ &\quad \left. - 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3) \right) \\ &= F_{\mu\nu}(x) + O(a). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Äquivalent dazu ist eine Darstellung von  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ , in der jeweils das komplexkonjugierte subtrahiert wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= -\frac{1}{8a^2} \left\{ U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x) - U_{-\mu\nu}(x) + U_{-\mu\nu}^\dagger(x) \right. \\ &\quad \left. + U_{-\mu-\nu}(x) - U_{-\mu-\nu}^\dagger(x) - U_{\mu-\nu}(x) + U_{\mu-\nu}^\dagger(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

## 3.5 Verhalten der Wirkung unter den SUSY-Transformationen

### 3.5.1 Fermion-Wirkung

Die Variation des fermionischen Anteils der Gitterwirkung ergibt:

$$\begin{aligned} \delta S_F &= \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_\mu \left[ \delta \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ &\quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \delta U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \delta \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \delta U_\mu(x) \\ &\quad - \delta \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ &\quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) \delta U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ &\quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \delta \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ &\quad \left. \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) \delta U_\mu^\dagger(x) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( M_0 + \frac{4r}{a} \right) Tr \left[ \delta \bar{\lambda}(x) \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \delta \lambda(x) \right] \right\} \\ &= \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_\mu \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ &\quad + 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \epsilon U_\mu(x) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& - \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& + 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& + \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \epsilon U_\mu^\dagger(x) \\
& - 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \Big] \\
& + 2 \left( M_0 + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right] \Big\} . \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Im naiven Kontinuumslimites wird die Betrachtung der Terme mit dem Wilson-Parameter  $r$ , die eine reine Gittereigenschaft darstellen, zunächst zurückgestellt. Ihre Einführung war notwendig, um die Fermionendoppler zu beseitigen. Eine ausführliche Diskussion der  $r$ -abhängigen Terme findet sich bei der Betrachtung des Superstromes.

Man verbleibt dann mit acht Termen und einem Massenterm, der proportional zu  $M_0$  ist. Im folgenden wird sich nun zeigen, daß die für das Kontinuum relevanten Terme nur die vier mit dem Vorfaktor  $\frac{i}{g}$  sind. Eine Diskussion der einzelnen Terme ergibt mit

$$\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x) + aR_{\rho\tau}(x) + O(a^2) \tag{3.59}$$

folgende Ausdrücke:

i.)

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
& \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \left( F_{\rho\tau}(x) + a R_{\rho\tau}(x) \right) \gamma_\mu \left( 1 + aA_\mu(x) \right) \left( \lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x) \right) \\
& \quad * \left( 1 - aA_\mu(x) \right) + O(a^2) \\
& = \frac{i}{g} \left\{ \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda(x) \right. \\
& \quad + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) [A_\mu(x), \lambda(x)] \\
& \quad \left. + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} R_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a^2), \tag{3.60}
\end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \in U_\mu(x) \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\longrightarrow} & -\frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left(1 + aA_\mu(x)\right) \sigma_{\rho\tau} \left(F_{\rho\tau}(x) + a\partial_\mu F_{\rho\tau}(x) + aR_{\rho\tau}(x)\right) \in \\
& * \left(1 - aA_\mu(x)\right) + O(a^2) \\
= & -\frac{i}{g} \left\{ \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \epsilon}_{=\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x)} + a \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \epsilon}_{=\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x)} \right. \\
& + a \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} [A_\mu(x), F_{\rho\tau}(x)] \\
& \left. + a \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} R_{\rho\tau}(x) \epsilon \right\} + O(a^2), \tag{3.61}
\end{aligned}$$

iii.)

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\longrightarrow} & -\frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \left(F_{\rho\tau}(x) + a\partial_\mu F_{\rho\tau}(x) + aR_{\rho\tau}(x)\right) \gamma_\mu \left(1 - aA_\mu(x)\right) \lambda(x) \\
& * \left(1 + aA_\mu(x)\right) + O(a^2) \\
= & -\frac{i}{g} \left\{ \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
& + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \\
& \left. + a \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} R_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a^2), \tag{3.62}
\end{aligned}$$

iv.)

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \in U_\mu^\dagger(x) \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\longrightarrow} & \frac{i}{g} \left(\bar{\lambda}(x) + a\partial_\mu \bar{\lambda}(x)\right) \gamma_\mu \left(1 - aA_\mu(x)\right) \sigma_{\rho\tau} \left(F_{\rho\tau}(x) + aR_{\rho\tau}(x)\right) \in \\
& * \left(1 + aA_\mu(x)\right) + O(a^2) \\
= & \frac{i}{g} \left\{ \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \epsilon}_{=\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x)} + a \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} [F_{\rho\tau}(x), A_\mu(x)] \epsilon \right. \\
& \left. + a \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \epsilon \right\} + O(a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a \underbrace{\partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x)}_{= \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda(x)} \epsilon \\
& + a \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} R_{\rho\tau}(x) \epsilon \} + O(a^2). \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Die Summe dieser vier Terme ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{2i}{g} a \left\{ \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \epsilon + \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu [A_\mu(x), \lambda(x)] \right. \\
\left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \epsilon - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} [A_\mu(x), F_{\rho\tau}(x)] \epsilon \right\}. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Bildet man nun die Spur über die Farbindizes, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \frac{2i}{g} a \left\{ (-ig) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}^b(x) Tr(T^a T^b) \epsilon \right. \\
& \quad + (-ig)^2 \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}^b(x) \gamma_\mu A_\mu^c(x) \lambda^a(x) Tr(T^b [T^c, T^a]) \\
& \quad - (-ig) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}^b(x) Tr(T^a T^b) \epsilon \\
& \quad \left. - (-ig)^2 \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} A_\mu^c(x) F_{\rho\tau}^b(x) Tr(T^a [T^c, T^b]) \epsilon \right\} \\
& = a \left\{ \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}^a(x) \epsilon + g f_{cab} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}^b(x) \gamma_\mu A_\mu^c(x) \lambda^a(x) \right. \\
& \quad \left. - \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu F_{\rho\tau}^a(x) \epsilon - g f_{cba} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} A_\mu^c(x) F_{\rho\tau}^b(x) \epsilon \right\}. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Mit dem Faktor  $\frac{1}{2a}$  aus (3.58) und folgender Umbenennung:

$$\mu \rightarrow \tau; \quad \tau \rightarrow \nu; \quad \rho \rightarrow \mu, \quad (3.66)$$

läßt sich (3.65) schreiben als:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \partial_\tau \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau A_\tau^c(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon \\
& - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} \partial_\tau F_{\mu\nu}^a(x) \epsilon + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\tau A_\tau^c(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b(x) \epsilon. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Dieses ist aber gerade der fermionische Anteil der Kontinuums-Variation.

Es bleibt somit zu zeigen, daß die vier Terme mit dem Vorfaktor  $2ag$  aus (3.58) keinen Beitrag geben.

Diese geben im naiven Kontinuumslimites jeweils:

i.)

$$\begin{aligned}
& gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\mapsto} & gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left(1 + aA_\mu(x)\right) \left(\lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x)\right) \right. \\
& \quad \left. * \left(1 - aA_\mu(x)\right) \right\} + O(a^2) \\
= & gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \right\} + O(a), \tag{3.68}
\end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
& -gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\mapsto} & -gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left(1 + aA_\mu(x)\right) \left(\lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x)\right) \right. \\
& \quad \left. * \left(1 - aA_\mu(x)\right) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a^2) \\
= & -gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a), \tag{3.69}
\end{aligned}$$

iii.)

$$\begin{aligned}
& gTr \left\{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\mapsto} & gTr \left\{ \left(\bar{\lambda}(x) + a\partial_\mu \bar{\lambda}(x)\right) \gamma_\mu \left(1 - aA_\mu(x)\right) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \right. \\
& \quad \left. * \left(1 + aA_\mu(x)\right) \right\} + O(a^2) \\
= & gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \right\} + O(a), \tag{3.70}
\end{aligned}$$

iv.)

$$\begin{aligned}
& -gTr \left\{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\
\stackrel{a \rightarrow 0}{\mapsto} & -gTr \left\{ \left(\bar{\lambda}(x) + a\partial_\mu \bar{\lambda}(x)\right) \gamma_\mu \left(1 - aA_\mu(x)\right) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right. \\
& \quad \left. * \left(1 + aA_\mu(x)\right) \right\} + O(a^2) \\
= & -gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a). \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Die Summe dieser Terme ergibt:

$$\begin{aligned}
& 2gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \\
= & 2gTr \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x) \right] \right\} \\
= & 2g \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) Tr \left\{ T^a \underbrace{[T^b, T^c]}_{=if_{bcd}T^d} \right\} \\
= & ig f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \\
\stackrel{(F.14)}{=} & 0. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Der Massenterm  $2M_0 \frac{i}{g} \text{Tr}[\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x), \lambda(x)]$  geht im naiven Kontinuumslimites über in:

$$2 \frac{i}{g} M_0 \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \text{Tr} [F_{\rho\tau}(x), \lambda(x)]. \quad (3.73)$$

Dieser Term bricht explizit die Supersymmetrie.

### 3.5.2 Eichfeldwirkung

Die Variation der Gitter-Eichfeldwirkung unter den supersymmetrischen Transformationen ergibt sich zu:

$$\delta S_E = \frac{1}{a^4} \frac{1}{g^2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr} (\delta U_{\mu\nu}(x) + \delta U_{\mu\nu}^\dagger(x)) \right]. \quad (3.74)$$

Für die Variation von  $U_{\mu\nu}(x)$  erhält man:

$$\begin{aligned} \delta U_{\mu\nu}(x) &= \delta U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad + U_\nu^\dagger(x) \delta U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) \delta U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \delta U_\mu(x). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Mit (3.35) folgt:

$$\begin{aligned} \delta U_{\mu\nu}(x) &= 2ag \left\{ \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad + U_\nu^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad - U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ &\quad \left. - U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Analog ergibt sich die Variation von  $U_{\mu\nu}^\dagger(x)$  zu:

$$\begin{aligned} \delta U_{\mu\nu}^\dagger(x) &= \delta U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\ &\quad + U_\mu^\dagger(x) \delta U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\ &\quad + U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) \delta U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\ &\quad + U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) \delta U_\nu(x) \\ &= 2ag \left\{ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \right. \\ &\quad + U_\mu^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\ &\quad - U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\ &\quad \left. - U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man für die Variation der Eichfeldwirkung:

$$\begin{aligned}
 \delta S_E &= \frac{1}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
 &\quad - U_\nu^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
 &\quad + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
 &\quad + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
 &\quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\
 &\quad - U_\mu^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\
 &\quad + U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \\
 &\quad \left. + U_\mu^\dagger(x) U_\nu^\dagger(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \right\} \\
 &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
 &\quad - U_\nu^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
 &\quad + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
 &\quad \left. + U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \tag{3.78}
 \end{aligned}$$

Da die Spur invariant unter zyklischer Vertauschung ist, kann man folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
 \delta S_E &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
 &\quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) \\
 &\quad + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \\
 &\quad \left. + U_{\mu\nu}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

Es bietet sich an dieser Stelle an, geschickt Einheitsmatrizen zu verteilen, um dadurch einzelne  $U_\mu(x)$ -Terme zu Plaketten zusammenzufassen:

$$\begin{aligned}
 \delta S_E &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) \underbrace{U_\nu(x) U_\nu^\dagger(x)}_{= \mathbf{1}} U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) \underbrace{U_\mu(x) U_\mu^\dagger(x)}_{=1} \} \\
= & \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \\
& \quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) U_{\mu\nu}(x) U_\nu^\dagger(x) \\
& \quad \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) \right\}. \quad (3.80)
\end{aligned}$$

Entwickelt man  $U_{\mu\nu}(x)$  zu höheren Potenzen in  $a$ , so erhält man mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (3.13) folgenden Ausdruck für  $U_{\mu\nu}(x)$ :

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(x) & = e^{aA_\nu(x)} e^{aA_\mu(x) + a^2 \partial_\nu A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^3 \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x)} \\
& \quad * e^{-aA_\nu(x) - a^2 \partial_\mu A_\nu(x) - \frac{1}{2} a^3 \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x)} e^{-aA_\mu(x)} \\
& = e^{aA_\nu(x)} e^{aA_\mu(x) + a^2 \partial_\nu A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^3 \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x)} \\
& \quad * \exp \left( - aA_\nu(x) - aA_\mu(x) - a^2 \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} a^2 [A_\nu(x), A_\mu(x)] \right. \\
& \quad \quad + \frac{1}{2} a^3 [\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{12} a^3 [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad \quad - \frac{1}{12} a^3 [[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{2} a^3 \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + O(a^4) \right) \\
& = e^{aA_\nu(x)} \\
& \quad * \exp \left( - aA_\nu(x) + a^2 \partial_\nu A_\mu(x) - a^2 \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} a^2 [A_\nu(x), A_\mu(x)] \right. \\
& \quad \quad + \frac{1}{2} a^3 [\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{12} a^3 [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad \quad - \frac{1}{12} a^3 [[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] - \frac{1}{2} a^2 [A_\mu(x), A_\nu(x)] \\
& \quad \quad - \frac{1}{2} a^3 [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] + \frac{1}{4} a^3 [A_\mu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad \quad - \frac{1}{2} a^3 [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] - \frac{1}{2} a^3 [\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] \\
& \quad \quad - \frac{1}{2} a^3 \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} a^3 \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{12} a^3 [A_\mu(x), [A_\mu(x), A_\nu(x)]] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{12} a^3 \left[ [A_\mu(x), A_\nu(x)], A_\nu(x) \right] + O(a^4) \Big) \\
 = & \exp \left\{ a^2 \left( \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x) - [A_\mu(x), A_\nu(x)] \right) \right. \\
 & + a^3 \left( [ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) ] - \frac{5}{12} [ [A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x) ] \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} [ \partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x) ] - \frac{1}{2} [ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) ] \\
 & \quad + \frac{1}{2} [ A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x) ] - \frac{1}{2} [ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) ] \\
 & \quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} [ A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)] ] \right) + O(a^4) \right\} \\
 = & \exp \left\{ -a^2 F_{\mu\nu}(x) \right. \\
 & + a^3 \left( [ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) ] + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} [ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) ] - \frac{1}{2} [ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) ] \\
 & \quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
 & \quad + \frac{1}{2} [ A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)] ] \\
 & \quad \left. \left. - \frac{5}{12} [ [A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x) ] \right) + O(a^4) \right\}. \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Kontinuumslimes der einzelnen Terme zu:

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) = \\
 & -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( [ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) ] + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \right. \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} [ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) ] - \frac{1}{2} [ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) ] + \frac{1}{2} [ A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)] ] \\
 & \quad - \frac{5}{12} [ [A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x) ] \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) + O(a^4) \right\}, \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) = \\
& \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( [\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \right. \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} [\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{2} [A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] + \frac{1}{2} [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad - \frac{5}{12} [[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) + O(a^4) \right\} \\
& = \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \left\{ 1 + a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] + [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \right. \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} [\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] - \frac{1}{2} [A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] + \frac{1}{2} [A_\mu(x), [A_\mu(x), A_\nu(x)]] \\
& \quad - \frac{5}{12} [[A_\mu(x), A_\nu(x)], A_\nu(x)] \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) + O(a^4) \right\}. \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Für die Summe dieser beiden Terme gilt dann:

$$\begin{aligned}
& -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) = \\
& \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \left\{ 2a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( 2 [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] + 2 [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \right. \right. \\
& \quad - [\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] - [A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] - \frac{11}{12} [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad - \frac{11}{12} [A_\mu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
& \quad \left. \left. + \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) + O(a^4) \right\}. \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Für die anderen Terme hat man folgenden Kontinuumslimites:

$$\begin{aligned}
& -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(\mathbf{x} + a\hat{\nu}) \mathbf{U}_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{U}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_\nu^\dagger(\mathbf{x}) = \\
& -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) e^{-aA_\nu(x)} \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( [\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right] - \frac{5}{12} \left[ \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right], A_\mu(x) \right] \Big) \\
& - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) + O(a^4) \Big\} e^{aA_\nu(x)} \\
= & - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) \left( 1 - aA_\nu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\nu^2(x) - \frac{1}{6} a^3 A_\nu^3(x) \right) \\
& * \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( \left[ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right. \right. \\
& + \left[ A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right] - \frac{5}{12} \left[ \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right], A_\mu(x) \right] \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) \right\} \\
& * \left( 1 + aA_\nu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\nu^2(x) + \frac{1}{6} a^3 A_\nu^3(x) \right) + O(a^4) \\
= & - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( \left[ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right. \right. \\
& + \left[ A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right] - \frac{5}{12} \left[ \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right], A_\mu(x) \right] \Big) \\
& - aA_\nu(x) + a^3 A_\nu(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\nu^2(x) - \frac{1}{6} a^3 A_\nu^3(x) \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right\} \right. \\
& * \left( 1 + aA_\nu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\nu^2(x) + \frac{1}{6} a^3 A_\nu^3(x) \right) + O(a^4) \\
= & - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( \left[ \partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right. \right. \\
& + \left[ A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x) \right] - \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ A_\nu(x), \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right] \right] - \frac{5}{12} \left[ \left[ A_\nu(x), A_\mu(x) \right], A_\mu(x) \right] \Big) \\
& + a^3 \left[ A_\nu(x), F_{\mu\nu}(x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \Big\} + O(a^4) \\
= & \bar{\epsilon}\gamma_\nu\lambda(x+a\hat{\mu}) \Big\{ -1 - a^2F_{\mu\nu}(x) - a^3\left([\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] \right. \\
& + [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] - \frac{1}{2}[\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] - \frac{1}{2}[A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \\
& + \frac{1}{2}[A_\mu(x), [A_\mu(x), A_\nu(x)]] - \frac{5}{12}[[A_\mu(x), A_\nu(x)], A_\nu(x)] \Big) \\
& + a^3[A_\mu(x), F_{\mu\nu}(x)] \\
& \left. + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\mu A_\nu(x) - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \right\} + O(a^4), \tag{3.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\epsilon}\gamma_\nu\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{a}\hat{\mu}) \mathbf{U}_\mu(\mathbf{x}) \mathbf{U}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) = \\
& \bar{\epsilon}\gamma_\nu\lambda(x+a\hat{\mu}) \left(1 - aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) - \frac{1}{6}a^3A_\mu^3(x)\right) \\
& * \left\{ 1 - a^2F_{\mu\nu}(x) + a^3\left([\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \right. \right. \\
& - \frac{1}{2}[\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{2}[A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \\
& + \frac{1}{2}[A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] - \frac{5}{12}[[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \right) \right\} \\
& * \left(1 + aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) + \frac{1}{6}a^3A_\mu^3(x)\right) + O(a^4) \\
= & \bar{\epsilon}\gamma_\nu\lambda(x+a\hat{\mu}) \Big\{ 1 - a^2F_{\mu\nu}(x) + a^3\left([\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] \right. \\
& + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] - \frac{1}{2}[\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{2}[A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \\
& + \frac{1}{2}[A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] - \frac{5}{12}[[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \\
& \left. - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \right) \\
& - aA_\mu(x) + a^3A_\mu(x)F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) - \frac{1}{6}a^3A_\mu^3(x) \Big\} \\
& * \left(1 + aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) + \frac{1}{6}a^3A_\mu^3(x)\right) + O(a^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) \left\{ 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + a^3 \left( [\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] \right. \right. \\
&\quad + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] - \frac{1}{2} [\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{2} [A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \\
&\quad + \frac{1}{2} [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] - \frac{5}{12} [[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + a^3 [A_\mu(x), F_{\mu\nu}(x)] \right\} + O(a^4). \tag{3.86}
\end{aligned}$$

Addiert man die letzten beiden Terme, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) U_{\mu\nu}(x) U_\nu^\dagger(x) + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) U_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) = \\
& \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) \left\{ - 2a^2 F_{\mu\nu}(x) + 2a^3 [A_\mu(x), F_{\mu\nu}(x)] \right. \\
& \quad + a^3 \left( - 2 [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] - 2 [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] + [\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] \right. \\
& \quad + [A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] - \frac{11}{12} [A_\nu(x), [A_\mu(x), A_\nu(x)]] \\
& \quad - \frac{11}{12} [A_\mu(x), [A_\mu(x), A_\nu(x)]] \\
& \quad \left. \left. - \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \right) \right\} + O(a^4). \tag{3.87}
\end{aligned}$$

Schließlich findet man die Variation der Eichfeldwirkung durch Summenbildung über alle vier Terme zu:

$$\begin{aligned}
\delta S_E &= \frac{4}{g} Tr \left\{ \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) [A_\mu(x), F_{\mu\nu}(x)] - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \lambda(x) F_{\mu\nu}(x) \right\} + O(a) \\
&= \frac{4}{g} Tr \left\{ \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^\alpha(x) T^\alpha (-ig)^2 i f_{bcd} T^d A_\mu^b(x) F_{\mu\nu}^c(x) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \lambda^\alpha(x) (-ig) F_{\mu\nu}^b(x) T^\alpha T^b \right\} + O(a) \\
&= -2ig f_{bca} \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda^\alpha(x) A_\mu^b(x) F_{\mu\nu}^c(x) + 2i F_{\mu\nu}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \lambda^\alpha(x) + O(a)
\end{aligned}$$

$$= -2ig f_{abc} F_{\mu\nu}^b(x) A_\mu^c(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon - 2i F_{\mu\nu}^a(x) \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon + O(a). \quad (3.88)$$

Dieses entspricht aber gerade wieder dem Ausdruck für die Kontinuums-Variation der Eichwirkung. Damit haben die obigen Rechnungen gezeigt, daß die in (3.29), (3.30) und (3.31) definierten Transformationen die Wirkung im naiven Kontinuumslikes invariant lassen.

### 3.6 Superstrom

Möchte man einen erhaltenden Strom auf dem Gitter definieren, so muß dieser ähnliche Forderungen wie der Superstrom im Kontinuum erfüllen. So sollte er lokal sein und mit den Gitter-Eichtransformationen kommutieren. Außerdem muß natürlich der Kontinuumslikes des erhaltenden Stromes das Kontinuums-Ergebnis wiedergeben. Die einfachste Wahl für einen solchen Superstrom auf dem Gitter ist dann:

$$S_\mu^{Gitter}(x) := \frac{i}{g} Tr(\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)). \quad (3.89)$$

Bildet man den naiven Kontinuumslikes, so erhält man:

$$\begin{aligned} S_\mu^{Gitter}(x) &= \frac{i}{g} Tr(\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) F_{\rho\tau}(x)) + O(a) \\ &= \frac{i}{g} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda^a(x) (-ig) F_{\rho\tau}^b(x) \underbrace{Tr(T^a T^b)}_{=\frac{1}{2}\delta_{ab}} + O(a) \\ &= \frac{1}{2} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda^a(x) F_{\rho\tau}^a(x) + O(a). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Das ist der bekannte Kontinuumsstrom (2.47).

Betrachtet man das Verhalten des Gitter-Superstromes unter Eichtransformationen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_\mu^{Gitter}(x) &\xrightarrow{E} \frac{i}{g} Tr(\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \omega(x) \lambda(x) \omega^{-1}(x) \omega(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \omega^{-1}(x)) \\ &= \omega(x) \frac{i}{g} Tr(\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \omega^{-1}(x) \\ &= \omega(x) S_\mu^{Gitter}(x) \omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Somit ist der definierte Superstrom (3.89) eichinvariant.

Die einfachste Formulierung des Superstromes auf dem Gitter erfüllt alle geforderten Bedingungen. Allerdings sollte  $S_\mu^{Gitter}(x)$  die Gittertheorie „möglichst gut“ erhalten. Es sollten also in der Variation der Gitter-Lagrangedichte relativ wenig Gitterterme außer der Ableitung des Gitterstromes übrigbleiben. Vergleicht man jedoch  $S_\mu^{Gitter}(x)$  mit (3.58) und (3.80), so stellt man fest, daß dieser Superstrom – zunächst für beliebiges  $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$  – nicht so gut zu der Variation paßt.

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten die Gittertheorie zu verbessern. Zum einen kann man durch eine geschickte Wahl des Gitterstromes eine bessere Erhaltung desselben erreichen. Zum anderen hat man die Möglichkeit, an den supersymmetrischen Gittertransformationen Veränderungen vorzunehmen. Des weiteren ist der Ausdruck  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  für den Feldstärketensor bislang unbestimmt. Vielleicht ist auch hier eine spezielle Wahl von Vorteil.

### 3.6.1 Verbesserung des Superstromes

Beginnen möchte ich mit der Verbesserung des Stromes. Dazu erweitert man den einfachen Strom (3.89) zu:

$$S_\mu^{Gitter}(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \left( \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right). \quad (3.92)$$

Da man die Link-Variablen  $U_\mu(x)$  im naiven Kontinuumslimit durch 1 ersetzen kann, ergibt auch dieser Gitterstrom wieder den richtigen Kontinuumslimit. Im Gegensatz zu der naiven Wahl des Superstromes passen die bei diesem Strom auftretenden Terme, von ihrer geometrischen Struktur her, viel besser zu der Änderung der Wirkung. Hingegen tauchen Ausdrücke die von der Form (3.89) sind in der Variation der Wirkung gar nicht auf. Dabei ist es noch völlig irrelevant, wie  $\mathcal{G}_{\rho\tau}$  definiert ist. Es muß noch nicht einmal mit dem  $\mathcal{G}_{\rho\tau}$  aus den Transformationen übereinstimmen. An späterer Stelle stellt sich allerdings heraus, daß gerade diese Wahl besonders günstig ist.

Untersucht man das Verhalten unter Eichtransformationen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_\mu^{Gitter}(x) &\xrightarrow{E} \frac{i}{g} \text{Tr} \left( \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \omega(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \underbrace{\omega^{-1}(x) \omega(x)}_{\mathbf{1}} \right. \\ &\quad * U_\mu^\dagger(x) \underbrace{\omega^{-1}(x + a\hat{\mu}) \omega(x + a\hat{\mu})}_{\mathbf{1}} \lambda(x + a\hat{\mu}) \\ &\quad \left. * \underbrace{\omega^{-1}(x + a\hat{\mu}) \omega(x + a\hat{\mu})}_{\mathbf{1}} U_\mu(x) \omega^{-1}(x) \right) \\ &= \omega(x) S_\mu^{Gitter}(x) \omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Damit ist auch dieser Superstrom invariant unter Eichtransformationen.

Die Gitter-Rückwärts-Ableitung von  $S_\mu^{Gitter}(x)$  lautet:

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^b S_\mu^{Gitter}(x) = \\ \frac{i}{g} \frac{1}{a} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ \left. - \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Im naiven Kontinuumsimes ergibt sich daraus folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^b S_\mu^{Gitter}(x) &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \\ \frac{i}{g} \frac{1}{a} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) - \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right. \\ &\quad + a \left[ \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) \lambda(x) + \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \partial_\mu \lambda(x) \right. \\ &\quad \left. - \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) A_\mu(x) + \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) A_\mu(x) \right] + O(a^2) \left. \right\} \\ &= \partial_\mu \frac{i}{g} \text{Tr}(\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x)) + O(a). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ersetzt man schließlich  $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$  durch  $F_{\rho\tau}(x)$ , so erhält man wieder die Ableitung des Kontinuums-Superstromes.

Hiermit erfüllt die Gittertheorie alle geforderten Bedingungen aus dem Kontinuum und gibt ihre Ergebnisse im Limes  $a \rightarrow 0$  korrekt wieder.

Die Variation der gesamten Gitterwirkung ist nach (3.58) und (3.80) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \delta S(x) = \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_\mu \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ \left. - \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \epsilon U_\mu(x) \right. \\ \left. - \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right. \\ \left. + \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \epsilon U_\mu^\dagger(x) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
& - 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& + 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& - 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \Big] \\
& + 2 \left( M_0 + \frac{4r}{a} \right) Tr \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right] \Big\} \\
& + \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left[ - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \\
& \quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_{-\nu\mu}(x + a\hat{\nu}) \\
& \quad \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\nu-\mu}(x + a\hat{\mu}) \right]. \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der rückwärtigen Ableitung des nach (3.92) definierten Superstromes läßt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\delta S(x) = \sum_x \left( D_S(x) + \sum_\mu \left( \Delta_\mu^b S_\mu^{Gitter}(x) + X_S(x) \right) \right). \quad (3.97)$$

Dabei entspricht  $D_S(x)$  dem Massenterm

$$2M_0 \frac{i}{g} Tr \left[ \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right]. \quad (3.98)$$

$X_S$  ist der symmetriebrechende Term, der durch die Gitterregularisierung hervorgerufen wird. Dieser unschöne Ausdruck ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\begin{aligned}
X_S(x) = & \frac{1}{a} Tr \left[ \frac{1}{g} \bar{\epsilon} (4\gamma_\tau \delta_{\rho\mu} - ir \sigma_{\rho\tau}) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
& - \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& + \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
& + 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
& - 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& + 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& - 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& \left. + 2r \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \text{Tr} \left[ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \\
& \quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_{-\nu\mu}(x + a\hat{\nu}) \\
& \quad \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\nu-\mu}(x + a\hat{\mu}) \right]. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Was man erreichen möchte, ist, daß  $X_S$  möglichst klein wird bzw. daß die einzelnen Terme erst in höheren Potenzen von  $a$  einen Beitrag geben. Dazu ist es nicht sinnvoll, die einzelnen Terme sofort bis zu höheren Ordnungen in  $a$  zu entwickeln (ganz abgesehen vom Arbeitsaufwand). Es empfiehlt sich statt dessen eine nähere Betrachtung der einzelnen Terme. So weiß man zum Beispiel aus der Kontinuumstheorie, daß die Variation der Eichwirkung im wesentlichen die Feldstärke ergibt. Man kann also zunächst einmal versuchen, diese in der Gittervariation wiederzufinden.

Die Variation der Eichwirkung läßt sich nach (3.80) schreiben als:

$$\begin{aligned}
\delta S_E(x) &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \text{Tr} \left\{ -\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \left( U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \left( U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right) U_\mu^\dagger(x) \right\}. \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Definiert man nun ein  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0$  zu:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) = -\frac{1}{2a^2} \left( U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right), \tag{3.101}$$

so ergibt sich damit für  $\delta S_E$ :

$$\begin{aligned}
\delta S_E(x) &= \frac{1}{g} \frac{1}{a} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \text{Tr} \left\{ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right. \\
& \quad \left. - 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) U_\mu^\dagger(x) \right\}. \tag{3.102}
\end{aligned}$$

Das so definierte  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0$  stimmt nach (3.47) mit dem einfachsten Ausdruck für den Feldstärketensor auf dem Gitter überein. Wichtig ist an dieser Stelle, daß  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  immer noch völlig beliebig ist. Die einzige Forderung, die  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  zu erfüllen hat, ist die, daß sich bei der Bildung des naiven Kontinuumslimites der Feldstärketensor ergeben muß. Somit kann man  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  zusammensetzen aus  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0$  und einem variablen Rest:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) + a\mathcal{R}_{\mu\nu}(x), \tag{3.103}$$

wobei  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  noch beliebig hohe Ordnungen von  $a$  enthalten kann.

Die Terme mit dem Vorfaktor  $2ag$  geben, wie schon in (3.72) gezeigt, keinen Beitrag zur Kontinuumsphysik. Von der Struktur der Terme her kann man vermuten, daß sie auch in der Gittertheorie keine tragende Rolle spielen. Da ich schon gezeigt habe, daß diese Terme im naiven Kontinuumslimit verschwinden,<sup>3</sup> betrachte ich nun die Entwicklung dieser Terme in der Ordnung  $a$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2a} Tr \left[ 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
& \quad - 2ag \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& \quad + 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& \quad \left. - 2ag \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right] \\
& = g Tr \left\{ \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left( \lambda(x) + a \left( \partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)] \right) \right) \right. \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \left( \lambda(x) \right. \\
& \quad \left. + a \left( \partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)] \right) \right) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \\
& \quad + a \left( \partial_\mu \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x), A_\mu(x)] \right) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\
& \quad - a \left( \partial_\mu \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) [\lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), A_\mu(x)] \right) + O(a^2) \left. \right\} \\
& = ag Tr \left\{ -\bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) [\partial_\mu \lambda(x), \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x)] \right. \\
& \quad + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \\
& \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) [A_\mu(x), \lambda(x)] \\
& \quad \left. - \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) [A_\mu(x), \lambda(x)] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}
\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Siehe (3.72).

$$\begin{aligned}
& + \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x), A_\mu(x) \right] \\
& - \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu + r) \left[ \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), A_\mu(x) \right] \Big\} + O(a^2). \quad (3.104)
\end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst die  $r$ -unabhängigen Terme mit Hilfe der Spuridentitäten,<sup>4</sup> so ergibt sich für die einzelnen Ausdrücke:

i.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \partial_\mu \lambda(x) \right] \right) \\
& = if_{bce} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \partial_\mu \lambda^c(x) \underbrace{Tr(T^a T^e)}_{=\frac{1}{2}\delta_{ae}} \\
& = \frac{1}{2} if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x), \quad (3.105)
\end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x) \right] \right) \\
& = \frac{1}{2} if_{abc} \partial_\mu \bar{\lambda}^c(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) \lambda^b(x) \\
& = \frac{1}{2} if_{bac} \underbrace{\partial_\mu \bar{\lambda}^c(x) \gamma_\mu \lambda^a(x)}_{=-\bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x)} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \\
& = \frac{1}{2} if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x), \quad (3.106)
\end{aligned}$$

iii.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x), A_\mu(x) \right] \right) \\
& = Tr \left( \left[ A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \right] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \right) \\
& = if_{abe} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^d(x) \underbrace{Tr(T^e T^c T^d)}_{=\frac{1}{4}if_{ecd}} \\
& = -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x), \quad (3.107)
\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Siehe Anhang C.

iv.)

$$\begin{aligned}
& -Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), A_\mu(x) \right] \right) \\
= & -Tr \left( \left[ A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \right] \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right) \\
= & \frac{1}{4} f_{abe} f_{ecd} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^d(x) \\
= & -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x),
\end{aligned} \tag{3.108}$$

v.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \right) \\
= & -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\mu^c(x) \lambda^d(x),
\end{aligned} \tag{3.109}$$

vi.)

$$\begin{aligned}
& -Tr \left( \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right) \\
= & \frac{1}{4} f_{cde} f_{aeb} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu A_\mu^c(x) \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \\
= & -\frac{1}{4} f_{cde} f_{abe} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\mu^c(x) \lambda^d(x).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Für die Summe dieser sechs Terme ( $\Sigma^1$ ) erhält man dann:

$$\begin{aligned}
\Sigma^1 & = i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \\
& \quad - \frac{1}{2} f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \\
& \quad - \frac{1}{2} f_{cde} f_{abe} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\mu^c(x) \lambda^d(x) \\
& = i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \\
& \quad - \frac{1}{2} f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \\
& \quad - \frac{1}{2} f_{abe} f_{dce} A_\mu^a(x) \underbrace{\bar{\lambda}^d(x) \gamma_\mu \lambda^b(x)}_{=-\bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x)} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \\
&\quad - f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \gamma_\mu \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x). \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Die analogen Rechnungen für die  $r$ -abhängigen  $ag$ -Terme liefern folgenden Beitrag:

i.)

$$\begin{aligned}
&Tr \left( \bar{\lambda}(x) \left[ \partial_\mu \lambda(x), \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right] \right) \\
&= if_{bcd} \bar{\lambda}^a(x) \partial_\mu \lambda^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \underbrace{Tr(T^a T^d)}_{=\frac{1}{2} \delta_{ad}} \\
&= \frac{1}{2} if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \partial_\mu \lambda^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x), \tag{3.112}
\end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
&Tr \left( \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} if_{cba} \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^b(x) \\
&= \frac{1}{2} if_{cba} \bar{\lambda}^b(x) \partial_\mu \lambda^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \\
&= \frac{1}{2} if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \partial_\mu \lambda^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x), \tag{3.113}
\end{aligned}$$

iii.)

$$\begin{aligned}
&Tr \left( -\bar{\lambda}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \right) \\
&= -if_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\mu^c(x) \lambda^d(x) \underbrace{Tr(T^a T^b T^e)}_{=\frac{1}{4} if_{abe}} \\
&= \frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) A_\mu^c(x) \lambda^d(x), \tag{3.114}
\end{aligned}$$

iv.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \bar{\lambda}(x) \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x), A_\mu(x) \right] \right) \\
&= \left[ A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \right] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \lambda(x) \\
&= A_\mu^c(x) \bar{\lambda}^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) \lambda^b(x) i f_{cde} \frac{1}{4} i f_{eab} \\
&= -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} A_\mu^c(x) \underbrace{\bar{\lambda}^d(x) \lambda^b(x)}_{= \bar{\lambda}^b(x) \lambda^d(x)} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) \\
&= \frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^d(x) A_\mu^c(x), \tag{3.115}
\end{aligned}$$

v.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( \bar{\lambda}(x) \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right) \\
&= \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\lambda}(x) \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \\
&= -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \bar{\lambda}^d(x) A_\mu^a(x) \lambda^b(x) \\
&= -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \lambda^d(x), \tag{3.116}
\end{aligned}$$

vi.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( -\bar{\lambda}(x) \left[ \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), A_\mu(x) \right] \right) \\
&= -\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left[ A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \right] \lambda(x) \\
&= \frac{1}{4} f_{abe} f_{dec} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^d(x) A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \lambda^c(x) \\
&= -\frac{1}{4} f_{abe} f_{cde} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \lambda^d(x). \tag{3.117}
\end{aligned}$$

Somit folgt für die Summe der sechs  $r$ -abhängigen Terme ( $\sum_r^2$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_r^2 &= i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \partial_\mu \lambda^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \\
&\quad - f_{abe} f_{cde} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) \lambda^d(x). \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Damit liefern die Terme mit dem Vorfaktor  $2ag$  insgesamt einen nicht verschwindenden Beitrag zu  $X_S$ , den ich im folgenden mit  $\mathcal{P}$  abkürzen werde.  $\mathcal{P}$  setzt sich dabei aus der Summe von  $\Sigma^1$  und  $\Sigma_r^2$  zusammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = & ag \left( if_{abc} \bar{\lambda}^a(x) (\gamma_\mu - r) \partial_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \right. \\ & \left. - f_{abe} f_{cde} A_\mu^a(x) \bar{\lambda}^b(x) (\gamma_\mu + r) \lambda^d(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \right). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Mit den obigen Kalkulationen ((3.102), (3.119)) kann man  $X_S$  nun schreiben als:

$$\begin{aligned} X_S(x) = & \frac{1}{a} \frac{1}{g} Tr \left\{ \bar{\epsilon} (4\gamma_\tau \delta_{\rho\mu} - ir\sigma_{\rho\tau}) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & - i\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ & + i\bar{\epsilon} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\ & + 2r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \\ & + 4\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\ & \left. - 4\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\ & + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \end{aligned} \quad (3.120)$$

In den anschließenden Rechnungen wird eine Betrachtung des obigen  $X_S$  in der Ordnung  $a$  aufgezeigt. Entwickelt man jedoch zunächst die beiden  $r$ -abhängigen Terme bis zur Ordnung  $a$ , so findet man:

$$\begin{aligned} & -\frac{r}{a} \frac{i}{g} Tr \left\{ \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & \quad \left. + \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\ = & -\frac{r}{a} \frac{i}{g} Tr \left\{ 2\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right. \\ & \quad \left. + a \partial_\mu \left( \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right) + O(a^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Diese Rechnung zeigt, daß der Superstrom durch Hinzufügen des Terms

$$-r \frac{i}{g} Tr \left( \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right) \quad (3.122)$$

verbessert werden kann. Eine mögliche Wahl für einen „neuen“ Gitterstrom ist dann:

$$S_\mu^{\text{Gitter}}(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \left( (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right). \quad (3.123)$$

Mit diesem verbesserten Superstrom behält man für  $X_S$  folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} X_S(x) = & \frac{1}{a} \frac{1}{g} \text{Tr} \left\{ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ & + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\ & + 2 r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \\ & + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\ & \left. - 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\ & + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Die Entwicklung von  $X_S$  bis zur Ordnung  $a$  ergibt:

$$\begin{aligned} X_S(x) = & \frac{1}{a} \frac{1}{g} \text{Tr} \left\{ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + a \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \right) \right. \\ & * \left( 1 + a A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\mu^2(x) \right) \\ & * \left( \lambda(x) + a \partial_\mu \lambda(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) \right) \\ & * \left( 1 - a A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\mu^2(x) \right) \\ & - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + a \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \right) \\ & \quad + a \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) + a^2 \partial_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \left( \gamma_\mu + r \right) \\ & * \left( 1 - a A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\mu^2(x) \right) \lambda(x) \\ & * \left( 1 + a A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\mu^2(x) \right) \\ & + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) - a \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \right) \\ & \quad + a \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) - a^2 \partial_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \left( 1 + aA_\mu(x) - a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) \right) \\
& * \lambda(x) \left( 1 - aA_\mu(x) + a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) \right) \\
& + 2r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + a\mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \right) \lambda(x) \\
& + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\
& - 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \left( \lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x) + \frac{1}{2}a^2\partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) \right) \\
& * \left( 1 - aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) \right) \\
& * \left. \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \left( 1 + aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu^2(x) \right) \right\} \\
& + \mathcal{P}(x) + O(a^2) \\
= & \frac{1}{g} \frac{1}{a} Tr \left\{ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \right. \right. \\
& + a \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \partial_\mu \lambda(x) + \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [A_\mu(x), \lambda(x)] + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right) \\
& + a^2 \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [A_\mu(x), \partial_\mu \lambda(x)] + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) A_\mu^2(x) \lambda(x) \right. \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) - \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \partial_\mu \lambda(x) \\
& \left. \left. - \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right) \right) \\
& - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \right. \\
& + a \left( \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) + \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
& \left. + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \right) \\
& + a^2 \left( \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) A_\mu^2(x) \\
& \left. + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) A_\mu^2(x) \lambda(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \\
& - \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) (\gamma_\mu + r) A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \\
& + \partial_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu + r) \lambda(x) \\
& + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu + r) [\lambda(x), A_\mu(x)] \Big) \\
& + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \left( \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \right. \\
& + a \left( - \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) - \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right) \\
& + a^2 \left( + \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) A_\mu^2(x) \lambda(x) - \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \\
& \quad + \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), \partial_\mu A_\mu(x)] + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \\
& \quad \left. - \partial_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) - \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right) \Big) \\
& + 2 i r \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) + 2 a i r \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \\
& + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\
& - 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \left( \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right. \\
& \quad + a \left( \partial_\mu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) + \lambda(x) [\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x), A_\mu(x)] \right) \\
& \quad + a^2 \left( \partial_\mu \lambda(x) [\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x), A_\mu(x)] + \frac{1}{2} \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) A_\mu^2(x) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \lambda(x) A_\mu^2(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\
& \quad \left. \left. - \lambda(x) A_\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) A_\mu(x) \right) \right) \Big\} \\
& + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \tag{3.125}
\end{aligned}$$

Für den Vergleich der  $r$ -unabhängigen Terme miteinander benutze ich wieder Gleichung (2.40). Damit wird eine Beziehung zwischen  $\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau}$  und  $\gamma_\nu$  hergestellt.

Speziell für die Terme, die nicht von  $r$  abhängen, folgt dann:

$$\begin{aligned}
X_S(x) = & \frac{a}{g} Tr \left\{ - \frac{2}{a} \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\rho\tau\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \underbrace{\left( \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) + \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right)}_{=0} \right. \\
& - 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \partial_\mu \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \\
& - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) A_\mu^2(x) \lambda(x) \\
& + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \\
& - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) [\lambda(x), \partial_\mu A_\mu(x)] \\
& - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \\
& + \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\rho\tau\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), \partial_\mu A_\mu(x)] \\
& \left. + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \partial_\mu \lambda(x) \right\} \\
& - 2 \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\rho\tau\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \underbrace{\left( \partial_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) + \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right)}_{=0} \\
& + \mathcal{P}(x) + O(r) + O(a^2). \tag{3.126}
\end{aligned}$$

Erneute Anwendung der Gleichung (2.40) ergibt schließlich:

$$\begin{aligned}
X_S(x) = & \frac{a}{g} Tr \left\{ - 4 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
& + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), \partial_\mu A_\mu(x)] \\
& + 4 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \\
& * \left( A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2} \lambda(x) A_\mu^2(x) - \frac{1}{2} A_\mu^2(x) \lambda(x) \right) \\
& - 2 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \\
& \left. + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \partial_\mu \lambda(x) \right\} \\
& + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \tag{3.127}
\end{aligned}$$

Betrachtet man den Ausdruck

$$Tr \left( - \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) - \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) A_\mu^2(x) \lambda(x) \right)$$

---

<sup>5</sup>Der Ausdruck verschwindet aufgrund der Bianchi-Identität.

unter zur Hilfenahme der Spuridentitäten, so erhält man:

i.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^a(x) \lambda^b(x) A_\mu^c(x) A_\mu^d(x) Tr \left( T^a T^b T^c T^d \right) \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^a(x) \lambda^b(x) A_\mu^c(x) A_\mu^d(x) \\
&\quad * \left( -\frac{1}{8} f_{abe} f_{cde} + \frac{1}{12} \delta_{ab} \delta_{cd} \right), \tag{3.128}
\end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
& Tr \left( -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) A_\mu^2(x) \lambda(x) \right) \\
&= Tr \left( -\frac{1}{2} A_\mu^2(x) \lambda(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right) \\
&= -\frac{1}{2} A_\mu^d(x) A_\mu^c(x) \lambda^b(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}^a(x) \left( -\frac{1}{8} f_{dce} f_{bae} + \frac{1}{12} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}^a(x) \lambda^b(x) A_\mu^c(x) A_\mu^d(x) \left( -\frac{1}{8} f_{abe} f_{cde} + \frac{1}{12} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \\
&= Tr \left( -\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) A_\mu^2(x) \right). \tag{3.129}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Restterm  $X_S$  zu:

$$\begin{aligned}
X_S(x) &= \frac{a}{g} Tr \left\{ -4 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), A_\mu(x)] \right. \\
&\quad + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) [\lambda(x), \partial_\mu A_\mu(x)] \\
&\quad + 4 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \\
&\quad * \left( A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) - \lambda(x) A_\mu^2(x) \right) \\
&\quad - 2 \bar{\epsilon} \left( \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} + \frac{i}{2} r \sigma_{\rho\tau} \right) \partial_\mu \partial_\mu \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \\
&\quad \left. + 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \mathcal{R}_{\rho\tau}(x) \partial_\mu \lambda(x) \right\} \\
&\quad + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \tag{3.130}
\end{aligned}$$

Somit verbleibt man auf dem Gitter in der Ordnung  $a$  mit einem nicht verschwindendem Restterm  $X_S$ . Daß  $X_S$  nicht nur Terme enthält, die proportional zu  $r$  sind, liegt daran, daß die Supersymmetrie zweifach gebrochen wird. Zum einen geschieht dieses durch den Wilson-Term und zum anderen durch die explizite Brechung der Lorentzsymmetrie aufgrund der endlichen Gitterkonstante.

Die  $r$ -abhängigen Terme sind jeweils nur halb so groß wie die anderen auftretenden Terme. Dies kommt daher, daß man die Ausdrücke, die  $\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau}$  und  $\sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu$  enthalten, zunächst über die Beziehung (2.40) miteinander verknüpfen muß. Dadurch erhält man jeweils einen Faktor  $2\gamma_\nu$ . Die Terme hingegen, die proportional zu  $r$  sind, können sofort miteinander kombiniert werden.

### 3.6.2 Verbesserung der Transformationen

Eine andere Möglichkeit, die Gittertheorie zu verbessern, ist eine Symmetrisierung derselbigen. Man vermutet, daß man mit Hilfe symmetrisierter Transformationen und einem symmetrischen Ausdruck für  $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ , wie zum Beispiel dem Clover-Term, den Gitterstrom besser erhalten kann.

Die „neuen“ Transformationen müssen natürlich immer noch eichinvariant sein und im Limes  $a \rightarrow 0$  die richtige Kontinuumsphysik repräsentieren.

Mit den folgenden Transformationen

$$\delta U_\mu(x) = \frac{1}{2} \left\{ -2ag U_\mu(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) - 2ag \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\}, \quad (3.131)$$

$$\delta \lambda(x) = -\frac{i}{g} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \epsilon, \quad (3.132)$$

$$\delta \bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x), \quad (3.133)$$

ergibt sich für die Variation der Gitterwirkung:

$$\begin{aligned} \delta S(x) = \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_\mu \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ - \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \epsilon U_\mu(x) \\ - \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\ \left. \left. + \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \epsilon U_\mu^\dagger(x) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}g Tr \sum_{\mu} \left[ \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
& \quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) \right] \\
& \quad + 2 \left( M_0 + \frac{4r}{a} \right) Tr \left[ \frac{i}{g} \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right] \Big\} \\
& + \frac{1}{g} \frac{1}{a^3} \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} Tr \left\{ - \bar{\epsilon} \gamma_{\nu} \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) U_{\mu\nu}(x) \\
& \quad - \left( \bar{\epsilon} \gamma_{\nu} \lambda(x + a\hat{\nu}) + \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\nu}) \right) U_{-\nu\mu}(x + a\hat{\nu}) \\
& \quad + \left( \bar{\epsilon} \gamma_{\nu} \lambda(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) \right) U_{-\mu-\nu}(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) \\
& \quad \left. + \left( \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) + \bar{\epsilon} \gamma_{\nu} \lambda(x + a\hat{\mu}) \right) U_{\nu-\mu}(x + a\hat{\mu}) \right\}. \quad (3.134)
\end{aligned}$$

Bei der Untersuchung von  $X_S$  in der Ordnung  $a$  betrachte ich zunächst wieder die Terme, die linear in  $g$  sind.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}g Tr \sum_{\mu} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right. \\
& \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
& \quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \lambda(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
& \quad \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}gTr \sum_{\mu} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x)] \right. \\
&\quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] U_{\mu}^{\dagger}(x) \\
&\quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}), U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x)] \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x + a\hat{\mu}), \lambda(x + a\hat{\mu})] U_{\mu}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2}gTr \sum_{\mu} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad + a \left( \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \partial_{\mu} \lambda(x)] \right. \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), A_{\mu}(x) \lambda(x)] \\
&\quad \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x) A_{\mu}(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] A_{\mu}(x) \\
&\quad \quad + \partial_{\mu} \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) A_{\mu}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad + \partial_{\mu} \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), A_{\mu}(x) \lambda(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x) A_{\mu}(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) A_{\mu}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad + \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \partial_{\mu} \lambda(x)] \\
&\quad \quad \left. - \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] A_{\mu}(x) \right) \left. \right\} + O(a^2) \\
&= \frac{1}{2}gTr \sum_{\mu} \left\{ 4 \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\
&\quad + a \left( 2 \partial_{\mu} \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} + r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] + 2 \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\
&\quad \quad + 2 \bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \partial_{\mu} \lambda(x)] - 2 r \bar{\lambda}(x) A_{\mu}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] \\
&\quad \quad \left. + 2 r \bar{\lambda}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), \lambda(x)] A_{\mu}(x) - 2 r \bar{\lambda}(x) [\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \lambda(x), A_{\mu}(x) \lambda(x)] \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2r \bar{\lambda}(x) \left[ \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x) A_\mu(x) \right] \Big) \Big\} + O(a^2) \\
= & 0^6 + \frac{a}{2} g \sum_\mu \left\{ i f_{abc} \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) (\gamma_\mu + r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \right. \\
& + i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) \\
& + i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) (\gamma_\mu - r) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \partial_\mu \lambda^c(x) \\
& + \frac{1}{2} r f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) A_\mu^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^d(x) \\
& - \frac{1}{2} r f_{aeb} f_{ecd} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^d(x) A_\mu^b(x) \\
& + 2r \bar{\lambda}(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \left[ \lambda(x), A_\mu(x) \right] \\
& \left. + 2r \bar{\lambda}(x) \left[ A_\mu(x), \lambda(x) \right] \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} + O(a^2) \\
= & \frac{a}{2} g \sum_\mu \left\{ 2i f_{abc} \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) (\gamma_\mu + r) \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \right. \\
& + i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^b(x) \\
& + r f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) A_\mu^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^d(x) \\
& - \frac{1}{2} r f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) A_\mu^d(x) \\
& \left. - \frac{1}{2} r f_{aeb} f_{dce} \bar{\lambda}^a(x) A_\mu^d(x) \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \right\} + O(a^2). \quad (3.135)
\end{aligned}$$

Nach (3.119) definiert man erneut einen Ausdruck  $\mathcal{P}$ . Für die symmetrisierten Transformationen lautet dieser dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x) = & a g \left\{ i f_{abc} \partial_\mu \bar{\lambda}^a(x) (\gamma_\mu + r) \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \right. \\
& + \frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \lambda^c(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^b(x) \\
& + \frac{1}{2} r f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) A_\mu^b(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c(x) \lambda^d(x) \\
& \left. - \frac{1}{2} r f_{abe} f_{cde} \bar{\lambda}^a(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^b(x) \lambda^c(x) A_\mu^d(x) \right\}. \quad (3.136)
\end{aligned}$$

Somit verbleibt man auch in diesem Fall in der Ordnung  $a$  mit einem nicht verschwindendem Term, der proportional zu  $g$  ist. Stellt man für den Strom (3.123) wieder Gleichung (3.97) auf, so bleiben für den „Rest“  $X_S$  diesmal folgende Terme

---

<sup>6</sup>Dieser Ausdruck verschwindet aufgrund der Rechnungen in Anhang F.

übrig:

$$\begin{aligned}
X_S(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{g} Tr \left[ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho\mu} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
&\quad - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
&\quad + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
&\quad \left. + 2r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right] \\
&+ \frac{1}{g} \frac{1}{a^3} Tr \left[ - (\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x)) U_{\mu\nu}(x) \right. \\
&\quad - (\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\nu}) + \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu})) U_{-\nu\mu}(x + a\hat{\nu}) \\
&\quad + (\bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) \\
&\quad - \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu})) U_{-\mu-\nu}(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) \\
&\quad \left. + (\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu})) U_{\nu-\mu}(x + a\hat{\mu}) \right] \\
&+ \mathcal{P}(x) + O(a^2). \tag{3.137}
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Terme mit (3.55) zeigt, daß sich eine Verwendung des Clover-Terms an dieser Stelle nicht anbietet. Definiert man statt dessen nach (3.101) wieder einen Ausdruck  $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0$ , so läßt sich  $X_S$  schreiben als:

$$\begin{aligned}
X_S(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{g} Tr \left[ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho,\mu} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
&\quad - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
&\quad + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
&\quad \left. + 2r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \right] \\
&+ \frac{1}{g} \frac{1}{a^3} Tr \left[ - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) (U_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}^\dagger(x)) \right. \\
&\quad + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\nu}) (U_{\mu-\nu}(x + a\hat{\nu}) - U_{\mu-\nu}^\dagger(x + a\hat{\nu})) \\
&\quad - \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) (U_{-\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) - U_{-\mu\nu}^\dagger(x + a\hat{\mu})) \\
&\quad + \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) (U_{-\mu-\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\
&\quad \left. - U_{-\mu-\nu}^\dagger(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) \right] \\
&+ \mathcal{P}(x) + O(a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{a} \frac{1}{g} Tr \left[ 4 \bar{\epsilon} \gamma_\tau \delta_{\rho,\mu} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
& - i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \\
& + i \bar{\epsilon} (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
& + 2r i \bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \\
& + 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\
& - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{\mu-\nu}^0(x + a\hat{\nu}) \\
& + 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{-\mu\nu}^0(x + a\hat{\mu}) \\
& \left. - 2 \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\mu-\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \right] \\
& + \mathcal{P}(x) + O(a^2). \tag{3.138}
\end{aligned}$$

Wie eine kurze Rechnung zeigt, ergibt auch dieses  $X_S$  im naiven Kontinuumslimit keinen Beitrag. Diskutiert man jedoch die Ordnung  $a$ , so stellt sich im Vergleich mit (3.130) keine Verbesserung ein.

### 3.6.3 Weitere Verbesserungsvorschläge

Am Ende dieses Kapitels möchte ich noch einige Vorschläge zur Eliminierung von  $X_S$  in der Ordnung  $a$  machen.

Eine Möglichkeit, die Gittertheorie zu verbessern, wäre eine gelungenere Abstimmung der Terme, die aus der Variation der Eichwirkung ( $S_E$ ) hervorgehen und derjenigen, die sich aus der Änderung des fermionischen Teils der Wirkung ( $S_F$ ) ergeben. Bisher sieht es so aus, als würde der in (3.123) definierte Superstrom nur auf den fermionischen Anteil der Wirkung Bezug nehmen. Symmetrisiert man die SUSY-Transformationen erneut, indem man die Variation von  $U_\mu(x)$  zu einem Ausdruck erweitert, der eine ähnlich geometrische Struktur hat wie die Terme, die in der Änderung von  $S_F$  auftreten, so wäre dies ein Versuch, letztere mit den Termen aus der Variation von  $S_E$  zu kombinieren. Einen solchen Versuch stellen folgende Transformationsregeln dar:

$$\begin{aligned}
\delta U_\mu(x) &= \frac{1}{2} \left( -2ag U_\mu(x) U_\tau^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\tau}) U_\tau(x) \right. \\
&\quad \left. - 2ag U_\tau^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\tau}) U_\tau(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right) \\
&= -ag \left( U_\mu(x) U_\tau^\dagger(x) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\tau}) U_\tau(x) \right. \\
&\quad \left. U_\tau^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\tau}) U_\tau(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right), \tag{3.139}
\end{aligned}$$

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\epsilon, \quad (3.140)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x). \quad (3.141)$$

Mit diesen Transformationen erhält man nun in der Variation der Eichwirkung Terme, die die gleiche geometrische Struktur haben wie jene, die aus der Änderung der fermionischen Wirkung  $S_F$  folgen. Man verbleibt damit insgesamt in der Variation der Wirkung mit Termen, die alle eine ähnliche Geometrie besitzen. Inwieweit dies eine Verbesserung in der Ordnung  $a$  darstellt wird sich erst durch eingehendere Rechnungen zeigen, die im Anschluß an diese Arbeit geplant sind.

Wie auch schon in Kapitel 1 gezeigt wurde, haben M. GOLTERMANN und D. PETCHER noch eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der Gittertheorie aufgezeigt [9]. Danach addiert man in den Transformationsregeln einen beliebigen Ausdruck  $\mathcal{A}_\mu$ , der allein durch das Verschwinden der Änderung der Wirkung definiert ist. Betrachtet man speziell die Ordnung  $a$ , so bieten sich folgende Transformationen an:

$$\delta U_\mu(x) = -2ag U_\mu(x)\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x) + a^2\mathcal{A}_\mu(x), \quad (3.142)$$

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\epsilon, \quad (3.143)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x). \quad (3.144)$$

Bei der Berechnung der Variation der Wirkung bezüglich dieser Transformationen, erhält man für  $X_S$ , in der Ordnung  $a$ , einerseits den schon bekannten Ausdruck (3.130), andererseits treten aber noch Terme auf, die  $\mathcal{A}_\mu$  enthalten. Das Ziel besteht nun darin,  $\mathcal{A}_\mu$  so zu definieren, daß  $X_S$  keinen Beitrag mehr liefert. Ob dieses mit den oben angegebenen Transformationen tatsächlich gelingt, wird sich erst in ausführlichen Rechnungen zeigen.

### 3.7 Gitter-Ward-Identität

Wie schon in der Kontinuumsphysik gezeigt wurde, ist die einzige niedrige, nicht-triviale Ward-Identität diejenige, die sich durch Nullsetzen der Quellen in der Variation des Pfadintegrals ergibt.

Auf dem Gitter erhält man dann:

$$\langle\delta\mathcal{L}^{Gitter}(x)\rangle = 0. \quad (3.145)$$

$$\Rightarrow \langle \partial_\mu S_\mu^{Gitter}(x) \rangle = -\langle D_S(x) \rangle - \langle X_S(x) \rangle. \quad (3.146)$$

Somit ist  $\partial_\mu S_\mu^{Gitter}(x)$  nicht, wie im Kontinuum, im Operatorsinn erhalten! Durch den Massenterm findet eine explizite Verletzung der Identität statt, die auch nicht durch den Übergang zur Kontinuumsphysik beseitigt werden kann. Hingegen entfällt der Term  $X_S$  aus der Gitterregularisierung im Limes  $a \rightarrow 0$ .

# Zusammenfassung

Abschließend läßt sich als Ergebnis der vorliegenden Arbeit feststellen, daß die berechneten Gitter-Ward-Identitäten im Kontinuumslimit die supersymmetrischen Ward-Identitäten für Greensche Funktionen liefern, die man erwartet hat.

Setzt man speziell in der  $N = 1$  Super-Yang-Mills-Theorie die Masse des Gluinos Null ( $m = 0$ ), so gewährleistet dies sowohl die Erhaltung der Supersymmetrie als auch der chiralen Symmetrie.

Im ersten Kapitel wurde schon angedeutet, wie die Gittertheorie mit der Kontinuumsphysik harmonisiert. Es haben sich allerdings auch schon einige Probleme herauskristallisiert, die mit der Einführung des Gitters entstehen. Dabei reichte zur Demonstration das relativ einfache Wess-Zumino-Modell vollständig aus. Anhand dieses Modells wurden auch schon einige Begriffe aus der Supersymmetrie erläutert und wichtige Rechnungen durchgeführt, auf die im zweiten Kapitel aufgebaut werden konnte.

Dieses zeigt, daß die Yang-Mills Theorie mit einem Majorana-Spinor in der adjungierten Darstellung invariant unter SUSY-Transformationen ist. Bei der Berechnung der Ward-Identitäten für den dadurch erhaltenden Strom bestätigt sich, daß die niedrigen Ward-Identitäten der  $N = 1$  Super-Yang-Mills-Theorie ohne einen Eichfixierungs-Term, trivial sind. Nicht-triviale Ward-Identitäten erhält man erst durch die Bildung höherer Ableitungen.

Das dritte Kapitel stellt eine Form der Realisierung der  $N = 1$  Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter vor. Der permanente Kontakt zur Kontinuumsphysik bestätigt die Ergebnisse der Gittertheorie und zeigt, daß man auch auf dem Gitter einen Superstrom definieren kann. Dieser ist jedoch im Gegensatz zum Kontinuum nicht erhalten. Die Gitterregularisierung bricht die Supersymmetrie aus zwei Gründen:

- Erstens impliziert die Brechung der Lorentzsymmetrie, daß die supersymmetrische Algebra, bei endlicher Gitterkonstante, nicht erfüllt sein kann.
- Zweitens induziert der Wilson-Term eine endliche Masse für das Gluino, das dadurch das Supermultiplett spaltet.

Entscheidend ist jedoch, daß die symmetriebrechenden Effekte, die die Bildung des Kontinuumslikes „überleben“, durch eine Renormierung eliminiert werden können. Dabei setzt man stillschweigend voraus, daß es keine SUSY-Anomalien gibt! In dem hier besprochenen Fall läuft die Renormierung auf eine passende Einstellung der nackten Gluino-Masse hinaus. Die Begründung für diese Vorgehensweise folgt aus recht einfachen Prinzipien [5].

Durch eine nicht-perturbative Einstellung der nackten Gluino-Masse kann ein supersymmetrischer Limes erhalten werden, der mit dem Limes verschwindender Gluino-Masse übereinstimmt [3].

Bei den Überlegungen zur Verbesserung der Wirkung in der Ordnung  $a$  stellte sich heraus, daß die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zwar im naiven Kontinuumslikes das richtige Ergebnis liefern, in der Ordnung  $a$  jedoch mit einem nichtverschwindendem Restterm  $X_S$  verbleiben. Um diese Terme zu eliminieren sind weitergehende Verfahren notwendig, wie sie zum Beispiel von M. GOLTERMANN und D. PETCHER für das Wess-Zumino-Modell in Kapitel 1 vorgestellt wurden [9].

Da die Gitter-Regularisierung äquivalent zu anderen Kontinuums-Regularisierungsmethoden ist, wird man bei den gitterfremden Regularisierungen auf ähnliche Artefakte stoßen wie jene, die hier aufgetreten sind.

Trotz der vielen Vorteile der Supersymmetrie, die ich auch schon in der Einleitung angesprochen habe, gibt diese zur Zeit noch keine Antwort auf das Massenspektrum der Quarks und Leptonen. Sie erklärt auch nicht, warum es genau drei Generationen von Teilchen gibt. Ein weiterer Nachteil ist, daß die gegenwärtigen SUSY-Modelle eine große Anzahl an freien Parametern haben.

Zur Zeit sieht es leider immer noch so aus, daß eindeutige experimentelle Beweise für die Supersymmetrie, zum Beispiel in Form von supersymmetrischen Teilchen, nicht vorhanden sind. Es bleibt den Theoretikern wohl nichts anderes übrig, als auf den Bau neuer, größerer Beschleuniger zu hoffen, die eindeutige Aussagen über supersymmetrische Reaktionen machen können. Eine solche Möglichkeit könnte sich an dem großen Proton-Proton-Speicherring (LHC) am CERN ergeben, der eine Strahlungsenergie von 7 TeV haben wird. Damit wäre man in der Lage, das gesamte supersymmetrische Spektrum abzudecken. Die Fertigstellung des Speicherrings ist jedoch erst bis Mitte des Jahres 2005 geplant [14].

**„Wenn die Theorie auf die Erfahrung warten sollte, so käme sie nie zustande.“**

NOVALIS (1772-1801)

# Anhang A

## Dirac-Matrizen

Bei den Dirac-Matrizen wird im folgenden zwischen der Darstellung im Minkowski-Raum und im euklidischen Raum unterschieden.

### A.1 Eigenschaften der Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum

Eine mögliche Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen ist die *Dirac- (Standard-) Darstellung*:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Dirac-Matrizen sind [2]:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

$$(\gamma_i)^\dagger = -\gamma_i, \quad (\text{A.3})$$

$$(\gamma_0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\text{A.4})$$

$$(\gamma_i)^2 = -\mathbf{1}, \quad (\text{A.5})$$

$$(\gamma_0)^\dagger = \gamma_0. \quad (\text{A.6})$$

Den Kommutator der  $\gamma$ -Matrizen bezeichnet man mit  $\sigma_{\mu\nu}$ :

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (\text{A.7})$$

Damit gilt:

$$\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \gamma_\tau. \quad (\text{A.8})$$

Man definiert die  $\gamma^5$ -Matrix als:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{i}{4}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu. \quad (\text{A.10})$$

Diese hat folgende Eigenschaften:

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}, \quad (\text{A.12})$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\text{A.13})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_{\mu\nu}\gamma^5 = \gamma^5\sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^\mu\sigma^{\rho\tau} = i(g^{\mu\rho}\gamma^\tau - g^{\mu\tau}\gamma^\rho) + \epsilon^{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma^5. \quad (\text{A.16})$$

## A.2 Zusammenhang zwischen Dirac-Matrizen im euklidischen Raum und im Minkowski-Raum

Der Zusammenhang zwischen Dirac-Matrizen im euklidischen Raum und im Minkowski-Raum lautet [16]:

$$\gamma_{1,2,3}^{\text{Euklid.}} \equiv -i\gamma_{1,2,3}^{\text{Minkowski}}, \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \gamma_4^{\text{Euklid.}} &\equiv -i\gamma_4^{\text{Minkowski}} \\ &\equiv \gamma_0^{\text{Minkowski}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Im Euklidischen nehmen die Dirac-Matrizen in der *Weyl-Darstellung* folgende Gestalt an:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Für die  $\gamma$ -Matrizen gilt dann:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1} - i\sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.20})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Weiter definiert man:

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i\gamma_\mu \gamma_\nu - i\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_5^M = \gamma^{5(M)} \\ &= i\gamma^{0(M)} \gamma^{1(M)} \gamma^{2(M)} \gamma^{3(M)}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Mit diesen Definitionen gilt nun:

$$\gamma_5 = \gamma^5, \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\text{A.25})$$

$$(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}, \quad (\text{A.26})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu} = 2i \gamma_\nu \delta_{\mu\tau} - i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5, \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_\tau = -2i \gamma_\nu \delta_{\mu\tau} - i \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5, \quad (\text{A.29})$$

$$(\gamma_\tau \sigma_{\mu\nu}) F_{\mu\nu} = (\sigma_{\mu\nu} \gamma_\tau + 4i \gamma_\nu \delta_{\mu\tau}) F_{\mu\nu}. \quad (\text{A.30})$$

Bezüglich der Ladungskonjugationsmatrix gilt:

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad (\text{A.31})$$

$$C^{-1}\gamma_\mu^T C = -\gamma_\mu, \quad (\text{A.32})$$

$$C\sigma_{\mu\nu} C^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^T, \quad (\text{A.33})$$

$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T. \quad (\text{A.34})$$

In der Weyl-Darstellung erhält man für die Ladungskonjugationsmatrix:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

# Anhang B

## Grassmann-Variablen

### B.1 Definition

Seien  $\theta_i$  ein Satz von Variablen. Sind diese definiert durch:

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0, \quad (\text{B.1})$$

so nennt man sie *Grassmann-Variablen*. Aus der obigen Definition folgt sofort:

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i, \quad (\text{B.2})$$

$$\Rightarrow \theta_i^2 = 0. \quad (\text{B.3})$$

Grassmann-Variablen sind somit nilpotent.

Für die Taylorreihe einer Funktion, die nur von einer Grassmann-Variablen abhängt, gilt folglich:

$$f(\theta) = a + b\theta. \quad (\text{B.4})$$

Alle anderen Terme höherer Ordnung geben keinen Beitrag.

Bei dem Umgang mit Grassmann-Variablen muß man darauf achten, daß diese Variablen bei Vertauschung antikommutieren. Deshalb ist bei jeder mathematischen Operation, bei der eine Variable an der anderen vorbeigezogen wird, ein Minuszeichen zu „spendieren“.

### B.2 Ableitungen von Grassmann-Variablen

Bei der Ableitung von Grassman-Variablen muß die Richtung, in welche die Ableitung wirkt, wegen der Anti-Kommutativität spezifiziert werden. Man unter-

scheidet zwischen rechten und linken Ableitungen.

**Rechte Ableitung:**

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_j \theta_k) = \theta_j \left( \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_i} \right) - \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} \right) \theta_k \quad (\text{B.5})$$

$$= \delta_{ik} \theta_j - \delta_{ij} \theta_k, \quad (\text{B.6})$$

**Linke Ableitung:**

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_j \theta_k) = \left( \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} \right) \theta_k - \theta_j \left( \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_i} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \delta_{ij} \theta_k - \delta_{ik} \theta_j. \quad (\text{B.8})$$

In der vorliegenden Arbeit wurde stets die linke Form der Ableitung verwendet.

Sowohl bei der linken, als auch der rechten Ableitung tritt ein Minuszeichen auf. Man sagt auch, die Ableitungen von Grassmann-Variablen genügen der *Anti-Leibniz-Regel*. Hingegen gehorcht die Variation, wie auch das Differential, der Leibniz-Regel:

$$\delta(\theta_i \theta_j) = (\delta \theta_i) \theta_j + \theta_i (\delta \theta_j), \quad (\text{B.9})$$

$$d(\theta_i \theta_j) = (d \theta_i) \theta_j + \theta_i (d \theta_j). \quad (\text{B.10})$$

# Anhang C

## Die Gruppe $SU(2)$

Diese Gruppe wird aus komplexen  $2 \times 2$  Matrizen gebildet, die folgende Eigenschaften haben:

$$U^\dagger U = 1, \quad (\text{C.1})$$

$$\det U = 1. \quad (\text{C.2})$$

Diese bilden die spezielle unitäre Gruppe  $SU(2)$  in zwei Dimensionen. Als Generatoren wählt man die drei Paulimatrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Die Paulimatrizen sind hermitesch, spurfrei und besitzen folgende Eigenschaften:

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \mathbf{1}, \quad (\text{C.4})$$

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbf{1} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (\text{C.6})$$

Für die Spur zweier Paulimatrizen folgt daraus:

$$\text{Tr}(\sigma^i \sigma^j) = \delta^{ij} \text{Tr} \mathbf{1} + i\epsilon^{ijk} \text{Tr} \sigma^k = 2\delta^{ij}. \quad (\text{C.7})$$

Mit den Generatoren  $T^a = \frac{1}{2}\sigma_a$  gilt somit:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (\text{C.8})$$

Speziell für die Gruppe  $SU(2)$  gelten außerdem folgende Spuridentitäten [19]:

$$\text{Tr} (T^a T^b T^c T^d) = -\frac{1}{8} f_{abe} f_{cde} + \frac{1}{12} \delta_{ab} \delta_{cd}, \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Tr} (T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} i f_{abc}. \quad (\text{C.10})$$

# Anhang D

## Majorana-Spinor

- **Minkowski-Raum**

Im Minkowski-Raum erfüllt ein Majorana-Spinor die Beziehung

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0 = \psi^T C. \quad (\text{D.1})$$

Dabei ist  $C$  der Ladungskonjugationsoperator und  $T$  beschreibt die Transposition der Farbindizes.

Wegen (D.1) ist ein Majorana-Spinor ein Spinor, der bei Ladungskonjugation in sich selbst übergeht. D.h., es gilt die Majorana-Bedingung:

$$\psi^C = \psi, \quad \psi^C = C \bar{\psi}^T. \quad (\text{D.2})$$

Ein Majorana-Teilchen ist also ein Teilchen, das seinem Antiteilchen entspricht.

Im Gegensatz zum Dirac-Spinor, der vier komplexe Parameter enthält, besitzt ein Majorana-Spinor nur zwei komplexe Parameter.

- **Euklidischer Raum**

Im Euklidischen verletzen alle Operationen, die komplexe Konjugation enthalten, die Invarianz der Lagrangedichte. Es gibt somit keine Hermitizität, keine Zeitumkehr und keine Ladungskonjugation.

Um die Anzahl der Freiheitsgrade zu halbieren,<sup>1</sup> fordert man formal eine Beziehung zwischen  $\psi$  und  $\bar{\psi}$ . Diese hat, im Gegensatz zum Minkowski-Raum, keine physikalische Bedeutung.

Die bevorzugte Wahl ist:

$$\bar{\psi} = \psi^T C. \quad (\text{D.3})$$

---

<sup>1</sup>Das ist wichtig, da die Anzahl der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade übereinstimmen müssen!

$C$  ist dabei durch folgende Beziehungen definiert:

$$C^T = -C, \quad (\text{D.4})$$

$$C^+ = C^{-1}, \quad (\text{D.5})$$

$$\gamma_\mu^T C = -C \gamma_\mu, \quad \mu = 1, 2. \quad (\text{D.6})$$

Für die  $\gamma$ -Matrizen gilt

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{D.7})$$

Mit diesen Definitionen ergeben sich einige Rechenregeln für Majorana-Spinoren, die in der vorliegenden Arbeit häufig verwendet wurden:

i.)

$$\bar{\psi} \theta = \bar{\theta} \psi \quad (\text{D.8})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \theta &= (\bar{\psi} \theta)^T \\ &= -\theta^T C^T \psi \\ &= \theta^T C \psi \\ &= \bar{\theta} \psi, \end{aligned}$$

ii.)

$$\bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi = -\bar{\psi} \gamma_\mu \epsilon \quad (\text{D.9})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi &= (\bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi)^T \\ &= (\epsilon^T C \gamma_\mu \psi)^T \\ &= -\psi^T \gamma_\mu^T C^T \epsilon \\ &= \psi^T \gamma_\mu^T C \epsilon \\ &= -\psi^T C \gamma_\mu \epsilon \\ &= -\bar{\psi} \gamma_\mu \epsilon, \end{aligned}$$

iii.)

$$\bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi = \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon \quad (\text{D.10})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi &= (\epsilon^T C \gamma_\mu \gamma_\nu \psi)^T \\ &= -\psi^T \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T C^T \epsilon \\ &= \psi^T \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T C \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi^T \gamma_\nu^T C \gamma_\mu \epsilon \\
&= \psi^T C \gamma_\nu \underbrace{C^{-1} C}_{=\mathbf{1}} \gamma_\mu \epsilon \\
&= \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon,
\end{aligned}$$

iv.)

$$\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \psi = -\bar{\psi} \sigma_{\rho\tau} \epsilon \quad (\text{D.11})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} \sigma_{\rho\tau} \psi &= \left( \epsilon^T C \frac{i}{2} (\gamma_\rho \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\rho) \psi \right)^T \\
&= \frac{i}{2} \psi^T \left( -\gamma_\rho^T \gamma_\tau^T + \gamma_\tau^T \gamma_\rho^T \right) C \epsilon \\
&= \frac{i}{2} \psi^T C (-\gamma_\rho \gamma_\tau + \gamma_\tau \gamma_\rho) \epsilon \\
&= -\bar{\psi} \sigma_{\rho\tau} \epsilon,
\end{aligned}$$

v.)

$$\bar{\epsilon} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \psi = \bar{\psi} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \epsilon \quad (\text{D.12})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \psi &= \left( \epsilon^T C \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \psi \right)^T \\
&= \psi^T \sigma_{\rho\tau}^T \gamma_\mu^T C \epsilon \\
&= -\psi^T \sigma_{\rho\tau}^T C \gamma_\mu \epsilon \\
&= \psi^T C \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \epsilon \\
&= \bar{\psi} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \epsilon.
\end{aligned}$$

# Anhang E

## Leibniz-Regel

$$\nabla_{\mu}^f f = \frac{1}{2a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu})) \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}^f (f \cdot g) &= \frac{1}{2a} (f(x + a\hat{\mu}) g(x + a\hat{\mu}) \\ &\quad - f(x - a\hat{\mu}) g(x - a\hat{\mu})) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} f \nabla_{\mu}^f g + (\nabla_{\mu}^f f) g &= \frac{1}{2a} (f(x) g(x + a\hat{\mu}) - f(x) g(x - a\hat{\mu}) \\ &\quad + f(x + a\hat{\mu}) g(x) - f(x - a\hat{\mu}) g(x)) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\neq \nabla_{\mu}^f (f \cdot g) \quad (\text{E.4})$$

# Anhang F

## Fierz-Identität

Um zu zeigen, daß der Ausdruck  $f_{abc} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^b \bar{\epsilon} \gamma^\mu \lambda^c$  keinen Beitrag gibt, bedient man sich einer Fierz-Transformation.

Zunächst aber wählt man einen Satz von Matrizen:

$$1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\mu\nu\tau}, \dots, \sigma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}, \quad (\text{F.1})$$

und definiert dann ein  $T_n$  als:

$$T_n = f_{abc} \bar{\lambda}^a \sigma^{\mu_1 \dots \mu_n} \lambda^b \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^c. \quad (\text{F.2})$$

Wendet man hierauf eine Fierz-Transformation an, so erhält man:

$$T_n = - \sum_{m=0}^d T_m F_{mn}. \quad (\text{F.3})$$

Dabei ist  $F_{mn}$  die Fierz-Matrix:

$$F_{mn} = (-1)^{mn+1} 2^{-\frac{d}{2}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-n-1} (1+z)^{d-m} (1-z)^m. \quad (\text{F.4})$$

Somit gilt es, folgendes zu beweisen:

$$T_1 = f_{abc} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^b \bar{\epsilon} \gamma^\mu \lambda^c = - \sum_{n=0}^d T_n F_{n1} \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{F.5})$$

Nach obiger Gleichung kann man  $T_1$  schreiben als:

$$T_1 = - (T_0 F_{01} + T_1 F_{11} + T_2 F_{21} + T_3 F_{31} + T_4 F_{41}). \quad (\text{F.6})$$

Die einzelnen Terme ergeben jeweils:

i.)

$$\begin{aligned}
T_0 &= f_{abc} \bar{\lambda}^a \lambda^b \bar{\epsilon} \lambda^c \\
&= f_{abc} \bar{\lambda}^b \lambda^a \bar{\epsilon} \lambda^c \\
&= -f_{abc} \bar{\lambda}^a \lambda^b \bar{\epsilon} \lambda^c \\
&= -T_0, \\
\Rightarrow T_0 &= 0;
\end{aligned} \tag{F.7}$$

ii.)

$$\begin{aligned}
T_3 &= f_{abc} \bar{\lambda}^a c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^b \bar{\epsilon} c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^c \\
&= -f_{abc} \bar{\lambda}^b c (\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau) \lambda^a \bar{\epsilon} c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^c \\
&= f_{abc} \bar{\lambda}^b c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^a \bar{\epsilon} c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^c \\
&= -f_{abc} \bar{\lambda}^a c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^b \bar{\epsilon} c (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu) \lambda^c \\
&= -T_3, \quad \text{wobei } c \text{ eine Konstante darstellt.} \\
\Rightarrow T_3 &= 0;
\end{aligned} \tag{F.8}$$

iii.)

$$\begin{aligned}
T_4 &= f_{abc} \bar{\lambda}^a \epsilon^{\mu\nu\rho\tau} \gamma_5 \lambda^b \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^5 \lambda^c \\
&= f_{abc} \bar{\lambda}^b \epsilon^{\mu\nu\rho\tau} \gamma_5 \lambda^a \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^5 \lambda^c \\
&= -f_{abc} \bar{\lambda}^a \epsilon^{\mu\nu\rho\tau} \gamma_5 \lambda^b \bar{\epsilon} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^5 \lambda^c \\
&= -T_4, \\
\Rightarrow T_4 &= 0;
\end{aligned} \tag{F.9}$$

iv.) Aus (F.4) ergibt sich für  $F_{21}$ :

$$\begin{aligned}
F_{21} &= (-1)^3 \frac{1}{4} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-2} (1+z)^2 (1-z)^2 \\
&= -\frac{1}{4} \oint \frac{dz}{2\pi i} \left( \frac{1}{z^2} - 2 + z^2 \right).
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Da alle Funktionen holomorphe Stammfunktionen haben folgt:

$$F_{21} = 0; \tag{F.11}$$

v.) Für  $F_{11}$  folgt aus (F.4):

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \frac{1}{4} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-2} (1+z)^3 (1-z) \\
&= \frac{1}{4} \oint \frac{dz}{2\pi i} \left( \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - 2z - z^2 \right). \tag{F.12}
\end{aligned}$$

Bis auf  $\frac{2}{z}$  haben alle Funktionen holomorphe Stammfunktionen. Somit reduziert sich  $F_{11}$  auf folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint dz \frac{1}{z}}_{=2\pi i} \\
&= \frac{1}{2}. \tag{F.13}
\end{aligned}$$

Mit (F.7), (F.8), (F.9), (F.11) und (F.13) ergibt sich nun für  $T_1$ :

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\left(0 + \frac{1}{2}T_1 + 0 + 0 + 0\right) \\
&= -\frac{1}{2}T_1 \\
\Rightarrow T_1 &= 0. \tag{F.14}
\end{aligned}$$

Damit hat man gezeigt, daß der Ausdruck  $f_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^b\bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda^c$  in der Variation der Wirkung keinen Beitrag liefert.

# Anhang G

## Bianchi-Identität

Unter Verwendung folgender Notation:<sup>1</sup>

**Eichfeld:**

$$A_\mu = -igA_\mu^a T^a, \quad (\text{G.1})$$

**Feldstärke**

$$F_{\mu\nu} = -igF_{\mu\nu}^a T^a, \quad (\text{G.2})$$

**Generatoren**

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (\text{für SU(2)}), \quad (\text{G.3})$$

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c, \quad (\text{G.4})$$

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad (\text{G.5})$$

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (\text{G.6})$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (\text{G.7})$$

$$\mathcal{D}_\mu \lambda = [D_\mu, \lambda] = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda], \quad (\text{G.8})$$

$$\mathcal{D}_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + gf_{abc} A_\mu^b \lambda^c, \quad (\text{G.9})$$

---

<sup>1</sup>Siehe auch Kapitel 2.

ergibt sich für  $[D^\tau, F^{\mu\nu}]$ :

$$\begin{aligned}
[D^\tau, F^{\mu\nu}] &= [\partial^\tau + A^\tau, F^{\mu\nu}] \\
&= [\partial^\tau - igA^{\tau b}T^b, -igF^{\mu\nu a}T^a] \\
&= -ig\partial^\tau F^{\mu\nu a} - g^2 A^{\tau b} F^{\mu\nu a} [T^b, T^a] \\
&= -ig\left(\partial^\tau F^{\mu\nu a} T^a + gf_{abc} A^{\tau a} F^{\mu\nu b} T^c\right) \\
&= -ig\left(\partial^\tau F^{\mu\nu a} + gf_{abc} A^{\tau b} F^{\mu\nu c}\right) T^a. \tag{G.10}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bianchi-Identität

$$[D_\tau, F_{\mu\nu}] + [D_\mu, F_{\nu\tau}] + [D_\nu, F_{\tau\mu}] = 0, \tag{G.11}$$

erhält man:

$$\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} [D^\tau, F^{\mu\nu}] = 0. \tag{G.12}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] D. Bailin and A. Love (1994). *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing.
- [2] V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky (1995). *CORE, COmpendium of RElations*, **hep-ph/9507456**.
- [3] G. Curci and G. Veneziano (1987). *Supersymmetry and the Lattice: a Reconciliation?*, Nucl. Phys. **B292**, 555.
- [4] P. H. Dondi and H. Nicolai (1977). *Lattice Supersymmetry*, Il Nuovo Cimento **41 A**, 1.
- [5] A. Donini, M. Guagnelli, P. Hernandez and A. Vladikas (1997). *Towards  $N = 1$  Super-Yang-Mills on the Lattice*, **hep-lat/9710065**.
- [6] J. Ellis, J.S. Hagelin, D.V. Nanopoulos, K.A. Olive and M. Srednicki (1984). *Supersymmetric Relics from the Big Bang*, Nucl. Phys. **B238**, 453.
- [7] P. Fayet and S. Ferrara (1977). *Supersymmetry*, Phys. Rep. 32 **No. 5**, 249.
- [8] S.Ferrara (1975). Lett. Nuovo Cimento **13**, 629.
- [9] Maarten F.L. Goltermann and Donald N. Petcher (1989). *A Local Interactive Lattice Model with Supersymmetry*, Nucl. Phys. **B319**, 307.
- [10] Rudolf Haag, Jan T. Lopuszański and Martin Sohnius (1975). *All possible Generators of Symmetries of the S Matrix*, Nucl. Phys. **B88**, 257.
- [11] Howard E. Haber and Gordon L. Kane (1986). *Ist die Natur supersymmetrisch?*, Spektrum der Wissenschaften, **8/1986**.
- [12] J. Kogut and L. Susskind (1975). *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Phys. Rev. **D 11**, 395.
- [13] P. Langacker (1995). *Implication of Precision Experiments. Precision Tests of the Standard Elektroweak Model*, World Scientific, Singapore.

- 
- [14] Erich Lohrmann (1997). *Das Standardmodell auf dem Prüfstand*, Physikalische Blätter **Heft 10**, 967.
- [15] István Montvay (1996). *An Algorithm for Gluinos on the Lattice*, Nucl. Phys. **B466**, 259. [hep-lat/9510042](#).
- [16] István Montvay and Gernot Münster (1994). *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press.
- [17] H.B. Nielsen and M. Ninomiya (1981). *Absence of Neutrinos on a Lattice (I). Proof by Homotopy Theory*, Nucl. Phys. **B185**, 20.
- [18] H.B. Nielsen and M. Ninomiya (1981). *Absence of Neutrinos on a Lattice (II). Intuitive Topological Proof*, Nucl. Phys. **B193**, 173.
- [19] Stefan Pokorski (1987). *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press.
- [20] Lewis H. Ryder (1996). *Quantum Field Theory*, 2nd edition, Cambridge University Press.
- [21] Martin F. Sohnius (1985). *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rep. **128**, 39.
- [22] J. Wess and B. Zumino (1974). *Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B70**, 39.
- [23] K.G. Wilson (1974). *Confinement of Quarks*, Phys. Rev **D10**, 2445.
- [24] Bernard de Wit and Daniel Z. Freedman (1975). *Combined Supersymmetric and Gauge-Invariant Field Theories*, Phys. Rev. **D12** 2286.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die beim Zustandekommen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben. Dabei danke ich insbesondere

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für die geduldige und hilfreiche Betreuung.
- der Arbeitsgruppe für viele interessante Gespräche. Hier seien stellvertretend Christian Demmer, Dr. Lutz Driesen, Johannes Göttker-Schnetmann, Klaus Spanderen und Dr. Dirk Talkenberger genannt.
- Herrn Hartmud Planert für die Durchsicht der Arbeit. Viel mehr jedoch möchte ich mich für die freundschaftlichen Ratschläge bedanken, die mich sowohl vor als auch während des Studiums stets begleiteten und motivierten.

Ganz herzlich bedanke ich mich

- bei meinem Freund Andreas Dombrowski für die Geduld und aufmunternden Worte.
- bei meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglichten.



Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im November 1997





