

KEVIN R. JOHNSON

**Darstellungstheorie der
Überlagerung der kubischen Gruppe
in Anwendung auf Operatoren der
 $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter**

Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Februar 2002

**Darstellungstheorie der
Überlagerung der kubischen Gruppe
in Anwendung auf Operatoren der
 $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter**

als Diplomarbeit vorgelegt von
Kevin R. Johnson

Februar 2002



Ausschnitt aus: M.C. Escher: „Belvedere“

“They who dream by day are cognizant of many things
which escape those who dream only by night.”
-EDGAR ALLAN POE-

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen der Gruppentheorie	5
1.1 Elementare Gruppentheorie	5
1.2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen	6
1.2.1 Grundbegriffe	6
1.2.2 Nicht-äquivalente und irreduzible Darstellungen	7
1.2.3 Eigenschaften irreduzibler Darstellungen	9
1.3 Produktgruppen und ihre Darstellungen	12
1.3.1 Direkte, endliche Produktgruppen	12
1.3.2 Direkte Produktdarstellung	13
1.3.3 Darstellungstheorie direkter, endlicher Produktgruppen	14
2 Die kubische Gruppe und ihre Überlagerung	17
2.1 Die kubische Gruppe O	17
2.2 Irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe O	20
2.2.1 Charaktertabelle der kubischen Gruppe O	20
2.2.2 Die volle kubische Gruppe O_h	22
2.3 Die kubische Gruppe O und die Drehgruppe $SO(3)$	23
2.3.1 Die Drehgruppe $SO(3)$	23
2.3.2 Überlagerungsgruppe $SU(2)$	24
2.3.3 Die kubische Gruppe als Untergruppe von $SO(3)$	26
2.4 Überlagerungsgruppe 2O	26
2.4.1 Elemente der Überlagerungsgruppe 2O	26
2.4.2 Irreduzible Darstellungen und Charaktertabelle	27
2.4.3 Die volle Überlagerung der kubischen Gruppe 2O_h	28
3 Essenzielle Supersymmetrie	31
3.1 Gradierung und Poincaré-Superalgebra	31
3.1.1 Poincaré-Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen	31

3.1.2	\mathbb{Z}_2 -Gradierung der Poincaré-Algebra	33
4	Grundzüge der Gittereichtheorie	35
4.1	Eichtheorie im Kontinuum	35
4.2	Gittereichtheorie	37
4.3	Spinzustände auf dem Gitter	39
5	Darstellungen über SUSY-Operatoren	43
5.1	Vorbereitungen und Bezeichnungen	43
5.1.1	Wilson-Loops	43
5.1.2	SUSY-Gitteroperatoren	46
5.2	Konstruktion der Darstellung	47
5.2.1	Spinoren	48
5.2.2	Majorana-Majorana-Operator	51
5.2.3	Majorana-Link-Majorana-Operator	52
5.3	Majorana-Majorana-Plaquetten-Operator	55
5.3.1	Transformationsverhalten und Darstellung	57
5.3.2	Konstruktion einer Orthonormalbasis	60
5.4	Ein weiteres Beispiel	66
6	Computerprogramm	73
6.1	Anleitung	73
6.1.1	Eingabedatei	74
6.1.2	Ausgabedatei	75
6.2	Funktionsweise des Programms	75
6.2.1	Eingaberoutine	75
6.2.2	Berechnung des Transformationsverhaltens aller möglichen Loops	75
6.2.3	Auswahl einer P - und C -paritätsinvarianten Basis	77
6.2.4	Transformationsverhalten der PC -invarianten Basis	78
6.2.5	Zerlegung in irreduzible Darstellungen	78
6.2.6	Konstruktion einer Orthonormalbasis	78
6.2.7	Ausgabe	79
6.2.8	Erweiterungsvorschlag	79
7	Ergebnisse	81
	Zusammenfassung und Ausblick	93
A	Reguläre Darstellung	95

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	III
B Majorana-Spinoren	97
C Programm	99
Danksagung	115

Einleitung

Jeder Mensch hat die Fähigkeit, in der Welt, die ihn umgibt, Muster und Strukturen zu erkennen. Symmetrien begegnen uns in der Alltagswelt in den unterschiedlichsten Formen und Ausprägungen. sei es die Perfektion einer Schneeflocke oder einer Blüte, die Regelmäßigkeit eines Linoleumfußbodens oder das eigene Gesicht im Spiegel. All diesen Strukturen ist gemeinsam, dass sie unter einer bestimmten Bewegung unverändert bleiben, man sagt sie besitzen eine Invarianz gegenüber dieser Transformation. Zum Beispiel ist eine Kugel invariant gegenüber Drehungen um ihr Zentrum. Solche Invarianzen machen sich Künstler wie M. C. ESCHER, Musiker wie J. S. BACH, Dichter wie J. W. v. GOETHE und Architekten wie M. P. BUCKMINSTER FULLER zunutze, um das ästhetische Empfinden des Zuschauers oder Zuhörers anzusprechen. Es ist einer der grundlegendsten Aspekte von assoziativer Intelligenz, Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Symmetrien aufzudecken und, ja, zu bestaunen. Nach Aristoteles steht am Anfang jeder Philosophie das Staunen, aber früher oder später will man verstehen, wie das was man bestaunt zustande gekommen ist. Man sucht nach ähnlichen Phänomenen und versucht, die entdeckten Gemeinsamkeiten zu verallgemeinern zur Formulierung von Gesetzmäßigkeiten zu gelangen.

Diese Suche nach Gesetzen, die die Natur beschreiben, ist die Kernfrage in der Physik. Bei ihrer Beantwortung spielt das Konzept der Symmetrie eine zentrale Rolle. Der Versuch, Symmetrien rational zu beschreiben führte in der Mathematik, der Sprache der Natur, auf den Formalismus der *Gruppentheorie*. Dabei hat sich gezeigt, dass diese zunächst rein mathematische Theorie ein probates Hilfsmittel bei der Lösung physikalischer Probleme sein kann, indem man die in physikalischen Modellen zu erwartende Symmetrie mit den abstrakten Begriffen der Gruppentheorie verbindet. Die Invarianzeigenschaft einer solchen Symmetrie ist immer eine in der Dynamik des Systems konstante Größe, man spricht von einer *Erhaltungsgröße*. Diese Verbindung zwischen Erhaltungsgröße und Symmetrie hat Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts die Mathematikerin E. NOETHER in dem nach ihr benannten Theorem bewiesen.

Symmetrieargumente können bei physikalischen Fragestellungen oftmals von zentraler Bedeutung sein, da sie die Dynamik des betrachteten Systems einschränken und so das Auffinden von Lösungen erheblich vereinfachen. Dies gilt in besonderem Maße für die *Theorie der Elementarteilchen*, der wir uns nun nähern wollen.

Das derzeitige Forschungsprogramm der Beschreibung der kleinsten Bausteine der Materie wird geleitet von dem sogenannten *Standardmodell der Elementarteilchen*. Es stellt den Abschluss einer Reihe von vereinheitlichenden Entdeckungen in der Physik dar und ver-

knüpft drei der in der Natur vorkommenden vier fundamentalen Wechselwirkungen. Die vierte und gleichzeitig wohl bekannteste Kraft ist die Gravitation, die bis jetzt noch nicht in befriedigender Weise in die Theorie eingebunden werden konnte. Die anderen drei fundamentalen Wechselwirkungen sind zum einen die *starke* Kraft, die für den Zusammenhalt der Bestandteile des Atomkerns verantwortlich ist, des weiteren die *schwache* Wechselwirkung, die unter anderem den radioaktiven β -Zerfall von Atomkernen beschreibt, und zuletzt die *elektromagnetische* Wechselwirkung, die eine vereinheitlichte Beschreibung der Phänomene der Optik, des Magnetismus und der Elektrizität ist.

Man ist nun grundsätzlich daran interessiert, alle vier Wechselwirkungen durch ein gemeinsames Modell zu beschreiben. Ein erster wichtiger Schritt bei diesem Projekt ist durch die von GLASHOW, WEINBERG und SALAM formulierte Verbindung der elektromagnetischen und der schwachen Kraft zur *Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung*. Die entscheidenden Einsichten kamen hierbei aus der Betrachtung gewisser Symmetrien, die als *Eichgruppen* formuliert sind. Zusammen mit der Eichgruppe der Theorie der starken Wechselwirkung, der *Quantenchromodynamik (QCD)*, bilden sie die Eichgruppe des Standardmodells

$$G_{SM} = SU(3) \times SU(2) \times U(1) = SU(3) \times G_{GSW}$$

das somit eine *lokale Eichtheorie* ist, die auf Grundlage der *relativistischen Quantenfeldtheorie* formuliert ist.

Das Standardmodell ist bisher nicht durch experimentelle Befunde widerlegt worden, – obwohl einige Phänomene nicht konsistent mit den Vorhersagen eines minimalen Standardmodells zu vereinbaren sind, wie z.B. die Existenz von mehr Materie als Antimaterie im Universum.

Die Materieteilchen des Standardmodells sind zum Einen die *Quarks*, die der starken Wechselwirkung unterliegen und, zu Protonen und Neutronen zusammengesetzt, die Bausteine des Atomkerns bilden, und zum Anderen die *Leptonen*, die nur über die schwache Kraft wechselwirken. Trotzdem haben sie eine Gemeinsamkeit: Jedes physikalische Teilchen lässt sich Anhand eines charakteristischen inneren Freiheitsgrads, des *Spin* klassifizieren. Quarks und Leptonen haben alle einen halbzahligem Spin und werden demnach als *Fermionen* bezeichnet. Das Gegenstück hierzu bilden die *Bosonen* mit ganzzahligem Spin, die als Vermittler der Kräfte zwischen den Materieteilchen fungieren. Das bekannteste Boson ist wohl das Photon, das die elektromagnetische Kraft überträgt.

Trotz des großen Erfolgs des Standardmodells wird immer wieder versucht, eine über das Standardmodell hinausgehende “theory of everything” aufzustellen, die das Standardmodell möglicherweise als Grenzfall enthält. Ein erfolgversprechender Kandidat dafür ist die *Supersymmetrie (SUSY)*, die Fermionen und Bosonen mittels einer neu hinzugefügten Transformation ineinander überführt. Jedem Teilchen des Standardmodells wird somit ein neues supersymmetrisches Partnerteilchen zugeordnet. Jedes Boson bekommt einen fermionischen SUSY-Partner während jedes Fermion als Pendant ein Boson besitzt, was zu einer Verdopplung des erwarteten Teilchenspektrums führt. Die Tatsache, dass bisher noch in keinem Experiment an Teilchenbeschleunigern ein SUSY-Partnerteilchen nachgewiesen

werden konnte, bedeutet aber, dass die SUSY-Teilchen schwerer sein müssen, als die bekannten Teilchen des Standardmodells. Man spricht von *gebrochener* Supersymmetrie.

Wenn die Teilchen (noch) nicht gefunden wurden, stellt sich die Frage nach der Begründbarkeit der SUSY-Theorie. Einerseits gibt es experimentelle Hinweise auf Diskrepanzen mit den Vorhersagen des Standardmodells (wie z.B. in der Protonenmasse), die eine Erweiterung der Theorie, wie sie die Supersymmetrie darstellt, nötig machen könnte. Des weiteren lässt die SUSY-Erweiterung des Standardmodells eine Vereinigung mit der Gravitation leichter zu. Das wichtigste Argument ist aber das sogenannte *Hierarchie-Problem*. In jeder Quantenfeldtheorie sind die Felder durch Kopplungskonstanten miteinander verbunden, die im Standardmodell nicht konstant, sondern energieabhängig sind. Die deshalb *laufende Kopplung* genannten Werte nähern sich nach theoretischen Rechnungen für sehr hohe Energien im Bereich von ca. $10^{14} GeV$ an, treffen sich aber nicht. In der SUSY-Theorie hingegen erwartet man oberhalb einer Energieskala von etwa $10^{16} GeV$ eine Vereinigung der Kopplungen und somit eine "grand unifying theory" (GUT). Das Problem besteht nun darin, dass man aufgrund der im Vergleich zur Vereinigungsskala relativ geringen erwarteten Masse des Higgs-Teilchens, das für die Masseerzeugung im Standardmodell verantwortlich sein soll, einige willkürlich wirkende Restriktionen an den Parametern der GUT vornehmen müsste, was man als Hierarchieproblem bezeichnet. Die Supersymmetrie entschärft dieses Problem durch "non-renormalization"-Theoreme.

Der experimentelle Nachweis für SUSY-Teilchen steht allerdings noch aus, so dass man für Berechnungen in SUSY-Theorien numerische Verfahren verwenden muss. Hierfür muss man, aufgrund der Endlichkeit des Speichers eines Computers, das Raum-Zeit-Kontinuum diskretisieren und Felder nur auf Punkten eines vierdimensionalen Gitters zulassen. Hierfür greift man auf das von WILSON in den siebziger Jahren formulierte Konzept der gitterregularisierten, eichinvarianten euklidischen Quantenfeldtheorie zurück, das zusammen mit der Entwicklung leistungsfähiger Großrechner die Möglichkeit eröffnete, Beschleunigerexperimente durch computergestützte Simulationen zu ergänzen. Die Gitterdiskretisierung hat allerdings Auswirkungen auf die eingangs erwähnten Symmetrieeigenschaften des Raumes. Betrachtet man z.B. die Symmetrieeigenschaften eines kubischen Gitters anhand eines Ausschnitts aus ebendiesem Gitter, nämlich eines Würfels, so stellt man fest, dass er (im Gegensatz zu einer Kugel) nur noch durch Drehungen um bestimmte Achsen und passende Winkel in sein Ebenbild zu überführen ist. Mit ebendieser kubischen Symmetrie, die der Poincaré-Symmetrie des Raumes untergeordnet ist, angewandt auf eine SUSY-Feldtheorie beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Im ersten Kapitel stelle ich die mathematischen Grundlagen und benötigten Konzepte der Theorie der diskreten Gruppen und ihrer Darstellungstheorie zusammen. Das zweite Kapitel bringt uns die kubische Gruppe und die zu ihr gehörige Überlagerungsgruppe näher, deren Darstellungen spinoriellen Charakter haben und dadurch mit Elementen der SUSY-Erweiterung der Gittereichtheorie identifizierbar sind. Das kurze dritte Kapitel soll nur so weit in die Supersymmetrie vordringen, um die später notwendigen SUSY-Erweiterungen der Wilson-Theorie nachzuvollziehen. Es folgt im vierten Kapitel eine Erklärung des Formalismus der Eichtheorie auf dem Gitter, um dann im Kapitel 5 die darauf basierende Methodik der Rechnung anhand von einigen Beispielen auszuführen. Das sechste Kapitel

stellt die von mir realisierte Möglichkeit vor, die z.T. mühevollen Rechnungen auf einem Computer durchzuführen und ist zugleich Anleitung und Erläuterung für das auf dem beigefügten Datenträger als kommentierter Quelltext befindliche Programm. Die Vorgehensweise des Programms schliesst direkt an die im Kapitel 5 beschriebene Methodik an. Im letzten Kapitel sind einige Ergebnisse der Computerrechnungen angegeben. Die Arbeit schließt mit einem zusammenfassenden Ausblick.

Kapitel 1

Grundlagen der Gruppentheorie

Dieses erste Kapitel soll eine kompakte Einführung in die für diese vorliegende Arbeit wesentlichen Konzepte der Darstellungstheorie endlicher Gruppen geben. Es soll außerdem der Festlegung der verwendeten Notation dienen. Für detailliertere Ausführungen zu den in diesem Kapitel beschriebenen Sachverhalten sei auf die umfangreiche Literatur zur Gruppentheorie verwiesen, z.B. [1]-[6].

1.1 Elementare Gruppentheorie

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Definitionen der Gruppentheorie.

Definition 1 Eine Menge G zusammen mit einer auf ihr erklärten Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ bildet eine *Gruppe* (G, \circ) , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung \circ ist assoziativ, d.h. $\forall a, b, c : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
2. Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, d.h. $\exists e \forall a : a \circ e = e \circ a = a$.
3. Es gibt zu jedem Element $a \in G$ ein Inverses $a^{-1} \in G$,
d.h. $\forall a \exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Die Gruppe (G, \circ) wird abkürzend auch einfach mit G bezeichnet, wenn Verwechslungen mit der *Menge* G ausgeschlossen sind.

Definition 2 Eine Gruppe G heißt *abelsch*, falls die Verknüpfung \circ kommutativ ist, d.h. falls $\forall a, b : a \circ b = b \circ a$ gilt.

Definition 3 Unter der *Ordnung* einer Gruppe versteht man die Anzahl ihrer Elemente.

Definition 4 Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe von G* , falls sie mit der induzierten Verknüpfung wiederum eine Gruppe bildet.

Für die Gruppenverknüpfung \circ schreibt man vereinfachend auch \cdot oder man lässt das Zeichen gänzlich weg und schreibt für $a \circ b$ einfach ab .

Definition 5 Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen *zueinander konjugiert bezüglich G* (schreibe: $a \sim b$), falls $\exists g \in G : b = g^{-1}ag$. Man nennt die Menge aller zu a konjugierten Elemente von G auch *Klasse von a* .

Bemerkung 6 Jedes Gruppenelement von G liegt in genau einer (konjugierten) Klasse von G , d.h. die Klassen sind disjunkt und ihre Vereinigung bildet G . Insbesondere bildet das neutrale Element eine Klasse für sich.¹

Definition 7 Eine Abbildung $\Phi : G \rightarrow G'$ von einer Gruppe (G, \circ) in eine Gruppe (G', \cdot) heißt *Gruppenhomomorphismus*, falls sie die Gruppenverknüpfungen respektiert, d.h. $\forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2) = \Phi(g_1 \circ g_2)$.

1.2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Bei physikalischen Problemstellungen, die Symmetrien aufweisen, ist die Gruppentheorie von großer Bedeutung. Ist eine Differenzialgleichung invariant unter einer Symmetrietransformation, vereinfacht das in vielen Fällen das Auffinden der Lösungen. Der Vektorraum der Lösungen bildet dabei einen Darstellungsraum auf dem die Symmetriegruppe dann wirkt. Im Folgenden werden die Grundzüge der Darstellungstheorie systematisch eingeführt. Wir beginnen mit dem Begriff der Darstellung.

1.2.1 Grundbegriffe

Definition 8 Ein Homomorphismus $\mathcal{R} : G \rightarrow \text{Aut}(V), g \rightarrow \mathcal{R}(g)$ von einer Gruppe G in eine Gruppe von Operatoren $\mathcal{R}(G)$ eines linearen Vektorraums V heißt eine *Darstellung* der Gruppe G mit dem *Darstellungsraum* V . Die *Dimension der Darstellung* ist dabei die Dimension des Darstellungsraumes V . Eine Darstellung heißt *treu*, falls \mathcal{R} ein Isomorphismus ist, andernfalls nennt man sie *degeneriert*.

Im Weiteren werden wir uns auf endliche Gruppen und ihre Darstellung sowie auf endlich-dimensionale Darstellungsräume beschränken. Die meisten Resultate lassen sich auch auf unendlich-dimensionale Darstellungsräume ausweiten.

Bemerkung 9 Jede endlich-dimensionale Darstellung \mathcal{R} kann in Form von Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}(g), g \in G$ beschrieben werden. Die induzierte Verknüpfung ist dann die Matrizenmultiplikation. Jede n -dimensionale Darstellung \mathcal{R} besitzt eine isomorphe Darstellung $\mathcal{M}(\mathcal{R}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, die *Matrixdarstellung von G* genannt wird.

Bemerkung 10 Jede Gruppe G besitzt eine triviale Darstellung \mathcal{T} , die durch $D_{\mathcal{T}}(g) = 1, \forall g \in G$ definiert ist. Der zugehörige Darstellungsraum ist \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

¹Für einen Beweis sei auf [1] verwiesen.

1.2.2 Nicht-äquivalente und irreduzible Darstellungen

Zu einer Gruppe gibt es im Allgemeinen mehrere mögliche Darstellungen. Sie werden zunächst in Klassen von äquivalenten Darstellungen eingeteilt. Der aus der linearen Algebra bekannte Begriff der Ähnlichkeit von Matrizen wird auf Darstellungen übertragen: Sei \mathcal{R} eine Darstellung von G auf dem Darstellungsraum V und S ein invertierbarer Operator auf V . Dann ist die durch

$$\mathcal{R}'(g) = S^{-1}\mathcal{R}S, \quad \forall g \in G \quad (1.1)$$

definierte Darstellung \mathcal{R}' ebenfalls eine Darstellung von G auf V (und somit von gleicher Dimension wie \mathcal{R}). Man sagt, \mathcal{R} und \mathcal{R}' sind durch eine *Ähnlichkeitstransformation* ineinander überführt worden.

Definition 11 Zwei Darstellungen heißen *äquivalent*, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander überführt werden können.

Äquivalente Darstellungen bilden eine Äquivalenzklasse, und es genügt, einen Repräsentanten jeder Klasse zu kennen. Zur Unterscheidung von äquivalenten und nicht-äquivalenten Darstellungen benötigt man eine Charakterisierung, die sich bei Ähnlichkeitstransformationen nicht ändert. Für Matrixdarstellungen ist die Spur eine solche Invariante. Man kann sie daher zur Klassifikation von äquivalenten Darstellungen heranziehen und definiert:

Definition 12 Der *Charakter* $\chi^{\mathcal{R}}(g)$ von $g \in G$ in der Darstellung \mathcal{R} ist durch

$$\chi^{\mathcal{R}}(g) = \text{Tr } \mathcal{R}(g) \quad (1.2)$$

erklärt.

Der Charakter ist nicht nur innerhalb einer Äquivalenzklasse von Darstellungen invariant, sondern auch innerhalb einer Klasse von Gruppenelementen:

Bemerkung 13 Alle Gruppenelemente einer Klasse (vgl. Definition 5) haben den gleichen Charakter, d.h. der Charakter ist eine Klassenfunktion.²

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel zur Einteilung von Darstellungen einer Gruppe ist es, jede Darstellung in eine direkte Summe aus irreduziblen Darstellungen zu zerlegen.

Zunächst sind noch einige weitere Begriffe nötig.

Definition 14 Sei \mathcal{R} eine Darstellung von G auf dem endlichen Vektorraum V und sei V_1 ein Unterraum von V . Dann heißt V_1 *invarianter Unterraum von V bezüglich \mathcal{R}* , falls für alle $x \in V_1$ und $g \in G$ gilt: $\mathcal{R}(g)(x) \in V_1$. Ein invarianter Unterraum ist *minimal*, wenn er keine nicht-trivialen invarianten Unterräume bezüglich \mathcal{R} enthält.

²Beweis: Seien $a, b \in G$, dann gilt wegen Invarianz der Spur gegenüber zyklischer Vertauschung $\text{Tr}(D_{\mathcal{R}}(b^{-1})D_{\mathcal{R}}(a)D_{\mathcal{R}}(b)) = \text{Tr}D_{\mathcal{R}}(a)$

Beispiele: Triviale invariante Unterräume von V bezüglich \mathcal{R} sind der Vektorraum V selbst und der Nullraum.

Definition 15 Eine Darstellung \mathcal{R} von G heißt *irreduzibel*, wenn es keine nicht-trivialen invarianten Unterräume von V bzgl. \mathcal{R} gibt. Ansonsten ist die Darstellung *reduzibel*. Falls das orthogonale Komplement eines invarianten Unterraumes ebenfalls invariant bzgl. \mathcal{R} ist, nennt man die Darstellung *vollständig reduzibel*.

Es zeigt sich nun, dass jede reduzible Darstellung in irreduzible Darstellungen zerlegt werden kann und umgekehrt aus der Kenntnis aller irreduziblen Darstellungen alle reduziblen Darstellungen konstruiert werden können. Somit ist mit dem Auffinden der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe das Darstellungsproblem bereits gelöst. Dieses Ergebnis wollen wir in Theorem 18 präzisierend festhalten. Der Beweis kann in der Literatur (z.B. [1]) nachgelesen werden. Man beschränkt sich bei diesem Beweis auf unitäre Darstellungen (Definition 16), was aber nicht die Allgemeingültigkeit beeinflusst (siehe Theorem 17).

Definition 16 Eine Darstellung \mathcal{R} einer Gruppe G heißt *unitäre Darstellung*, falls auf dem Darstellungsraum ein inneres Produkt definiert ist und die Operatoren $\mathcal{R}(g)$ für alle $g \in G$ unitär sind, also das innere Produkt zweier Elemente invariant lassen.

Theorem 17 Jede Darstellung \mathcal{R} einer endlichen Gruppe auf einem Raum mit einem inneren Produkt ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Man kann nun zeigen, dass jede irreduzible unitäre Darstellung $\mathcal{R} : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ mit nichttrivialem invarianten Unterraum V_1 auch ihren zu V_1 orthogonalen Unterraum V_1^\perp als invarianten Unterraum besitzt. Somit sind auch $\mathcal{R}' : G \rightarrow \text{Aut}(V_1)$ mit $\mathcal{R}'(g) = \mathcal{R}(g)|_{V_1}$ und $\mathcal{R}'' : G \rightarrow \text{Aut}(V_1^\perp)$ mit $\mathcal{R}''(g) = \mathcal{R}(g)|_{V_1^\perp}$ eine Darstellung von G . Da $V = V_1 \oplus V_1^\perp$, legen \mathcal{R}' und \mathcal{R}'' die Darstellung \mathcal{R} eindeutig fest. Daher schreibt man $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''$. Man sagt, \mathcal{R} ist die *direkte Summe von \mathcal{R}' und \mathcal{R}''* . Nimmt man nun o.B.d.A. an, dass V_1 der kleinste echte invariante Unterraum von V ist, so ist \mathcal{R}' zwangsläufig irreduzibel und V_1^\perp aufgrund obiger Aussage invariant unter \mathcal{R}'' . Falls \mathcal{R}'' nicht irreduzibel ist, wählt man auch in V_1^\perp den kleinsten echten invarianten Unterraum aus – dieser ist dann invariant unter einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R}''' – und spaltet ihn ab; dieser Ablauf kann solange fortgeführt werden, bis man die reduzible Darstellung \mathcal{R} vollständig in irreduzible Anteile zerlegt hat. Da V endlich-dimensional ist, bricht die Prozedur nach endlich vielen Schritten ab. Man erhält schließlich

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\mu=1}^k a_\mu \mathcal{R}^\mu, \quad (1.3)$$

wobei $a_\mu \in \mathbb{N}_0$ und die \mathcal{R}^μ paarweise nicht-äquivalent zueinander sind³.

Es sei angemerkt, dass die Zerlegung (1.3) nicht eindeutig ist, es wird sich aber im nächsten Abschnitt herausstellen, dass die a_μ hingegen für jede Zerlegung eindeutig bestimmt sind.

Man erhält nun also das bereits angekündigte

³Gleichung (1.3) meint genauer $\mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^1}_{a_1\text{-mal}} \oplus \underbrace{\mathcal{R}^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^2}_{a_2\text{-mal}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{R}^k \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^k}_{a_k\text{-mal}}$.

Theorem 18 Jede endlich-dimensionale unitäre Darstellung einer endlichen Gruppe lässt sich vollständig in eine direkte Summe von irreduziblen unitären Darstellungen zerlegen.

Am Ende dieses Abschnitts sei noch einmal kurz auf die zugehörigen Matrixdarstellungen irreduzibler Darstellungen eingegangen. Zerlegt man V in die direkte Summe $V = V_1 \oplus V_1^\perp$, so kann durch geeignete Wahl der Basisvektoren die zu \mathcal{R} gehörige Darstellungsmatrix in eine obere Dreiecksform gebracht werden. Zerlegt man aber die Darstellung \mathcal{R} gemäß Theorem 18 vollständig in ihre irreduziblen Anteile, so erhält die Darstellungsmatrix Blockdiagonalgestalt.

1.2.3 Eigenschaften irreduzibler Darstellungen

Das zentrale Problem in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist das Auffinden aller nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen. Außerdem interessiert man sich für Methoden zur Aufspaltung reduzibler Darstellungen. In diesem Abschnitt sollen die dafür wesentlichen Theoreme vorgestellt werden. Zunächst wollen wir die beiden *Lemmata von Schur* zitieren, deren Beweise in den angegebenen Büchern über Gruppentheorie nachgelesen werden können (z.B. [1])

Lemmata von Schur

Lemma 19 Sei \mathcal{R} eine irreduzible Darstellung der (endlichen) Gruppe G auf einem (endlich-dimensionalen) Vektorraum V und A ein beliebiger Operator auf V . Falls A mit allen Operatoren $\{\mathcal{R}(g), g \in G\}$ kommutiert, also $A\mathcal{R}(g) = \mathcal{R}(g)A$ für alle $g \in G$ gilt, dann muss A ein Vielfaches des Identitätsoperators sein, d.h. $A = \lambda \mathbb{1}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemma 20 Seien \mathcal{R} und \mathcal{R}' zwei irreduzible Darstellungen einer (endlichen) Gruppe G auf den (endlich-dimensionalen) Vektorräumen V bzw. V' und A eine lineare Transformation von V' nach V mit $A\mathcal{R}'(g) = \mathcal{R}(g)A$ für alle $g \in G$. Dann ist entweder (i) $A = 0$ oder (ii) V und V' sind zueinander isomorph und damit \mathcal{R} äquivalent zu \mathcal{R}' .

Orthonormalitätstheorem

Das zentrale Resultat der Darstellungstheorie ist das Orthonormalitätstheorem. Im Folgenden werden folgende Notationen vereinbart:

- n_G : Gruppenordnung;
- μ, ν : indiziert nicht-äquivalente, irreduzible Darstellungen $\mathcal{R}^\mu, \mathcal{R}^\nu$ von G ;
- d_μ : Dimension der Darstellung \mathcal{R}^μ ;
- $D^\mu(g)$: die zu $g \in G$ gehörige Matrix der Matrixdarstellung $\mathcal{M}(\mathcal{R}^\mu)$ bezüglich einer Orthonormalbasis;
- C_i : konjugierte Klasse, ($i = 1, 2, \dots, n_C$) ;
- $\chi^\mu(C_i)$: Charakter der Elemente in der Klasse C_i in der Darstellung \mathcal{R}^μ ;
- n_i : Anzahl der Elemente in der Klasse C_i ;
- n_C : Anzahl der Klassen in der Gruppe G .

Theorem 21 Für zwei beliebige, nicht-äquivalente, irreduzible, unitäre Darstellungsmatrizen gilt:

$$\frac{d_\mu}{n_G} \sum_g D^{\mu\dagger}(g)_{ki} D^\nu(g)_{jl} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.4)$$

mit der Konvention ⁴

$$D^{\mu\dagger}(g)_{ki} = D^{\mu*}(g)_{ik}$$

An dieser Stelle eine Bemerkung zur Bezeichnung „Orthonormalitätstheorem“. Sie wird durch folgende geometrische Anschauung motiviert: Fasst man $(d_\mu/n_G)^{\frac{1}{2}} D^\mu(g)_{jl}$ für ein festes Tripel (μ, j, l) als einen n_G -komponentigen Vektor im n_G -dimensionalen „Gruppenelemente“-Vektorraum auf (die Gruppenelemente g durchlaufen dabei die volle Gruppe G), so besagt das Theorem, dass all diese Vektoren orthonormal zueinander sind. Da (j, l) genau $(d_\mu)^2$ Werte annehmen kann, gibt es insgesamt $\sum_\mu (d_\mu)^2$ verschiedene orthonormale Vektoren in der μ -Darstellung. Weil der zugehörige Vektorraum aber n_G -dimensional ist, kann es maximal n_G verschiedene orthonormale Vektoren geben. Es gilt also:

$$\sum_\mu (d_\mu)^2 \leq n_G . \quad (1.5)$$

Tatsächlich kann die obige Ungleichung mit Hilfe der *regulären Darstellung* dahingehend verschärft werden, dass in (1.5) die Gleichheit gilt. Man vergleiche dazu Anhang A. Festhalten wollen wir aber schon einmal das

Vollständigkeitstheorem

Theorem 22 Die Dimensionsparameter $\{d_\mu\}$ der nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen genügen der Relation

$$\sum_\mu d_\mu^2 = n_G , \quad (1.6)$$

und für die zugehörigen Darstellungsmatrizen gilt damit wegen der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren im n_G -dimensionalen Raum die *Vollständigkeitsrelation*

$$\sum_{\mu, l, k} \frac{d_\mu}{n_G} D^\mu(g)_{lk} D^{\mu\dagger}(g')_{kl} = \delta_{gg'} , \quad (1.7)$$

wobei δ_{ij} mit $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet.

⁴Die *hermitesche Konjugation* umfasst *komplexe Konjugation* mit zusätzlicher Transposition. Man schreibt $A^\dagger_{ij} \equiv (A^\dagger)_{ij} = (A^{*T})_{ij} = (A^*)_{ji} \equiv A^*_{ji}$.

Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelation für irreduzible Charaktere

Das Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorem ist aus theoretischer Sicht von überaus großer Bedeutung. Für das Auffinden von irreduziblen Darstellungen in der Praxis ist es allerdings weniger geeignet, da die Gestalt der Darstellungsmatrizen von der konkret gewählten Basis von V abhängt. Eine Basistransformation führt aber nur auf äquivalente Darstellungen. Sie spielt also für die eigentlich betrachtete irreduzible Darstellung \mathcal{R} keine Rolle. Die Darstellungsmatrizen $D(g)$ mit $g \in G$ tragen also im Prinzip „zu viel“ Information. In Definition 12 wurde der Charakter einer Darstellung \mathcal{R} als die Spur über die Operatoren $\mathcal{R}(g)$ eingeführt. Sie sind unabhängig von der Wahl der Basis im Darstellungsraum, d.h. invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, und bilden eine Klassenfunktion. Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorem können in der Tat basisunabhängig formuliert werden.

Theorem 23 Die Charaktere der nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen genügen folgenden Relationen:

$$\sum_i \frac{n_i}{n_G} \chi^{\mu\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Orthonormalität}), \quad (1.8)$$

$$\sum_\mu \frac{n_i}{n_G} \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu\dagger}(C_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Vollständigkeit}), \quad (1.9)$$

wobei gemäß Konvention $\chi^{\mu\dagger}(C_i) = (\chi^\mu(C_i))^*$ ist.

Für eine fest vorgegebene irreduzible Darstellung μ bilden die $(n_i/n_G)^{\frac{1}{2}} \chi^\mu(C_i)$ mit $i = 1, \dots, n_C$ einen Vektor im n_C -dimensionalen Vektorraum. Von ihnen gibt es genau so viele, wie es nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen gibt. Theorem 23 besagt, dass alle derart gebildeten Vektoren orthogonal zueinander stehen. Hieraus folgt, dass die Anzahl der nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen von G kleiner oder gleich n_C sein muss. Man kann zeigen, dass auch hier die Gleichheit gilt (vgl. Theorem 22), einen Beweis hierzu findet man in [1]. Als weitere wichtige Folgerung notieren wir

Folgerung 24 Die Anzahl der nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Anzahl von konjugierten Klassen von G . Also kann $\chi^\mu(C_i)$ als quadratische $n_C \times n_C$ -Matrix aufgefasst werden, wobei μ die Zeilen und i die Spalten indizieren. Man nennt eine aus diesen Spalten erzeugte Tabelle auch *Charakter-Tabelle*.

Wir wollen nun eine Aussage darüber machen, wie oft eine irreduzible Darstellung in einer Zerlegung einer reduziblen Darstellung einer endlichen Gruppe vorkommt.

Theorem 25 Zerlegt man eine reduzible Darstellung \mathcal{R} in ihre irreduziblen Anteile, so bestimmt man deren Häufigkeit a_ν gemäß der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^{\nu\dagger}(C_i) \chi^{\mathcal{R}}(C_i) . \quad (1.10)$$

Zum Schluss dieses Abschnitts möchte ich noch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Irreduzibilität angeben.

Theorem 26 Eine Darstellung \mathcal{R} mit den Charakteren $\{\chi(C_i)\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn

$$\sum_i n_i |\chi(C_i)|^2 = n_G. \quad (1.11)$$

Für endliche Gruppen gibt uns dieses Kriterium also einen leicht auszuführenden Test auf Irreduzibilität an die Hand.

1.3 Produktgruppen und ihre Darstellungen

1.3.1 Direkte, endliche Produktgruppen

Es ist sinnvoll, mit folgendem Theorem zu beginnen:

Theorem und Definition 27 Seien G_1 und G_2 zwei beliebige, endliche Gruppen und e_1 und e_2 ihre neutralen Elemente. Betrachtet man Paare (g_1, g_2) mit $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ und definiert die Verknüpfung zweier Paare (g_1, g_2) und (g'_1, g'_2) durch die Vorschrift

$$(g_1, g_2) (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2) \quad (1.12)$$

für alle $g_1, g'_1 \in G_1$ und $g_2, g'_2 \in G_2$, so bildet die Menge aller Paare (g_1, g_2) eine Gruppe bzgl. der obigen Verknüpfung.

Diese Gruppe bezeichnet man mit $G_1 \otimes G_2$ und nennt sie das *direkte Produkt der Gruppen G_1 und G_2* .

Beweis: Es sind lediglich die Gruppenaxiome nachzuprüfen.

Bemerkung 28 Sind G_1 und G_2 (endliche) Gruppen der Ordnung n_{G_1} bzw. n_{G_2} , so ist die Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$ eine endliche Gruppe der Ordnung $n_{G_1} \cdot n_{G_2}$.

Für die Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$ ergeben sich folgende Eigenschaften:

- (i) Sie besitzt zwei Untergruppen H_1 und H_2 , bestehend aus den Elementen (g_1, e_2) mit $g_1 \in G_1$ bzw. (e_1, g_2) mit $g_2 \in G_2$, die beide isomorph⁵ zu den Gruppen G_1 bzw. G_2 sind.
- (ii) Beide Untergruppen haben nur das Element (e_1, e_2) gemeinsam, d.h. $H_1 \cap H_2 = \{(e_1, e_2)\}$, und
- (iii) jedes Element der einen Untergruppe kommutiert mit jedem Element der anderen

$$(g_1, e_2) (e_1, g_2) = (e_1, g_2) (g_1, e_2) \quad (1.13)$$

für alle $g_1, e_1 \in G_1$ und $g_2, e_2 \in G_2$.

⁵Man sagt, zwei Gruppen G und G' sind isomorph zueinander ($G \cong G'$), wenn ein bijektiver Gruppenhomomorphismus Φ im Sinne von Definition 7 existiert. Die Isomorphismen lauten hier $\Phi((g_1, e_2)) = g_1$ bzw. $\Phi((e_1, g_2)) = g_2$.

Andererseits gilt nach (1.12) und Gruppenaxiom 2 aus Definition 1

$$(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (g_1, g_2) , \quad (1.14)$$

so dass

- (iv) jedes Element von $G_1 \otimes G_2$ als Produkt von je einem Element der beiden Untergruppen H_1 und H_2 geschrieben werden kann.

Diese vier Eigenschaften, auf deren Nachweise hier verzichtet wird, geben Anlass zu einer Umformulierung der Definition 27.

Definition 29 Eine (endliche) Gruppe G' heißt *direkte (endliche) Produktgruppe*, falls Gruppen G_1 und G_2 existieren, so dass G' isomorph zur Gruppe $G_1 \otimes G_2$ ist.

Nach Definition 29 müssen die Elemente von direkten Produktgruppen nicht mehr zwangsläufig in Form von Paaren auftreten. Das folgende Theorem gibt ein Kriterium an die Hand, mit der direkte Produktgruppen identifiziert werden können. Genauer ist es die Umkehrung der obigen Aussage.

Theorem 30 Sei G' eine (endliche) Gruppe, die zwei Untergruppen H'_1 und H'_2 mit den folgenden Eigenschaften besitze:

- (i) Alle Elemente von H'_1 kommutieren mit allen Elementen von H'_2 ,
- (ii) H'_1 und H'_2 haben nur das neutrale Element gemeinsam, und
- (iii) jedes Element von G' kann als Produkt von je einem Element aus H'_1 und H'_2 geschrieben werden.

Dann ist G' eine direkte Produktgruppe und isomorph zu $H_1 \otimes H_2$.

Beweis: Der Beweis findet sich z.B. in [1].

Am Ende dieses Abschnitts sei darauf verwiesen, dass wir im Hinblick auf das nachfolgende Kapitel insbesondere an dem Fall $G_1 \cong G_2 =: G$ (bzw. besser $G_1 \cong G_2 \cong G$) interessiert sind. Dabei beachte man, dass die resultierende direkte Produktgruppe $G \otimes G$ neben den beiden Untergruppen $H_1 = \{(g, e)\}$ und $H_2 = \{(e, g)\}$ eine weitere sog. *diagonale Untergruppe* besitzt, die aus den Paaren (g, g) mit $g \in G$ besteht und ebenfalls (wie H_1 und H_2) isomorph zur Gruppe G ist.

1.3.2 Direkte Produktdarstellung

Zunächst wollen wir uns klarmachen, was man unter dem *direkten Produkt* $A \otimes B$ einer $m \times m$ -Matrix A mit einer $n \times n$ -Matrix B versteht. Die Produkt-Matrix $A \otimes B$ ist eine $mn \times mn$ -Matrix, deren Elemente Doppelindizes für Zeilen und Spalten tragen. Die Elemente sind durch

$$(A \otimes B)_{ik,jl} = A_{ij}B_{kl} \quad (1.15)$$

mit $1 \leq i, j \leq m$; $1 \leq k, l \leq n$ definiert.

Durch Vergleich der einzelnen Matrixelemente zeigt man, dass für zwei $m \times m$ -Matrizen A und A' und zwei $n \times n$ -Matrizen B und B' gilt

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') . \quad (1.16)$$

Als Folgerung notieren wir, dass $A \otimes B$ unitär ist, falls A und B es sind.

Beweis: Wegen Gleichung (1.15) ist $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$, so dass zusammen mit (1.16) letztendlich $(A \otimes B)(A \otimes B)^\dagger = (AA^\dagger) \otimes (BB^\dagger) = \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_{mn}$ gilt.

Erinnern wir uns noch zusätzlich daran, dass eine endlich-dimensionale Darstellung \mathcal{R} bereits durch die Angabe ihrer Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}(g)$, $g \in G$, eindeutig bestimmt ist, so haben wir nun alle Vorbereitungen getroffen, um die *direkte Produktdarstellung zweier Darstellungen* anzugeben. Dabei wollen wir uns auf unitäre, irreduzible Darstellungen beschränken, wobei darauf hingewiesen wird, dass auf die Irreduzibilitätsforderung im nächsten Theorem auch verzichtet werden kann.

Theorem und Definition 31 Seien zwei unitäre, irreduzible Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Dimension d_μ und d_ν einer Gruppe G durch ihre Darstellungsmatrizen $D^\mu(g)$ und $D^\nu(g)$ gegeben. Dann legen die Matrizen

$$D^{\mu \otimes \nu}(g) := D^\mu(g) \otimes D^\nu(g) \quad (1.17)$$

für alle $g \in G$ in eindeutiger Weise eine unitäre Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ der Dimension $d_\mu \cdot d_\nu$ fest. Für den Charakter $\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g)$ der Darstellung gilt dabei

$$\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g) = \chi^{\mathcal{R}^\mu}(g) \chi^{\mathcal{R}^\nu}(g) . \quad (1.18)$$

Man bezeichnet die Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ als *direktes Produkt der Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Gruppe G* .

Man beachte, dass die Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ i.a. nicht irreduzibel sein wird, auch wenn \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν es sind.

1.3.3 Darstellungstheorie direkter, endlicher Produktgruppen

Nachdem im ersten Abschnitt das direkte Produkt zweier (endlicher) Gruppen erklärt wurde, wollen wir in diesem Abschnitt kurz auf ihre Darstellungen eingehen. Dabei werden wir auf die im vorigen Abschnitt eingeführten direkten Produktdarstellungen zurückgreifen. Dies zeigt sich schon im folgenden

Theorem 32 Seien die Darstellungen \mathcal{R}_1 der Gruppe G_1 und \mathcal{R}_2 der Gruppe G_2 durch ihre Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}_1}(g_1)$, $g_1 \in G_1$ und $D_{\mathcal{R}_2}(g_2)$, $g_2 \in G_2$ gegeben. Dann bilden die Matrizen $D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2))$ mit

$$D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2)) = D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2) \quad (1.19)$$

für alle $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ eine Darstellung der Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$. Die Darstellung von $G_1 \otimes G_2$ ist unitär, falls \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 unitär sind, und treu, falls \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 treu sind.

Jetzt wird der wichtige Fall untersucht, bei dem $G_1 \equiv G_2 =: G$ ist. Wie im ersten Abschnitt 1.3.1 bereits erwähnt, besitzt die Produktgruppe $G \otimes G$ eine *diagonale Untergruppe* bestehend aus den Paaren (g, g) mit $g \in G$, die isomorph zur Gruppe G ist. Falls \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν zwei beliebige irreduzible Darstellungen von G sind, liest sich Formel (1.19) wie folgt⁶:

$$D_{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}((g_1, g_2)) = D^\mu(g_1) \otimes D^\nu(g_2) . \quad (1.20)$$

Man beachte, dass die Darstellungsmatrizen zu irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^μ nach unserer Konvention mit $D^\mu(g)$ bezeichnet werden. In Analogie zu (1.19) könnte man in diesem Fall auch $D_{\mathcal{R}^\mu}(g)$ schreiben.

Für die diagonale Untergruppe ergibt sich dann entsprechend

$$D_{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}((g, g)) = D^\mu(g) \otimes D^\nu(g) . \quad (1.21)$$

Diese Darstellung ist aber identisch zu der direkten Produktdarstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ der beiden irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν aus dem vorangegangenen Abschnitt. Im allgemeinen ist die Darstellung (1.21) von G also nicht irreduzibel. Eine Plausibilitätsbegründung anhand eines Beispiels wurde bereits im vorherigen Abschnitt angeführt.

⁶Man kann zeigen, dass die Darstellung (1.19) irreduzibel ist, falls \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 es sind, insbesondere ist dann auch die Darstellung (1.20) irreduzibel. Umgekehrt ist jede irreduzible Darstellung von $G_1 \otimes G_2$ äquivalent zu einer Darstellung der Form (1.19).

Kapitel 2

Die kubische Gruppe und ihre Überlagerung

2.1 Die kubische Gruppe O

Die kubische Gruppe ist eine nicht-abelsche, endliche Gruppe mit 24 Elementen und wird mit dem Symbol O bezeichnet. Sie ist isomorph zur Permutationsgruppe S_4 , der Gruppe der Permutationen von 4-Tupeln. Die Elemente der kubischen Gruppe sind identifizierbar mit den Rotationen eines Würfels, die seine Lage invariant lassen. Die eindeutig bestimmten Rotationsachsen des Würfels bezeichnet man als seine Symmetrieachsen. Ein dreidimensionaler Würfel besitzt 13 Symmetrieachsen (siehe dazu Abb. 2.1).

Verwendet man zur Beschreibung dieser Achsen ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Mittelpunkt des Würfels liegt, so sind drei dieser Achsen durch die Koordinatenachsen festgelegt, die durch die Mittelpunkte jeweils gegenüberliegender Seitenflächen gehen, wobei Rotationen um Vielfache von $\pm\frac{\pi}{2}$ möglich sind. Weitere Rotationen um Vielfache von $\pm\frac{2\pi}{3}$ sind um die vier Raumdiagonalen möglich. Die verbleibenden sechs Achsen laufen parallel zu den Seitenflächendiagonalen durch den Ursprung, erlaubt sind hier Drehungen um Vielfache von $\pm\pi$. Um die Symmetrieachsen eindeutig zu kennzeichnen, bestimmt man vier Eckpunkte $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (die sich paarweise nicht gegenüberliegen) und sechs Kanten-

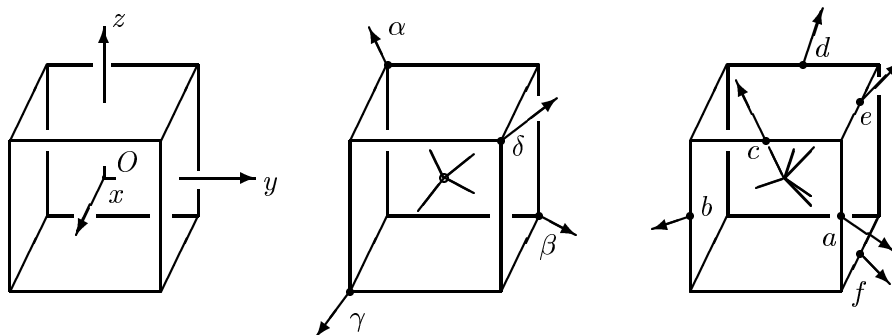


Abbildung 2.1: Symmetrieachsen eines Würfels

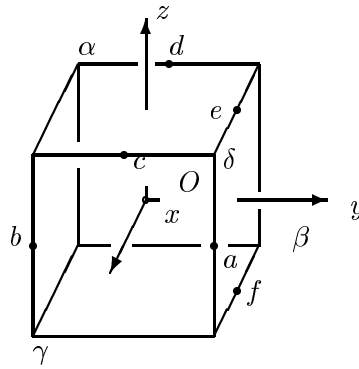


Abbildung 2.2: Die Achsen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta, Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of$ sowie x, y, z

mittelpunkte (a, b, c, d, e, f) (ebenfalls paarweise nicht gegenüberliegend) des Würfels, und lässt die Symmetrieachsen vom Ursprung durch diese Punkte laufen. Man bezeichnet die Achsen entlang der Koordinatenachsen mit Ox, Oy, Oz und die Achsen durch die ausgezeichneten Punkte mit $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta, Oa, Ob, Oc, Od, Oe$ und Of (vgl. Abb. 2.1 und 2.2).

Im Folgenden wollen wir *aktive* Drehungen betrachten, d.h. Drehungen, bei denen das Koordinatensystem starr bleibt und der Würfel mathematisch positiv (rechtshändig) gedreht wird¹. Ferner beschränken wir uns auf Drehungen um Winkel $\varphi \in]-\pi; \pi]$. Man beachte hier insbesondere, dass eine Drehung um $-\varphi$ identisch ist mit einer Drehung um $2\pi - \varphi$. Man unterscheidet nun die Symmetrieachsen des Würfels nach ihrer *Ordnung*, d.h. nach der Anzahl erlaubter Drehungen (einschließlich der Identität), die den Würfel wieder in sich selbst überführen. Die Ordnung wird mit C_j bezeichnet, wobei j die Anzahl der möglichen Drehungen indiziert. Beim Würfel hat man also:

- 3 C_4 -Achsen $C_{4i}, i \in \{x, y, z\}$ Rotationen um n -mal $\frac{\pi}{2}$ ($n = -1, 0, 1, 2$)
- 4 C_3 -Achsen $C_{3i}, i \in \{\alpha, \dots, \delta\}$ Rotationen um n -mal $\frac{2\pi}{3}$ ($n = -1, 0, 1$)
- 6 C_2 -Achsen $C_{2i}, i \in \{a, \dots, f\}$ Rotationen um n -mal π ($n = 0, 1$)

Die Rotationen können mit $C_{ji}(\varphi)$ bezeichnet werden, wobei die Rotationsmaße $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi$ passend zur Wahl von j zu wählen sind. Beachtet man, dass die jeweiligen Rotationen um $\varphi = 0$ um die Achse C_{ji} die Identität sind, hat man insgesamt 24 Symmetrioperationen. Dies sind genau die 24 Elemente der kubischen Gruppe O . Sie lässt sich demnach als

$$O = \left\{ C_{4i}(\varphi), C_{3j}(\varphi), C_{2k}(\varphi) \mid i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, 6; \varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi, \pm\frac{2\pi}{3} \right\}$$

schreiben, wobei die φ jeweils passend zu wählen sind. Gruppenverknüpfung ist dabei die Hintereinanderausführung zweier Rotationen. Diese sind in der Tat nicht kommutativ, d.h.

¹Durch die Festlegung der Achsen sind rechts- (bzw. links-) händige Drehungen wohldefiniert.

die Gruppe O ist nicht-abelsch. Unter Zuhilfenahme einer Verknüpfungstabelle kann man jetzt nachrechnen, dass die 24 Elemente von O in fünf konjugierte Klassen (vgl. Definition 5) zerfallen. Diese werden mit $E, 6C_2, 8C_3, 6C_4$ und $3C_4^2$ bezeichnet ². In ihnen befinden sich jeweils ausschließlich Drehungen um Symmetrieachsen gleicher Ordnung:

- $E = \{id\}$: Identität

- $6C_2 = \{C_{2i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{a, \dots, f\}$ und $\varphi = \pi$

Rotationen um die Achsen Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of parallel zu den sechs Seitenflächendiagonalen, insgesamt also sechs Elemente;

- $8C_3 = \{C_{3i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{\alpha, \dots, \delta\}$ und $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$

Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt also acht Elemente;

- $6C_4 = \{C_{4i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{x, y, z\}$ und $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt also sechs Elemente;

und schließlich

- $3C_4^2 = \{C_{4i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{x, y, z\}$ und $\varphi = \pi$

Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt also drei Elemente.

Um den Schreibaufwand gering zu halten, legen wir für $\varphi > 0$ fest:

$$C_{ji}(-\varphi) \equiv C_{ji}^{-1} .^3 \quad (2.1)$$

Man beachte, dass wir die Winkelargumente φ zur eindeutigen Festlegung der Rotationen von nun an nicht mehr benötigen und die bloße Indizierung jedes Elements von O dieses bereits eindeutig bestimmt – mit einer Ausnahme:

Tatsächlich ist für C_{ji} , $j = 4$; $i \in \{x, y, z\}$ sowohl eine Rotation um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als auch eine um π erlaubt, die Bezeichnung wäre demnach nicht eindeutig. Da die Elemente $C_{4i}(\pi)$, $i \in \{x, y, z\}$, eine eigene Klasse C_4^2 bilden, wollen wir sie von nun an mit C_{2i} , $i \in \{x, y, z\}$, bezeichnen. ⁴

³Diese Notation macht auch klar, dass C_{ji}^{-1} das Inverse von C_{ji} ist.

⁴Die Bezeichnung ist deshalb so gewählt, weil für die Elemente der Klasse C_4^2 die Koordinatenachsen x, y, z die Ordnung 2 haben.

Unter Verwendung der neuen Notation seien hier noch einmal alle 24 Elemente der kubischen Gruppe klassenweise zusammengefasst:

- $E = \{id\}$: Identität, neutrales Element von O
- $6C_2 = \{C_{2a}, C_{2b}, C_{2c}, C_{2d}, C_{2e}, C_{2f}\}$
- $8C_3 = \{C_{3\alpha}, C_{3\beta}, C_{3\gamma}, C_{3\delta}, C_{3\alpha}^{-1}, C_{3\beta}^{-1}, C_{3\gamma}^{-1}, C_{3\delta}^{-1}\}$
- $6C_4 = \{C_{4x}, C_{4y}, C_{4z}, C_{4x}^{-1}, C_{4y}^{-1}, C_{4z}^{-1}\}$
- $3C_4^2 = \{C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}\}$

2.2 Irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe O

Die kubische Gruppe besitzt nach der Folgerung aus Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorem (Theorem 23) genau so viele nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen wie konjugierte Klassen. Ihre Dimensionen d_μ können mit Hilfe der Formel (1.6) aus dem Vollständigkeitstheorem (Theorem 22) bestimmt werden, da sich die Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^5 d_\mu^2 = 24$$

nur für

$$(d_1, \dots, d_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$$

erfüllen lässt. Man bezeichnet die beiden eindimensionalen Darstellungen mit A_1 und A_2 , die zweidimensionale mit E und die beiden dreidimensionalen Darstellungen mit T_1 und T_2 . Die triviale Darstellung A_1 wurde bereits in 1.2.1 als Beispiel erwähnt. T_1 wird häufig auch als Vektordarstellung bezeichnet, da sie das Transformationsverhalten eines Vektors in drei Dimensionen beschreibt.

Es ist nun möglich, mit Hilfe des Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorems den kompletten Satz an Matrizen aller fünf irreduziblen Darstellungen zu bestimmen, und somit das Problem, alle Darstellungen der kubischen Gruppe zu finden, vollständig zu lösen. Durch geeignete Wahl der Basis lassen sich alle reduzierbaren Matrixdarstellungen blockweise aus den fünf irreduziblen Darstellungen aufbauen. Allerdings ist eine basisunabhängige Formulierung unter Verwendung irreduzierbarer Charaktere wesentlich kompakter – wenngleich auch ärmer an Information – aber für unsere Zwecke völlig ausreichend. Wir wollen also im folgenden Unterabschnitt alle irreduziblen Charaktere $\chi^\mu(C_i)$ mit $\mu \in \{1, \dots, 5\}$, $C_i \in \{C_2, C_3, C_4, C_4^2\}$ bestimmen und in eine Charaktertabelle (vgl. Definition 12) anordnen.

2.2.1 Charaktertabelle der kubischen Gruppe O

Die Konstruktion einer Charaktertabelle für endliche Gruppen kann in der Literatur nachgelesen werden (z.B. in [3]). Der Vollständigkeit halber wollen wir aber kurz das Verfahren erklären.

1. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen ist gleich der Anzahl der konjugierten Klassen. Die Gruppe O hat davon fünf. Ihre Charaktertabelle besteht demnach aus 5 Zeilen und 5 Spalten.
2. Die Dimension d_μ der irreduziblen Darstellungen ist gegeben durch $\sum_\mu d_\mu^2 = n_G$. Im Abschnitt 2.2 wurde für die kubische Gruppe bereits die eindeutige Lösung mit 1, 1, 2, 3 und 3 angegeben. Da das neutrale Element einer Gruppe in jeder Darstellung durch die Einheitsmatrix dargestellt wird, ist die Spur der Darstellungsmatrix für alle μ gleich d_μ , also in der ersten Spalte steht stets $\chi^\mu(\mathbb{1}) = d_\mu$.
Vereinbart man, dass die (irreduzible) Trivialdarstellung, die jedem Gruppenelement die 1 zuordnet, mit $\mu = 1$ indiziert wird, so ist die erste Zeile der Tabelle durch $\chi^1(C_i) = 1$ für alle $C_i, i \in \{1, \dots, n_C\}$, gegeben.
Für die kubische Gruppe erhalten wir demnach als erste Zeile $(1, \dots, 1)$ und als erste Spalte $(1, 1, 2, 3, 3)$.
3. Für die Zeileneinträge der Tabelle gilt nach (1.8)

$$\sum_i n_i \chi^{\mu\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) = n_G \delta_{\mu\nu} .$$

Die Zeilen sind also orthogonal zueinander und die mit n_i gewichtete Summe ist auf n_G normiert.

4. Die Spalten der Tabelle sind nach (1.9) ebenfalls orthogonal zueinander und auf n_G/n_i normiert, also gilt

$$\sum_\mu \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu\dagger}(C_j) = \frac{n_G}{n_i} \delta_{ij} . \quad (2.2)$$

Oftmals reichen die ersten drei Regeln aus, um die Charaktertabelle vollständig zu bestimmen. Regel 4 kann dann der Kontrolle dienen. Für die kubische Gruppe sind die ersten beiden Regeln bereits ausgeführt worden. Die dritte Regel führt auf ein lösbares Gleichungssystem, deren explizite Ausführung zu folgender Tabelle führt:

konj. Klassen		E	C_2	C_3	C_4	C_4^2
konj. Klassen		1	6	8	6	3
Darstellung	A_1	1	1	1	1	1
	A_2	1	-1	1	-1	1
	E	2	0	-1	0	2
	T_1	3	-1	0	1	-1
	T_2	3	1	0	-1	-1

2.2.2 Die volle kubische Gruppe O_h

Neben den Rotationen um seine Symmetrieachsen besitzt der Würfel noch eine weitere Symmetrie: die Punktspiegelung am Ursprung⁵ (Inversion I).⁶ Will man diese höhere Symmetrie – Rotation mit anschließend optional ausgeführter Inversion⁷ – durch eine Gruppe beschreiben, gelangt man zu der *vollen kubischen Gruppe* O_h . Die Anzahl der Elemente verdoppelt sich auf 48, wobei die 24 zusätzlichen (gespiegelten) Elemente der Gruppe O_h mit einem I vor dem Rotationssymbol gekennzeichnet werden, so dass beispielsweise (IC_{2x}) eine Drehung um π um die x -Achse inklusive Punktspiegelung beschreibt. Mathematisch ausgedrückt ist die Gruppe O_h das *direkte Produkt* aus der kubischen Gruppe O und der zweielementigen Gruppe $\{e, I\}$, also $O_h = O \times \{e, I\}$, wobei e das neutrale Element der zweielementigen Gruppe bezeichnet.

Irreduzible Darstellungen

Da Rotation und Inversion kommutieren und sich eine gespiegelte Konfiguration $g_h \in O_h$ des Würfels⁸ nicht durch Hintereinanderschalten geeigneter Rotationen aus O erzeugen lässt, zerfällt die volle kubische Gruppe in zehn konjugierte Klassen. Man bezeichnet sie mit $E, C_2, C_3, C_4, C_4^2, I, IC_2, IC_3, IC_4, IC_4^2$. Die Anzahl nicht-äquivalenter, irreduzibler Darstellungen ist nach der Folgerung aus Theorem 22 damit ebenfalls zehn. Diese werden mit $A_1^\pm, A_2^\pm, E^\pm, T_1^\pm$ und T_2^\pm bezeichnet⁹.

Charaktertabelle

Die Charaktertabelle von O_h lässt sich mit einigem rechnerischen Aufwand mit Hilfe der in 2.2.1 angegebenen Regeln aufstellen. Man findet (vgl.[1]):

⁵Der Ursprung liegt im Mittelpunkt des Würfels.

⁶Eine Inversion dreht die Vorzeichen aller Koordinaten um, d.h. \mathbf{r} wird zu $-\mathbf{r}$ für alle $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Man mache sich klar, dass – wie bei den Rotationen um die Symmetrieachsen – die Inversion die Lage des Würfels im Raum invariant lässt.

⁷Man beachte, dass die Reihenfolge dieser Operationen für die Endlage / Endkonfiguration des Würfels eigentlich keine Rolle spielt.

⁸Die Elemente g_h haben alle die Form $g_h = (g, e)$ oder $g_h = (g, I)$ mit $g \in O$.

⁹Das \pm steht für die *Parität* P der Darstellung (vgl. Kapitel 5). Die Parität ist $+1$, falls für die Charaktere der irreduziblen Darstellung $\chi(g \times e) = \chi(g \times I)$ gilt, die Parität ist -1 , falls $\chi(g \times e) = -\chi(g \times I)$.

konj. Klassen		E	C_2	C_3	C_4	C_4^2	I	IC_2	IC_3	IC_4	IC_4^2
konj. Klassen		1	6	8	6	3	1	6	8	6	3
Darstellung	A_1^+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	A_2^+	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
Parität = 1	E^+	2	0	-1	0	2	2	0	-1	0	2
	T_1^+	3	-1	0	1	-1	3	-1	0	1	-1
	T_2^+	3	1	0	-1	-1	3	1	0	-1	-1
Parität = -1	A_1^-	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	A_2^-	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	E^-	2	0	-1	0	2	-2	0	1	0	-2
	T_1^-	3	-1	0	1	-1	-3	1	0	-1	1
	T_2^-	3	1	0	-1	-1	-3	-1	0	1	1

2.3 Die kubische Gruppe O und die Drehgruppe SO(3)

In diesem Unterabschnitt wollen wir kurz die Beziehung zwischen der kubischen Gruppe O und der Drehgruppe SO(3) beleuchten.

2.3.1 Die Drehgruppe SO(3)

Die Drehgruppe SO(3) ist eine kontinuierliche, nicht-abelsche Gruppe, deren definierende Darstellung (Matrixdarstellung) die Menge aller reellen 3×3 -Matrizen R mit den Eigenschaften

$$R^t R = \mathbb{1} \quad (2.3)$$

$$\det R = 1. \quad (2.4)$$

Aufgrund obiger Forderungen vermittelt die Matrix R Rotationen um beliebig wählbare Achsen und Winkel im dreidimensionalen Raum, weshalb sie auch als *Drehgruppe* bezeichnet wird. Die SO(3) besitzt demnach unendlich viele Elemente und ist zudem nicht-abelsch, da die Hintereinanderausführung von Rotationen i.a. nicht kommutativ ist. Aus der Orthogonalitätsforderung (2.3) folgt, daß von den neun Matrixeinträgen nur drei frei wählbar sind, als Parameter nehme man $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Die SO(3) bildet also eine Lie-Gruppe, und die Matrizen R lassen sich in der Form

$$R = e^{-\tau^a \theta^a} \quad (2.5)$$

schreiben, wobei man für die Generatoren τ^a , $a = 1, 2, 3$ beispielsweise

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

findet. Unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe ϵ_{abc} mit der Normierung $\epsilon_{123} = 1$ ergibt sich in kompakter Form

$$(\tau_a)_{bc} = -\epsilon_{abc}. \quad (2.7)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe erhält man schließlich die Vertauschungsrelationen der Generatoren der Drehgruppe

$$[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc} \tau_c. \quad (2.8)$$

Setzt man $J^a := i\tau^a$, $a = 1, 2, 3$, so ergeben sich die hermiteschen (Drehimpuls-) Generatoren der $SO(3)$, für die

$$(J_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (2.9)$$

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \quad (2.10)$$

gilt, so daß die Matrizen

$$R = e^{iJ^a \theta^a} \quad (2.11)$$

eine unitäre Darstellung der $SO(3)$ bilden. Zusammen mit der Jacobi-Identität

$$[J_a, [J_b, J_c]] = [[J_a, J_b], J_c] + [J_b, [J_a, J_c]] \quad (2.12)$$

definiert (2.10) die Lie-Algebra der Gruppe $SO(3)$. Die Lie-Algebra der $SO(3)$ wird oftmals als $so(3)$ bezeichnet. Ihre irreduziblen Darstellungen können auf rein algebraischem Wege mit Hilfe der Eigenwerte $j(j+1)$, $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$ des Casimir-Operators J^2 klassifiziert werden, ihre Dimensionen ergeben sich dabei zu $2(j+1)$. Details findet man z.B. in [26]. Für ganzzahlige j erhält man die Tensordarstellungen der Lie-Algebra. Die halbzahligen j führen auf die Spinordarstellungen.

Im Gegensatz zu den Tensordarstellungen sind die Spinordarstellungen keine Darstellungen der Gruppe $SO(3)$ obwohl sie Darstellungen ihrer Algebra $so(3)$ sind. Man spricht hier von *Darstellungen einer Überlagerungsgruppe*.

2.3.2 Überlagerungsgruppe $SU(2)$

Die Gruppe $SU(2)$ wird aus komplexen 2×2 -Matrizen gebildet, die den Einschränkungen

$$UU^\dagger = \mathbb{1} \quad (2.13)$$

$$\det U = 1 \quad (2.14)$$

unterliegen. Von den sechs reellen Parametern lassen sich lediglich drei frei wählen, so daß ein Element der $SU(2)$ in der Form

$$U = e^{i\frac{1}{2}\sigma^a \theta^a} \quad (2.15)$$

geschrieben werden kann. Die Generatoren σ^a sind dabei die drei Pauli-Spin-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Da für die Pauli-Matrizen

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc} \sigma^c \quad (2.17)$$

gilt, erfüllen sie mit der Entsprechung $J_a = \sigma^a/2$ die gleichen Vertauschungsrelationen wie die Generatoren J^a der $SO(3)$. Beide Gruppen stimmen also in ihrer Lie-Algebra überein, und die irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebren sind somit identisch.

Zu den irreduziblen Darstellungsmatrizen der Elemente U der Lie-Gruppe $SU(2)$ gelangt man nun durch Exponentierung der Erzeugenden ihrer einparametrischen Untergruppe. Die Erzeugenden entsprechen dabei gerade den Generatoren, die die zugehörige Lie-Algebra (hier also $su(2)$) erfüllen. Für Details verweise ich auf [14, 18]. Die irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^j der Drehgruppe $SO(3)$ erhält man dann durch die zusätzliche Forderung $\mathcal{R}^j(-id) = \mathbb{1}$ mit $-id \in SU(2)$ aus ihrer universellen Überlagerungsgruppe¹⁰ $SU(2)$.

Unter Berücksichtigung von

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1} \quad (2.18)$$

ergibt eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion (2.15)

$$e^{i\frac{1}{2}\sigma^a\theta^a} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\left(\sigma^b n^b\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.19)$$

wobei $\theta^a = n^a\theta$ mit $\sum_a (n^a)^2 = 1$ zu setzen ist. Die $SU(2)$ besitzt demnach eine 4π -Periodizität, da aufgrund des Faktors $1/2$ in den trigonometrischen Funktionen für $\theta = 2\pi$ und n^a beliebig

$$U(2\pi) = -\mathbb{1} \quad (2.20)$$

und für $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi) = \mathbb{1} \quad (2.21)$$

gilt. Dagegen zeigt man mit Hilfe einer entsprechende Entwicklung von (2.11), daß die $SO(3)$ eine 2π -Periodizität aufweist. Damit ergibt sich wegen

$$U(\theta + 2\pi) \longrightarrow -U(\theta) \quad \text{und} \quad R(\theta + 2\pi) \longrightarrow R(\theta) \quad \forall\theta, \quad (2.22)$$

sowie

$$U(\theta + 4\pi) \longrightarrow U(\theta) \quad \text{und} \quad R(\theta + 4\pi) \longrightarrow R(\theta) \quad \forall\theta, \quad (2.23)$$

eine 2:1-Abbildung

$$\{U, -U\} \longleftrightarrow R, \quad (2.24)$$

bzw. in mathematischer Formulierung, ein Homomorphismus $SU(2) \rightarrow SO(3)$ mit einem Kern bestehend aus zwei Elementen. Dabei liefert der Homomorphiesatz die Beziehung $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

¹⁰Auf den Begriff der universellen Überlagerungsgruppe soll hier nicht näher eingegangen werden. Für eine genaue Definition wären gewisse Hilfsmittel aus der Topologie erforderlich, auf deren Bereitstellung wir an dieser Stelle verzichten wollen. Eine mathematische Einführung in die Theorie der Lie-Algebren und ihren Darstellungen bietet z.B. [27].

2.3.3 Die kubische Gruppe als Untergruppe von $SO(3)$

Die kubische Gruppe O beschreibt nur ausgewählte Rotationen im dreidimensionalen Raum, ist also eine Teilmenge von $SO(3)$. Da sie wiederum eine Gruppe bildet, ist sie eine (endliche) Untergruppe von $SO(3)$ (vgl. Definition 4). Die Tatsache, dass die Algebra der Drehgruppe $so(3)$ Spinordarstellungen besitzt, die Darstellungen der Überlagerungsgruppe $SU(2)$ sind, legt bereits die Vermutung nahe, dass die diskrete Untergruppe O ebenfalls eine Überlagerungsgruppe besitzt, deren Darstellungen spinorielle Transformationen beschreiben, also eine 4π -Periodizität aufweisen. Diese wird sich als diskrete Untergruppe der $SU(2)$ herausstellen und wird im folgenden Abschnitt eingeführt.

2.4 Überlagerungsgruppe 2O

2.4.1 Elemente der Überlagerungsgruppe 2O

In 2.3 haben wir gesehen, dass die kubische Gruppe eine endliche Untergruppe der 2π -periodischen, kontinuierlichen Drehgruppe $SO(3)$ ist, die man erhält, wenn man sich auf die darunterliegende Symmetriegruppe eines Würfels beschränkt. Deren doppelte Überlagerungsgruppe ist die $SU(2)$, die im Gegensatz zur $SO(3)$ eine 4π -Periodizität aufweist (vgl. Abschnitt 5). Die doppelte Überlagerung der kubischen Gruppe ist demnach eine 4π -periodische endliche Untergruppe der $SU(2)$ und wird mit 2O bezeichnet. Ihre Elemente lassen sich analog zur kubischen Gruppe den Symmetrieoperationen eines Würfels zuordnen, mit dem Unterschied, dass man einen „fermionischen Würfel“ betrachtet, bei dem 2π -Drehungen in die negative Identität führen und erst Rotationen um 4π die Würfelkonfiguration invariant lassen. Die Rotationsachsen des Würfels verdoppeln also ihre Ordnung und die Gruppe 2O besitzt damit 48 Elemente. Anhand einer Verknüpfungstabelle zeigt man, dass die Klassenkonfigurationen der kubischen Gruppe ihrer Struktur nach erhalten bleiben. Die Identität bildet weiterhin eine eigene Klasse (E). Eine weitere Klasse (J) bildet die negative Identität. Bei den Klassen $6C_2$ und $3C_4^2$ verdoppelt sich die Anzahl der Elemente, da man aufgrund der 4π -Periodizität von 2O nun zwischen Rotationen um $+\pi$ und $-\pi$ unterscheiden muss. Die Klassen $8C_3$ und $6C_4$ bleiben unter den Namen $8C_6$ bzw. $6C_8'$ erhalten, werden allerdings durch zwei jeweils gleichmächtige Klassen $8C_6^2$ und $6C_8$ ergänzt, die die nun möglich gewordenen Rotationen um $\pm\frac{4\pi}{3}$ bzw. $\pm\frac{3\pi}{2}$ als Elemente beinhalten. Insgesamt findet man also acht konjugierte Klassen:

- $E = \{id\}$
- $J = \{-id\}$
- $12C_4 = \{C_{4a}, C_{4b}, C_{4c}, C_{4d}, C_{4e}, C_{4f}, C_{4a}^{-1}, C_{4b}^{-1}, C_{4c}^{-1}, C_{4d}^{-1}, C_{4e}^{-1}, C_{4f}^{-1}\}$

$\pm\pi$ -Rotationen um die Achsen Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of , insgesamt zwölf Elemente;

- $8C_6^2 = \{C_{3\alpha}, C_{3\beta}, C_{3\gamma}, C_{3\delta}, C_{3\alpha}^{-1}, C_{3\beta}^{-1}, C_{3\gamma}^{-1}, C_{3\delta}^{-1}\}$
 $\pm \frac{4\pi}{3}$ -Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt acht Elemente;
- $8C_6 = \{C_{6\alpha}, C_{6\beta}, C_{6\gamma}, C_{6\delta}, C_{6\alpha}^{-1}, C_{6\beta}^{-1}, C_{6\gamma}^{-1}, C_{6\delta}^{-1}\}$
 $\pm \frac{2\pi}{3}$ -Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt acht Elemente;
- $6C_8 = \{C_{8/3x}, C_{8/3y}, C_{8/3z}, C_{8/3x}^{-1}, C_{8/3y}^{-1}, C_{8/3z}^{-1}\}$
 $\pm \frac{3\pi}{2}$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt sechs Elemente;
- $6C_8' = \{C_{8x}, C_{8y}, C_{8z}, C_{8x}^{-1}, C_{8y}^{-1}, C_{8z}^{-1}\}$
 $\pm \frac{\pi}{2}$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt sechs Elemente;
- $6C_8^2 = \{C_{4x}, C_{4y}, C_{4z}, C_{4x}^{-1}, C_{4y}^{-1}, C_{4z}^{-1}\}$
 $\pm\pi$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt sechs Elemente.

2.4.2 Irreduzible Darstellungen und Charaktertabelle

Als endliche Gruppe besitzt ${}^2\text{O}$ entsprechend der Anzahl ihrer konjugierten Klassen genau acht irreduzible Darstellungen. Fünf von ihnen stimmen aufgrund der Überlagerungseigenschaft von ${}^2\text{O}$ mit denen der kubischen Gruppe überein. Die drei restlichen bezeichnet man mit G_1, G_2 und H . Ihre Dimensionen lassen sich aus Formel 1.6, Kapitel 1.2.3 eindeutig zu $(d_{G_1}, d_{G_2}, d_H) = (2, 2, 4)$ bestimmen, da die Dimensionen der Darstellungen A_1, A_2, E, T_1, T_2 bereits aus Abschnitt 2.2 bekannt sind.

Wir brauchen demnach nur noch die Charaktere für die Darstellungen G_1, G_2 und H zu bestimmen.

Hierzu betrachtet man zunächst die Lie-Gruppe $SU(2)$. Ihre irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^j zerfallen in eindeutiger Weise in Tensor- und Spinordarstellungen ($j = 0, 1, 2, \dots$) und Spinordarstellungen ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$)¹¹. Da die Gruppe ${}^2\text{O}$ eine Untergruppe der $SU(2)$ ist, können deren Elemente ebenfalls durch Darstellungen \mathcal{R}^j repräsentiert werden. Fasst man nun \mathcal{R}^j als Darstellung $\mathcal{R}_{2\text{O}}^j$ von ${}^2\text{O}$ auf, so ist diese i.a. reduzibel und kann in irreduzible Darstellungen der ${}^2\text{O}$ zerlegt werden. Da die Tensor- und Spinordarstellungen der $SU(2)$ mit denen der $SO(3)$ übereinstimmen, zerfällt die Darstellung $\mathcal{R}_{2\text{O}}^j$ für $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ in irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe O (vgl. Tabelle auf S. 22) und für $j \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ in spinorielle irreduzible Darstellungen der ${}^2\text{O}$. Letztere sind in nachfolgender Tabelle angegeben [23]:

¹¹Die Unterscheidung von Tensor- und Spinordarstellungen erfolgt nach dem Verhalten bezüglich ihrer Anwendung auf das Element der negativen Identität. Falls $D_{\mathcal{R}^j}(-id) = \mathbf{1}$ gilt, gehört \mathcal{R}^j zur Tensor- und falls dagegen $D_{\mathcal{R}^j}(-id) = -\mathbf{1}$ ist, zählt sie zur Spinordarstellung.

Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von ${}^2\text{O}$
1/2	G_1
3/2	H
5/2	$G_2 \oplus H$
7/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus H$
9/2	$G_1 \oplus 2H$
11/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus 2H$

Für die Spuren der irreduziblen $SU(2)$ -Darstellungsmatrizen mit Spin j und Rotationsmaß θ gilt die Formel ¹²

$$\chi_\theta^j = \frac{\sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}. \quad (2.25)$$

(Unbestimmte Ausdrücke sind als Grenzwerte unter Verwendung der Regel von de l'Hôpital zu bestimmen.) Mit Hilfe der Tabelle lassen sich die Charaktere für G_1 (mit $j = \frac{1}{2}$) und H (mit $j = \frac{3}{2}$) direkt aus Formel 2.25 bestimmen. ¹³ Die Charaktere der Darstellung G_2 ergeben sich ebenfalls aus der Tabelle, wenn man von den Ergebnissen, die man für $j = \frac{5}{2}$ aus Formel 2.25 erhält, die entsprechenden Klassencharaktere von H subtrahiert. ¹⁴ Insgesamt findet man folgende Charaktertabelle (vgl. [23]):

konj. Klassen		E	J	C_4	C_6^2	C_6	C_8	C_8'	C_8^2	
konj. Klassen		1	1	12	8	8	6	6	6	
Darstellung	G_1	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	
	G_2	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	
	H	4	-4	0	1	-1	0	0	0	
Rotationsmaße θ der acht Klassen von ${}^2\text{O}$		θ	4π	2π	π	$4\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	$\pi/2$	π

2.4.3 Die volle Überlagerung der kubischen Gruppe ${}^2\text{O}_h$

Wie bei der (einfachen) kubischen Gruppe, kann man unter Einbeziehung der Rauminversion (Punktspiegelung am Ursprung) die Überlagerung der kubischen Gruppe ${}^2\text{O}$ zur vollen Überlagerung der kubischen Gruppe ${}^2\text{O}_h$ ergänzen. Analog zum Vorgehen im Fall der einfachen kubischen Gruppe bildet man das direkte Produkt aus der Überlagerung

¹²Nachzulesen in [23]

¹³Die Charaktere für die Darstellung G_1 erhält man auch unter Benutzung der Pauli-Matrizen, da für Drehungen von Spinoren mit dem Winkelmaß θ um einen beliebigen Einheitsvektor \mathbf{n} gilt: $U(\mathbf{n}, \theta) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ (vgl. Abschnitt 2.3).

¹⁴Zerfällt eine reduzible Darstellung \mathcal{R} in zwei irreduzible Anteile \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν , so besitzt der Darstellungsraum V von \mathcal{R} genau zwei invariante Räume V_1 und $V_1^\perp =: V_2$, und die Darstellungsmatrizen haben (evtl. nach Ähnlichkeitstransformation) Blockdiagonalgestalt. Für ihre Charaktere gilt dann offensichtlich $\chi^\mathcal{R} = \chi^\mu + \chi^\nu$.

der kubischen Gruppe 2O und der zweielementigen Gruppe $\{e, I\}$, also ${}^2O_h = {}^2O \otimes \{e, I\}$, wobei e das neutrale Element der zweielementigen Gruppe bezeichnet.

Der Vollständigkeit halber sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass 2O_h die doppelte Überlagerungsgruppe von O_h ist.

Charaktertabelle

Die Charaktertabelle der vollen Überlagerungsgruppe 2O erhält man auf analoge Weise, wie sich die Charaktertabelle von O_h aus der von O ergibt.

konj. Klassen		E	J	C_4	C_6^2	C_6	C_8	C_8'	C_8^2
konj. Klassen		1	1	12	8	8	6	6	6
Darstellung ($P = +1$)	G_1	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
	G_2	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
	H	4	-4	0	1	-1	0	0	0
Darstellung ($P = -1$)	G_1	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
	G_2	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
	H	4	-4	0	1	-1	0	0	0

konj. Klassen		IE	IJ	IC_4	IC_6^2	IC_6	IC_8	IC_8'	IC_8^2
konj. Klassen		1	1	12	8	8	6	6	6
Darstellung ($P = +1$)	G_1	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
	G_2	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
	H	4	-4	0	1	-1	0	0	0
Darstellung ($P = -1$)	G_1	-2	2	0	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
	G_2	-2	2	0	1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
	H	-4	4	0	-1	1	0	0	0

Kapitel 3

Essenzielle Supersymmetrie

In diesem Kapitel wollen wir die für die vorliegende Arbeit notwendigen Aspekte der supersymmetrischen Erweiterung der relativistischen Quantenfeldtheorie kurz darstellen. Ausgehend von den irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe der Raum-Zeit, beschrieben durch die Poincaré-Gruppe, wird zunächst das Prinzip der \mathbb{Z}_2 -Gradierung der Poincaré-Algebra angegeben, welches auf direktem Weg zu einer Verallgemeinerung des Konzepts der Lie-Algebra führt. Die irreduziblen Darstellungen dieser SUSY-Gruppe sind mit den Elementarteilchen der SUSY-Theorie identifizierbar.

3.1 Gradierung und Poincaré-Superalgebra

Wie in der Einleitung bemerkt, ist die supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells ein vielversprechender Kandidat für eine vereinheitlichende Theorie der Elementarteilchen. Zunächst wollen wir uns dem Elementarteilchenspektrum des Standardmodells über sein Transformationsverhalten unter der vollen Lorentz-Gruppe nähern.

3.1.1 Poincaré-Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen

Grundlage für jede relativistische Quantenfeldtheorie ist die Symmetriegruppe der vierdimensionalen Raum-Zeit, die Poincaré-Gruppe \mathcal{P} . Elementarteilchen sind in der Sprache des theoretischen Teilchenphysikers irreduzible Darstellungen dieser Symmetriegruppe, die sowohl Lorentz-Drehungen als auch Verschiebungen im Minkowski-Raum beinhaltet und somit die Struktur der Raum-Zeit beschreibt. Die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe wird von den sechs Generatoren der Lorentz-Gruppe $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ und den vier Generatoren der Translations-Gruppe P^μ erzeugt und wird durch die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\rho, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\rho\mu}P^\nu - g^{\rho\nu}P^\mu) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

festgelegt, wobei $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = g^{\mu\nu}$ die Metrik im Minkowski-Raum ist.

In der Quantenfeldtheorie können physikalische Zustände (Felder, Teilchen) anhand der Eigenwerte der sogenannten *Casimir-Operatoren* klassifiziert werden. Diese sind über ihre Eigenschaft definiert, mit allen Generatoren der Lie-Algebra zu kommutieren.

Als Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe erhält man

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ als Pauli-Lubanski-Vektor bezeichnet wird. Weiter ist $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe mit der Normierung $\epsilon_{1234} = 1$. Aus diesen Casimir-Operatoren geben wir nun die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe an. Man unterscheidet hierbei verschiedene Klassen:

1. Massive Darstellung: $P^2 = m^2 c^2 > 0$

Im Ruhesystem findet man für die Generatoren W_μ im Minkowski-Raum und die Generatoren S^k der inneren Drehung die Proportionalität

$$W^2 = -m^2 c^2 S^2. \quad (3.3)$$

Da W^2 ein Lorentzskalar ist, stimmen seine Eigenwerte im Ruhesystem mit denen in einem gleichförmig bewegten System überein, und man erhält

$$\begin{aligned} P^2 &= m^2 c^2, \\ W^2 &= -m^2 c^2 s(s+1) \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Offensichtlich wird die Darstellung durch die Masse m und den Spin s charakterisiert. Dies macht die Identifikation mit Eigenschaften von Elementarteilchen suggestiv. Man beachte, dass sich Teilchen innerhalb einer Darstellung in ihren kontinuierlichen Impulseigenwerten und der z -Komponente s_3 ihres Spins unterscheiden können. Massive Teilchen mit Impuls \vec{p} haben demnach $2s + 1$ Freiheitsgrade.

2. Massenlose Darstellung: $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$

Hier gilt

$$W^\mu = h P^\mu \quad \text{mit} \quad h = \pm s \quad \text{und} \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (3.5)$$

wobei $h = W_0/P_0$ ebenfalls ein Casimir-Operator ist. Die Poincaré-Invariante h wird als *Helizität* bezeichnet. Sie „ersetzt“ bei masselosen Teilchen den Spinbegriff, da diese eine verschwindende Ruhemasse besitzen und somit eine Spincharakterisierung (verstanden als innerer Drehimpuls im Ruhesystem) für sie keinen Sinn ergibt. Für die Anzahl ihrer Freiheitsgrade bei fixierten Impulseigenwerten erhält man mit $s \neq 0$ genau zwei.

3. Neben den beiden oben genannten irreduziblen Darstellungen existieren noch zwei weitere: zum einen Darstellungen $P_\mu P^\mu = 0$ mit $s \in \mathbb{R}$ und zum anderen Darstellungen der Form $P_\mu P^\mu < 0$, die Teilchen beschreiben, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen (Tachyonen). Beide Teilchenklassen sind allerdings in der Natur noch nicht gemessen worden und sind daher physikalisch irrelevant.

3.1.2 \mathbb{Z}_2 -Gradierung der Poincaré-Algebra

Auf der Suche nach Möglichkeiten, das Standardmodell in eine umfassendere Theorie zu integrieren, bieten sich in erster Linie zwei Ansatzpunkte:

Das Standardmodell ist eine Eichtheorie, die zugehörige Eichgruppe besteht dabei aus einem Produkt von drei Symmetriegruppen (s. Einleitung). Dies mag etwas konstruiert wirken. Daher liegt zum einen der Gedanke nahe, nach einer einzigen (weitreichenderen) Symmetriegruppe zu suchen (z.B. $SU(5)$), in der die Produktgruppe des Standardmodells dann aufzugehen hätte. Dabei wäre es sinnvoll, an das zu der Gruppe gehörende, erweiterte Modell die zusätzliche Forderung zu stellen, den energetischen Gültigkeitsbereich des Standardmodells zu erweitern. Eine andere Überlegung ist die folgende: Offensichtlich sind die Eigenschaften der Elementarteilchen eng mit der Poincaré-Invarianz der Theorie des Standardmodells verbunden. Daher würde eine Veränderung (z.B. Erweiterung) der Poincaré-Gruppe direkte Folgen für das Spektrum der Elementarteilchen haben. Hier stößt man aber schnell an mathematische Grenzen. So konnten S. COLEMAN und J. MANDULA im Jahre 1967 zeigen, dass sich die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} nicht mit einer weiteren Lie-Algebra \mathcal{Q} sinnvoll vereinigen läßt [19]. Dabei stellten sie fest, dass eine Erweiterung der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} um eine nicht-triviale Lie-Gruppe \mathcal{Q} entweder zu einer trivialen Streumatrix (Einheitsmatrix) führen würde, oder dass alle Kommutatoren zwischen den Generatoren von \mathcal{P} und \mathcal{Q} verschwinden würden. Erst 1971 fanden Y. GOLFAND und E. LIKHTMAN eine Möglichkeit, den engen Rahmen des Lie-Algebra-Konzepts zu sprengen [20], indem sie neben den bekannten Kommutatorrelationen nun auch Antivertauschungsrelationen zwischen den Generatoren zuließen, was auf den Begriff der \mathbb{Z}_2 -gradierten Algebra führte. Hierzu eine kurze Erläuterung.

Eine \mathbb{Z}_2 -gradierte Algebra besteht aus einer Algebra \mathcal{G} , die in eine direkte Summe zweier Unterräume $\mathcal{G}_{(0)}$ und $\mathcal{G}_{(1)}$ zerfällt, d.h.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathcal{G}_{(1)}, \quad (3.6)$$

und einer Verknüpfung \circ mit folgender Eigenschaft

$$x_i \circ y_j \in \mathcal{G}_{(i+j \bmod 2)} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{0, 1\} \quad \text{und} \quad x_i \in \mathcal{G}_{(i)}, y_j \in \mathcal{G}_{(j)}. \quad (3.7)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch \mathbb{Z}_n -gradierte Algebren aufbauen. Im Jahr 1975 zeigte sich allerdings durch eine Arbeit von R. HAAG, J.T. LOPUSZANSKI und M. SOHNUS [21], dass der \mathbb{Z}_2 -Gradierung eine exponierte Stellung zukommt, da sie die einzige Gradierung ist, die sich mit der relativistischen Quantenfeldtheorie vereinbaren lässt. Es ist somit sinnvoll und ausreichend, sich auf diese einfache Gradierung zu beschränken.

Im nächsten Schritt konstruiert man nun eine gradierte \mathbb{Z}_2 -Lie-Algebra, indem man zusätzlich zu (3.7) noch zwei weitere Eigenschaften fordert:

$$\text{Supersymmetrie} \quad : \quad x_i \circ y_j = -(-1)^{i \cdot j} y_j \circ x_i \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Identität} \quad : \quad & x_k \circ (y_l \circ z_m) (-1)^{k \cdot m} \\ & + y_l \circ (z_m \circ x_k) (-1)^{k \cdot l} + z_m \circ (x_k \circ y_l) (-1)^{l \cdot m} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Man beachte, dass wegen (3.8) nur der Unterraum $\mathcal{G}_{(0)}$ wirklich eine Lie-Algebra definiert; $\mathcal{G}_{(1)}$ ist nicht einmal eine Algebra, da sie bezüglich \circ nicht abgeschlossen ist. Wir wollen

daher ab sofort korrekter von der Lie-Superalgebra (kurz: SUSY-Algebra) sprechen. Damit verbirgt sich hinter dem physikalisch geprägten Begriff der *Supersymmetrie* im Prinzip das mathematische Konzept der Gradierung. Desweiteren beinhaltet die Supersymmetrieforderung (3.8) gerade die bereits oben erwähnte Erweiterung des Lie-Algebra-Konzepts durch Einführung von Antivertauschungsrelationen. Je nach Wahl von x_i und y_j ist das Produkt $x_i \circ y_j$ symmetrisch oder antisymmetrisch, und die Generatoren aus \mathcal{G} lassen sich nach gerade und ungerade Generatoren klassifizieren, die die – in den ersten beiden Fällen sogar definierenden – Eigenschaften besitzen

$$\begin{aligned} [\textit{gerade}, \textit{gerade}] &= \textit{gerade} \\ \{\textit{ungerade}, \textit{ungerade}\} &= \textit{gerade} \\ [\textit{gerade}, \textit{ungerade}] &= \textit{ungerade} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die neu hinzugekommenen, antikommutierenden Generatoren werden nun mit fermionischen Freiheitsgraden identifiziert und haben demnach Spinorcharakter. Die geraden Generatoren repräsentieren bosonische Freiheitsgrade. Da man an einer Erweiterung der Poincaré-Symmetrie interessiert ist, identifiziert man den $\mathcal{G}_{(0)}$ -Sektor als die von den zehn Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu}$ erzeugte Poincaré-Algebra und fügt der Theorie im fermionischen Sektor nach Belieben sog. *SUSY-Generatoren* Q_a , $a = 1, \dots, 4N$, hinzu. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $N = 1$ und interpretieren die vier SUSY-Generatoren Q_a als Majorana-Spinor (vgl. Anhang B). Man hat schließlich für die insgesamt 14 Generatoren

$$P^\mu, M^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad Q_a \quad (3.11)$$

neben den bekannten Kommutatorrelationen (3.1) der Poincaré-Algebra die zusätzlichen Vertauschungsrelationen

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \quad (3.12)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\left(\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right)_{ab}Q_b \quad (3.13)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu, \quad (3.14)$$

wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ mit den Dirac-Matrizen γ^μ und C der Ladungskonjugationsoperator sind.

Am Ende dieses Abschnitts ist noch kurz auf zwei wichtige Folgerungen einzugehen, die sich direkt aus der Erweiterung der Poincaré-Gruppe ergeben. Zum einen stellt man mit Hilfe von (3.14) fest, dass die Anzahl bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade bzw. Komponenten der Felder in supersymmetrischen Theorien stets identisch sein muß [18]. Physikalisch sinnvolle, supersymmetrische Modelle haben demnach der *Boson-Fermion-Regel* zu genügen. Zum anderen ist zu erwarten, dass die Erweiterung der Symmetriegruppe direkte Auswirkung auf das in der Theorie erfasste Elementarteilchenspektrum haben wird.

Kapitel 4

Grundzüge der Gittereichtheorie

Die Grundgedanken der Gittereichtheorie sollen hier in knapper Form erklärt werden, um die folgenden Kapitel in einen Kontext zu setzen. Es wird ein Zusammenhang zwischen Spinzuständen im Kontinuum und ihren Entsprechungen auf dem Gitter hergestellt. Dabei geht es um die Frage, wie sich die Brechung der Drehsymmetrie auf dem Gitter auf ihre irreduziblen Darstellungen auswirkt, und wie diese durch Gitteroperatoren zu realisieren sind. Es wird sich herausstellen, dass gerade die irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe zur Charakterisierung von Spinzuständen auf dem Gitter verwendet werden können. Weiterführende Lektüre findet man in [7] , [8].

Wir wollen hier nur die Grundbegriffe zusammenstellen.

4.1 Eichtheorie im Kontinuum

Das Noether-Theorem stellt eine Beziehung zwischen Symmetrien und erhaltenen Strömen und den mit ihnen verbundenen physikalischen Größen her und ermöglicht somit, ausgehend vom Prinzip der Eichinvarianz, eine Quantenfeldtheorie aufzubauen. Insbesondere das lokale Eichprinzip erlaubt es, aus lokalen Eichfeldern mit Hilfe von kovarianten Ableitungen lokal-eichinvariante Wirkungen aufzubauen.

Ausgangspunkt lokal eichinvarianter Theorien ist die Forderung nach Invarianz der Wirkung unter lokalen Eichtransformationen, auch Eichtransformationen zweiter Art genannt.

$$\phi(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x)\phi(x) \quad \text{für alle} \quad \Lambda(x) \in SU(N) \quad (4.1)$$

Diese Transformation ist, wie der Name schon sagt, lokal, d.h. für verschiedene Orte der Raumzeit i.a. nicht gleich. Um Felder an verschiedenen Orten der Raumzeit miteinander vergleichen zu können, benötigt man den Paralleltransporter $U(\mathcal{C}) \in SU(N)$ entlang eines Weges \mathcal{C} , welcher mit dem Eichfeld A_μ durch das pfadgeordnete Integral

$$U(\mathcal{C}) = \mathcal{P}e^{-\int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu} \quad (4.2)$$

verknüpft ist.

Das Eichfeld ist ein Element der Lie-Algebra $su(N)$ der Gruppe $SU(N)$ und transformiert sich also gemäß

$$A_\mu(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x) (\partial_\mu + A_\mu(x)) \Lambda(x) . \quad (4.3)$$

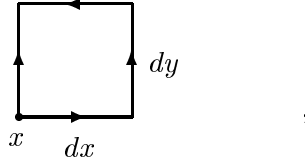
Die kovariante Ableitung erhält somit die Form

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x) . \quad (4.4)$$

Mit dieser kann der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ der Theorie definiert werden:

$$F_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] . \quad (4.5)$$

Betrachtet man nun den Paralleltransport entlang infinitesimal kleiner, geschlossener Kurven $\mathcal{C}_{dx,dy}$, die durch dx und dy aufgespannt werden, etwa durch Polygonzüge der Form



so ist dieser mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ über

$$U(\mathcal{C}_{dx,dy}) = 1 - F_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu \quad (4.6)$$

verbunden. Er transformiert sich nach

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x) F_{\mu\nu}(x) \Lambda(x) . \quad (4.7)$$

Für die Komponentenfelder von A_μ und $F_{\mu\nu}$ setzt man

$$A_\mu(x) = -ig A_\mu^a(x) T_a \quad (4.8)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -ig F_{\mu\nu}^a(x) T_a , \quad (4.9)$$

wobei T_a die spurlosen, hermiteschen Generatoren der $su(N)$ bezeichnet. Sie erfüllen die Relationen

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (4.10)$$

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (4.11)$$

mit den vollkommen antisymmetrischen, reellen Strukturkonstanten f_{abc} der $su(N)$. Die Komponenten des Feldstärketensors sind mit denen des Eichfeldes über die Beziehung

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (4.12)$$

verknüpft, wobei g die Selbstkopplung der Eichfelder bezeichnet.

Durch Einführen eines Selbstkopplungsterms in die eichinvariante Wirkung nimmt das Eichfeld selbst an der Dynamik teil. Man bezeichnet ihn als *Yang-Mills-Wirkung*:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a . \quad (4.13)$$

4.2 Gittereichtheorie

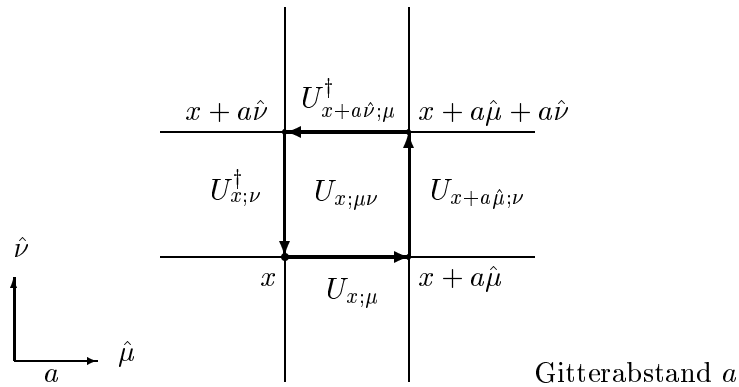
Die Theorie kann diskretisiert werden, indem man sich bei der Betrachtung auf Raum-Zeit-Punkte beschränkt, die auf einem vierdimensionalen hyperkubischen Gitter $\Lambda = a\mathbb{Z}^4 = \{x | x_\mu \in a\mathbb{Z}, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ angeordnet sind. Die Gitterkonstante a definiert den Abstand nächster Nachbarpunkte. Die Richtungen der Gitterachsen werden mit $\hat{\mu} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ gekennzeichnet. Die Materiefelder befinden sich jetzt nur noch auf den Gitterpunkten. Der Paralleltransporter als Vermittler des Eichfeldes zwischen diesen Materiefeldern wird mit den Gitterkanten (Links) identifiziert¹. Ein Link zwischen benachbarten Gitterpunkten x und $x + a\hat{\mu}$ wird mit $U_{x;\mu}$ bezeichnet. Der Paralleltransport in umgekehrter Richtung ist $U_{x;\mu}^{-1} = U_{x+a\hat{\mu};-\mu}$ und im Fall der $SU(N)$ gleich $U_{x;\mu}^\dagger$. Für kleine Gitterkonstanten a ist der Paralleltransporter nach dem Eichfeld entwickelbar:

$$U_{x;\mu} = e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu^2(x) + \dots \quad (4.14)$$

Wie im Kontinuumsfall führt das Konzept des Paralleltransports in natürlicher Weise zu einer Wirkung der Gittertheorie. Man betrachtet dazu möglichst kleine geschlossene Kurven in der Raumzeit. Da infinitesimale Wegstücke aufgrund des endlichen Gitterabstandes a gar nicht definiert sind, findet man als kleinste geschlossene Wege gerade Quadrate mit Kantenlänge a . Sie bilden die sogenannten *Plaquettenvariablen* $U_{x;\mu\nu}$ mit den Eckpunkten

$$x, \quad x + a\hat{\mu}, \quad x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu} \quad \text{und} \quad x + a\hat{\nu} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \quad \mu \neq \nu.$$

Diese lassen sich folgendermaßen graphisch veranschaulichen:



Auf K. WILSON geht nun die Idee zurück, aus solchen Plaquetten eine eichinvariante Wirkung für das Eichfeld zu konstruieren [9]. Dabei wird der Paralleltransport um eine solche Plaquette geschrieben als

$$U_p = U_{x;\mu\nu} = U_{x;\nu}^\dagger U_{x+a\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x+a\hat{\mu};\nu} U_{x;\mu}. \quad (4.15)$$

¹In der hier verwendeten (einfachsten) Variante der Gitterdiskretisierung werden Links nur zwischen nächsten Nachbarn betrachtet.

Für das $SU(N)$ -Eichfeld wird die Wilson-Wirkung dann geschrieben als

$$S_{Lat}(x) = \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \beta \left[1 - \frac{1}{2N} \text{Tr} \left\{ U_{x;\mu\nu} + U_{x;\mu\nu}^\dagger \right\} \right], \quad (4.16)$$

wobei wegen

$$U_{x;\mu\nu}^\dagger = U_{x;\mu\nu}^{-1} \quad \text{und} \quad \text{Tr} \left\{ U_{x;\mu\nu} + U_{x;\mu\nu}^\dagger \right\} = 2 \text{Re} \left\{ \text{Tr} U_{x;\mu\nu} \right\} \quad (4.17)$$

auch

$$S_{Lat}(x) = \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \beta \left[1 - \frac{1}{N} \text{Re} \left\{ \text{Tr} U_{x;\mu\nu} \right\} \right] \quad (4.18)$$

gilt.

In (4.16) beachte man, dass sich $U_{x;\mu\nu}^\dagger$ auch durch $U_{x;\nu\mu}$ ausdrücken lässt und somit die Plaquette $U_{x;\mu\nu}$ umgekehrt durchläuft.

Setzt man in (4.15) die entsprechenden Paralleltransporter gemäß (4.14) ein und entwickelt das Eichfeld $A_\mu(x)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz, ergibt sich unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für die Plaquettenvariable $U_{x;\mu\nu}$ auf dem Gitter

$$U_{x;\mu\nu} = 1 - a^2 F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \quad (4.19)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (4.20)$$

der Gittereichtheorie, der analog zu (4.12) ist. Hierbei wurden wegen des endlichen Gitterabstandes die partiellen Ableitungen des Kontinuum-Feldstärketensors aus (4.5) durch Gitterableitungen ersetzt. Die diskrete Vorwärtsableitung ist definiert durch

$$\Delta_\mu^f f(x) = \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) . \quad (4.21)$$

Entsprechend ist die diskrete Rückwärtsableitung erklärt durch

$$\Delta_\mu^b f(x) = \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})) \quad (4.22)$$

Insgesamt erhält man unter Weglassung konstanter Terme für die Gitter-Wirkung

$$S_{Lat} = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^5) . \quad (4.23)$$

Man beachte, dass die Wilson-Wirkung im naiven Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ mit dem Übergang $a^4 \sum_x \rightarrow \int d^4x$ in die Yang-Mills-Wirkung 4.13 übergeht, wenn man für die Eichkopplung $\beta = \frac{2N}{g^2}$ setzt.

4.3 Spinzustände auf dem Gitter

Im Kontinuum werden Spinzustände durch unitäre irreduzible Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ bzw. $SU(2)$ charakterisiert. Diese Gruppen bestehen aus der Menge aller Rotationen (um beliebige Achsen und Winkelmaße) im dreidimensionalen Raum. Bosonischen Zuständen entsprechen hierbei die TensorDarstellungen (mit ganzzahligem Spin), fermionischen Zuständen hingegen die Spinordarstellungen (mit halbzahligem Spin) der Überlagerungsgruppe $SU(2)$.² Durch die Gitterdiskretisierung wird die kontinuierliche Rotationssymmetrie gebrochen, da ein kubisches Gitter nicht rotationsinvariant ist und demnach Gitterzustände nicht unter beliebigen Drehungen invariant sind, also als unphysikalisch anzusehen sind. Man kann nun mit Hilfe der kubischen Gruppe O und ihrer Überlagerungsgruppe 2O die Rotationsinvarianz des Raumes wiederherstellen, indem man die Rotationsinvarianz der kontinuierlichen Theorie durch die untergeordnete kubische Symmetrie des Gitters ersetzt. Die kubische Gruppe (bzw. ihre Überlagerung) dient dabei als Symmetriegruppe der Theorie, so dass die Eigenzustände des Gitter-Hamiltonoperators nach den irreduziblen Darstellungen von O (bzw. 2O) klassifiziert werden.

Nun stellt sich umgekehrt die Frage, welche Auswirkung die Gitterregularisierung auf die Spinzustände im Kontinuumslimites hat.

Betrachten wir dazu zunächst eine irreduzible Darstellung \mathcal{R}^j der $SO(3)$ (also eine TensorDarstellung der $SU(2)$), wobei der Index j den Spin ($j = 0, 1, 2, \dots$) bezeichnen soll. Da die kubische Gruppe eine Untergruppe der $SO(3)$ ist, können ihre Elemente ebenfalls durch \mathcal{R}^j dargestellt werden. Insofern lässt sich \mathcal{R}^j als eine Darstellung \mathcal{R}_O^j von O auffassen, die im Allgemeinen aber reduzibel ist. Man kann diese dann in ihre irreduziblen Anteile zerlegen. Die Zerlegung für $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ ist in Tabelle 4.1 angegeben [15].

Lediglich die Darstellungen für Spin-0- und Spin-1-Teilchen sind irreduzibel. Im Falle eines Spin-2-Teilchens zerfällt der von den $2j + 1 = 5$ Zuständen aufgespannte Darstellungsraum in einen zwei- und einen dreidimensionalen invarianten Unterraum. Dadurch spaltet sich das im Kontinuum von fünf Zuständen gleicher Energie gebildete Multiplett auf dem Gitter in ein Dublett E und ein Triplet T_2 (mit unterschiedlichen Energiestufen) auf. Die Zustände des Dubletts transformieren sich dabei unter der irreduziblen Darstellung E der kubischen Gruppe, die des Triplets hingegen unter der irreduziblen Darstellung T_2 .³

Derselbe Sachverhalt gilt analog für die Spinordarstellungen \mathcal{R}^j für $j = 1/2, 3/2, \dots$ von $SU(2)$. Die Überlagerung der kubischen Gruppe 2O ist eine Untergruppe der $SU(2)$, weshalb ihre Elemente ebenfalls durch \mathcal{R}^j dargestellt werden können. Als Darstellung \mathcal{R}_O^j von O aufgefasst ist sie i.a. reduzibel. Die Zerlegung in irreduzible Anteile für $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{11}{2}$ ist in Tabelle 4.2 angegeben [23].

²Die TensorDarstellungen der $SU(2)$ stimmen mit denen der $SO(3)$ überein. Strenggenommen besitzt die $SO(3)$ keine Spinordarstellungen, weswegen man manchmal von Spinordarstellungen der Überlagerungsgruppe spricht. Eine genauere Beschreibung der Relation von $SO(3)$ und $SU(2)$ ist in Abschnitt 2.3.

³Für einen massiven Zustand mit Spin 2 bedeutet dies, dass man in der Gittersimulation zunächst zwei Massen $m(E)$ und $m(T_2)$ misst, deren Verhältnis $m(E)/m(T_2)$ im Kontinuumslimites ($a \rightarrow 0$) dann gemäß der Restauration der vollen Rotationssymmetrie gegen 1 konvergiert.

Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von \mathbf{O}
0	A_1
1	T_1
2	$E \oplus T_2$
3	$A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$
4	$A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$
5	$E \oplus 2T_1 \oplus T_2$
6	$A_1 \oplus A_2 \oplus E \oplus T_1 \oplus 2T_2$
7	$A_2 \oplus E \oplus 2T_1 \oplus 2T_2$
8	$A_1 \oplus 2E \oplus 2T_1 \oplus 2T_2$
9	$A_1 \oplus A_2 \oplus E \oplus 3T_1 \oplus 2T_2$
10	$A_1 \oplus A_2 \oplus 2E \oplus 2T_1 \oplus 3T_2$
11	$A_2 \oplus 2E \oplus 3T_1 \oplus 3T_2$
12	$2A_1 \oplus A_2 \oplus 2E \oplus 3T_1 \oplus 3T_2$

Tabelle 4.1: Zerlegung der $SO(3)$ in \mathbf{O}

Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von ${}^2\mathbf{O}$
1/2	G_1
3/2	H
5/2	$G_2 \oplus H$
7/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus H$
9/2	$G_1 \oplus 2H$
11/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus 2H$

Tabelle 4.2: Zerlegung der $SU(2)$ in ${}^2\mathbf{O}$

Gehen wir nun kurz auf das inverse Problem ein: Sei $|\psi\rangle$ ein physikalischer Zustand im Kontinuum, der sich aus Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ des Hamiltonoperators entwickeln lässt

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle, \quad (4.24)$$

wobei $n = (j, m; \alpha)$ die üblichen Quantenzahlen der Spin- j -Darstellung und einen zusätzlichen Index für beispielsweise angeregte Zustände mit identischem Spin bezeichnet. Jeder Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ gehört damit zu einem Multiplett mit eindeutig bestimmten Spin j . Man betrachte nun einen Gitteroperator, der sich unter der irreduziblen Darstellung \mathcal{R} mit $\mathcal{R} = A_1, A_2, E, T_1, T_2$ (bzw. $\mathcal{R} = G_1, G_2, H$) der kubischen Gruppe (bzw. ihrer Überlagerung) transformiert. Durch Anwendung auf das Vakuum erzeugt man einen physikalischen (Gitter-)Zustand, der sich im Kontinuumsimes gemäß 4.24 in die Form

$$|\psi_{\mathcal{R}}\rangle = \sum_n c_n^{\mathcal{R}} |\psi_n\rangle \quad (4.25)$$

bringen lässt. Demnach besitzt $|\psi_{\mathcal{R}}\rangle$ verschiedene Spinanteile mit der Einschränkung, dass deren Entsprechungen auf dem Gitter alle die Darstellung \mathcal{R} enthalten müssen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung ergeben sich aus den vorigen Tabellen die folgenden Auswahlregeln:

Darstellung \mathcal{R} der kubischen Gruppe	Spinanteile j im Kontinuumsimes
A_1	0, 4, 6, 8, ...
A_2	3, 6, 7, 9, ...
E	2, 4, 5, 6, ...
T_1	1, 3, 4, 5, ...
T_2	2, 3, 4, 5, ...

Darstellung \mathcal{R} der Überlagerung der kubischen Gruppe	Spinanteile j im Kontinuumsimes
G_1	1/2, 7/2, 9/2, 11/2, ...
G_2	5/2, 7/2, 11/2, ...
H	3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, ...

Für die Berechnung von SUSY-Zuständen ist der niedrigste Spinanteil von entscheidender Bedeutung, da er i.a. der niedrigsten SUSY-Zustandsmasse zugeordnet werden kann, die dann ihrerseits aus dem Abfallverhalten von geeigneten Korrelationsfunktionen – als grundlegende Observable einer Feldtheorie – extrahierbar ist.

Kapitel 5

Darstellungen der Überlagerung der kubischen Gruppe ${}^2\text{O}$ über SUSY-Operatoren

In diesem Kapitel wird die in [10] für den supersymmetrischen Fall ausgeweitete Methode der Untersuchung¹ des Transformationsverhaltens eichinvarianter Gitter-Operatoren unter der kubischen Gruppe in eine übersichtliche Form gebracht und anhand von einigen Beispielen durchgeführt. Die ersten beiden Beispiele² sind bereits in [10] untersucht worden.

Die Kenntnis des Transformationsverhaltens unter der Gittersymmetriegruppe macht es möglich, sich bei Monte-Carlo-Simulationen auf die Elemente einer Orthonormalbasis zu beschränken [13].

5.1 Vorbereitungen und Bezeichnungen

Zunächst wollen wir einige Vorüberlegungen anstellen und dabei eine sinnvolle Notation für SUSY-Operatoren einführen. Dann wollen wir das prinzipielle Vorgehen bei der Konstruktion einer Darstellung der Überlagerung der kubischen Gruppe ${}^2\text{O}$ erläutern.

5.1.1 Wilson-Loops

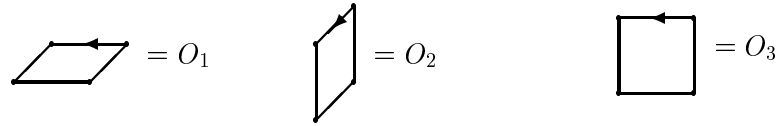
Ein Wilson-Loop der Länge L ist durch Angabe eines L -Tupels

$$(\mu_1, \dots, \mu_L) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^L \hat{\mu}_i = 0 \quad (5.1)$$

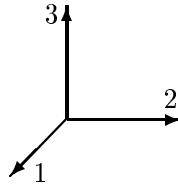
¹Diese Methode wurde von BERG und BILLOIRE in [11] und [12] für die Berechnung von Glueballmassen vorgeschlagen.

²Majorana-Majorana-Operator und Majorana-Link-Majorana-Operator

eindeutig festgelegt, wobei $\hat{\mu}_i$ die Einheitsvektoren in Richtung der Gitterachsen $\mu = 1, 2, 3$ eines räumlichen Gitters bezeichnen. Für die drei Wilson-Loops der Länge vier³



schreibt man mit der Achsenkonvention



demnach

$$O_1 = (1, 2, -1, -2), \quad O_2 = (3, 1, -3, -1) \quad \text{und} \quad O_3 = (2, 3, -2, -3) .$$

Der Umlaufsinn wird in der graphischen Schreibweise durch kleine Pfeile auf den Links kenntlich gemacht.

Wir sind bei den weiteren Überlegungen nur an Lage und Form der Wilson-Loops interessiert. Da diese bei zyklischer Permutation der L -Tupel invariant bleiben, erhält man auf natürliche Weise eine Äquivalenzrelation und fasst äquivalente Tupel zu Äquivalenzklassen $[\mu_1, \dots, \mu_L]$ zusammen. Beispielsweise ist damit $O_3 = (2, 3, -2, -3)$ äquivalent zum Tupel $(-3, 2, 3, -2)$, und man schreibt für den Operator O_3 in eindeutiger Weise $[2, 3, -2, -3]$.

Neben den Transformationen der ²O werden noch zwei weitere diskrete Transformationen benötigt: Raumspiegelung und Ladungskonjugation. Ihre Eigenwerte ± 1 werden dabei mit P - bzw. C -Parität bezeichnet. Die irreduziblen Darstellungen der Gittersymmetriegruppe erhalten daher die Bezeichnung \mathcal{R}^{PC} .

³Im vorigen Kapitel wurden diese Operatoren als Plaquettenvariablen $U_p = U_{x;\mu\nu}$ eingeführt, um die eichinvariante (Wilson-)Wirkung auf dem Gitter zu formulieren. Für den Ort x , an dem ein Wilson-Loop definiert ist, wollen wir uns im Folgenden nicht interessieren. Wir identifizieren daher Operatoren gleicher Gestalt an unterschiedlichem Ort, also $U_{x;\mu\nu} \cong U_{x+x';\mu\nu}$ bzw. allgemein $(\mu_1, \dots, \mu_L)_x \cong (\mu_1, \dots, \mu_L)_{x+x'}$ mit $x, x' \in \Lambda$.

Ladungskonjugation

Neben Lage und Form von Wilson-Loops unterscheidet man zusätzlich noch deren Orientierung, d.h. die Richtung, in der sie durchlaufen werden. Mit Hilfe des Ladungskonjugationsoperators C kann man die Orientierung eines Loops ändern.

Der *Ladungskonjugationsoperator* C kehrt per Definition die Orientierung von Wilson-Loops um. Betrachtet man Loop-Kombinationen der Form $(U_p + U_p^{-1})$, so gilt

$$\mathrm{Tr} \{U_p + U_p^{-1}\} = 2 \mathrm{Re} \{ \mathrm{Tr} U_p \} \quad (\text{vgl. (4.17)}) \quad (5.2)$$

und damit

$$\mathrm{Tr} \{C[U_p + U_p^{-1}]\} = 2 \mathrm{Re} \{ \mathrm{Tr} U_p \} . \quad (5.3)$$

Für $(U_p - U_p^{-1})$ gilt dagegen

$$\mathrm{Tr} \{U_p - U_p^{-1}\} = 2i \mathrm{Im} \{ \mathrm{Tr} U_p \} \quad (5.4)$$

und deshalb

$$\mathrm{Tr} \{C[U_p - U_p^{-1}]\} = -2i \mathrm{Im} \{ \mathrm{Tr} U_p \} , \quad (5.5)$$

also insgesamt

$$\mathrm{Tr} \{C U_p\} = (\mathrm{Tr} U_p)^* . \quad (5.6)$$

Der C -Operator wirkt also auf die Spur von Wilson-Loops komplex konjugierend.

Wir wollen nun im folgenden den Operator C als *C-Paritätsoperator* bezeichnen und definieren für beliebige Loops

$$C [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L] \equiv [-\mu_L, \dots, -\mu_2, -\mu_1] . \quad (5.7)$$

Für die Einfachplaquette O_3 gilt damit beispielsweise

$$C O_3 = C [2, 3, -2, -3] = [3, 2, -3, -2] . \quad (5.8)$$

Definiert man nun zwei Linearkombinationen von Wilson-Loops gemäß

$$[\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} \equiv [\mu_1, \dots, \mu_L] \pm [-\mu_L, \dots, -\mu_1] , \quad (5.9)$$

so haben beide eindeutig festgelegte C -Paritätseigenwerte ± 1 , denn

$$C [\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} = C \left([\mu_1, \dots, \mu_L] \pm [-\mu_L, \dots, -\mu_1] \right) = \pm [\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} ; \quad (5.10)$$

und für unser Beispiel O_3 ist dann

$$C \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{\pm} = C \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \pm \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \pm \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} + \\ - \left(\begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} \right) = - \begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} - \end{array} \right.$$

oder kürzer

$$CO_{3\pm} = \pm O_{3\pm}. \quad (5.11)$$

Der Index \pm versteht sich nunmehr von selbst.

An dieser Stelle will ich noch anmerken, dass wir von nun an nur noch Wilson-Loops mit wohldefinierter C -Parität betrachten wollen, also Linearkombinationen der Form (5.9).

Die P -Paritätstransformation wird anhand der nun folgenden SUSY-Operatoren erklärt.

5.1.2 SUSY-Gitteroperatoren

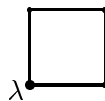
Für supersymmetrische Operatoren hat man neben bosonischen auch fermionische Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Für die SUSY-Gitteroperatoren muss man also neben Wilson-Loops auch Majorana-Fermionen bei der Zusammensetzung von geeigneten Operatoren berücksichtigen.

Die Majorana-Felder sind nur auf den Gitterpunkten definiert und werden hier mit

$$\lambda = \lambda(x)$$

bezeichnet. Die Majorana-Spinoren verhalten sich gegenüber C -Paritätsoperationen invariant (dies wird im Anhang B gezeigt).

Wir wollen einen Majorana-Spinor in einem Loop durch ein λ an der entsprechenden Stelle in dem ihn beschreibenden Tupel kennzeichnen. Beispielsweise notieren wir eine Plaquette mit einem Majorana-Spinor auf einer Ecke



als $O = (\lambda, 2, 3, -2, -3)$.

Raumspiegelung

Im Loop-Sektor bewirkt die P -Paritätsoperation eine Raumspiegelung. Die Link-Einträge des Tupels, das den Loop kennzeichnet, ändern also ihr Vorzeichen, die Majorana-Fermionen

werden P -gespiegelt ⁴.

$$P[\mu_1, \dots, \lambda, \dots, \mu_L] \equiv [-\mu_1, \dots, \lambda^P, -\mu_L] \quad (5.12)$$

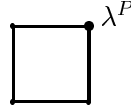
Beispielsweise wird aus

$$O = (\lambda, 2, 3, -2, -3)$$

durch Anwendung des P -Paritätsoperators ⁵

$$PO = (\lambda^P, -2, -3, 2, 3)$$

der durch



veranschaulicht werden kann. Definiert man nun zwei Linearkombinationen von SUSY-Operatoren gemäß

$$[\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} \equiv [\mu_1, \dots, \mu_L] \pm P[\mu_1, \dots, \mu_L], \quad (5.13)$$

so haben sie eindeutig festgelegte P -Paritätseigenwerte ± 1 .

Wir schreiben kurz:

$$PO_{\pm} = \pm O_{\pm} \quad (5.14)$$

Im Folgenden wollen wir nur noch P -invariante SUSY-Operatoren betrachten, also Linearkombinationen der Form 5.13.

Es sei noch angemerkt, dass die C -Paritätsoperation die Majorana-Fermionen aufgrund der Majorana-Bedingung invariant lässt ($C\lambda = \lambda$). Dies wird im Anhang B erläutert. Daher werden wir unsere Betrachtungen auf P - und C -invariante Linearkombinationen von SUSY-Operatoren beschränken.

Nach diesen Vorüberlegungen möchte ich nun das Vorgehen bei der Konstruktion einer Darstellung der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h über SUSY-Operatoren beschreiben.

5.2 Konstruktion der Darstellung

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um eine Darstellung der Überlagerung der kubischen Gruppe 2O über SUSY-Operatoren zu konstruieren. Hierbei können wir zwischen Wilson-Sektor und Majorana-Sektor trennen, da sie unabhängig voneinander transformieren. Wir erhalten eine Darstellung \mathcal{R}_{LS} im Wilson-(Loop)-Sektor und eine im Majorana-Sektor (\mathcal{R}_{MS}), die dann mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 1.3.2 über die direkte Produktdarstellung zu einer Darstellung von 2O über SUSY-Operatoren zusammengefügt wird.

⁴Tatsächlich wird der Operator i.A. auch seinen Ort ändern. Dies ist für uns aber irrelevant, da wir SUSY-Operatoren gleicher Gestalt an unterschiedlichen Orten nach Fußnote auf S. 44 identifizieren. Dass diese Vorgehensweise gerechtfertigt ist, wird im Abschnitt 5.2.3 deutlich.

⁵Das Verhalten des Majorana-Spinors unter P -Paritätstransformation $P\lambda = \lambda^P$ wird im Abschnitt 5.2.1 besprochen.

5.2.1 Spinoren

Majorana-Spinoren sind spezielle Dirac-Spinoren (vgl. Anhang B), also nutzen wir die Kenntnisse aus der Dirac-Theorie und erinnern an die folgenden Zusammenhänge: Betrachtet man endliche Lorentz-Drehungen eines Dirac-Spinors mit dem Winkelmaß θ um einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, so erhält man für die Rotationsmatrix des Spinors [24]

$$S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}\right) \quad (5.15)$$

$$= \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \quad (5.16)$$

$$= \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i \boldsymbol{\Sigma}^k \cdot n^k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right), \quad (5.17)$$

wobei Σ^k mit den Pauli-Matrizen über die Relation

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad (5.18)$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3$ und $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ definiert ist. Dabei ergibt sich (5.16) durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und anschließender Einzelbetrachtung der geraden und ungeraden Potenzen in σ^i unter Ausnutzung der Beziehungen $\mathbf{n}^2 = 1$ und $(\sigma^i)^2 = \mathbb{1}$ bzw. $\{\sigma^i, \sigma_j\} = 0$ für $i \neq j$.

Um das Transformationsverhalten des Spinors unter der Gruppe ${}^2\text{O}$ zu untersuchen, haben wir uns auf die in Unterabschnitt 2.4.1 beschriebenen Drehungen zu beschränken. Die zugehörigen Rotationsmatrizen $S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)$ lassen sich dann als Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ einer Darstellung \mathcal{R} der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ auffassen. Da wir an den irreduziblen Anteilen der Darstellung \mathcal{R} interessiert sind, benötigen wir dabei lediglich die Spuren (d.h. Charaktere) der Matrizen $S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)$ und nicht ihre explizite Form. Aufgrund der Spurfreiheit der Pauli-Matrizen ergibt sich für den zweiten Summanden der rechten Seite von (5.17)

$$\text{Tr} \left\{ i \boldsymbol{\Sigma}^k \cdot n^k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} = 0, \quad (5.19)$$

so dass insgesamt

$$\text{Tr}\{S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)\} = \text{Tr} \left\{ \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \quad (5.20)$$

$$= \chi^{\mathcal{R}}(S_{\text{Rot.}}(\theta)) \quad (5.21)$$

gilt. Im Einzelnen erhält man unter Benutzung der in Unterabschnitt 2.4.2 angegebenen Winkelmaße für die konjugierten Klassen von ${}^2\text{O}$:

Klassen von ${}^2\text{O}$	Rotationswinkel θ	Spur der Rotations- matrix $S_{\text{Rot.}}(\theta)$
E	4π	4
J	2π	-4
C_4	π	0
C_6^2	$4\pi/3$	-2
C_6	$2\pi/3$	2
C_8	$3\pi/2$	$-2\sqrt{2}$
C_8'	$\pi/2$	$2\sqrt{2}$
C_8^2	π	0

Die Zerlegung der Darstellung \mathcal{R} in ihre irreduziblen Anteile erfolgt unter Verwendung der Formel (1.10) aus Kapitel 1, die in passender Formulierung die folgende Gestalt hat:

$$a_\mu = \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\mu(C_i) \chi^{\mathcal{R}}(C_i) . \quad (5.22)$$

Dabei hat man über alle konjugierten Klassen C_i der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ zu summieren, wobei die Charaktere $\chi^\mu(C_i)$ der irreduziblen Darstellungen von ${}^2\text{O}$ ihrer Charaktertabelle aus Unterabschnitt 2.4.2 zu entnehmen sind. Man erhält die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned} a_{G_1} &= 2 \\ a_{G_2} &= 0 \\ a_H &= 0 . \end{aligned}$$

Der Darstellungsraum von \mathcal{R} zerfällt in zwei invariante, zweidimensionale Unterräume, die sich beide nach der Darstellung G_1 transformieren. Gemäß der Bezeichnungsweise (1.3) aus Kapitel 1 schreibt sich \mathcal{R} somit als

$$\mathcal{R} = 2 G_1 = G_1 \oplus G_1 . \quad (5.23)$$

Die Darstellung \mathcal{R} der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ ist demnach reduzibel.

Bemerkung: Ein Dirac-Spinor ist aus einem links- und einem rechtshändigen, zweikomponentigen Weyl-Spinor zusammengesetzt, die sich jeweils unter der Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe \mathcal{L}_+^\uparrow transformieren. Da sich mit Hilfe der $SL(2, \mathbb{C})$ – Gleiches gilt damit auch für die $SU(2)$, da $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ gilt – keine Raumspiegelungen beschreiben lassen, kann sie keine links- und rechtshändigen Systeme ineinander überführen. In der relativistischen Feldtheorie ist man an Zuständen mit eindeutig definierten P -Paritätseigenzuständen interessiert, so dass man diesen Umstand durch Bildung von vierkomponentigen Dirac-Spinoren umgeht. Diese transformieren sich aber dann unter $SL(2, \mathbb{C})$ nach einer reduziblen Darstellung. Erst nach Übergang zur orthochronen Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}^\uparrow \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \cup P\mathcal{L}_+^\uparrow$, genauer zu deren Überlagerung, die die

Raumspiegelungen I einschließt, ist die Darstellung irreduzibel. Einzelheiten findet man in [14]. Dieser Sachverhalt überträgt sich auf die entsprechenden untergeordneten Gittersymmetriegruppen, so dass sich ein Dirac-Spinor, wie in (5.23) angegeben, unter der 2O als Gittersymmetriegruppe der $SU(2)$ nach einer reduziblen Darstellung transformiert. Unter der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h , die analog zur vollen kubischen Gruppe O_h Raumspiegelungen berücksichtigt und durch ${}^2O_h = {}^2O \otimes \{e, I\}$ definiert ist, stellt (5.23) aber eine irreduzible Darstellung dar.

C-Parität

Unsere bisherigen Überlegungen haben wir für Dirac-Spinoren durchgeführt und die spezielle Eigenschaft von Majorana-Spinoren vernachlässigt. Unter Einbeziehung der diskreten Symmetrietransformation der C -Paritätsoperation schreibt sich die Darstellung (5.23) exakter in der Form

$$\mathcal{R}^{P+} = 2 G_1^{P+} = G_1^{P+} \oplus G_1^{P+}, \quad (5.24)$$

wobei P die P -Parität kennzeichnet. Da aufgrund der Majorana-Bedingung $\lambda^C = \lambda$ (vgl. Anhang B) ein Majorana-Spinor bei Ladungskonjugation in sich selbst übergeht, gilt für die Darstellung \mathcal{R} mit vorgewählter negativer C -Parität analog zum Fall $C = +1$

$$\mathcal{R}^{P-} = 2 G_1^{P-} = G_1^{P-} \oplus G_1^{P-}. \quad (5.25)$$

P-Parität

Im Minkowskiraum ist die P -Paritätsoperation bei Anwendung auf einen Bispinor durch

$$P\psi = \gamma_0\psi \equiv \psi^P \quad (5.26)$$

definiert [18]. Für den konjugierten Spinor ergibt sich damit

$$\bar{\psi}^P \equiv P(\bar{\psi}) = P(\psi^\dagger \gamma_0) = (\gamma_0 \psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \underbrace{\gamma_0^\dagger}_{\gamma_0} \gamma_0 = \bar{\psi} \gamma_0. \quad (5.27)$$

Im Falle von euklidischen Majorana-Spinoren hat man die Definition (5.26) zu modifizieren⁶, indem man

$$P\lambda = i \gamma_0 \lambda \quad (5.28)$$

setzt [10]. Damit gilt unter Verwendung der veränderten Definition des konjugierten Spinors (vgl. Gleichung (5.37)) im Unterschied zu Gleichung (5.27)

$$P(\bar{\lambda}) = P(\lambda^t C) = (i \gamma_0 \lambda)^t C \gamma_0 = i \lambda^t \underbrace{\gamma_0^t C}_{-C \gamma_0} \gamma_0 = -i \lambda^t C \gamma_0 \gamma_0 = -i \bar{\lambda} \gamma_0. \quad (5.29)$$

⁶Da der Paritätsoperator P Raumspiegelungen beschreibt, hat er die Gleichungen $P^{-1} \gamma_j P = -\gamma_j$ und $P^{-1} \gamma_0 P = \gamma_0$ zu erfüllen, und man findet $P = e^{i\varphi} \gamma_0$ mit einem Phasenfaktor $e^{i\varphi}$. Im Euklidischen gilt mit $\gamma_0^{min.k.} = \gamma_4^{e.ukl.}$ dann $\overline{P\lambda} = (e^{i\varphi} \gamma_4 \lambda)^t C = e^{i\varphi} \bar{\lambda} C^{-1} \gamma_4^t C = -e^{i\varphi} \bar{\lambda} \gamma_4$. Für den Lorentzskalar $\bar{\lambda} \lambda$ fordert man $\overline{P\lambda} P \lambda = -e^{i\varphi} \bar{\lambda} \gamma_4 \gamma_4 \lambda = -e^{2i\varphi} \bar{\lambda} \lambda \stackrel{!}{=} \bar{\lambda} \lambda$ und wählt für den Phasenfaktor $e^{i\varphi} = i$. Im Minkowskischen ist die Wahl des Phasenfaktors beliebig, da er durch die komplexe Konjugation in (5.37) herausfällt. Man setzt daher $e^{i\varphi} = 1$.

Für Majorana-Spinoren in der Weyl-Darstellung findet man:

$$P\lambda = i\gamma_0 \begin{pmatrix} \lambda_L \\ \lambda_R \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_L \\ \lambda_R \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \lambda_R \\ \lambda_L \end{pmatrix} = \lambda^P \quad (5.30)$$

Eine Raumspiegelung vertauscht also im Wesentlichen gerade die beiden zweikomponentigen Weyl-Spinoren des Majorana-Spinors. Da wir nur an den Rotationen der Lorentzgruppe interessiert sind und deren Darstellungsmatrizen gemäß (5.17) Blockdiagonalgestalt haben, kommutieren die Lorentzrotationen mit der P -Paritätsoperation (vgl. dazu auch [14]), d.h.

$$S_{\text{Rot}}\lambda^P = S_{\text{Rot}}(P\lambda) = P(S_{\text{Rot}}\lambda) = P(\lambda_{\text{Rot}}) = (\lambda_{\text{Rot}})^P \quad (5.31)$$

mit $S_{\text{Rot}}\lambda \equiv \lambda_{\text{Rot}}$. Daher sind die Operatoren $\lambda \pm \lambda^P$ wegen

$$\begin{aligned} P\{S_{\text{Rot}}(\lambda \pm \lambda^P)\} &= P\{\lambda_{\text{Rot}} \pm (\lambda_{\text{Rot}})^P\} \\ &= \lambda_{\text{Rot}}^P \pm (\lambda_{\text{Rot}}) \\ &= \pm(\lambda_{\text{Rot}} \pm (\lambda_{\text{Rot}})^P) \\ &= \pm\{S_{\text{Rot}}(\lambda \pm \lambda^P)\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

in der Tat P -invariant unter Lorentzrotationen. Man erhält für die irreduzible Darstellung \mathcal{R} der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ über einen einzelnen Majorana-Spinor

$$\mathcal{R}^\pm = G_1^\pm \oplus G_1^\pm. \quad (5.33)$$

Bemerkung: Das Transformationsverhalten der P -invarianten Majorana-Spinoren unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ legt bereits auf eindeutige Weise das Verhalten unter der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ fest: Für Operatoren mit positiver P -Parität ändert sich durch die optional ausgeführte Raumspiegelung per Definition nichts. Im Falle negativer P -Parität unterscheiden sich aufgrund von (5.32) die Rotationsmatrizen – oder besser Darstellungsmatrizen – S_{Rot} der Klassen E, \dots, C_8^2 von ihren raumgespiegelten Partnerklassen IE, \dots, IC_8^2 durch ein Minuszeichen, so dass sich für ihre Charaktere $\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) = -\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(IC_i)$ ergibt. Eine analoge Beziehung gilt aber auch für die Charaktere $\chi^\mu(C_i)$ der irreduziblen Darstellungen der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ (für $P = -1$), so dass Formel (1.10) aus Kapitel 1 bei Summation über alle konjugierten Klassen von ${}^2\text{O}_h$ das gleiche Resultat liefert, wie Formel (5.22) aus 5.2.1.

5.2.2 Majorana-Majorana-Operator

Nun wollen wir einen ersten zusammengesetzten Operator betrachten. Er besteht aus zwei auf einem Gitterpunkt fixierten Majorana-Feldern. Er besitzt, wie sich herausstellen wird, ein sehr einfaches Transformationsverhalten. Wir schreiben ihn in der Form

$$\bar{\lambda}\lambda = \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \quad \text{mit} \quad x \in \Lambda. \quad (5.34)$$

Aus der Theorie der Dirac-Gleichung im Kontinuum wissen wir, dass sich der aus zwei Dirac-Spinoren gebildete Operator $\bar{\psi}\psi$ im Minkowski-Raum unter Lorentz-Transformationen aufgrund der Relationen

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1} \quad (5.35)$$

wegen

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (5.36)$$

wie ein Lorentz-Skalar transformiert.

Beim Übergang zu euklidischen Majorana-Spinoren hat man zu beachten, dass die Definition des konjugierten Spinors $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ durch den Ausdruck

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (5.37)$$

ersetzt wird. Trotzdem gilt weiterhin

$$\bar{\lambda}'(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1} \quad (5.38)$$

(vergleiche hierzu Anhang B).

Der Majorana-Majorana-Operator transformiert sich daher wie ein Lorentz-Skalar

$$\bar{\lambda}'\lambda' = \bar{\lambda}S^{-1}S\lambda = \bar{\lambda}\lambda. \quad (5.39)$$

Da die Elemente der Überlagerungsgruppe 2O als Lorentz-Drehungen um gewisse Achsen und Winkelmaße spezielle Lorentztransformationen (in euklidischer Formulierung) sind, überträgt sich das Transformationsverhalten des betrachteten Operators unter der Lorentzgruppe auf ihre diskrete Untergruppe 2O .

Ein Lorentzskalar ist invariant unter Raumspiegelungen, besitzt also den P -Paritätseigenwert $P = +1$, und verhält sich unter der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h genauso wie unter 2O .

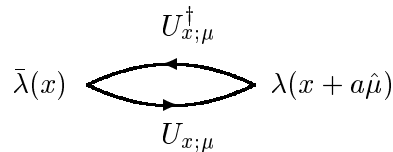
Analoge Überlegungen führen für den Operator $\bar{\lambda}\gamma_5\lambda$ zu einem pseudoskalaren Verhalten, d.h. er wechselt unter Raumspiegelungen sein Vorzeichen.

5.2.3 Majorana-Link-Majorana-Operator

Der nun betrachtete Operator besteht aus zwei auf benachbarten Gitterpunkten befindlichen Majorana-Feldern $\lambda(x)$ und $\bar{\lambda}(x - a\hat{\mu})$, die über die beiden Gitter-Links $U_{x;\mu}$ und $U_{x;\mu}^{-1} = U_{x;\mu}^\dagger = U_{x+a\hat{\mu};-\mu}$ miteinander verbunden sind. In analytischer Form schreibt man

$$\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\}. \quad (5.40)$$

Graphisch lässt er sich durch



veranschaulichen, wobei die Gitter-Links zur Visualisierung gekrümmt gezeichnet sind. Im dreidimensionalen Gitter sind drei Orientierungen des Operators möglich, die mit

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \lambda \\ \nearrow \\ \bar{\lambda} \end{array} = O_1 & \begin{array}{c} \lambda \\ \downarrow \\ \bar{\lambda} \end{array} = O_2 & \begin{array}{c} \bar{\lambda} \longleftarrow \lambda \end{array} = O_3 \end{array}$$

bezeichnet werden.

Zunächst wollen wir sein Verhalten unter P - bzw. C -Paritätstransformationen betrachten, um dann paritätsinvariante Operatoren zu konstruieren.

Verhalten unter P -Parität

Spiegelt man den Majorana-Link-Majorana-Operator beispielsweise am Gitterpunkt x , so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} P_x \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \} &= -i \bar{\lambda}(x) \gamma_0 U_{x;-\mu}^\dagger i \gamma_0 \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \\ &= \bar{\lambda}(x) \gamma_0^2 U_{x;-\mu}^\dagger \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \\ &= \bar{\lambda}(x) U_{x;-\mu}^\dagger \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

also bildlich

$$\begin{array}{ccc} \bar{\lambda}(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{U_{x;\mu}^\dagger} \\ \xleftarrow{U_{x;\mu}} \end{array} \lambda(x + a\hat{\mu}) & \xrightarrow{P_x} & \lambda(x - a\hat{\mu}) \begin{array}{c} \xrightarrow{U_{x;-\mu}^\dagger} \\ \xleftarrow{U_{x;-\mu}} \end{array} \bar{\lambda}(x). \end{array}$$

Führt man jetzt eine Translation in $+\hat{\mu}$ -Richtung um einen Gitterplatz durch, so geht die über Gleichung (5.41) gebildete Spur in den Ausdruck

$$\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \lambda(x) U_{x;\mu}^\dagger \} \quad (5.42)$$

über, an deren Stelle wir auch den Term

$$\text{Tr} \{ U_{x;\mu} \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) \} \quad \text{bzw.} \quad \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \} \quad (5.43)$$

verwenden können (für die Zwischenrechnung s.u.).

Damit haben wir gezeigt, dass unter Vernachlässigung von Translationen der Majorana-Link-Majorana-Operator unter der P -Paritätsoperation in sich selbst überführt wird.

Daher können wir uns bei der Untersuchung des Transformationsverhaltens der Operatoren auf Transformationen unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ beschränken, anstatt die volle Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ heranzuziehen. Der Grund hierfür liegt darin, dass die

Operatoren wegen ihrer P -Parität-Invarianzeigenschaft die hinzukommenden Raumspiegelungen der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ ignorieren, d.h. darunter invariant sind.

Hier sei noch die **Zwischenrechnung** zu (5.43):

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \lambda(x) U_{x;\mu}^\dagger \right\} &= \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}^a(x + a\hat{\mu}) T^a U_{x;\mu} \lambda(x)^b T^b U_{x;\mu}^\dagger \right\} \\
&= \bar{\lambda}^a(x + a\hat{\mu}) \lambda(x)^b \text{Tr} \left\{ T^a U_{x;\mu} T^b U_{x;\mu}^\dagger \right\} \\
&= \bar{\lambda}(x)^b \lambda^a(x + a\hat{\mu}) \text{Tr} \left\{ T^b U_{x;\mu}^\dagger T^a U_{x;\mu} \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x)^b T^b U_{x;\mu}^\dagger \lambda^a(x + a\hat{\mu}) T^a U_{x;\mu} \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \right\} \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Zerlegung $\lambda = \lambda^a T^a$, $T^a \in su(2)$ und die Rechenregel $\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi$ für Majorana-Spinoren benutzt (vgl. Anhang B).

Verhalten unter C -Parität

Die Majorana-Spinoren verhalten sich gegenüber C -Paritätsoperationen per Definition invariant

$$\lambda \xrightarrow{C} \lambda^C = \lambda \quad \text{bzw.} \quad \bar{\lambda} \xrightarrow{C} \bar{\lambda}^C = \bar{\lambda} . \tag{5.45}$$

Die Gitter-Links ändern jeweils ihre Orientierung

$$U_{x;\mu} \xrightarrow{C} U_{x;\mu}^\dagger \quad \text{bzw.} \quad U_{x;\mu}^\dagger \xrightarrow{C} U_{x;\mu} , \tag{5.46}$$

so dass der Majorana-Link-Majorana-Operator insgesamt den C -Paritätseigenwert $+1$ besitzt.

Transformationsverhalten und Darstellung

Wir kommen nun zur Untersuchung des Transformationsverhaltens des Majorana-Link-Majorana-Operators unter der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$.⁷ Hierbei ist zu beachten, dass die Links einerseits und die Majorana-Spinoren andererseits unabhängig voneinander transformieren.

Im **Majorana-Sektor** können wir dabei auf die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.2 zurückgreifen. Es gilt:

$$\lambda(x + a\hat{\mu}) \longrightarrow \lambda'((x + a\hat{\mu})') = S\lambda(x + a\hat{\mu}) \tag{5.47}$$

$$\bar{\lambda}(x) \longrightarrow \bar{\lambda}'(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1} \tag{5.48}$$

⁷Das Transformationsverhalten ist aufgrund der positiven P -Parität des Majorana-Link-Majorana-Operators identisch unter O und ${}^2\text{O}$.

und wegen der Ortsunabhängigkeit der Lorentztransformationsmatrix S damit analog zu (5.39)

$$\bar{\lambda}(x)\lambda(x + a\hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\lambda}'(x')\lambda'((x + a\hat{\mu})') = \bar{\lambda}(x)S^{-1}S\lambda(x + a\hat{\mu}) = \bar{\lambda}(x)\lambda(x + a\hat{\mu}) . \quad (5.49)$$

Die Majoranas transformieren sich demnach wie Lorentzskalare, wobei sie sich im Gegensatz zum Majorana-Majorana-Operator nicht auf dem gleichen Gitterplatz befinden.

Der **Link-Sektor** der drei Operatoren O_1, O_2, O_3 kann mit den drei in unterschiedlichen Koordinatenrichtungen liegenden Würfelkanten eines dreidimensionalen Würfels identifiziert werden. Dieser Darstellungsraum transformiert sich unter der (einfachen) kubischen Gruppe O nach der Vektordarstellung T_1 (vergleiche hierzu [10]). Aufgrund der Überlagerungseigenschaft bestimmt das Transformationsverhalten unter O bereits eindeutig das Verhalten unter der Überlagerung 2O .

Wegen der Lorentz-Skalar-Eigenschaft im Majorana-Sektor transformieren sich die drei Operatoren O_1, O_2, O_3 unter der Überlagerungsgruppe 2O nach deren irreduzibler Vektordarstellung T_1 . Berücksichtigt man zusätzlich noch Raumspiegelungen, d.h. geht man zu der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h über, so erhält man wegen des positiven P -Paritätseigenwerts der Operatoren als irreduzible Darstellung

$$\mathcal{R}^{PC} = T_1^{++} .$$

Als eine Orthonormalbasis lassen sich nun die drei Operatoren O_1, O_2, O_3 wählen. Als Tabelle erhält man

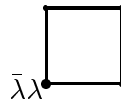
Operatoren der Majorana-Link-Majorana-Operatoren

Loop-Op.		O_1	O_2	O_3
\mathcal{R}^{PC}	T_1^{++}	1	1	1

Dieser Darstellung (T_1) entspricht nach den Ausführungen in Kapitel 2 ein Spin-1-Zustand.

5.3 Majorana-Majorana-Plaquetten-Operator

Nun wollen wir einen Operator der Form



untersuchen, dessen algebraischer Ausdruck

$$\text{Tr}\{\hat{\lambda}\lambda U_{x;\mu\nu}\} = \text{Tr}\{\bar{\lambda}\lambda U_{x;\nu}^\dagger U_{x+a\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x+a\hat{\mu};\nu} U_{x;\mu}\} \quad (5.50)$$

lautet. Er besteht also aus einer Plaquette und zwei an einer beliebigen Ecke befindlichen Majorana-Spinoren.

Den Majorana-Spinoren stehen in allen drei Koordinatenebenen jeweils vier Eckpunkte zur Verfügung und die Plaquette kann mathematisch positiv oder negativ durchlaufen werden. Also gibt es insgesamt $3 \times 4 \times 2 = 24$ Operatoren dieses Typs.

Bildet man nun P -Parität-invariante Operatoren $O_{ij}^P = (O_{ij}^\pm)$ mit $i, j = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2$, so erhält man

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\lambda}\lambda \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} \pm \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{11}^\pm & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} \bar{\lambda}\lambda \pm \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{12}^\pm \\
 \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} \bar{\lambda}\lambda \pm \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{21}^\pm & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} \bar{\lambda}\lambda \pm \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{22}^\pm \\
 \bar{\lambda}\lambda \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \end{array} \pm \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{31}^\pm & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \end{array} \bar{\lambda}\lambda \pm \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \end{array} (\bar{\lambda}\lambda)^P = O_{32}^\pm,
 \end{array}$$

wobei λ^P durch $\lambda^P \equiv P\lambda = \gamma_0\lambda$ definiert ist.

Aus ihnen lassen sich nun durch Kombinationen der Form

$$O_{ij\pm}^P \equiv O_{ij}^P \pm CO_{ij}^P \quad (5.51)$$

Operatoren O_{ijC}^P mit eindeutig bestimmter C - (und P -) Parität konstruieren. Der C -Paritätsoperator ändert dabei den Umlaufsinn der Plaquette und lässt die Bispinoren λ aufgrund ihrer Majorana-Eigenschaft ($\lambda = \lambda^C$) invariant, also z.B.

$$C \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \end{array} \bar{\lambda}\lambda = \bar{\lambda}^C\lambda^C \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} = \bar{\lambda}\lambda \begin{array}{c} \rightarrow \\ \square \end{array} .$$

Für fixiertes P und C ist der Darstellungsraum der Majorana-Plaquetten-Operatoren somit wegen der vier reellen Freiheitsgrade des Majorana-Teilchens $6 \times 4 = 24$ -dimensional.

5.3.1 Transformationsverhalten und Darstellung

Das Transformationsverhalten des Majorana-Majorana-Plaquetten-Operators unter der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h muss, wie schon bei dem Majorana-Link-Majorana-Operator, im Majorana- und im Plaquetten-Sektor unabhängig voneinander untersucht werden. Da im hier betrachteten Fall – aufgrund des doppelt vorkommenden Majorana-Feldes – im Majorana-Sektor ein trivialer Lorentz-Skalar auftritt, wird das Gesamttransformationsverhalten nur durch den Plaquetten-Sektor bestimmt.

Konstruktion einer Darstellung im Plaquetten-Sektor

Der Plaquetten-Sektor kann als Einfach-Plaquette mit einem ausgezeichneten Eckpunkt aufgefasst werden. Da im Plaquetten-Sektor nur bosonische Felder auftreten, genügt die Untersuchung des Transformationsverhaltens unter der vollen kubischen Gruppe O_h , da ihre irreduziblen Darstellungen bereits alle Vektordarstellungen der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h abdecken und als Darstellung der Überlagerungsgruppe aufgefasst werden können.

Außerdem hat die Konstruktion von P - und C -invarianten Operatoren den Vorteil, dass Rauminversionen Operatoren mit $P = +1$ invariant lassen und im Falle von $P = -1$ nur ein Minuszeichen vor den Operator hinzugefügt werden muss. Es genügt demnach, das Transformationsverhalten unter der einfachen kubischen Gruppe zu kennen. Selbstverständlich hat man dabei dann zwischen positiver und negativer C -Parität zu unterscheiden. Insgesamt hat man also vier Fälle $P = \pm 1$ und $C = \pm 1$.

Die Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}(g)$ unterscheiden sich für jeden der vier Sektoren ($P = C = +1$; $P = +1, C = -1$; etc.) in den Vorzeichen der Einträge und sind bzgl. der zugehörigen geordneten Basis $\{O_{11\pm}^{\pm}, O_{12\pm}^{\pm}, \dots, O_{32\pm}^{\pm}\}$ anzugeben. Da wir nur an ihren Klassencharakteren interessiert sind, genügt es, einen Repräsentanten pro Klasse auszuwählen. Man findet:

Klasse: E Klasse: C_2

$$M(id) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(C_{2a}) = \begin{pmatrix} PC & & & \\ & C & & \\ & & & P \\ & & & & P \\ & & P & & \\ & & & P & \end{pmatrix}$$

Klasse: C_3 Klasse: C_4

$$M(C_{3\alpha}) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & PC \\ \hline & C & C \\ \hline C & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \end{array} \right) \quad M(C_{4x}) = \left(\begin{array}{c|c|c} & C & \\ \hline & PC & \\ \hline 1 & & \\ \hline P & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & P \end{array} \right)$$

Klasse: C_4^2

$$M(C_{2x}) = \left(\begin{array}{c|c|c} & C & \\ \hline C & & \\ \hline & & PC \\ \hline & PC & \\ \hline & & P \\ \hline & & P \end{array} \right) .$$

Die Darstellungsmatrizen der zusätzlichen Klassen IE, \dots, IC_4^2 der vollen kubischen Gruppe O_h sind im Fall $P = +1$ mit obigen identisch, für $P = -1$ ist in allen Einträgen ein Minuszeichen zu setzen. Die Charaktere der Klassen liest man für die vier Fälle $P = \pm 1$ und $C = \pm 1$ aus folgender Tabelle ab:

Klasse	E	C_2	C_3	C_4	C_4^2	IE	IC_2	IC_3	IC_4	IC_4^2
$P = +1, C = +1$	6	2	0	0	2	6	2	0	0	2
$P = +1, C = -1$	6	-2	0	0	2	6	-2	0	0	2
$P = -1, C = +1$	6	0	0	0	-2	-6	0	0	0	2
$P = -1, C = -1$	6	0	0	0	-2	-6	0	0	0	2

Irreduzible Zerlegung der Darstellung

Die Zerlegung der Darstellung \mathcal{R} erfolgt mit Hilfe der Formel (1.10), die hier noch einmal angegeben wird:

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \chi^{\mathcal{R}}(C_i) . \quad (5.52)$$

Man beachte, dass sich die Summe (bei fixierter C -Parität) nun zunächst einmal über alle zehn konjugierten Klassen von O_h erstreckt und sich damit auch die Anzahl irreduzibler Darstellungen von fünf auf zehn erhöht. Wie aber bereits oben erwähnt, vereinfacht sich die Situation aufgrund der Verwendung von P -invarianten Operatoren wieder, da sich das Transformationsverhalten unter der vollen kubischen Gruppe aus dem unter der Gruppe O ableiten lässt. Konkret hat man also doch nur über die fünf Klassen der kubischen Gruppe zu summieren und indiziert die gewählte P -Parität durch ein $+$ bzw. $-$ an der irreduziblen Darstellung μ . Dabei darf nicht vergessen werden, dass man \mathcal{R} zusätzlich auch noch für

beide C -Paritäten getrennt zu zerlegen hat. Die irreduziblen Anteile werden also mit μ^{PC} kenntlich gemacht.

Die Mächtigkeit der Klassen sowie ihre irreduziblen Charaktere entnimmt man der Charaktertabelle aus Abschnitt 2.4.2.

Man unterscheidet die vier Fälle $P = C = +1$, $P = +1, C = -1$, $P = -1, C = +1$ und $P = C = -1$.

- $P = C = +1$

$$a_{A_1} = 1 \quad , \quad a_{A_2} = 0 \quad , \quad a_E = 1 \quad , \quad a_{T_1} = 0 \quad , \quad a_{T_2} = 1 \quad .$$

- $P = +1, C = -1$

$$a_{A_1} = 0 \quad , \quad a_{A_2} = 1 \quad , \quad a_E = 1 \quad , \quad a_{T_1} = 1 \quad , \quad a_{T_2} = 0 \quad .$$

- $P = -1, C = +1$

$$a_{A_1} = 0 \quad , \quad a_{A_2} = 0 \quad , \quad a_E = 0 \quad , \quad a_{T_1} = 1 \quad , \quad a_{T_2} = 1 \quad .$$

- $P = C = -1$

$$a_{A_1} = 0 \quad , \quad a_{A_2} = 0 \quad , \quad a_E = 0 \quad , \quad a_{T_1} = 1 \quad , \quad a_{T_2} = 1 \quad .$$

Man erhält für diese vier Fälle

$$\mathcal{R} = A_1^{++} \oplus E^{++} \oplus T_2^{++} \tag{5.53}$$

$$\mathcal{R} = A_2^{+-} \oplus E^{+-} \oplus T_1^{+-} \tag{5.54}$$

$$\mathcal{R} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+} \tag{5.55}$$

$$\mathcal{R} = T_1^{--} \oplus T_2^{--} \tag{5.56}$$

Bemerkung: Wer den obigen Ausführungen kein rechtes Vertrauen schenkt und in (1.10) doch lieber über alle zehn Klassen $E, C_2, C_3, \dots, IC_4, IC_4^2$ der vollen kubischen Gruppe summieren möchte, hat in allen Summen der obigen Rechnung den fünf Summanden weitere fünf hinzuzufügen und die Gruppenordnung auf 48 zu verdoppeln. Im Falle positiver P -Parität ist sowohl $\chi^\mu(C_i) = \chi^\mu(IC_i)$ (vgl. Charaktertabelle von O_h in 2.2.2) als auch $\chi^{\mathcal{R}}(C_i) = \chi^{\mathcal{R}}(IC_i)$. Die fünf weiteren Terme sind also mit den ersten fünf identisch, da die Summe jetzt mit $2 \times 24 = 48$ normiert wird, ändert sich am Ergebnis nichts. Für den Fall $P = -1$ gilt $\chi^\mu(C_i) = -\chi^\mu(IC_i)$ (vgl. noch einmal mit der Charaktertabelle von O_h) und $\chi^{\mathcal{R}}(C_i) = -\chi^{\mathcal{R}}(IC_i)$. In den fünf letzten Summanden treten also zwei Minuszeichen auf, die sich gerade wegheben. Das Endresultat bleibt also unverändert.

Man erhält abschließend:

erster Fall: $P = +1$

irred. Darst. von O_h	A_1^{++}	A_2^{++}	E^{++}	T_1^{++}	T_2^{++}	A_1^{+-}	A_2^{+-}	E^{+-}	T_1^{+-}	T_2^{+-}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von \mathcal{R} :	$P = +1$		$C = +1$			$P = +1$		$C = -1$		
6	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0

zweiter Fall: $P = -1$

irred. Darst. von O_h	A_1^{-+}	A_2^{-+}	E^{-+}	T_1^{-+}	T_2^{-+}	A_1^{--}	A_2^{--}	E^{--}	T_1^{--}	T_2^{--}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von \mathcal{R} :	$P = -1$		$C = +1$			$P = -1$		$C = -1$		
6	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

5.3.2 Konstruktion einer Orthonormalbasis

Als letzten Schritt wollen wir nun eine Orthonormalbasis aus SUSY-Operatoren bestimmen. Die Konstruktion ist in der Terminologie der Darstellungsmatrizen formuliert. Sie beruht auf einer direkten Folgerung des Lemmas von Schur (siehe Kapitel 1).

Folgerung 33 Sei C eine diagonalisierbare Matrix, die mit allen Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ von \mathcal{R} kommutiert, d.h. $CD_{\mathcal{R}}(g) = D_{\mathcal{R}}(g)C$ für alle $g \in O$, und A die Matrix, die C diagonalisiert, also $ACA^{-1} \equiv \Delta_C$. Dann reduziert A die Darstellung \mathcal{R} (nicht notwendigerweise vollständig) in dem Sinne, dass die Darstellungsmatrizen $AD_{\mathcal{R}}(g)A^{-1}$ in Blockdiagonalgestalt zerfallen, und man im nächsten Schritt mit der „reduzierten“ Darstellung

$$AD_{\mathcal{R}}A^{-1} = \{AD_{\mathcal{R}}(g)A^{-1} \mid g \in G\} \quad (5.57)$$

fortfahren kann. Auf diese Weise kann für jeden irreduziblen Teilraum des Darstellungsraumes von \mathcal{R} iterativ eine ONB explizit angegeben werden.

Die Matrix C ergibt sich, indem man alle Matrizen einer konjugierten Klasse addiert⁸.

⁸Die Begründung liegt in der Eigenschaft der Konjugationsklasse verborgen. Sei $\{k_1, \dots, k_m\}$ die geordnete Menge aller zueinander konjugierten Elemente einer Gruppe G , d.h. $k_j = gk_i g^{-1} (*)$ für ein $g \in G$ und beliebige k_i, k_j aus der Menge, und bilden diese die Konjugationsklasse ζ . Betrachtet man nun die Menge der Elemente $\{gk_1 g^{-1}, gk_2 g^{-1}, \dots, gk_m g^{-1}\}$ mit $g \in G$, so bildet diese nach $(*)$ und modulo Permutationen ebenfalls die Klasse ζ .

Soll nun $C = D_{\mathcal{R}}(k_1) + \dots + D_{\mathcal{R}}(k_m)$ mit $D_{\mathcal{R}}(g_i)$ vertauschen, dann schreibe C als Summe von $D_{\mathcal{R}}(g_i)D_{\mathcal{R}}(k_1)D_{\mathcal{R}}(g_i^{-1}), \dots, D_{\mathcal{R}}(g_i)D_{\mathcal{R}}(k_m)D_{\mathcal{R}}(g_i^{-1})$ und beachte $D_{\mathcal{R}}(g_i^{-1}) = D_{\mathcal{R}}^{-1}(g_i)$. \square

Beweis: Ein Beweis der obigen Aussage findet sich in [16] bzw. [17].

Es genügt also, die Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ einer (geeigneten) Klasse C_i aufzusummieren und zu diagonalisieren. Wir wählen in diesem Fall z.B. die Klasse C_2 .

Wir unterscheiden die vier Fälle $P = \pm 1$, $C = \pm$.

erster Fall: $P = C = +1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: 6, 0, 0, 2, 2, 2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.59)$$

Der Darstellungsraum der Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ zerfällt in drei invariante Unterräume der Dimensionen 1, 2 und 3. Da für die Darstellung \mathcal{R}

$$\mathcal{R} = A_1^{++} \oplus E^{++} \oplus T_2^{++} \quad (5.60)$$

gilt und die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen mit denen der invarianten Unterräume übereinstimmen, ist die Zerlegung damit abgeschlossen. \mathcal{E}_1 bildet also eine Basis aus Loop-Operatoren für A_1^{++} , E^{++} bzw. T_2^{++} .

zweiter Fall: $P = +1, C = -1$

Dieser Fall läuft völlig analog zum ersten.

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: -6, 0, 0, -2, -2, -2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.62)$$

Der Darstellungsraum der Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ zerfällt in drei invariante Unterräume der Dimensionen 1, 2 und 3. Für die Darstellung \mathcal{R} gilt

$$\mathcal{R} = A_2^{+-} \oplus E^{+-} \oplus T_1^{+-}. \quad (5.63)$$

Die Zerlegung ist somit abgeschlossen. \mathcal{E}_2 bildet also eine Basis aus Loop-Operatoren für A_2^{+-} , E^{+-} bzw. T_1^{+-} .

dritter Fall: $P = -1, C = +1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: -2, -2, -2, 2, 2, 2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.65)$$

Der Darstellungsraum der $D_{\mathcal{R}}$ zerfällt in zwei invariante Unterräume der Dimension 3. Für die Darstellung \mathcal{R} gilt

$$\mathcal{R} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+}. \quad (5.66)$$

Da sowohl T_1^{-+} als auch T_2^{-+} dreidimensionale, irreduzible Darstellungen sind, ist die Zerlegung somit ebenfalls abgeschlossen. Fraglich dagegen ist aber noch, wie die beiden invarianten Unterräume den Darstellungen zuzuordnen sind. Hierfür hat man nun die in (5.57) erklärte reduzierte Darstellung $A\mathcal{R}A^{-1}$ zu betrachten. Zunächst fügt man die in der geordneten Menge \mathcal{E}_3 befindlichen Basisvektoren zu einer Matrix E_3 zusammen (Spaltenvektor=Matrixspalte) und identifiziert E_3 mit A^{-1} . Betrachtet man nun für die Darstellungsmatrizen der Klasse C_2 ihre „reduzierten“ Partner $AD_{\mathcal{R}}(g)A^{-1}$, so haben diese nach Konstruktion von (5.57) Blockdiagonalgestalt, bestehen also aus zwei 3×3 -Matrizen. Für $g = C_{2a} \in C_2$ ergibt sich beispielsweise

$$AD_{\mathcal{R}}(C_{2a})A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Hierbei haben oberer und unterer Block die Spur -1 bzw. $+1$.

Da wir nun einerseits wissen, dass sich die zu den beiden Blockmatrizen gehörenden Unterräume unter T_1^{-+} bzw. T_2^{-+} transformieren und andererseits an Hand der Charaktertabelle $\chi^{T_1^-}(C_2) = -1$ bzw. $\chi^{T_2^-}(C_2) = +1$ finden, bilden die ersten drei Vektoren aus \mathcal{E}_3 in der Tat eine Basis der Darstellung T_1^{-+} aus Loop-Operatoren und die restlichen drei entsprechend eine Basis für T_2^{-+} .

vierter Fall: $P = C = -1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: $-2, -2, -2, 2, 2, 2$
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.69)$$

Der Darstellungsraum der $D_{\mathcal{R}}$ zerfällt in zwei invariante Unterräume der Dimension 3. Für die Darstellung \mathcal{R} gilt

$$\mathcal{R} = T_1^{--} \oplus T_2^{--}. \quad (5.70)$$

Die Zerlegung ist damit abgeschlossen. Mit Hilfe der reduzierten Darstellungsmatrizen $AD_{\mathcal{R}}(g)A^{-1}$ der Klasse C_2 findet man z.B. für das Element $C_{2a} \in C_2$:

$$AD_{\mathcal{R}}(C_{2a})A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 1 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Oberer und unterer Block haben dabei die Spur -1 bzw. $+1$.

Die Charaktertabelle aus Unterabschnitt 2.2.2 ergibt $\chi^{T_1^-}(C_2) = -1$ bzw. $\chi^{T_2^-}(C_2) = +1$. Also bilden die ersten drei Vektoren aus \mathcal{E}_4 eine Basis aus Loop-Operatoren für die Darstellung T_1^{--} und die restlichen drei entsprechend eine Basis für T_2^{--} .

Zusammenfassung

Die Ergebnisse können in einer Tabelle zusammengefasst werden, in der zeilenweise die Vektoren bezüglich der Basisoperatoren angegeben sind.

ONB aus SUSY-Operatoren für die irreduziblen Anteile von \mathcal{R}

Loop-Op.	$O_{11\pm}^\pm$	$O_{12\pm}^\pm$	$O_{21\pm}^\pm$	$O_{22\pm}^\pm$	$O_{31\pm}^\pm$	$O_{32\pm}^\pm$
\mathcal{R}^{PC} A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
	1	-1	1	-1	-1	1
A_2^{+-}	-1	-1			1	1
E^{++}	-1	-1	1	1		
E^{+-}	-1	1			-1	1
T_1^{+-}	1	-1	-1	1		
			1	1	1	1
T_1^{-+}	1	1				
		1	1			1
T_1^{--}	1		1	1	1	
	-1	-1	-1	1		
T_2^{++}	1		-1			1
	-1	1	1	1	-1	1
T_2^{-+}			-1	1		
	-1	1				1
T_2^{--}	1	1	-1	1	1	
		-1	1			1
	-1		-1		1	
	1	-1	1	1		

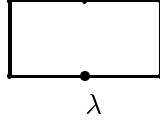
Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die für den Loop-Sektor gefundene Darstellung aufgrund des doppelt vorkommenden Majorana-Faktors, der sich als trivialer Lorentz-Skalar transformiert, gleichzeitig eine Darstellung des gesamten SUSY-Operators ist.

5.4 Ein weiteres Beispiel

Anhand eines weiteren Beispiels wollen wir nun sehen, wie sich ein zusammengesetzter Operator mit einem einzeln auftretenden Majorana-Fermion verhält. Wir wählen den Operator

$$O = [2, \lambda, 2, 3, -2, -2, -3],$$

der veranschaulicht so aussieht:



Darstellung im Loop-Sektor

Die Darstellung im Loop-Sektor wird nach dem gleichen Verfahren konstruiert, wie schon am Beispiel des Majorana-Majorana-Plaquette-Operators im vorigen Abschnitt gezeigt. Dies übernimmt ein Computerprogramm, das im Kapitel 6 noch vorgestellt wird. Hier sollen nur die Ergebnisse in tabellarischer Form angegeben werden.

Eine Basis aus P - und C -invarianten Operatoren bilden:

$$O_1 = [1, \lambda, 1, 2, -1, -1, -2,] \quad (5.72)$$

$$O_2 = [1, \lambda, 1, 3, -1, -1, -3] \quad (5.73)$$

$$O_3 = [-3, \lambda, -3, 2, 3, 3, -2] \quad (5.74)$$

$$O_4 = [2, \lambda, 2, -1, -2, -2, 1] \quad (5.75)$$

$$O_5 = [2, \lambda, 2, -3, -2, -2, 3] \quad (5.76)$$

$$O_6 = [3, \lambda, 3, -1, -3, -3, 1] \quad (5.77)$$

Die irreduziblen Inhalte der Darstellungen sind für $P = +1$:

irred. Darst. von O_h	A_1^{++}	A_2^{++}	E^{++}	T_1^{++}	T_2^{++}	A_1^{+-}	A_2^{+-}	E^{+-}	T_1^{+-}	T_2^{+-}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von \mathcal{R} :	$P = +1$		$C = +1$			$P = +1$		$C = -1$		
6	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1

und für den Fall $P = -1$:

irred. Darst. von O_h	A_1^{-+}	A_2^{-+}	E^{-+}	T_1^{-+}	T_2^{-+}	A_1^{--}	A_2^{--}	E^{--}	T_1^{--}	T_2^{--}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von \mathcal{R} :	$P = -1$		$C = +1$			$P = -1$		$C = -1$		
6	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

oder in algebraischer Notation:

$$\mathcal{R}_{LS}^{++} = A_1^{++} \oplus A_2^{++} \oplus 2E^{++} \quad (5.78)$$

$$\mathcal{R}_{LS}^{+-} = T_1^{+-} \oplus T_2^{+-} \quad (5.79)$$

$$\mathcal{R}_{LS}^{-+} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+} \quad (5.80)$$

$$\mathcal{R}_{LS}^{--} = T_1^{--} \oplus T_2^{--} \quad (5.81)$$

Darstellung im Majorana-Sektor

Die Darstellung von 2O_h über einem einzelnen Majorana-Fermion haben wir bereits in Abschnitt 5.2.1 hergeleitet. Sie lautet:

$$\mathcal{R}_{MS} = 2G_1 = G_1 \oplus G_1.$$

Darstellung über SUSY-Operatoren

Die Darstellung \mathcal{R} der Überlagerungsgruppe 2O_h über der hier betrachteten Klasse von SUSY-Operatoren erhalten wir mit Hilfe des in Kapitel 1 bereitgestellten Konzepts der Darstellungstheorie direkter endlicher Produktgruppen. Dabei bildet man bei fest vorgewählter P - und C -Parität aus den irreduziblen Anteilen \mathcal{R}_{LS}^μ der Darstellungen \mathcal{R}_{LS} und aus der irreduziblen Darstellung \mathcal{R}_{MS} von 2O_h gemäß (1.21) Produktdarstellungen

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{LS}^\mu \otimes \mathcal{R}_{MS} \quad (5.82)$$

der diagonalen Untergruppe 2O_h von ${}^2O_h \times {}^2O_h$. Die Darstellung \mathcal{R} wird i.a. reduzibel sein.

Für die hier gesuchten Darstellungen $\mathcal{R}(\equiv \mathcal{R}_k^{PC})$ mit $k \in \{1, 2, 3\}$ erhält man also

$$\mathcal{R}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\}, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{R}_2^{++} = A_2^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\}, \quad (5.84)$$

$$\mathcal{R}_3^{++} = E^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\}, \quad (5.85)$$

$$\mathcal{R}_1^{+-} = T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\}, \quad (5.86)$$

$$\mathcal{R}_2^{+-} = T_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\}, \quad (5.87)$$

$$\mathcal{R}_1^{-+} = T_1^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\}, \quad (5.88)$$

$$\mathcal{R}_2^{-+} = T_2^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\}, \quad (5.89)$$

$$\mathcal{R}_1^{--} = T_1^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\}, \quad (5.90)$$

$$\mathcal{R}_2^{--} = T_2^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\}, \quad (5.91)$$

Die im Fall $P = C = +1$ doppelt auftretende Darstellung E^{++} im Loop-Sektor ist hier zu einem Fall \mathcal{R}_3^{++} zusammengefasst. Es ist zu beachten, dass der gesamte Darstellungsraum im Loop-Sektor natürlich zwei invariante Unterräume der Dimension zwei besitzt, die sich nach der irreduziblen Darstellung E^{++} der vollen kubischen Gruppe O_h transformieren. Sie können aber für die folgende irreduzible Zerlegung separiert werden.

Irreduzible Zerlegung der Darstellung

Für die Zerlegung der Darstellung \mathcal{R}_k^{PC} in ihre irreduziblen Anteile verwendet man ein weiteres Mal Formel 1.10 aus Kapitel 1, wobei zusätzlich die beiden Relationen

$$\chi^{\mathcal{R}' \otimes \mathcal{R}''}(g) = \chi^{\mathcal{R}'}(g) \chi^{\mathcal{R}''}(g) \quad (\text{vgl. Theorem 31}) \quad (5.92)$$

und

$$\chi^{\mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''}(g) = \chi^{\mathcal{R}'}(g) + \chi^{\mathcal{R}''}(g) \quad (\text{vgl. Fußnote 2.4.2, Seite 28}) \quad (5.93)$$

verwendet werden. Unter Vernachlässigung der Paritätsindizes P, C und des Nummerierungsindex k gilt

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \chi^{\mathcal{R}}(C_i) \\ &\stackrel{(5.92)}{=} \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \left[\chi^{\mathcal{R}_{\text{LS}}^\mu}(C_i) \chi^{\mathcal{R}_{\text{MS}}}(C_i) \right] \\ &\stackrel{(5.93)}{=} \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \left[\chi^{\mathcal{R}_{\text{LS}}^\mu}(C_i) \cdot (\chi^{G_1}(C_i) + \chi^{G_1}(C_i)) \right]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Die Summe erstreckt sich über alle acht Klassen C_i der 48-elementigen Gruppe 2O (und nicht 2O_h , vgl. Bemerkung unter Gleichung (5.33)). Die Klassenstärken n_i ihrer Klassen E, J, C_4, \dots, C_8^2 und die zugehörigen Charaktere $\chi^\nu(C_i)$ ihrer irreduziblen Darstellungen entnimmt man den Charaktertabellen aus Unterabschnitt 2.2.1 bzw. 2.4.2. Für letztere hat man aufgrund der Ausführungen in Abschnitt 2.4 die folgenden Entsprechungen zu beachten⁹:

⁹Beim Übergang von der kubischen Gruppe O zu deren Überlagerungsgruppe 2O bleibt die Klassenstruktur der kubischen Gruppe im Prinzip erhalten. Einige Klassen verdoppeln lediglich die Anzahl ihrer Elemente, zwei Klassen spalten durch Hinzunahme der neuen Elemente in jeweils zwei Klassen auf. Hinsichtlich der gemeinsamen irreduziblen Darstellungen A_1, \dots, T_2 der Gruppen O und 2O kann die Charaktertabelle der kubischen Gruppe übernommen werden, wobei sich in geeigneter Weise die Klassen von O mit denen von 2O identifizieren lassen (vgl. Tabelle).

konj. Klassen in ${}^2\text{O}$	konj. Klassen in O
E	} E
J	
$12C_4$	$6C_2$
$8C_6^2$	} $8C_3$
$8C_6$	
$6C_8$	
$6C_8'$	} $6C_4$
$6C_8^2$	
$3C_4^2$	$3C_4^2$

Beispielsweise gilt somit $\chi^\nu(8C_6^2) = \chi^\nu(8C_6) = \chi^\nu(8C_3)$ mit $\nu = A_1, \dots, T_2$.

Die Charaktere $\chi^{\mathcal{R}_{LS}^\mu}(C_i)$ sind je nach Wahl von \mathcal{R}_{LS}^μ mit geeignetem $\mu \in \{A_1, \dots, T_2\}$ ebenfalls aus der Charaktertabelle von O zu bestimmen. $\chi^{G_1}(C_i)$ findet sich in 2.4.2.

Man erhält für den ersten Fall $\mathcal{R}_{LS}^\mu = A_1^{++}, \nu = A_1^{++}, A_2^{++}, E^{++}, T_1^{++}, T_2^{++}, G_1^{++}, G_2^{++}, H^{++}$

$$a_{A_1} = 0 \quad (5.95)$$

$$a_{A_2} = 0 \quad (5.96)$$

$$a_E = 0 \quad (5.97)$$

$$a_{T_1} = 0 \quad (5.98)$$

$$a_{T_2} = 0 \quad (5.99)$$

$$a_{G_1} = 2 \quad (5.100)$$

$$a_{G_2} = 0 \quad (5.101)$$

$$a_H = 0 \quad (5.102)$$

und somit insgesamt für die irreduzible Darstellung

$$\mathcal{R}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = G_1^{++} \oplus G_1^{++} = 2G_1^{++}. \quad (5.103)$$

Der Darstellungsraum der Darstellung \mathcal{R}_1^{++} zerfällt also in zwei invariante Unterräume der Dimension 2, die sich beide nach der spinoriellen irreduziblen Darstellung G_1^{++} der Gruppe ${}^2\text{O}_h$ transformieren.

Für die weiteren Fälle erhält man:

$$\mathcal{R}_2^{++} = A_2^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2G_2^{++}, \quad (5.104)$$

$$\mathcal{R}_3^{++} = E^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2H^{++}, \quad (5.105)$$

$$\mathcal{R}_1^{+-} = T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_1^{+-} \oplus 2H^{+-}, \quad (5.106)$$

$$\mathcal{R}_2^{+-} = T_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_2^{+-} \oplus 2H^{+-}, \quad (5.107)$$

$$\mathcal{R}_1^{-+} = T_1^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\} = 2G_1^{-+} \oplus 2H^{-+}, \quad (5.108)$$

$$\mathcal{R}_2^{-+} = T_2^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\} = 2G_1^{-+} \oplus 2H^{-+}, \quad (5.109)$$

$$\mathcal{R}_1^{--} = T_1^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\} = 2G_1^{--} \oplus 2H^{--}, \quad (5.110)$$

$$\mathcal{R}_2^{--} = T_2^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\} = 2G_1^{--} \oplus 2H^{--} \quad (5.111)$$

Die Zerlegung der reduziblen Darstellung \mathcal{R}_k^{PC} hängt nur von der Vorgabe von R_{LS}^μ ab und nicht von der Wahl der P - bzw. C -Parität. Die jeweils als Basis für die \mathcal{R}_k^{PC} dienenden SUSY-Operatoren unterscheiden sich aber sehr wohl nach ihren P - bzw. C -Eigenwerten.

Konstruktion einer Orthonormalbasis

Die Orthonormalbasis aus SUSY-Operatoren wird analog zu dem im Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Verfahren konstruiert, denn hierfür braucht man nur den Loop-Sektor zu betrachten. Man interessiert sich hierbei insbesondere für die Darstellung, die im Kontinuumslimites auf den niedrigsten Spinzustand führt, da dessen Korrelationsfunktion in Gitter-Monte-Carlo-Simulationen zur Bestimmung der Massen des SUSY-Teilchenspektrums die Terme höherer dominiert.

Durch klassenweises Aufsummieren der Darstellungsmatrizen erhält man Matrizen mit den Eigenwerten $6, -6, 0, 0, 0$ und den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}. \quad (5.112)$$

Der Darstellungsraum zerfällt in drei invariante Unterräume mit den Dimensionen 1, 1, 4. Dies stimmt mit den Dimensionen der Darstellungen A_1^{++}, A_2^{++} bzw. E^{++} überein. Die Zerlegung ist damit abgeschlossen. Da sowohl A_1^{++} als auch A_2^{++} die Dimension 1 besitzen, bleibt noch die Frage, welcher der eindimensionalen invarianten Unterräumen welcher der eindimensionalen Darstellungen zuzuordnen ist.

Um diese Frage zu klären, betrachten wir noch einmal die in (5.57) erklärte reduzierte Darstellung $A\mathcal{R}A^{-1}$. Die Matrix A^{-1} , die sich spaltenweise aus den obigen Eigenvektoren

zusammensetzt, transformieren die Darstellungsmatrizen der ausgewählten Klasse in ihre „reduzierten“ Partner $AD_{\mathcal{R}}(g)A^{-1}$, die nach der Folgerung des Lemmas von Schur (33) Blockdiagonalgestalt haben.

Wir wählen als Beispiel $g = C_{2\alpha}$ und erhalten

$$AD_{\mathcal{R}}(C_{2a})A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.113)$$

Wir lesen für die obersten Blöcke (1) und (-1) die Spuren direkt ab und vergleichen sie mit den Charakteren $\chi^{A_1^{++}}(C_2) = 1$ und $\chi^{A_2^{++}}(C_2) = -1$. Der erste Vektor aus \mathcal{E} ist eine ONB der Darstellung A_1^{++} aus SUSY-Operatoren, der zweite entsprechend zu A_2^{++} .¹⁰

Die analoge Zuordnung von Eigenvektoren zu den Darstellungen $E^{++} \oplus E^{++}$ lässt sich für den dritten und vierten bzw. den fünften und sechsten Vektor anhand der beiden unteren Blöcke von (5.113) vornehmen.

Die vierdimensionale Darstellung

$$\mathcal{R}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = G_1^{++} \oplus G_1^{++} = 2G_{1++} \quad (5.114)$$

geht im Kontinuumsimes in einen Spin-1/2-Zustand über. Da bei Gitter-Monte-Carlo-Simulationen zur Bestimmung des Massenspektrums der in der N=1 SUSY-Yang-Mills-Theorie auftretenden Zustände der exponentielle Abfall der zeitlichen Korrelationsfunktion durch die Terme niedrigsten Spins dominiert wird, ist man an diesen zugehörigen Operatoren vorrangig interessiert.

Eine Orthonormalbasis erhält man, indem man die sechs Operatoren $O_{i-}^+, i = 1, \dots, 6$ aufsummiert:

Darstellung \mathcal{R} von 2O_h	Linearkombinationen der SUSY-Operatoren
$2G_1^{++}$	$O_{11+}^+ + O_{12+}^+ + O_{21+}^+ + O_{22+}^+ + O_{31+}^+ + O_{32+}^+$

¹⁰Betrachtet man die für die Reduktion gebildete Summe aller Darstellungsmatrizen einer Klasse k_1, \dots, k_m , so stellt man fest, dass die Reduktion distributiv ist in folgendem Sinne

$$A \left(\sum_i D_{\mathcal{R}}(k_i) \right) A^{-1} = \sum_i AD_{\mathcal{R}}(k_i)A^{-1}.$$

Daher können wir schon am Vorzeichen der Eigenwerte von $\sum_i D_{\mathcal{R}}(k_i)$ die Zugehörigkeit der Eigenvektoren zu den Darstellungen A_1^{++} bzw. A_2^{++} vornehmen.

Kapitel 6

Computerprogramm zur Transformation und Konstruktion einer Darstellung der 2O über SUSY-Gitteroperatoren

Die Untersuchung des Transformationsverhaltens von SUSY-Gitteroperatoren unter der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h und die darauf aufbauende Zerlegung in irreduzible Darstellungen nebst Konstruktion einer Orthonormalbasis ist ein mühevoller Prozess, der nach anfänglichem Aufwand von einem Computer übernommen werden kann. In diesem Kapitel werde ich ein von mir zu diesem Zweck geschriebenes Computerprogramm, das der in Kapitel 5 erklärten Methode folgt, erläutern. Das Programm ist in FORTRAN 90 geschrieben und verwendet einige Routinen der mathematischen Funktionsbibliothek IMSL. Es ist im Anhang C gelistet.

Zunächst gebe ich eine Anleitung zum Gebrauch des Programms. Hier werde ich auch bereits auf die Ein- und Ausgabe-Routinen eingehen und insbesondere das Format der Ein- und Ausgabedateien spezifizieren. In den darauf folgenden Abschnitten gehe ich dann auf die Funktionsweise des Programms ein, indem ich alle wichtigen Routinen erläutere.

6.1 Anleitung

Das Programm ist unter jedem System compilierbar, auf dem folgende Voraussetzungen vorhanden sind:

- ein FORTRAN 90-Compiler
- die mathematische Funktionsbibliothek IMSL.

Die IMSL-Bibliothek muss beim Linken eingebunden werden. Bevor man das Programm aufruft, muss die Eingabedatei im gleichen Verzeichnis wie das Programm selbst stehen. Nach Programmaufruf wird man nach dem Namen dieser Eingabedatei gefragt. Dieser

muss vollständig (also inklusive der Datei-endung) eingegeben werden. Die Eingabe wird mit `<Return>` abgeschlossen. Ebenso wird man nach dem gewünschten Namen der Ausgabedatei gefragt, die wiederum inklusive der gewünschten Dateieindung eingegeben werden muss und mit `<Return>` zu bestätigen ist. Diese darf in dem Verzeichnis, in dem sich das Programm befindet, noch nicht vorhanden sein. Die Benutzerfreundlichkeit ist in diesen Punkten nur minimal.

Das Programm produziert nach erfolgreicher Beendigung im Verzeichnis, in dem sich das Programm befindet, eine Datei mit dem vom Benutzer angegebenen Namen.

Sowohl die Ein- als auch die Ausgabedatei sind im Textformat (plain text).

6.1.1 Eingabedatei

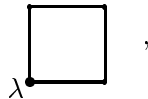
Bevor der Benutzer das Programm aufruft, muss er die Eingabedatei schreiben und in das Verzeichnis speichern, in dem sich das Programm befindet.

Die Eingabe eines Loop-Operators geschieht durch die Eingabedatei, in der pro Zeile genau eine ganze Zahl steht. Der erste Eintrag muss aus programmtechnischen Gründen die Anzahl der Elemente des Loops sein. Dem folgt der Loop selbst, und zwar in der folgenden Codierung¹:

- Links werden durch den Index ihrer Richtung gekennzeichnet (z.B. steht 3 für $U_{x;3}$, -3 für $U_{x;-3}$, wobei der Ort (x) passend gewählt wird)
- Majoranas (λ) werden durch 0 gekennzeichnet

Bei den Richtungen hat man eine Wahlfreiheit in Bezug auf die Reihenfolge der Achsen, nur die relativen Richtungen müssen stimmen (Rechtssystem!).

So wird z.B. der Majorana-Plaquette-Operator



dessen algebraischer Ausdruck geschrieben wird als

$$\text{Tr} \{U_{x;\mu\nu}\lambda\} = U_{x;\mu\nu}^{rs} \lambda^a (T^a)^{sr} = \text{Tr} \{ \lambda(x) U_{x;\mu}^\dagger U_{x+a\hat{\mu};\nu}^\dagger U_{x+a\hat{\mu};\nu} U_{x;\mu} \}, \quad (6.1)$$

in der Eingabedatei geschrieben als

5
0
1
2
-1
-2.

¹Die Codierung folgt der in Kapitel 5 erklärten Tupel-Notation für SUSY-Operatoren.

Diese Schreibweise ist an die in Abschnitt 5.1.2 erklärten L -Tupel angelehnt, die einen Operator symbolisieren.

Das Programm kontrolliert nicht, ob der Benutzer eine korrekte Eingabedatei geschrieben hat, insbesondere auch nicht, ob der Loop „gültig“ ist, d.h. ob er geschlossen ist. Es obliegt dem Benutzer, dafür Sorge zu tragen.²

6.1.2 Ausgabedatei

Die Ausgabedatei enthält die Endergebnisse (irreduzible Anteile der Darstellung und Orthonormalbasis) in Form von Tabellen, wie sie in L^AT_EX durch `\input{Dateiname}` eingebunden werden können. Hierfür müssen die Dateien die Endung `.tex` haben.

6.2 Funktionsweise des Programms

In diesem Abschnitt will ich auf die Funktionsweise des Programms eingehen und die wichtigsten Routinen und deren Ablauf erläutern. Diese Darstellung erklärt nur die für die Rechnung wichtigen Variablen und Anweisungen. Die genaue Steuerung der Ein- und Ausgabe ist dafür unerheblich.

Das Programm beginnt mit den Variablendeklarationen. Die algorithmischen Variablen werden an der Stelle erläutert, wo sie vom Programm verwendet werden. Es folgt die Initialisierung bzw. Wertzuweisung von einigen Tabellen, die später im Programm Verwendung finden und dort erklärt sind. Dem schließt sich das Öffnen der Ein- und Ausgabedateien an.

Ich beginne meine Erläuterungen bei der Kommentarzeile

```
! **** Eingaben einlesen.
```

6.2.1 Eingaberoutine

Die Eingaberoutine liest zunächst die Anzahl der Elemente des zu betrachtenden Operators in die Variable `links` ein. Dann wird den im weiteren verwendeten Variablenfeldern die entsprechende Größe zugewiesen (`allocate`-Befehle).

Die `do` - Schleife liest aus der Eingabedatei die Urform des zu betrachtenden Loops elementweise in das Feld `urplaquette` ein.

6.2.2 Berechnung des Transformationsverhaltens aller möglichen Loops

Im ersten Rechenschritt werden alle möglichen Loops aus der Urform berechnet. Dies geschieht durch elementweise (d.h. Link-weise) Transformation. Hier wird die `transform`-Tabelle verwendet, die am Anfang des Programms durch die `data` - Anweisungen ausgefüllt wurde. Sie gibt an, wie ein Link sich unter der jeweiligen Transformation verhält.

²Das Programm produziert auch bei „ungültigen“ Eingaben eine Ausgabe, die dann natürlich keinen Sinn macht.

Die **transform**-Tabelle möchte ich an dieser Stelle zur Veranschaulichung angeben³. Hier sind nur die ersten 24 Elemente (also die der einfachen kubischen Gruppe) aufgelistet. Durch Raumspiegelung gelangt man zu den nächsten 24 Elementen, die die volle kubische Gruppe komplettieren. Die Raumspiegelung ist gleichzeitig eine P -Paritätsoperation, es wird also das Vorzeichen jedes Tupellements umgekehrt. Die **transform**-Tabelle lautet:

Operator Nummer	id	C_{4x}	C_{4y}	C_{4z}	C_{4x}^{-1}	C_{4y}^{-1}	C_{4z}^{-1}	C_{4x}^2	C_{4y}^2	C_{4z}^2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Transformiert Link	1	1	-3	2	1	3	-2	1	-1	-1
	2	2	3	2	-3	2	1	-2	2	-2
	3	3	-2	1	2	-1	3	-3	-3	3
	-1	-1	-1	3	-2	-1	-3	2	-1	1
	-2	-2	-3	-2	1	3	-2	-1	2	-2
	-3	-3	2	-1	-3	-2	1	-3	3	3
	0	0								

Operator Nummer	$C_{3\alpha}$	$C_{3\beta}$	$C_{3\gamma}$	$C_{3\delta}$	$C_{3\alpha}^{-1}$	$C_{3\beta}^{-1}$	$C_{3\gamma}^{-1}$	$C_{3\delta}^{-1}$	
	11	12	13	14	15	16	17	18	
Transformiert Link	1	2	3	-2	3	-3	-2	-3	2
	2	-3	-1	3	1	1	-3	-1	3
	3	-1	-2	-1	2	-2	1	2	1
	-1	-2	-3	2	-3	3	2	3	-2
	-2	3	1	-3	-1	-1	3	1	-3
	-3	1	2	1	-2	2	-1	-2	-1
	0	0							

Operator Nummer	C_{2a}	C_{2b}	C_{2c}	C_{2d}	C_{2e}	C_{2f}
	19	20	21	22	23	24
Transformiert Link	1	2	-2	3	-3	-1
	2	1	-1	-2	-2	3
	3	-3	-3	1	-1	2
	-1	-2	2	-3	3	1
	-2	-1	1	2	2	-3
	-3	3	3	-1	1	-2
	0	0				

Mit dem Befehl

```
plaquette (i,n) = transform (urplaquette(n),i)
```

wird dem n -ten Element des Loops Nummer i die i -te Transformation des n -ten Elementes der Urform des Loops zugewiesen. Dies geschieht für alle i, n , jedoch zunächst für alle Transformationen, die keine C -Paritätsoperation beinhalten ($i = 1, \dots, 48$). Die

³Anhand der Reihenfolge der Operatoren in der Tabelle lässt sich auch die Nummerierung der Operatoren, bzw. der durch sie gebildeten Transformaten der Urform des Loops nachvollziehen.

C -Transformierten ($i = 49, \dots, 96$) werden anschließend in der nächsten Schleife durch Umkehrung der Reihenfolge der Elemente aus den ersten ($i = 1, \dots, 48$) gewonnen.

Nun kann man das Transformationsverhalten dieser Loops untersuchen. Im Kern des Schleifenblocks wird durch

```
if (plaquette(i,n)/=transform(plaquette(j,l),k))
```

der i -te Loop mit der k -ten Transformierten des j -ten Loops elementeweise (für alle n bzw. l) verglichen. Die Konstruktion aus Schleifen und logischen Operationen, die diesen Test umgibt, ist nötig, da hier nur ein Repräsentant stellvertretend für seine ganze Äquivalenzklasse von Loops steht, die durch zyklische Vertauschung der Elemente aus ihm hervorgeht. Diese zyklischen Vertauschungen müssen alle durchgeführt werden.

Bei Übereinstimmung wird durch den Eintrag

```
matrix(j,k) = i
```

in die Transformationsmatrix **matrix** festgehalten, dass der j -te Loop durch die k -te Transformation in den i -ten Loop übergeht. Der Vermerk in der **liste** kennzeichnet den i -ten Loop als „existent“, mit dem Effekt, dass bei unter allen 96 Loops mehrfach vorkommenden Formen ein Vertreter (i) ausgewählt wird.

6.2.3 Auswahl einer P - und C -paritätsinvarianten Basis

Nun muss eine P - und C -invariante Basis aus Loops gewählt werden. Hierzu werden alle Loops, die auf der **liste2=liste** existieren, einzeln in die Basis einsortiert. Auf der **liste2** werden die bereits platzierten Loops „abgehakt“.

Es werden zunächst die P -, die C - und die PC -Transformierte (z.B. **pplaquette** des gerade betrachteten Originalloops gebildet. Diese werden dann z.B. durch

```
if (pplaquette(n)/=plaquette(j,l))
```

elementeweise (für alle n bzw. l) mit allen Loops (durch j indiziert) verglichen. Wiederum muss der gesamten Äquivalenzklasse durch zyklische Vertauschung Rechenschaft getragen werden. Bei Übereinstimmung wird z.B. durch

```
basis(k,2,1:links) = plaquette(j,1:links)
```

die P -Transformierte des Originalloops in die **basis** eingetragen. Der zweite Index der **basis** ist erklärt durch

- 1 Originalloop
- 2 P -Transformierte
- 3 C -Transformierte
- 4 PC -Transformierte,

woraus in einem Basiselement die Summe gebildet wird.

Der Index k zählt die Anzahl der Basiselemente (also die Dimension der Darstellung) und wird für spätere Rechnungen aufbewahrt. Parallel zu **basis** steht in **basisv** die jeweilige Nummer des Loops eines Basisteils.

Die nächste Schleife kopiert aus programmiertechnischen Gründen die Einträge von `basis` und `basisv` in die Variablenfelder `base` bzw. `basev`. Diese sind jeweils identisch, bis auf die überflüssigen leeren Einträge am Ende des Feldes.⁴

6.2.4 Transformationsverhalten der PC -invarianten Basis

Nun kann das Transformationsverhalten der erstellten Basis untersucht werden. Hier dienen die äußersten Schleifen der Fallunterscheidung in $P = \pm 1$, $C = \pm 1$. Die Vorzeichen der Summanden eines Basiselementes werden entsprechend dem P - bzw. C -Paritätseigenwert eingestellt.

Die nächste Schleife (Index `trans`) zählt alle 96 Transformationen und für jedes Element der Basis (`i=1,k`) wird die Transformierte („`basel`“)

```
baseprime(l)=matrix(basev(i,l),trans)
```

in allen 4 Summanden (Index `l`) gebildet.

Diese Transformierte wird dann summandenweise mit allen Basiselementen verglichen

```
if (baseprime(l)==basev(j,m)),
```

und bei Übereinstimmung (bis auf Vorzeichen) wird ebendieses Vorzeichen in die Tabelle der Darstellungsmatrizen `transformation` eingetragen.

Abschließend werden die Charaktere der Darstellung durch Spurbildung jeweils eines Vertreters jeder Klasse berechnet.

6.2.5 Zerlegung in irreduzible Darstellungen

Nun muss die Darstellung noch in irreduzible Anteile zerlegt werden. Hierzu wird wieder in die Fälle $P = \pm 1$ und $C = \pm 1$ unterschieden.

Es wird Formel (5.52) aus Kapitel 5 verwendet, die im Programm als

```
do i=1,5
  do j=1,5
    a(i,p,c) = a(i,p,c) + nmuj * charakter(p,c,j) * chartab(p,i,j)
  end do
end do
```

erscheint. Hierbei ist `chartab` die am Anfang des Programms ausgefüllte Charaktertabelle der O_h und `nmuj` die Mächtigkeit der Klasse C_μ („ n_μ “).

6.2.6 Konstruktion einer Orthonormalbasis

Für die Konstruktion einer Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren folgt das Programm der in 5.3.2 vorgestellten Methode. Dazu müssen zunächst die Darstellungsmatrizen klassenweise aufsummiert werden. Diese Summen werden in `cmat` gespeichert. Zur weiteren

⁴In FORTRAN müssen die Dimensionen (Längen) von Feldern festgelegt sein, bevor sie verwendet werden. Da die Anzahl der Basiselemente nicht von vornherein feststeht, müssen durch diesen Trick die Basis-Felder auf die richtige Länge gebracht werden.

Verarbeitung werden die Matrizen im Fließkomma-Format `real` benötigt, also muss der Inhalt von `cmat` in das Fließkomma-Feld `cmatr` übertragen werden.

Die Diagonalisierung der `cmat` wird von einer IMSL-Routine vorgenommen (`call evcrg`). Sie berechnet für die Eingabe `cmatr` die Eigenwerte (`eval(i,1,p,c)`) und die Matrix der zugehörigen Eigenvektoren (`Amat(i,1,m,p,c)`). Der erste Index (`i`) dieser beiden Felder bezeichnet die konjugierte Klasse, der nächste Index (`1`) nummeriert die Eigenwerte bzw. die Eigenvektoren (deren Einträge wiederum durch den Index `m` unterschieden werden). Die letzten beiden Indizes `p,c` erlauben die Fallunterscheidung in $P = \pm 1$, $C = \pm 1$.

Eine Kurzdokumentation der `evcrg`-Routine ist bei [31] nachzulesen, eine eingehende Behandlung der Algorithmen findet man bei [30].

Da die `evcrg`-Routine die Eigenvektoren auf Länge 1 normiert, wird nach `call evcrg` jedes Element mit dem Inversen des unmittelbar vorher ermittelten kleinsten Eintrags (`little`) multipliziert und durch `nint()` auf eine ganze Zahl im `integer`-Format gerundet, die in `Amatint` (Indizes analog zu `Amat`) gespeichert wird. Auch die Eigenwerte `eval` werden zu ganzzahligen `integer`-Variablen (`evalint`) konvertiert.

6.2.7 Ausgabe

Die Ausgabe erfolgt mittels `write` in die Ausgabedatei, deren Namen der Benutzer am Start des Programms interaktiv angegeben hat. Die erzeugte Datei kann direkt in ein `LATEX`-Dokument eingebunden werden. Die ausgegebenen Ergebnisse beschränken sich auf die irreduzible Zerlegung der Darstellung im Loop-Sektor und eine Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren. Zwischen den Zeichenkettenkonstanten, die die `LATEX`-Syntax herstellen, werden die Inhalte der Variablenfelder `basis` (P - C -invariante Basis), `k` (Dimension der Darstellung), `a` (irreduzible Anteile), `evalint` (Eigenwerte der ONB-Konstruktion) und die Orthonormalbasis `Amatint` ausgegeben.

6.2.8 Erweiterungsvorschlag

Mit wenig Mühe kann das Programm erweitert werden um, für den Fall eines einzeln auftretenden Majorana-Feldern, auch noch den letzten Schritt der irreduziblen Zerlegung der Produktdarstellung zu übernehmen. Die entscheidende Anweisung ist nach der Zerlegungsformel (5.94) aus Kapitel 5:

```
do j=1,8
  do i=1,8
    a(j,p,c)=a(j,p,c) + n(i)* chartab20(p,j,i)&
      *chartab20(p,R,i) * 2*chartab20(p,6,i)
  end do
  a(j,p,c) = a(j,p,c)/48
end do.
```

Sie wird für alle im Plaquette-Sektor vertretenen Darstellungen R ausgeführt und bedarf einer vorherigen Belegung der Charaktertabelle der Überlagerungsgruppe 2O (`chartab20`)

und der Klassenstärken $n(i)$. Die Bezeichnungsweise ist hier so gewählt, dass sie mit Formel (5.94) vergleichbar ist⁵ (j entspreche ν).

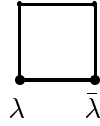
Das Programm ist in schriftlicher Form im Anhang C gelistet und als FORTRAN 90-Quellcode auf dem beiliegenden Datenträger in der Datei `transformation.f90` vorhanden. Ausserdem enthält er ein Beispiel für eine Eingabedatei (`beispiel.dat`).

⁵Die Variablen müssen für den Einbau in das Programm anders benannt werden, um Konflikte mit bereits vorhandenen Variablen zu vermeiden.

Kapitel 7

Ergebnisse

In diesem Kapitel will ich in Form von Tabellen einige Ergebnisse der Computerrechnungen angeben. Die Form folgt den aus Kapitel 5 bekannten Tabellen. Die hier betrachteten SUSY-Operatoren sind nicht so einfach Spinzuständen zuzuordnen (z.B. anhand von den Tabellen auf S. 40). Man hofft, dass wenigstens Anteile der hier präsentierten irreduziblen Darstellungen im Kontinuumsimes physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern.



Basis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren

- $O_{1\pm}^{\pm} = [0, 1, 0, 2, -1, -2]_{\pm}$
- $O_{2\pm}^{\pm} = [0, 1, 0, 3, -1, -3]_{\pm}$
- $O_{3\pm}^{\pm} = [0, -3, 0, 2, 3, -2]_{\pm}$
- $O_{4\pm}^{\pm} = [0, 2, 0, -1, -2, 1]_{\pm}$
- $O_{5\pm}^{\pm} = [0, 2, 0, -3, -2, 3]_{\pm}$
- $O_{6\pm}^{\pm} = [0, 3, 0, -1, -3, 1]_{\pm}$

Dimension von \mathcal{R}^{PC} : 6

Irreduzible Anteile der Darstellung:

irred. Darst. von O_h	A_1^{PC}	A_2^{PC}	E^{PC}	T_1^{PC}	T_2^{PC}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3
$P = +1, C = +1$	1	1	2	0	0
$P = +1, C = -1$	0	0	0	1	1
$P = -1, C = +1$	0	0	0	1	1
$P = -1, C = -1$	0	0	0	1	1

Orthonormalbasis:

$P = +1, C = +1$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0

Loop-Op.	O_{1+}^+	O_{2+}^+	O_{3+}^+	O_{4+}^+	O_{5+}^+	O_{6+}^+
A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
A_2^{++}	1	-1	-1	-1	1	1
E^{++}	-1	0	0	0	0	1
	-1	0	0	0	1	0
E^{++}	0	-1	0	1	0	0
	0	-1	1	0	0	0

$P = +1, C = -1$

Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^+	O_{2-}^+	O_{3-}^+	O_{4-}^+	O_{5-}^+	O_{6-}^+
T_1^{+-}	0	-1	0	0	0	1
	-1	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1	0
T_2^{+-}	0	1	0	0	0	1
	0	0	-1	0	1	0
	1	0	0	1	0	0

$P = -1, C = +1$

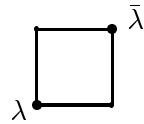
Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1+}^-	O_{2+}^-	O_{3+}^-	O_{4+}^-	O_{5+}^-	O_{6+}^-
T_1^{-+}	0	0	0	-1	0	1
	-1	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	1	0
T_2^{-+}	0	0	0	1	0	1
	0	-1	0	0	1	0
	1	0	1	0	0	0

$P = -1, C = -1$

Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^-	O_{2-}^-	O_{3-}^-	O_{4-}^-	O_{5-}^-	O_{6-}^-
T_1^{--}	-1	1	0	0	0	0
	0	0	0	-1	1	0
	0	0	1	0	0	1
T_2^{--}	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	0
	0	0	-1	0	0	1



Dieser Operator ist invariant unter Raumspiegelungen, weswegen nur der positive P -Paritätseigenwert auftritt.

Basis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren

- $O_{1\pm}^{\pm} = [0, 1, 2, 0, -1, -2]_{\pm}$
- $O_{2\pm}^{\pm} = [0, 1, 3, 0, -1, -3]_{\pm}$
- $O_{3\pm}^{\pm} = [0, -3, 2, 0, 3, -2]_{\pm}$
- $O_{4\pm}^{\pm} = [0, 2, -1, 0, -2, 1]_{\pm}$
- $O_{5\pm}^{\pm} = [0, 1, -3, 0, -1, 3]_{\pm}$
- $O_{6\pm}^{\pm} = [0, 3, 2, 0, -3, -2]_{\pm}$

Dimension von \mathcal{R}^{PC} : 6

Irreduzible Anteile der Darstellung:

irred. Darst. von O_h	A_1^{PC}	A_2^{PC}	E^{PC}	T_1^{PC}	T_2^{PC}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3
$P = +1, C = +1$	1	0	1	0	1
$P = +1, C = -1$	0	1	1	1	0

Orthonormalbasis:

$P = +1, C = +1$

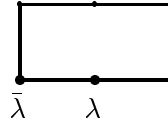
Eigenwerte: 6, 0, 0, 2, 2, 2

Loop-Op.	O_{1+}^+	O_{2+}^+	O_{3+}^+	O_{4+}^+	O_{5+}^+	O_{6+}^+
A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
E^{++}	-1	0	1	-1	0	1
T_2^{++}	-1	1	0	-1	1	0
	0	-1	0	0	1	0
	-1	0	0	1	0	0
	0	0	-1	0	0	1

$P = +1, C = -1$

Eigenwerte: -6, 0, 0, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^+	O_{2-}^+	O_{3-}^+	O_{4-}^+	O_{5-}^+	O_{6-}^+
A_2^{+-}	-1	1	1	1	1	1
E^{+-}	1	1	0	-1	1	0
T_1^{+-}	1	0	1	-1	0	1
	0	-1	0	0	1	0
	0	0	-1	0	0	1
	1	0	0	1	0	0



Basis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren

- $O_{1\pm}^\pm = [0, 1, 0, 1, 2, -1, -1, -2]_\pm$
- $O_{2\pm}^\pm = [0, 1, 0, 1, 3, -1, -1, -3]_\pm$
- $O_{3\pm}^\pm = [0, -3, 0, -3, 2, 3, 3, -2]_\pm$
- $O_{4\pm}^\pm = [0, 2, 0, 2, -1, -2, -2, 1]_\pm$
- $O_{5\pm}^\pm = [0, 1, 0, 1, -3, -1, -1, 3]_\pm$
- $O_{6\pm}^\pm = [0, 3, 0, 3, 2, -3, -3, -2]_\pm$
- $O_{7\pm}^\pm = [0, 1, 0, 1, -2, -1, -1, 2]_\pm$
- $O_{8\pm}^\pm = [0, 2, 0, 2, -3, -2, -2, 3]_\pm$
- $O_{9\pm}^\pm = [0, 3, 0, 3, -1, -3, -3, 1]_\pm$
- $O_{10\pm}^\pm = [0, 3, 0, 3, 1, -3, -3, -1]_\pm$
- $O_{11\pm}^\pm = [0, -2, 0, -2, -3, 2, 2, 3]_\pm$
- $O_{12\pm}^\pm = [0, 2, 0, 2, 1, -2, -2, -1]_\pm$

Dimension von \mathcal{R}^{PC} : 12

Irreduzible Anteile der Darstellung:

irred. Darst. von O_h	A_1^{PC}	A_2^{PC}	E^{PC}	T_1^{PC}	T_2^{PC}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3
$P = +1, C = +1$	1	1	2	1	1
$P = +1, C = -1$	1	1	2	1	1
$P = -1, C = +1$	0	0	0	2	2
$P = -1, C = -1$	0	0	0	2	2

Orthonormalbasis:

$P = +1, C = +1$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1+}^+	O_{2+}^+	O_{3+}^+	O_{4+}^+	O_{5+}^+	O_{6+}^+	O_{7+}^+	O_{8+}^+	O_{9+}^+	O_{10+}^+	O_{11+}^+	O_{12+}^+
A_1^{++}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2^{++}	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
E^{++}	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1
	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
E^{++}	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0
	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0
T_1^{++}	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0
	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1
	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0
T_2^{++}	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0

$P = +1, C = -1$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^+	O_{2-}^+	O_{3-}^+	O_{4-}^+	O_{5-}^+	O_{6-}^+	O_{7-}^+	O_{8-}^+	O_{9-}^+	O_{10-}^+	O_{11-}^+	O_{12-}^+
A_1^{+-}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2^{+-}	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
E^{+-}	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1
E^{+-}	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0
	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0
T_1^{+-}	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0
	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0
	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1
T_2^{+-}	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0
	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1

$$P = -1, C = +1$$

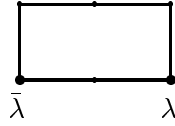
Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1+}^-	O_{2+}^-	O_{3+}^-	O_{4+}^-	O_{5+}^-	O_{6+}^-	O_{7+}^-	O_{8+}^-	O_{9+}^-	O_{10+}^-	O_{11+}^-	O_{12+}^-
$2T_1^{-+}$	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	0
	0	-1	0	1	1	0	0	-2	0	0	0	1
	-1	1	1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
	-1	0	1	1	1	0	0	-1	0	0	1	0
	1	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
	-2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$2T_2^{-+}$	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
	-1	-1	-1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	0	-1	0	1	1	0	0	2	0	0	0	1
	-1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	1	0	0
	2	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

$$P = -1, C = -1$$

Eigenwerte: 6, 6, 6, 6, 6, -6, -6, -6, -6, -6, -6, 0

Loop-Op.	O_{1-}^-	O_{2-}^-	O_{3-}^-	O_{4-}^-	O_{5-}^-	O_{6-}^-	O_{7-}^-	O_{8-}^-	O_{9-}^-	O_{10-}^-	O_{11-}^-	O_{12-}^-
$2T_1^{--}$	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	0
	0	-1	0	1	1	0	0	-2	0	0	0	1
	-1	1	1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
	-1	0	1	1	1	0	0	-1	0	1	0	0
	1	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
	-2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$2T_2^{--}$	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	2
	0	1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	-1	1
	0	-1	0	0	1	0	0	0	1	-1	2	-2
	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	1
	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	-1



Basis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren

- $O_{1\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, 0, 2, -1, -1, -2]_{\pm}$
- $O_{2\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, 0, 3, -1, -1, -3]_{\pm}$
- $O_{3\pm}^{\pm} = [0, -3, -3, 0, 2, 3, 3, -2]_{\pm}$
- $O_{4\pm}^{\pm} = [0, 2, 2, 0, -1, -2, -2, 1]_{\pm}$
- $O_{5\pm}^{\pm} = [0, 2, 2, 0, -3, -2, -2, 3]_{\pm}$
- $O_{6\pm}^{\pm} = [0, 3, 3, 0, -1, -3, -3, 1]_{\pm}$

Dimension von \mathcal{R}^{PC} : 6

Irreduzible Anteile der Darstellung:

irred. Darst. von O_h	A_1^{PC}	A_2^{PC}	E^{PC}	T_1^{PC}	T_2^{PC}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3
$P = +1, C = +1$	1	1	2	0	0
$P = +1, C = -1$	0	0	0	1	1
$P = -1, C = +1$	0	0	0	1	1
$P = -1, C = -1$	0	0	0	1	1

Orthonormalbasis:

$$P = +1, C = +1$$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0

Loop-Op.	O_{1+}^+	O_{2+}^+	O_{3+}^+	O_{4+}^+	O_{5+}^+	O_{6+}^+
A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
A_2^{++}	1	-1	-1	-1	1	1
E^{++}	-1	0	0	0	0	1
	-1	0	0	0	1	0
E^{++}	0	-1	0	1	0	0
	0	-1	1	0	0	0

$$P = +1, C = -1$$

Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^+	O_{2-}^+	O_{3-}^+	O_{4-}^+	O_{5-}^+	O_{6-}^+
T_1^{+-}	0	-1	0	0	0	1
	-1	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1	0
T_2^{+-}	0	1	0	0	0	1
	0	0	-1	0	1	0
	1	0	0	1	0	0

$$P = -1, C = +1$$

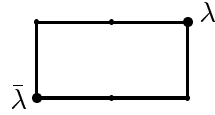
Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1+}^-	O_{2+}^-	O_{3+}^-	O_{4+}^-	O_{5+}^-	O_{6+}^-
T_1^{-+}	0	0	0	-1	0	1
	-1	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	1	0
T_2^{-+}	0	0	0	1	0	1
	0	-1	0	0	1	0
	1	0	1	0	0	0

$$P = -1, C = -1$$

Eigenwerte: 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^-	O_{2-}^-	O_{3-}^-	O_{4-}^-	O_{5-}^-	O_{6-}^-
T_1^{--}	-1	1	0	0	0	0
	0	0	0	-1	1	0
	0	0	1	0	0	1
T_2^{--}	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	0
	0	0	-1	0	0	1



Basis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren

- $O_{1\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -2]_{\pm}$
- $O_{2\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, 3, 0, -1, -1, -3]_{\pm}$
- $O_{3\pm}^{\pm} = [0, -3, -3, 2, 0, 3, 3, -2]_{\pm}$
- $O_{4\pm}^{\pm} = [0, 2, 2, -1, 0, -2, -2, 1]_{\pm}$
- $O_{5\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, -3, 0, -1, -1, 3]_{\pm}$
- $O_{6\pm}^{\pm} = [0, 3, 3, 2, 0, -3, -3, -2]_{\pm}$
- $O_{7\pm}^{\pm} = [0, 1, 1, -2, 0, -1, -1, 2]_{\pm}$
- $O_{8\pm}^{\pm} = [0, 2, 2, -3, 0, -2, -2, 3]_{\pm}$
- $O_{9\pm}^{\pm} = [0, 3, 3, -1, 0, -3, -3, 1]_{\pm}$
- $O_{10\pm}^{\pm} = [0, 3, 3, 1, 0, -3, -3, -1]_{\pm}$
- $O_{11\pm}^{\pm} = [0, -2, -2, -3, 0, 2, 2, 3]_{\pm}$
- $O_{12\pm}^{\pm} = [0, 2, 2, 1, 0, -2, -2, -1]_{\pm}$

Dimension von \mathcal{R}^{PC} : 12

Irreduzible Anteile der Darstellung:

irred. Darst. von O_h	A_1^{PC}	A_2^{PC}	E^{PC}	T_1^{PC}	T_2^{PC}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3
$P = +1, C = +1$	1	1	2	1	1
$P = +1, C = -1$	1	1	2	1	1

Orthonormalbasis:

$$P = +1, C = +1$$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1+}^+	O_{2+}^+	O_{3+}^+	O_{4+}^+	O_{5+}^+	O_{6+}^+	O_{7+}^+	O_{8+}^+	O_{9+}^+	O_{10+}^+	O_{11+}^+	O_{12+}^+
A_1^{++}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2^{++}	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
E^{++}	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1
E^{++}	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
E^{++}	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0
E^{++}	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0
T_1^{++}	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0
T_1^{++}	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1
T_1^{++}	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0
T_2^{++}	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1
T_2^{++}	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
T_2^{++}	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0

$$P = +1, C = -1$$

Eigenwerte: 6, -6, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, -2, -2, -2

Loop-Op.	O_{1-}^+	O_{2-}^+	O_{3-}^+	O_{4-}^+	O_{5-}^+	O_{6-}^+	O_{7-}^+	O_{8-}^+	O_{9-}^+	O_{10-}^+	O_{11-}^+	O_{12-}^+
A_1^{+-}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2^{+-}	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1
E^{+-}	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
E^{+-}	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1
E^{+-}	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0
E^{+-}	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0
T_1^{+-}	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0
T_1^{+-}	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0
T_1^{+-}	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1
T_2^{+-}	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
T_2^{+-}	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0
T_2^{+-}	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1

Zusammenfassung und Ausblick

Thema dieser Arbeit war eine gruppentheoretische Untersuchung von supersymmetrischen Gitter-Operatoren, die zur Massenbestimmung der in der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auftretenden Zustände im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen herangezogen werden. Solche Simulationen sind insbesondere bei Energien, für die die Rechnungen nicht perturbativ durchgeführt werden können, von Interesse. Meine Untersuchung basierte dabei auf der von F. HEITGER im Rahmen seiner Diplomarbeit [10] entwickelten Ausweitung der von BERG und BILLOIRE in [11], [12] durchgeführten Klassifizierung von Wilson Loops nach ihrem Transformationsverhalten unter der kubischen Gruppe O auf eine supersymmetrische Gittereichtheorie unter Verwendung der Überlagerungsgruppe 2O .

Zu diesem Zweck habe ich nach der Bereitstellung der gruppentheoretischen Hilfsmittel und einer Motivation, in SUSY-Quantenfeldtheorien neben Bosonen auch fermionische Anteile in die Eichtheorie einzuführen, einen Abriss über die Gittereichtheorie mit Betonung auf der $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie gegeben. Danach habe ich den in [10] entwickelten Vorschlag zur Klassifizierung von SUSY-Gitteroperatoren aufgegriffen und anhand einiger Beispiele in zusammenhängender Form reproduziert. Die hierbei verwendete Vorgehensweise ließ sich nun auf eine computergestützte Analyse der Transformationseigenschaften von Gitteroperatoren übertragen, die in Kapitel 6 vorgestellt wird. Hierbei legte ich großen Wert auf eine ausführliche Dokumentation des Algorithmus. Das letzte Kapitel enthält einige Ergebnisse dieser Computerrechnungen.

Das Ziel der durchgeführten Analyse sollte eine Auffindung geeigneter SUSY-Gitteroperatoren für Monte-Carlo-Rechnungen zur Massenbestimmung von SUSY-Zuständen sein. Das Transformationsverhalten der betrachteten Operatoren höherer Komplexität zeigt dabei Anteile die Zuständen mit verschiedenen Spin-Eigenwerten entsprechen. Diese müssen erst im Kontinuumslimes auf physikalisch sinnvolle Zustände hin überprüft werden.

Für das weitere Vorgehen seien noch ein paar Ansätze gegeben. Zunächst folgen könnte die Analyse weiterer Gitteroperatoren mit dem Computerprogramm. Hier kann z.B. auch mit Hilfe der in Abschnitt 6.2.8 angegebenen Erweiterung das Transformationsverhalten von SUSY-Operatoren mit halbzahligem Spin auf effiziente Weise berechnet werden. Des weiteren erwartet man bei der Analyse des Transformationsverhalten von Zuständen mit drei Majorana-Spinoren ein Verhalten mit Spin- $\frac{3}{2}$ -Anteilen (siehe hierzu [32]), was bei Gitterdiskretisierung zu Operatoren führen sollte, die ein Transformationsverhalten unter der Darstellung H der Überlagerung der kubischen Gruppe 2O zeigen. Ferner können geeignete Kombinationen von hier betrachteten Operatoren in Monte-Carlo-Simulationen zur Bestimmung der Massen des Teilchenspektrums der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie dienen.

Anhang A

Reguläre Darstellung

Die Verknüpfungstabelle einer Gruppe besteht aus Spalten, die alle möglichen Permutationen einer Spalte darstellen. Ordnet man die Zeilen (oder Spalten) so um, dass auf der Hauptdiagonalen stets das neutrale Element steht, so ergibt sich nach den Gruppenaxiomen, dass die Zeilen mit den zu den Spalten gehörenden inversen nummeriert werden.

Man definiert nun für jedes g_i , $i \in \{1, \dots, n_G\}$ die regulären Darstellungsmatrizen durch [6]

$$D_{kl}^{reg}(g_i) = \delta(g_k g_i g_l^{-1}) \quad \text{mit} \quad 1 \leq k, l \leq n_G, \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$\delta(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g_i = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

ist. Man konstruiert also aus der Verknüpfungstabelle die Darstellungsmatrix¹ für ein Gruppenelement g indem man an den Stellen, wo g auftritt eine 1 schreibt und überall anders eine Null. Die Anzahl der n_G -dimensionalen Darstellungsmatrizen ist also gerade gleich n_G .

Die so gefundene Darstellung ist nach [4] treu.

Theorem Die reguläre Darstellung enthält jede nicht-äquivalente, irreduzible Darstellung der Gruppe G genau sooft, wie ihre Dimension ist.

Beweis: Nach Formel (1.10) aus Theorem 25 gilt

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_g \chi^{\nu^\dagger}(g) \chi^{reg}(g) = \frac{1}{n_G} \chi^{\nu^\dagger}(e) \underbrace{\chi^{reg}(e)}_{n_G} = d_\nu \quad (\text{A.3})$$

und damit das Theorem. □

¹Dass diese Matrizen überhaupt eine Darstellung definieren lese man in [3].

Da die Dimension der regulären Darstellung einerseits nach Konstruktion n_G ist, andererseits aber auch gleich der Summe der Dimensionen der in der regulären Darstellung enthaltenen irreduziblen Darstellungen sein muß, gilt zusammen mit obigem Theorem in der Tat

$$\sum_{\mu} (d_{\mu} \cdot a_{\mu}) = \sum_{\mu} (d_{\mu} \cdot d_{\mu}) = \sum_{\mu} d_{\mu}^2 = n_G, \quad (\text{A.4})$$

und (1.6) aus Theorem 22 ist bewiesen.

Anhang B

Majorana-Spinoren

Dirac-Spinoren sind aus zwei Weyl-Spinoren zusammengesetzte Spinoren, die in der Weyl-Darstellung die Form

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

besitzen, wobei ψ_L und ψ_R je zweikomponentige Weyl-Spinoren darstellen, die sich nach der linken bzw. rechten Fundamentaldarstellung der Lorentzgruppe transformieren.

Im Minkowski-Raum erhält man einen Majorana-Spinor, indem man an einen allgemeinen Dirac-Spinor die Bedingung

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^t C \quad (\text{B.2})$$

stellt. Dabei ist in minkowskischer Formulierung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

und C die Ladungskonjugationsmatrix.

Ein Majorana-Spinor ψ_M geht also wegen (B.2) bei Ladungskonjugation in sich selbst über, also

$$\psi_M^C = \psi_M, \quad (\text{B.4})$$

und besitzt daher anstatt der vier komplexen Freiheitsgrade eines Dirac-Spinors lediglich zwei komplexe bzw. vier reelle Parameter. Die Ladungskonjugation ist dabei durch [18]

$$\psi^C = C \bar{\psi}^t \quad (\text{B.5})$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

definiert.

Gibt man die Hermitizitätseigenschaft der minkowskischen Formulierung auf, so lässt sich ein euklidischer Majorana-Spinor durch die Relation

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (\text{B.7})$$

definieren. In der Weyl-Darstellung schreibt sich damit der Majorana-Spinor gemäß

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

wobei λ_A ein linkshändiger Weyl-Spinor ist. Für weitere Anmerkungen zu Majorana-Spinoren in euklidischer Formulierung konsultiere man [28] und die darin angegebenen Referenzen.

An dieser Stelle seien lediglich zwei Rechenregeln für Grassmann-wertige Majorana-Spinoren ψ und ϕ angegeben, wobei die erste in Kapitel 5 Verwendung findet:

$$\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi \quad (\text{B.10})$$

Beide Relationen weist man mit Hilfe der definierenden Eigenschaft des Ladungskonjugationsoperators C nach:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\phi &= (\bar{\psi}\phi)^t \\ &= (\psi^t C \phi)^t \\ &= -\phi^t C^t \psi \\ &= \phi^t C \psi \\ &= \bar{\phi}\psi, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\phi &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\phi)^t \\ &= (\psi^t C \gamma_\mu \phi)^t \\ &= -\phi^t \gamma_\mu^t C^t \psi \\ &= \phi^t \gamma_\mu^t C \psi \\ &= -\phi^t C \gamma_\mu \psi \\ &= -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Anhang C

Programm

Das Programm `transformation` berechnet für einen vorgegebenen Loop-Operator sein Transformationsverhalten im Plaquette-Sektor unter der (vollen) kubischen Gruppe und seinen irreduziblen Darstellungsgehalt. Anschließend wird eine Orthonormalbasis aus P - und C -invarianten Loop-Operatoren generiert. Das Programm ist in FORTRAN 95 geschrieben und verwendet einige Routinen der mathematischen Funktionsbibliothek IMSL. Das Programm generiert aus dem eingegebenen Loop alle möglichen kubischen Transformationen. Es bildet eine P - C -invariante Basis aus diesen Transformierten, untersucht das Transformationsverhalten der Basis unter der vollen kubischen Gruppe und generiert zum Schluss eine Orthonormalbasis.

Die Ausgabe erfolgt in einer Textdatei, die \LaTeX -fähige Tabellen enthält, die in \LaTeX -Dokumente kopiert oder eingebunden werden können.

Das Programm ist auf den folgenden Seiten gelistet.

```
program transformation
```

```
! ***** Variablendeklarationen
```

```
implicit integer (i,j,k,l,m,n) ! Zaehler und Indices
```

```
! Systemvariablen
```

```
character (1) :: pind,cind
```

```
character (20) :: eingabedatei, ausgabedatei ! Dateinamen
```

```
character (LEN=5), dimension(25) :: aus5 ! Ausgabevariable
```

```
character (LEN=6), dimension(25) :: aus6 ! Ausgabevariable
```

```
character (LEN=10), dimension(25) :: aus10 ! Ausgabevariable
```

```
character (LEN=14), dimension(25) :: aus14 ! Ausgabevariable
```

```
character (LEN=30), dimension(25) :: aus30 ! Ausgabevariable
```

```
character (3) :: char ! Typkonversionsvariable
```

```
logical :: gleich, gleichlink, psymm, psymmlink, csymm, csymmlink, &  
          cpsymm, cpsymmlink ! Logische Variablen fuer Tests in Schleifen
```

```
logical, dimension(1:96) :: liste=.FALSE. ! (s.u.)
```

```
logical, dimension(1:96) :: liste2
```

```
integer :: trans
```

```
! Algorithmische Variablen
```

```
integer :: links ! Anzahl der Links und Majoranas in dem Loop
```

```
integer, allocatable, dimension(:) :: urplaquette ! Urform des Loop
```

```
integer, allocatable, dimension(:, :) :: plaquette ! Alle moeglichen Loops
```

```
integer, allocatable, dimension(:) :: pplaquette ! P-Transformierte
```

```
integer, allocatable, dimension(:) :: cplaquette ! C-Transformierte
```

```
integer, allocatable, dimension(:) :: cpplaquette ! C-P-Transformierte
```

```
integer, allocatable, dimension(:, :, :) :: basis ! Basis
```

```
integer, dimension(1:96, 1:4) :: basisv ! Indices B.-El'te
```

```
integer, allocatable, dimension(:, :, :) :: base ! wie Basis
```

```
integer, allocatable, dimension(:, :) :: basev ! wie basisv
```

```
integer, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: transformation
```

```
! Transformationsmatrizen fuer Loops
```

```
integer, dimension(-3:3, 1:96) :: transform
```

```
! Transformationstabelle fuer Links
```

```
integer, dimension(1:96, 1:96) :: matrix=0
```

```
! Transformationsmatrix fuer alle Loops
```

```
integer, dimension(0:4) :: vorzeichen
```

```
! Vorzeichen in dem PC-invarianten Loop
```

```
integer, dimension(1:4) :: ident ! Vor Ort erklart
```

```
integer :: p,c ! Indices fuer P- bzw. C- Paritaet
```



```

integer, dimension(-1:1,-1:1,1:10) :: charakter
  ! Charaktere der Transformations-Klassen
integer, dimension(1:4) :: baseprime ! Basis'
integer, dimension(-1:1,1:5,1:10) :: chartab
  ! Charaktertabelle der vollen kub. Gruppe
integer, dimension(1:5,-1:1,-1:1) :: a =0 ! Irreduzibler Darstellungsgehalt
integer, dimension(1:10) :: nmu ! n_mue, Vektor der Klaasengroessen
integer, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: cmat
real, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: cmatr
complex, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: Amat
complex, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: eval
integer, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: Amatint
integer, allocatable, dimension(:, :, :, :, :) :: evalint
real :: little

! Initialisierung der Klassengroesse

data nmu (1:10) /1,6,8,6,3,1,6,8,6,3/

! Initialisierung der Charaktertabelle der vollen kub. Gruppe Oh

data chartab (1,1,1:5) /1, 1, 1, 1, 1/
data chartab (1,2,1:5) /1, -1, 1, -1, 1/
data chartab (1,3,1:5) /2, 0, -1, 0, 2/
data chartab (1,4,1:5) /3, -1, 0, 1, -1/
data chartab (1,5,1:5) /3, 1, 0, -1, -1/

chartab (1,1:5,6:10) = chartab (1,1:5,1:5)
chartab (-1,1:5,1:5) = chartab (1,1:5,1:5)
chartab (-1,1:5,6:10) = -chartab (1,1:5,1:5)

! Initialisierung der transform-Tabelle, die einzelne Links transformiert
data transform (0,1:24) /24 * 0/
data transform (1,1:24) &
  /1,1,-3,2,1,3,-2,1,-1,-1,2,3,-2,3,-3,-2,-3,2,2,-2,3,-3,-1,-1/
data transform (2,1:24) &
  /2,3,2,-1,-3,2,1,-2,2,-2,-3,-1,3,1,1,-3,-1,3,1,-1,-2,-2,3,-3/
data transform (3,1:24) &
  /3,-2,1,3,2,-1,3,-3,-3,3,-1,-2,-1,2,-2,1,2,1,-3,-3,1,-1,2,-2/

transform (1,25:48) = -transform(1,1:24)
transform (2,25:48) = -transform(2,1:24)
transform (3,25:48) = -transform(3,1:24)

```

```

transform (-1,1:24) = -transform(1,1:24)
transform (-2,1:24) = -transform(2,1:24)
transform (-3,1:24) = -transform(3,1:24)

transform (-1,25:48) = -transform(-1,1:24)
transform (-2,25:48) = -transform(-2,1:24)
transform (-3,25:48) = -transform(-3,1:24)

transform (-3:3,49:96) = transform (-3:3,1:48)

! ***** Files oeffnen

write (*,*) "Datei fuer Eingabe?"
read (*,*) eingabedatei
open (UNIT=30, FILE=eingabedatei, STATUS="OLD", ACTION="READ", IOSTAT=ios)
if (.NOT. ios == 0) then
  write (*,*) "Fehler beim Oeffnen der Eingabedatei"
end if

write (*,*) "Datei fuer Ausgabe?"
read (*,*) ausgabedatei

open (UNIT=31, FILE=ausgabedatei, STATUS="NEW", ACTION="WRITE", IOSTAT=ios)
if (.NOT. ios == 0) then
  write (*,*) "Fehler beim Oeffnen der Ausgabedatei"
end if

! ***** Eingaben einlesen

read (30,*) links
  ! Am Anfang der Datei steht die Anzahl der Links und Majoranas

! Groessenzuweisungen auf Anzahl der Links und Majoranas:
allocate (urplaquette (1:links))
allocate (plaquette (1:96,1:links))
allocate (basis (1:96,1:4,1:links))
allocate (pplaquette (1:links))
allocate (cplaquette (1:links))
allocate (cpplaquette (1:links))

do i=1,links ! Einlesen der Urform des Loops aus Datei
  read (30,*) urplaquette (i)
end do

```

```

! ***** Rechnung

! Alle moeglichen Loops aus der Urform berechnen
do i=1,48
  do n=1,links
    plaquette (i,n) = transform (urplaquette(n),i)
  end do
end do

do i=1,48    ! Die C-gespiegelten Plaquetten
  plaquette (i+48,1) = plaquette (i,1)
  plaquette (i+48,2:links) = plaquette (i,links:2:-1)
end do

! Transformationsverhalten berechnen
do k=1,48
  do j=1,96
    do i=1,96
      gleich = .FALSE.
      do m=0,links-1
! m ist der Offset fuer Reihenfolge der Zyklischen Links einer Plaquette
        gleichlink=.TRUE.
! Alle Links muessen uebereinstimmen, damit die Plaquetten gleich sind
        do l=1,links
          n=l+m
          if (n>links) n=n-links
          if (plaquette(i,n)/=transform(plaquette(j,l),k)) then
            gleichlink=.FALSE.
          end if
        end do
        gleich = gleich .OR. gleichlink
      end do
      if (gleich .AND. matrix (j,k)==0) then
        matrix (j,k) = i
        ! Plaquette j durch Transformation k in Plaquette i
        liste(i)=.TRUE.
      end if
    end do
  end do
end do
end do

```

```
! P-C-invariante Basis berechnen
```

```
liste2=liste
```

```
k=0 ! k zaehlt die Anz. der Basiselemente
```

```
do i=1,96
```

```
  if (liste2(i)) then
```

```
    liste2(i)=.FALSE.
```

```
    k=k+1
```

```
    pplaquette(1:links)=-plaquette(i,1:links)
```

```
    cplaquette(1)=-plaquette(i,1)
```

```
    cplaquette(links:2:-1)=-plaquette(i,2:links)
```

```
    cpplaquette(1)=-pplaquette(1)
```

```
    cpplaquette(links:2:-1)=-pplaquette(2:links)
```

```
    basis (k,1,1:links) = plaquette(i,1:links)
```

```
    basisv (k,1)=i
```

```
  do j=1,96
```

```
    if (liste(j)) then
```

```
      psymm = .FALSE.
```

```
      csymm = .FALSE.
```

```
      cpsymm = .FALSE.
```

```
    do m=0,links-1
```

```
      psymmmlink=.TRUE.
```

```
      csymmmlink=.TRUE.
```

```
      cpsymmmlink=.TRUE.
```

```
      do l=1,links
```

```
        n=l+m
```

```
        if (n>links) n=n-links
```

```
        if (pplaquette(n)/=plaquette(j,l)) psymmmlink=.FALSE.
```

```
        if (cplaquette(n)/=plaquette(j,l)) csymmmlink=.FALSE.
```

```
        if (cpplaquette(n)/=plaquette(j,l)) cpsymmmlink=.FALSE.
```

```
      end do
```

```
      psymm = psymm .OR. psymmmlink
```

```
      csymm = csymm .OR. csymmmlink
```

```
      cpsymm = cpsymm .OR. cpsymmmlink
```

```
    end do
```

```

    if (psymm) then
      if (basisv(k,2)==0) then
        basis (k,2,1:links) = plaquette (j,1:links)
        basisv (k,2)=j
      end if
      liste2 (j) = .FALSE.
    end if

    if (csymm) then
      if (basisv(k,3)==0) then
        basis (k,3,1:links) = plaquette (j,1:links)
        basisv (k,3)=j
      end if
      liste2 (j) = .FALSE.
    end if

    if (cpsymm) then
      if (basisv(k,4)==0) then
        basis (k,4,1:links) = plaquette (j,1:links)
        basisv (k,4)=j
      end if
      liste2 (j) = .FALSE.
    end if
  end if
end do
end if
end do

allocate (basev (1:k,1:4))    ! kurzer Vektor ohne Nullen am Ende
allocate (base (1:k,1:4,1:links))

do i=1,k
  basev (i,1:4) = basisv (i,1:4)
  base (i,1:4,1:links) = basis (i,1:4,1:links)
end do

! Transformationsverhalten und Charaktere der Basis berechnen

allocate(transformation(1:96,1:k,1:k,-1:1,-1:1))
allocate(Amat(1:5,1:k,1:k,-1:1,-1:1))
allocate(Amatint(1:5,1:k,1:k,-1:1,-1:1))
allocate(eval(1:5,1:k,-1:1,-1:1))
allocate(evalint(1:5,1:k,-1:1,-1:1))
allocate(cmat(1:5,1:k,1:k,-1:1,-1:1))

```

```

allocate(cmatr(1:5,1:k,1:k,-1:1,-1:1))

do p=-1,1,+2
  do c=-1,1,+2
    vorzeichen(0)=0
    vorzeichen(1)=1
    vorzeichen(2)=p
    vorzeichen(3)=c
    vorzeichen(4)=p*c
    do trans=1,96

      do i=1,k
        do l=1,4
          baseprime(l)=matrix(basev(i,l),trans)
        end do

        do j=1,k
          ident=0
          do l=1,4
            do m=1,4
              if (baseprime(l)==basev(j,m)) then
                ident(m)= 1
              end if
            end do
          end do
          if (ident(1)/=0) then
            transformation(trans,i,j,p,c) = vorzeichen(ident(1)) &
              * p*vorzeichen(ident(2)) *c* vorzeichen(ident(3))
          end if
        end do
      end do
    end do
  end do
end do

! Charaktere bestimmen

do p=-1,1,+2
do c=-1,1,+2
do n=1,k
  charakter(p,c,1) = charakter(p,c,1) + transformation(1,n,n,p,c)
  charakter(p,c,2) = charakter(p,c,2) + transformation(19,n,n,p,c)
  charakter(p,c,3) = charakter(p,c,3) + transformation(11,n,n,p,c)
  charakter(p,c,4) = charakter(p,c,4) + transformation(2,n,n,p,c)

```

```

charakter (p,c,5) = charakter (p,c,5) + transformation (8,n,n,p,c)
charakter (p,c,6) = charakter (p,c,6) + transformation (25,n,n,p,c)
charakter (p,c,7) = charakter (p,c,7) + transformation (43,n,n,p,c)
charakter (p,c,8) = charakter (p,c,8) + transformation (36,n,n,p,c)
charakter (p,c,9) = charakter (p,c,9) + transformation (26,n,n,p,c)
charakter (p,c,10) = charakter (p,c,10) + transformation (33,n,n,p,c)
end do
end do
end do

```

```
! irred. Darstellung berechnen
```

```

do c=-1,1,+2
  do p=-1,1,+2
    do i=1,5
      do j=1,10 ! Formel

          a(i,p,c) = a(i,p,c) + nmuj * charakter(p,c,j) &
            * chartab(p,i,j)

      end do
      a(i,p,c) = a(i,p,c)/48

    end do
  end do
end do

```

```
! Darstellungsmatrizen klassenweise aufsummieren
```

```

do p=-1,1,+2
do c=-1,1,+2

! Klasse E
cmat(1,1:k,1:k,p,c) = transformation (1,1:k,1:k,p,c)

! Klasse C2
do i=19,24
  cmat(2,1:k,1:k,p,c) = cmat(2,1:k,1:k,p,c) + &
    transformation (i,1:k,1:k,p,c)
end do

```

```

! Klasse C3
do i=11,18
  cmat(3,1:k,1:k,p,c) = cmat(3,1:k,1:k,p,c) + &
    transformation (i,1:k,1:k,p,c)
end do

! Klasse C4
do i=2,7
  cmat(4,1:k,1:k,p,c) = cmat(4,1:k,1:k,p,c) + &
    transformation (i,1:k,1:k,p,c)
end do

! Klasse C24
do i=8,10
  cmat(5,1:k,1:k,p,c) = cmat(5,1:k,1:k,p,c) + &
    transformation (i,1:k,1:k,p,c)
end do

end do
end do

! (Block) diagonalisieren

do p=-1,1,+2
do c=-1,1,+2

  do i=1,k
    cmatr(2,i,1:k,p,c) = real(cmat(2,i,1:k,p,c))
  end do

  call evcrg (k,cmatr(2,1:k,1:k,p,c),k,eval(2,1:k,p,c),Amat(2,1:k,1:k,p,c),k)

  do i=1,k
    little=1
    do j=1,k
      if (abs(real(Amat(2,j,i,p,c)))>0.1 .AND. abs(real(Amat(2,j,i,p,c)))<little)&
        little=abs(real(Amat(2,j,i,p,c)))
    end do
    evalint(2,1:k,p,c)=nint(real(eval(2,1:k,p,c)))
    Amatint(2,1:k,i,p,c)=nint(real(Amat(2,1:k,i,p,c))*(1.0/little))
  end do

end do
end do

```



```

! ***** Ausgaben

write (31,*) "Basis aus  $P$ - und  $C$ -invarianten Loop-Operatoren"
write (31,*) "\begin{itemize}"

do i=1,k
write (char,"(I2)") i
aus14(0)=" \item  $0_{\text{char}}$  //char
aus30(0)=aus14(0)//"\pm}^{\pm} = ["
do j=1,links
write (char,"(I2)") basis (i,1,j) ! P-C-invariante Basis
if (j<links) then
aus14(j) = char//", "
else
aus14(j) = char//"] _{\pm}$"
end if

end do
write (31,*) aus30(0),aus14(1:links)
end do

write (31,*) "\end{itemize}"
write (31,*) "Dimension von  $\{\mathcal{R}\}^{\text{PC}}: " ,k, "\backslash" !Dimension der Darstellung
write (31,*) "Irreduzible Anteile der Darstellung:\backslash"
write (31,*) "\begin{center}"
write (31,*) "\begin {tabular}{|l|cccc|}"
write (31,*) "\hline"
write (31,*) "irred. Darst. von  $0_{\text{h}}$  &  $A_1^{\text{PC}}$  &  $A^{\text{PC}}_2$  &  $E^{\text{PC}}$  &
&  $T^{\text{PC}}_1$  &  $T^{\text{PC}}_2$  \backslash\backslash"
write (31,*) "Dim. der Darstellung&1&1&2&3&3\backslash\backslash"
write (31,*) "\hline"
do p=1,-1,-2
do c=1,-1,-2

write (char,"(I2)") i
aus5(0)="$P="
if (p==1) then
aus10(0)=aus5(0)//"+1,C="
else
aus10(0)=aus5(0)//"-1,C="
end if
if (c==1) then
aus14(0)=aus10(0)//"+1$&"$ 
```

```

else
aus14(0)=aus10(0)//"-1$&"
end if

do j=1,5
write (char,"(I2)") a(j,p,c) !irreduzible Anteile
if (j<5) then
aus6(j) = char//"&"
else
aus6(j) = char//"\\"
end if
end do
write (31,*) aus14(0),aus6(1:5)

end do
end do
write (31,*) "\hline \end{tabular} \end{center}"

write (31,*) "Orthonormalbasis: \\"
do p=1,-1,-2
do c=1,-1,-2
if (p==1) pind="+"
if (p==-1) pind="-"
if (c==1) cind="+"
if (c==-1) cind="-"

write (31,*) "$P=",pind,"1,C=",cind,"1$\\"
write (31,*) "Eigenwerte: "
do i=1,k-1
write (31,*) evalint(2,i,p,c),"," ! Eigenwerte
end do
write (31,*) evalint(2,k,p,c),"\\"

write (31,*) "\begin{center}"
if (k==6) then
write (31,*) "\begin{tabular}{|c|cccccc|} \hline"
write (31,*) "Loop-Op.& $0_{1",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{2",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{3",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{4",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{5",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{6",cind,"}^",pind,"$\\"
write (31,*) "\hline"

```

```

end if
if (k==12) then
write (31,*) "\begin{tabular}{|c|cccccccccc|} \hline"
write (31,*) "Loop-0p.& $0_{1",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{2",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{3",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{4",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{5",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{6",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{7",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{8",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{9",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{10",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{11",cind,"}^",pind,"$ &"
write (31,*) "$0_{12",cind,"}^",pind,"$\\\"
write (31,*) "\hline"
end if

do i=1,k
write (31,*) evalint(2,i,p,c),"&"
do j=1,k-1
write (31,*) Amatint(2,j,i,p,c),"&" ! Orthonormalbasis
end do
write (31,*) Amatint(2,k,i,p,c),"\\\"
end do
write (31,*) "\hline"
write (31,*) "\end{tabular}"
write (31,*) "\end{center}"

end do
end do

! ***** Files schliessen

close (30)
close (31)

end program transformationimsl

```


Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Volume I, Academic Press, London, 1984
- [2] W. Miller, *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972
- [3] M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, 1964
- [4] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985
- [5] F. Gürsey, *Introduction to Group Theory*, in Relativity, Groups and Topology, Les Houches Conference 1963, ed. De Witt and De Witt, New York, 1964
- [6] M. Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg, 1998
- [7] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994
- [8] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories, An Introduction*, World Scientific, Singapore, 1992
- [9] K. G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, Part A, p. 69
- [10] F. Heitger, *Darstellungstheorie der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2000
- [11] B. Berg, A. Billoire, *Excited Glueball States in Four-Dimensional $SU(3)$ Lattice Gauge Theory*, Phys. Lett. B114 (1982) 324
- [12] B. Berg, A. Billoire, *Glueball Spectroscopy in 4d $SU(3)$ Lattice Gauge Theory(I)*, Nucl. Phys. B221 (1983) 109
- [13] private Kommunikation mit Prof. Dr. G. Münster
- [14] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer, 1976
- [15] S. L. Altmann, A. P. Cracknell, *Lattice Harmonics I. Cubic Groups*, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 19

- [16] S. L. Altmann, *Group Theory*, in: Quantum Theory II, ed. D. R. Bates, Academic Press, 1962
- [17] E. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atom-spektren*, Vieweg, Braunschweig, 1931, reprinted by Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1951
- [18] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, 1997
- [19] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-Matrix*, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [20] Y. Golfand, E. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P Invariance*, JETP Lett. 13 (1971) 323
- [21] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, Nucl. Phys. B88 (1975) 257
- [22] G. Veneziano, S. Yancielowicz, *An Effective Lagrangian for the Pure $N = 1$ Super-symmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. 113B (1982) 231
- [23] R. C. Johnson, *Angular Momentum on a Lattice*, Phys. Lett. B114 (1982) 147
- [24] Q. Ho-Kim, P. Xuan Yem, *Elementary Particles and Their Interactions*, Springer, 1998
- [25] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996
- [26] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Rev. Ed., Addison-Wesley, 1994
- [27] J. Fuchs, Chr. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press, 1997
- [28] T. Galla, *Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten in einer diskretisierten $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1999
- [29] T. Kugo, *Eichtheorien*, Springer, 1997
- [30] Richard J. Hanson, R. Lehoucq, J. Stolle, and A. Belmonte , *Improved performance of certain matrix eigenvalue computations for the IMSL/MATH Library*, in IMSL Technical Report 9007, IMSL Houston, 1990
- [31] IMSL , *IMSL MATH/LIBRARY User's Manual, Version 2.0*, IMSL Houston, 1991
- [32] A. Feo, R. Kirchner, I. Montvay, A. Vladikas, *Low-energy features of $SU(2)$ Yang-Mills theory with light gluinos*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 83 (2000) 670-672

Danksagung

Zum Abschluss der Diplomarbeit möchte ich all denen meinen Dank aussprechen, die mir während meines Studiums und bei der Anfertigung dieser vorliegenden Arbeit unterstützend und ermutigend zur Seite gestanden haben.

Namentlich erwähnen möchte ich insbesondere

- an erster Stelle meine Eltern Doris und Samuel Johnson, deren Unterstützung ich mir jederzeit sicher sein konnte und die mir eine sorgenfreie Zeit während des Studiums ermöglicht haben.
- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster, der mit seinen Kursvorlesungen im vierten bis siebten Semester mein Interesse für die theoretische Physik vertiefte und sich mit einem interessanten Themenvorschlag als Betreuer dieser Arbeit zur Verfügung stellte.
- Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für die Bereitschaft, die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen.
- meinen Zimmerkollegen Björn Schwentker, Enno Scholz und Sönke Wissel, sowie Burghard Grüter für das gute Arbeitsklima und die Diskussionen über die Welt.
- und zu guter Letzt meiner Freundin Anke Förster, für die Geduld während der Fertigstellung dieser Arbeit, für das detaillierte Korrekturlesen, für das brennen der beiliegenden CD-ROM, und dafür, dass sie mir die Gewissheit gab: Du schaffst es!

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt
und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

(Diese Version weicht geringfügig vom Original ab.)

Münster, im Februar 2002

