

Das Amplitudenverhältnis  
der Korrelationslänge  
in 3-Loop-Ordnung  
im dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell

Als Diplomarbeit im August 1995 vorgelegt von  
Christoph Gutsfeld

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik I  
Wilhelm-Klemm-Straße 9  
48149 Münster



Das Amplitudenverhältnis  
der Korrelationslänge  
in 3-Loop-Ordnung  
im dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell

Als Diplomarbeit im August 1995 vorgelegt von  
Christoph Gutsfeld

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik I  
Wilhelm-Klemm-Straße 9  
48149 Münster



Meiner Familie gewidmet



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>5</b>
1.1 Kritische Phänomene . . . . .	5
1.2 Landau-Ginzburg-Modell . . . . .	6
1.3 $\phi^4$ -Theorie . . . . .	7
<b>2 Korrelationsfunktionen</b>	<b>9</b>
2.1 Erzeugende Funktionale . . . . .	9
2.2 Loop-Entwicklung . . . . .	11
2.3 Diagrammanzahl . . . . .	12
<b>3 Renormierung</b>	<b>17</b>
3.1 Renormierungsschema . . . . .	17
3.2 Renormierungsgruppe . . . . .	21
3.2.1 Callan-Symanzik-Gleichung . . . . .	21
3.3 Regularisierung . . . . .	23
<b>4 Integrationsmethoden</b>	<b>25</b>
4.1 Partielle Integration . . . . .	26
4.2 Berechnungen in 1- und 2-Loop . . . . .	29
4.3 3-Loop-Graphen . . . . .	31
4.4 Impulsableitungen . . . . .	34
4.5 Divergente Graphen . . . . .	36
<b>5 Korrelationslänge</b>	<b>39</b>
5.1 Kritisches Amplitudenverhältnis . . . . .	39
5.2 Reihenergebnisse . . . . .	41
5.2.1 Symmetrische Phase . . . . .	42
5.2.2 Gebrochene Phase . . . . .	43
5.2.3 $\beta$ -Funktion . . . . .	44

5.2.4	$\nu$ -Funktion . . . . .	46
5.2.5	Amplitudenverhältnis . . . . .	48
5.2.6	Diskussion . . . . .	50
5.3	Experimentelle Bestimmung . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Suszeptibilität</b>	<b>53</b>
6.1	Amplitudenverhältnis . . . . .	53
6.2	$\gamma$ -Funktion . . . . .	54
6.3	Ergebnis . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Résumé</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Shanks-Extrapolation</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Borel-Transformation</b>	<b>62</b>
<b>C</b>	<b>Liste der 1-3 Loop-Graphen</b>	<b>66</b>

# Einleitung

Die kürzlich experimentell realisierte Bose-Kondensation, bei der im Nanokelvin-Bereich eine plötzliche Verdichtung im Phasenraum beobachtet wurde [AEM95], zeigt, daß die Physik der Phasenübergänge nach wie vor ein hochaktuelles Thema ist. Ihr Anwendungsbereich erstreckt sich vom Ferromagnetismus in der Festkörperphysik bis zu den Übergängen bei extremen Temperaturen und Dichten im frühen Universum. Die Beschreibung solcher kritischen Phänomene resultiert in dem Begriff der *Universalität*. Damit ist gemeint, daß die ein System am Phasenübergang zweiter Ordnung beschreibenden Größen – wie die Korrelationslänge und die kritischen Exponenten – nicht von den mikroskopischen Eigenschaften des zugrundeliegenden physikalischen Modells, sondern nur von globalen Größen, wie der Raum-Zeit-Dimension oder der Dimension des Ordnungsparameters, abhängen.

Der erfolgreiche Ansatz zur Beschreibung dieses Phänomens erfolgte mit der Kadannoffschen Block-Spin-Skalierung und resultierte in der Wilsonschen Renormierungsgruppe [WK74]. Die zugrundeliegende Idee ist die Skaleninvarianz der physikalischen Gleichungen am kritischen Punkt, d.h. die mikroskopische Längenskala, z.B. die Gitterkonstante beim Ferromagneten, ist vernachlässigbar gegenüber der Korrelationslänge, die am kritischen Punkt gegen Unendlich geht, als relevanter Skala.

Der einfachste feldtheoretische Ansatz zur Beschreibung von Phasenübergängen ist das  $\phi^4$ -Modell. In diesem werden ursprünglich Berechnungen in 4 Dimensionen bei der kritische Temperatur  $T = T_c$  durchgeführt. Universelle Größen werden hierbei durch  $\epsilon$ -Entwicklungen in der nicht-ganzzahligen Dimension  $D = 4 - \epsilon$  bestimmt [WF72]. Das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell ist die massive, dreidimensionale, skalare  $\phi^4$ -Theorie [PAR80]. Dabei wird das System für  $T \neq T_c$  betrachtet mit nicht verschwindender renormierter Masse.

Thema dieser Diplomarbeit ist das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge und der Suszeptibilität. Ihre Bestimmung erfolgt über eine Verknüpfung von symmetrischer und gebrochener Phase. Der Zusammenhang wird dabei durch Einführung einer gemeinsamen renormierten Kopplung  $\bar{u}_R$  realisiert, von der die renormierten Kopplungen beider Phasen in eindeutiger Weise abhängen [MH94]. Sämtliche Berechnungen erfolgen im Kontinuum unter Anwendung der dimensionellen Regularisierung.

Die Arbeit besteht im wesentlichen aus 3 Teilen:

Am Anfang erfolgt eine Einführung in die skalare Feldtheorie, in deren Verlauf auf die Korrelationsfunktionen und ihre störungstheoretische Behandlung eingegangen wird. Das verwendete Renormierungsschema wird erläutert, aus dem sich dann in der Callan-Symanzik-Gleichung als Renormierungsgruppengleichung die Renormierungsgruppenfunktionen ableiten.

Die Vorstellung der Integrationsmethoden, mit deren Hilfe die Feynman-Integrale der 3-Loop-Ordnung analytisch berechnet werden, bildet den mittleren Teil. Sämtliche Graphen inklusive ihrer Ergebnisse sind in Anhang C aufgelistet.

Im dritten Teil werden die Bestimmungsgleichungen für die Amplitudenverhältnisse formuliert. Die Ergebnisse für die Korrelationslänge und die Suszeptibilität werden als Reihenergebnisse präsentiert und numerisch am Fixpunktwert der Kopplung ausgewertet.

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Kritische Phänomene

*Ferromagnetische* Stoffe haben die Eigenschaft, daß sie an der Curie-Temperatur ( $\sim 10^3 K$  für Eisen) von einem paramagnetischen Zustand in einen Zustand spontaner Magnetisierung wechseln. Ein solcher Phasenübergang kann sowohl mit Mitteln der statistischen Mechanik, als auch in der Quantenfeldtheorie beschrieben werden. Das Basis-Modell der Statistik hierbei ist das Ising-Modell, welches einen Phasenübergang über Spin-Spin-Wechselwirkungen zu beschreiben versucht:

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{+\beta \sum_{\langle S_i S_j \rangle} JS_i S_j} . \quad (1.1)$$

Erst im zweidimensionalen Ising-Modell wird jedoch ein Phasenübergang bei einer Temperatur  $T_c \sim 2.27J$  erfolgreich beschrieben [ONS44]. Mit dem Potts-Modell liegt eine klassische Alternative vor [YEO92]. Auf jedem Gitterplatz  $i$  existiert eine  $\sigma_i$ -wertige Variable mit  $\sigma_i = 1 \dots q$ . Die zugehörige Hamiltonfunktion hat die Form

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} . \quad (1.2)$$

Es existieren für das System somit  $q$  gleichwertige Grundzustände vor. Für  $q = 2$  ist das Potts-Modell äquivalent zum Ising-Modell.

Bei Übergängen von Normalleitern zu Supraleitern oder  $HeI$  zu  $HeII$  ergeben sich weitere kritische Phänomene, die experimentell gut zugänglich sind. Die bei diesen *Phasenübergängen zweiter Ordnung* auftretenden divergierenden Observablen, wie die Suszeptibilität, Wärmekapazität oder Korrelationslänge, lassen sich bei Annäherung an die kritische Temperatur  $T_c$  durch folgenden Ansatz beschreiben:

$$A|_{t \rightarrow 0} \sim A_0 |t|^{-\lambda} \quad (1.3)$$

$$t := \frac{T - T_c}{T_c} . \quad (1.4)$$

Die gemessenen kritischen Exponenten für die obigen Beispiele stimmen trotz der Unterschiedlichkeit der betrachteten Systeme annähernd überein. Insbesondere für

den kritischen Exponenten  $\nu$  der Korrelationslänge erhält man einen Bereich von 0.62–0.69 [BDFN92]. Da diese Ergebnisse trotz der Unterschiedlichkeit der Systeme annähernd gleich sind, hat man einen Hinweis auf die Universalität der Exponenten gegeben. Mit der Widomschen Skalierungshypothese, daß die singulären Anteile der thermodynamischen Potentiale homogene Funktionen sind, lassen sich Skalengesetze aufstellen. Diese sind Gleichungen, bzw. in der Thermodynamik Ungleichungen, mit denen, ausgehend von zwei bestimmten kritischen Exponenten, alle anderen hergeleitet werden können. Ist die Suszeptibilität  $\chi$  gegeben durch  $\chi \sim Ct^{-\gamma}$ , so gilt u.a.

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (\text{Fisher}) \quad (1.5)$$

$\eta$  : anomale Dimension .

## 1.2 Landau-Ginzburg-Modell

Mit dem Landau-Ginzburg-Modell liegt ein statistisches Modell mit einer kontinuierlichen, mehrdimensionalen Spinvariablen  $\phi(x)$  zur Beschreibung von Phasenübergängen vor [BDFN92]:

$$H(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}r_0\phi^2 + \frac{1}{4!}u_0\phi^4 . \quad (1.6)$$

Für ein  $n$ -komponentiges Feld  $\phi$  ist diese Hamiltonfunktion invariant unter  $O(n)$ -Transformationen. Das beschriebene System wird in der Nähe eines kritischen Punktes betrachtet, an dem die Magnetisierung klein ist und langreichweitige Fluktuationen des Systems ausschlaggebend sind. Damit ist es sinnvoll, für die Taylorentwicklung von  $\phi$  und  $\nabla\phi$  in der Hamiltonfunktion nur die niedrigsten Terme anzusetzen.

Im Gegensatz zum Ising-Modell wird durch den Term  $(\nabla\phi)^2$  der Tatsache Rechnung getragen, daß aufgrund der Dipol-Dipol-Wechselwirkung für große räumliche Spinfluktuationen die potentielle Energie des Systems groß ist. Die Zustandssumme des Systems ergibt sich durch Aufsummierung aller möglichen Spinkonfigurationen, wobei außerdem der Einfluß eines äußeren Magnetfeldes  $\mathbf{B}$  berücksichtigt wird:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^3x (H(\phi) - \mathbf{B}\phi) \right\} . \quad (1.7)$$

Das System wird in der Nähe des Phasenüberganges betrachtet, wobei der übliche Vorfaktor  $\beta = 1/kT$  in die Hamiltonfunktion mit einbezogen wird.

Die Landau-Näherung ist eine Sattelpunktsnäherung des Funktionalintegrals. Der Exponent wird maximal für  $\phi = \phi' = \text{const}$  und  $\phi' \parallel \mathbf{B}$ . Diese Konstante  $\phi'$  beschreibt gerade die Magnetisierung des Systems  $\mathbf{M} \equiv \phi'$ . Damit ist

$$Z = \exp \left( -V \left\{ \frac{1}{2}r_0\mathbf{M}^2 + \frac{1}{4!}u_0\mathbf{M}^4 - \mathbf{B}\mathbf{M} \right\} \right) . \quad (1.8)$$

Mit einer konstanten Spinvariablen ist es nicht überraschend, daß sich in dieser Näherung die gleichen kritischen Werte, u.a.  $\nu = 1/2$ , wie in der mean-field-Theorie

ergeben [BDFN92]. Der Nachteil des Landau-Ansatzes liegt in der Nichtberücksichtigung der Fluktuationsbeiträge des Ordnungsparameters  $\phi$  um den Erwartungswert  $\mathbf{M}$ , wodurch gerade am kritischen Punkt die Physik des Systems nur unzureichend wiedergegeben wird.

### 1.3 $\phi^4$ -Theorie

Als einfaches und geeignetes Modell zur Beschreibung kritischer Phänomene hat sich die  $\phi^4$ -Theorie in drei bzw. vier Dimensionen erwiesen:

$$\mathcal{L}[\phi_0] = \mathcal{L}_0[\phi_0] + \mathcal{L}_{\mathcal{I}}[\phi_0] \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}_0[\phi_0] = \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi_0^2 \quad (1.10)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}[\phi_0] = \frac{g_0}{4!}\phi_0^4. \quad (1.11)$$

Die lokale Lagrange-Dichte setzt sich aus einem ungestörten Anteil  $\mathcal{L}_0$  mit einem skalaren, einkomponentigen, kontinuierlichen Feld  $\phi_0$  und einer Masse  $m_0$ , sowie aus einem (Selbst-) Wechselwirkungsanteil  $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  mit einer Kopplung  $g_0$  zusammen. Das Feld  $\phi_0 = \phi_0(x)$  hängt seinerseits von einem  $D$ -dimensionalen Ort  $x$  ab und fällt hinreichend schnell für  $x \rightarrow \infty$  ab, so daß gilt:

$$\int d^D x \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 = - \int d^D x \phi_0 \partial^2 \phi_0 \quad (D \leq 4). \quad (1.12)$$

Die beiden Parameter  $g_0$  und  $m_0$  sind in dieser Form unphysikalisch und bekommen eine physikalische Relevanz erst in ihren renormierten Größen  $m_R$  und  $g_R$ . Nach störungstheoretischer Betrachtung wird sich herausstellen, daß die renormierte Masse als Inverses der Korrelationslänge am Phasenübergang Null wird. Dahingegen entspricht die nackte Masse bei der kritischen Temperatur  $T_c$  einer kritischen Masse  $m_c^2$ , so daß man die Identität

$$t := \frac{T - T_c}{T_c} \equiv m_0^2 - m_c^2 \quad (1.13)$$

aufstellen kann.

Das Potential der  $\phi^4$ -Theorie

$$\mathcal{V} = m_0^2 \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 \quad (1.14)$$

nimmt sein Minimum bei  $\phi = 0$  an und ist invariant unter der Transformation  $\phi \rightarrow -\phi$ . Dieses Potential beschreibt eine *symmetrische Phase*, da es keine Vorzugsrichtung für das skalare Feld gibt.

Für  $m_0^2 < 0$  liegt das absolute Minimum nicht mehr im Nullpunkt, sondern bei

$$\phi_{min} = \sqrt{-3! \frac{m_0^2}{g_0}}, \quad (1.15)$$

so daß in diesem Fall eine *Phase gebrochener Symmetrie* vorliegt.

Durch Einführung eines Feldes  $\phi_{0-} = \phi_0 - \phi_{min}$  trägt man der gebrochenen Symmetrie Rechnung. Wird in der Lagrangedichte (1.9)  $\phi_0$  durch  $\phi_{0-}$  ersetzt, so ergibt sich:

$$\mathcal{L}_-[\phi_{0-}] = \mathcal{L}_{0-}[\phi_{0-}] + \mathcal{L}_{I-}[\phi_{0-}] \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}_{0-}[\phi_{0-}] = \frac{1}{2}(\partial\phi_{0-})^2 + \frac{1}{2}m_{0-}^2\phi_{0-}^2 \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_{I-}[\phi_{0-}] = -\frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0} + \frac{1}{3!}\sqrt{3g_0m_{0-}}\phi_{0-}^3(x) + \frac{g_0}{4!}\phi_{0-}^4 \quad (1.18)$$

$$m_{0-}^2 := -2m_0^2 > 0 . \quad (1.19)$$

Der  $\phi_0$ -unabhängige Term in der Lagrange-Dichte fällt im weiteren Verlauf bei einer Normierung heraus und muß daher nicht berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit betrachte ich nur das einkomponentige  $\phi^4$ -Modell in drei Dimensionen. Dieses liegt in der Universalitätsklasse des dreidimensionalen Ising-Modells. Mehrkomponentige Felder beschreiben andere Universalitätsklassen. Sie sind unabdingbar in nicht-abelschen bosonischen Eichtheorien zur Erzeugung massiver Eichbosonen (Higgs-Felder) durch Symmetriebrechung unter gleichzeitiger Erhaltung der Renormierbarkeit der Theorie (Higgs-Mechanismus) [BEL91]. Der Vorteil von drei Dimensionen gegenüber Rechnungen in vier Dimensionen liegt in der geringeren Anzahl der Feynman-Graphen mit einer oberflächlichen Divergenz.

# Kapitel 2

## Korrelationsfunktionen

### 2.1 Erzeugende Funktionale

Die grundlegende Größe zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen ist das Pfadintegral<sup>1</sup>  $Z$  mit einer euklidischen Wirkung  $S[\phi_0]$ :

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_0 \exp\{-S[\phi_0]\} \quad (2.1)$$

$$S[\phi_0] = \int d^D x (\mathcal{L}_0[\phi_0(x)] + \mathcal{L}_I[\phi_0(x)]) . \quad (2.2)$$

Dabei seien  $\mathcal{L}_0$  und  $\mathcal{L}_I$  durch (1.10) respektive (1.11) gegeben. Der Erwartungswert einer Größe  $F[\phi_0(z)]$  berechnet sich wie folgt:

$$\langle F[\phi_0(z)] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi_0 F[\phi_0(z)] \exp\{-S[\phi_0]\} . \quad (2.3)$$

Nach Einfügung eines Quellterms  $J\phi_0$  mit einer ortsabhängigen Quelle  $J = J(x)$  wird das Pfadintegral  $Z$  zum erzeugenden Funktional:

$$Z[J] = \exp\left\{-\int d^D x L_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} \int \mathcal{D}\phi_0 \exp\left\{-\int d^D x (L_0[\phi_0(x)] - J\phi_0)\right\} . \quad (2.4)$$

Die Green-Funktionen  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  als n-Punkt-Korrelationsfunktionen der Felder  $\phi_0(x)$  werden durch das Funktional  $Z[J]$  folgendermaßen “erzeugt”:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} Z[J] . \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Das Interessante an diesem Pfadintegral ist, daß eine Generation von Physikern damit hervorragende Resultate erzielt hat, obwohl es nicht eindeutig definiert, in dieser Form nicht geschlossen lösbar und in seiner Störungsentwicklung nicht konvergent ist.

Der Erwartungswert  $\langle \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) \rangle_0$  mit einem Gaußschen Maß ist der Feynman-Propagator  $\Delta(x_2 - x_1)$  (Der Index 0 steht für ein erzeugendes Funktional  $Z[J]$  ohne Wechselwirkungsterm ( $g \equiv 0$ ) in der Lagrangefunktion). So wie es hier schon praktiziert wird, werde ich mehrdimensionale Impulse und Orte nicht besonders hervorheben. Sofern es nicht eindeutig ist, werden ihre Beträge mit Großbuchstaben gekennzeichnet.

Zusammenhängende Green-Funktionen  $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \rangle_c$ , welche durch zusammenhängende Feynman-Graphen (siehe Kapitel 2.2) dargestellt werden, haben das erzeugende Funktional  $W[J]$ :

$$W[J] := \log \frac{Z[J]}{Z[0]} . \quad (2.6)$$

Dieses entspricht der freien Energie der klassischen, statistischen Mechanik.

Nach einer Legendre-Transformation erhält man die effektive Wirkung  $\Gamma[\phi_0]$ :

$$\Gamma[\phi_0] := W[J] - \int d^D x J \phi_0 . \quad (2.7)$$

Über dieses Funktional werden die sogenannten n-Punkt-Vertexfunktionen  $\Gamma^{(n)}$  definiert:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi_0(x_1) \dots \delta \phi_0(x_n)} \Gamma[\phi_0] \Big|_{\phi_0=0} . \quad (2.8)$$

Diese Funktionen werden graphisch durch 1-Particle-Irreducible(1PI)-Graphen dargestellt, die nicht durch Trennen einer Linie in zwei unzusammenhängende Teilgraphen zerfallen.

Normalerweise werden die Korrelationsfunktionen im Impulsraum betrachtet, weil der Propagator  $\Delta(k)$  als Fouriertransformierte von  $\Delta(x_2 - x_1)$  dort eine einfache Form besitzt:

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 + m_0^2} . \quad (2.9)$$

Sei  $\Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n)$  die Fouriertransformierte von  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , sowie  $\tilde{\Gamma}$  das Funktional  $\Gamma$ , dessen Felder  $\phi_0(x)$  bzw.  $J(x)$  durch ihre Fouriertransformierten ersetzt sind:

$$\phi_0(k) = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} e^{-ikx} \phi_0(x) . \quad (2.10)$$

Dann gilt

$$\Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = (2\pi)^{Dn} \frac{1}{\tilde{\Gamma}(0)} \frac{\delta^n}{\delta \phi_0(k_1) \dots \delta \phi_0(k_n)} \Big|_{\phi_0=0} \tilde{\Gamma}[\phi_0] . \quad (2.11)$$

Man erhält Vertexfunktionen, bei deren graphischer Darstellung die äußeren Beine "amputiert" sind, d.h. keinen Propagator im Integral liefern. Da diese Vertexfunktionen diejenigen sind, welche ich für die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge benötige, gebe ich nur hierfür die Regeln an, nach denen die Feynman-Graphen und damit die Integrale in n-ter Ordnung gebildet werden.

Während die Ein-Punkt-Funktion in der symmetrischen Phase identisch Null ist, liefert sie in der gebrochenen Phase die spontane Magnetisierung des Systems:

$$M = \langle \phi_0 \rangle . \quad (2.12)$$

Für die Definition der Renormierungskonstanten benötigt man noch Korrelationsfunktionen mit  $\frac{1}{2}\phi_0^2$ -Insertionen:

$$\begin{aligned} G^{(n,l)} &\equiv \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \frac{1}{2}\phi_0^2(y_1) \dots \frac{1}{2}\phi_0^2(y_m) \rangle \\ &:= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^{n+m}}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n) \delta K(y_1) \dots \delta K(y_m)} \Bigg|_{J=0, K=0} \exp - \int \left\{ S[\phi_0] - J\phi_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{K}{2}\phi_0^2 \right\} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hierbei ist  $K(x)$  eine weitere Quelle.

Die zugehörigen Vertexfunktion  $\Gamma^{(n,l)}$  ergeben sich analog nach Definition (2.8), wobei für das erzeugende Funktional  $\Gamma$  nur eine Legendretransformation bzgl. der Quelle  $J(x)$  durchgeführt wird.

## 2.2 Loop-Entwicklung

Funktionalintegrale der Form (2.1) lassen sich mit störungstheoretischen Methoden bestimmen. Dazu wird der Wechselwirkungsterm  $\exp\{-\int d^D x \mathcal{L}_I\}$  in eine Reihe nach dem Kopplungsparameter  $g_0$  entwickelt. Die Reihenelemente sind Integrationen über Erwartungswerte  $\langle \phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\dots \rangle_0$ , die nach einem Theorem von Wick in eine Summe von Integralen mit bestimmten numerischen Vorfaktoren zerfallen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int d^D x \langle \phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0^4(x) \rangle_0 &= \int d^D x \left\{ 3 \langle \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) \rangle_0 \langle \phi_0^2(x) \rangle_0^2 + \right. \\ &\quad \left. 12 \langle \phi_0(x_1)\phi_0(x) \rangle_0 \langle \phi_0(x_2)\phi_0(x) \rangle_0 \langle \phi_0^2(x) \rangle_0 \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diese Integrale sind demnach Integrationen über Produkte von Propagatoren. Sie lassen sich nach bestimmten Regeln (s.u.) graphisch darstellen. Dabei entspricht jedem Integral ein bestimmter "Feynman-Graph". Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} V_4 &:= \text{Anzahl der Vierervertices} \\ V_3 &:= \text{Anzahl der Dreiervertices} \\ E &:= \text{Anzahl der äußeren Beine} \\ I &:= \text{Anzahl der inneren Linien} \\ L &:= \text{Loop-Ordnung} \end{aligned}$$

lassen sich nach kurzen Überlegungen Beziehungen zwischen der Loop-Ordnung, die gleichzeitig die Anzahl der unabhängigen Integrationsimpulse darstellt, den externen Beinen und den Vertices aufstellen:

$$I = \frac{1}{2}(4V_4 + 3V_3 - E) \quad (2.15)$$

$$L = I - (V_3 + V_4 - 1) . \quad (2.16)$$

Nach Elimination von I in beiden Gleichungen erhält man

$$E + 2L = 2V_4 + V_3 + 2 . \quad (2.17)$$

Die Regeln zur Ermittlung der Vorfaktoren sind so angegeben, wie sie sich direkt aus Wicks Theorem ableiten lassen. Einfacher anwendbare Vorschriften findet man bei [BDFN92]. Der Begriff Ein-Teilchen-Irreduzibel muß für die gebrochene Phase genauer spezifiziert werden. Zu den 1PI-Anteilen von  $\Gamma^{(2)}(p)$  gehören ebenfalls Tadpole-Graphen, bei denen die äußeren Beine am gleichen Vertex ansetzen:

Tadpole-Graphen:



Ausgehend von den Graphen spricht man nicht mehr von Störungsordnung, sondern führt den Begriff der Loop-Ordnung ein. Nur für die 2-Punkt-Funktionen stimmt die Loop-Anzahl mit der Störungsordnung überein.

Zur Ermittlung der benötigten Graphen inkl. Vorfaktoren in der 3- und 4-Loop-Ordnung stand uns erfreulicherweise das Programm *qgraf* [NOG93] zur Verfügung.

## 2.3 Diagrammanzahl

Die durch das Programm *qgraf* ermittelten Graphen sind bzgl. ihrer Vollständigkeit und der Korrektheit ihrer Vorfaktoren überprüft worden. Dazu geht man über zu einer null-dimensionalen Feldtheorie [CLP78, IZ80], aus welcher sich die Summe der Graphen inklusive ihrer Symmetrie- und Permutationsfaktoren ergibt.

Bei der Entwicklung des Pfadintegrals (2.1) treten Terme der Form

$$\int \mathcal{D}\phi_0 \phi_0^m \exp -S_0$$

auf, wobei  $S_0$  der quadratische, wechselwirkungsfreie Anteil der Wirkung ist. Diese zerfallen nach Wicks Theorem in  $(m - 1)!!$  Terme, sofern  $m$  gerade ist. Betrachtet man andererseits das Integral

$$Z_n(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n e^{(-\frac{1}{2}x^2 + \tilde{S}_I(x))}$$

$$\tilde{S}_I(x) := \frac{\sqrt{g}}{3!} x^3 + \frac{g}{4!} x^4 ,$$

# Feynman-Regeln für $\Gamma(E)$

Konstruktion	In Loop-Ordnung L trägt jeder Graph mit		
			⋮
	$V_4$	$V_3$	E
	Vierervertices	Dreiervertices (nicht in sym. Phase)	externen Punkten
	bei, sofern $E + 2L = 2V_4 + V_3 + 2$ (nach (2.17)) .		
	Die Beine der Vertices werden auf alle mögliche Arten untereinander und mit den Punkten verbunden, wobei nur 1PI zusammenhängende Graphen in Frage kommen.		
Vorfaktor	Symmetriefaktor S	= Anzahl der Möglichkeiten, den Graphen aus den vorgegeben Vertices und Punkten aufzubauen für <i>ununterscheidbare</i> äußere Beine	
	Permutationsfaktor P	= Anzahl der Möglichkeiten, die äußeren Beine zu vertauschen, ohne daß diese Vertauschung durch Drehung oder Spiegelung des Graphen rückgängig gemacht werden kann	
	Vorfaktor	= $\frac{S \cdot P}{V_3!V_4!(4!)V_4(3!)V_3}$	
Integralbildung	Jede innere Linie	= $\Delta(k_i)$	
	Jeder Vierervertex	= $-g_0$	
	Jeder Dreiervertex	= $-m_0 \sqrt{3}g_0$	
	Jeder Vertex	= $\delta(\sum k_i)$	
	d.h. Impulserhaltung an jedem Vertex		
	Integration über alle Impulse $\int \prod_i \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D}$		

so erhält man nach einer Entwicklung der Exponentialfunktion folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^m e^{-\frac{1}{2}x^2} = \begin{cases} (m-1)!! & \text{m gerade} \\ 0 & \text{m ungerade} \end{cases} . \quad (2.18)$$

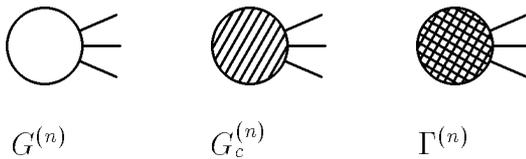
Daher verdient das Integral<sup>2</sup>  $Z_n$  die Bezeichnung ‘‘Graphen-zählendes’’ Integral für die gebrochene Phase [IZ80, S.464][CLP78]. Für die symmetrische Phase ist das Integral  $Z'_n(g)$  zu verwenden, welches identisch mit  $Z_n(g)$  ohne  $x^3$ -Anteil ist.

Die Vorfaktoren der Green-Funktionen  $G^{(n)}$  lassen sich damit aus der Reihenentwicklung von  $Z_n/Z_0$  bestimmen. Bezeichnet man mit  $N(G^{(n)})$  eine Reihenentwicklung in  $g$ , in welcher die Koeffizienten der Summe der Vorfaktoren der Graphen von  $G^{(n)}$  entsprechen, so erhält man für die Zweipunkt-Green-Funktion in der symmetrischen Phase:

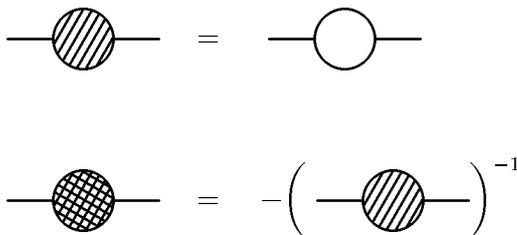
$$\begin{aligned} N(G^{(2)}) &= \frac{Z'_2}{Z'_0} \\ &= \frac{1 + \frac{g}{4!}5!! + \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4!)^2}9!! + \frac{1}{3!} \frac{g^3}{(4!)^3}13!! + O(g^4)}{1 + \frac{g}{4!}3!! + \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4!)^2}7!! + \frac{1}{3!} \frac{g^3}{(4!)^3}11!! + O(g^4)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}g + \frac{2}{3}g^2 + \frac{11}{8}g^3 + O(g^4) . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Damit ist  $11/8$  die Summe der Vorfaktoren in 3-Loop-Ordnung für  $G^{(2)}$ .

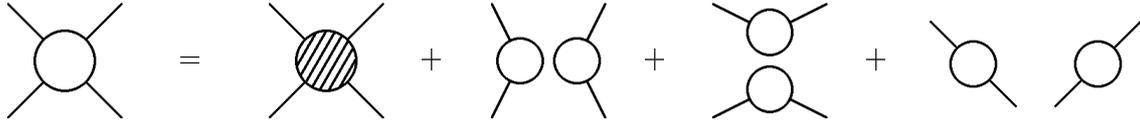
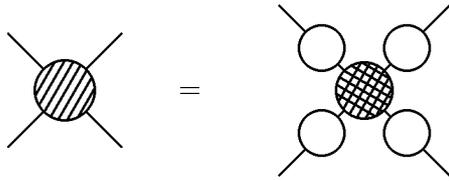
Aus den Zusammenhängen zwischen Vertex- und Green-Funktionen bestimme ich die entsprechenden Gleichungen für die Vertexfunktionen. Unter Benutzung der folgenden Darstellungen



und den Beziehungen in der **ungeordneten Phase**



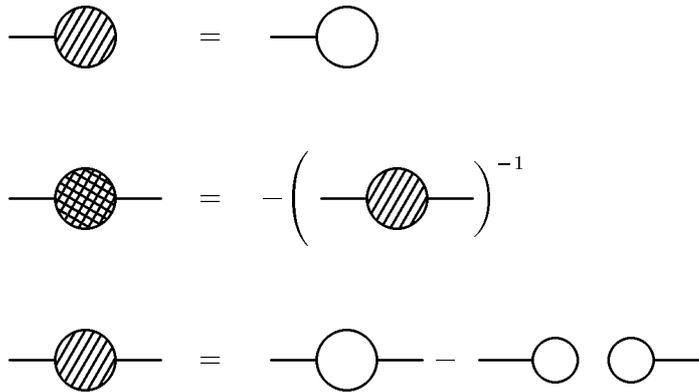
<sup>2</sup>Man beachte, daß der Wechselwirkungsterm rein positiv ist, womit eine Aufsummierung der Beträge der Vorfaktoren in jeder Ordnung erreicht wird.



erhält man

$$\begin{aligned}
 N(\Gamma^{(2)}) &= -N^{-1}(G^{(2)}) \\
 &= -1 + \frac{1}{2}g + \frac{5}{12}g^2 + \frac{5}{6}g^3 + \frac{115}{48}g^4 + \frac{625}{72}g^5 + \frac{10775}{288}g^6 + \frac{80275}{432}g^7 + O(g^8) \\
 N(\Gamma^{(4)}) &= \frac{N(G^{(4)}) - 3N^2(G^{(2)})}{N^4(G^{(2)})} \\
 &= g + \frac{3}{2}g^2 + \frac{21}{4}g^3 + \frac{45}{2}g^4 + \frac{1775}{16}g^5 + \frac{4905}{8}g^6 + \frac{119825}{32}g^7 + O(g^8) .
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die **geordnete Phase** bestimmen sich aus



$$\begin{aligned}
 N(G_e^{(1)}) &= N(G^{(1)}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{1/2} + \frac{31}{24}g^{3/2} + \frac{341}{48}g^{5/2} + \frac{22949}{384}g^{7/2} + \frac{1545307}{2304}g^{9/2} + O(g^{11/2}) \\
 N(\Gamma^{(2)}) &= -\frac{1}{N(G^{(2)}) - N^2(G^{(1)})}
 \end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{3}{2}g + \frac{73}{12}g^2 + \frac{611}{12}g^3 + \frac{172963}{288}g^4 + \frac{5128957}{576}g^5 + O(g^6)$$

Durch Entwicklung und Ableitung der effektiven (nulldimensionalen) Wirkung

$$N(G_c^{(n)}) = \frac{\partial^n}{\partial j^n} \log \left( \exp \left\{ \tilde{S}_I \left( \frac{\partial}{\partial j} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2}x^2 + jx \right\} \right) \Big|_{j=0}$$

erhält man eine andere Möglichkeit, die Reihen  $N(G_c^{(n)})$  für die zusammenhängenden Green-Funktionen zu bestimmen [NOG93] und die obigen Reihen zu verifizieren. Für kompliziertere Feldtheorien bietet sich eine rekursive Bestimmung der Reihen unter Verwendung der Dyson-Schwinger-Gleichungen an [CLP78]. Indem man die Kopplungsableitungen der erzeugenden, nulldimensionalen “Funktionalintegrale” mit den Dyson-Schwinger-Gleichungen verknüpft, erhält man nichtlineare Differentialgleichungen in der Kopplung  $g$  für die Vertexfunktionen. Diese lassen sich iterativ zu höheren Ordnungen  $g^n$  hin lösen.

# Kapitel 3

## Renormierung

### 3.1 Renormierungsschema

Bei der perturbativen Behandlung von Pfadintegralen treten divergente Integrale auf. In massiven Theorien sind dies UV-Divergenzen. Für physikalisch relevante Größen sind derartige Divergenzen unbrauchbar. Durch Einführung der renormierten Größen  $g_R$ ,  $m_R$  und  $\phi_R$  beseitigt man diese Divergenzen und erhält Reihenentwicklungen, die in jeder Ordnung endlich sind.

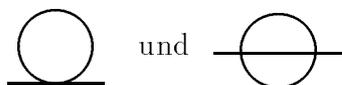
Bzgl. der Renormierbarkeit unterscheidet man drei Arten von Feldtheorien, welche sich nach der Massendimension der Kopplung  $[g]$  klassifizieren lassen [CL84]:

- i) superrenormierbar  $\hat{=}$   $[g_0] > 0$
- ii) renormierbar  $\hat{=}$   $[g_0] = 0$
- iii) nicht renormierbar  $\hat{=}$   $[g_0] < 0$  .

Die Massendimension ( $=1/\text{Längendimension}$ ) der  $\phi^4$ -Theorie in  $D$  Dimensionen ist  $[g] = 4 - D$ , d.h. für  $D < 4$  ist sie superrenormierbar. Das bedeutet, daß die Anzahl der Graphen mit globaler Divergenz beschränkt ist. Der globale Divergenzgrad  $\delta$  eines Graphen ist die Differenz der Potenzsumme aller Integrationsimpulse im Zähler, respektive Nenner. Hierfür erhält man in Loop-Ordnung  $L$  in der symmetrischen Phase ( $V_3 = 0$ )

$$\begin{aligned} \delta &= D \cdot L - 2 \cdot I \\ &= (D - 4)L + 4 - E \quad (\text{mit (2.16) u. (2.17)}) \\ &= -[g] \cdot L + 4 - E . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Man erkennt, daß für  $[g] > 0$  ab einer bestimmten Loop-Ordnung  $\delta < 0$  ist und damit keine globalen Divergenzen mehr auftreten. Speziell für  $D = 3$  hat man nur zwei derartige Graphen:



In höheren Ordnungen tauchen diese Graphen als Insertionen (= Subdivergenzen) auf. Um diese unphysikalischen Divergenzen zu eliminieren, führt man renormierte Parameter  $m_R(m_0, g_0)$ ,  $g_R(m_0, g_0)$  und  $\phi_R(\phi_0, g_0/m_0^{4-D})$  ein, die in erster Ordnung mit den ursprünglichen nackten Größen  $m_0, g_0, \phi_0$  übereinstimmen. Während die renormierte Kopplung in der symmetrischen Phase über die Vier-Punkt-Funktion definiert ist, benutzen wir in der geordneten Phase eine andere Beschreibung, deren Ansatz auf [LW87a] zurückgeht. Dieses hat den einfachen Grund, daß die Anzahl der zu  $\Gamma^{(4)}$  beitragenden Graphen ein Vielfaches verglichen mit der Zwei- bzw. Einpunktfunktion ist. Für die Definition der renormierten Kopplung in der geordneten Phase verwendet man stattdessen den Erwartungswert  $v$  bzw. seinen renormierten Ausdruck  $v_R$ , die über

$$v := \phi_{min} + \langle \phi_{0-} \rangle \quad (3.2)$$

$$v_R := \frac{1}{\sqrt{Z_3}} v \quad (3.3)$$

definiert sind, wobei  $Z_3$  die dimensionslose Feldrenormierungskonstante darstellt (s.u.) und  $\phi_{min}$  durch (1.15) gegeben ist.

Bei der Einführung renormierter Größen ist es üblich, Renormierungskonstanten zu definieren:

$$Z_1 := -g_0 (\Gamma^{(4)}(0))^{-1} \quad (3.4)$$

$$Z_2 := -(\Gamma^{(2,1)}(0))^{-1} \quad (3.5)$$

$$Z_3 := -\left( \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

wobei in der gebrochenen Phase die Renormierungskonstanten  $Z_2$  und  $Z_3$  Verwendung findet. Diese trägt den Ausdruck Feldrenormierungskonstante, weil über sie renormierte Felder definiert werden:

$$\phi_R := Z_3^{-1/2} \phi_0. \quad (3.7)$$

Bei der Berechnung von  $Z_2$  machen wir uns die Beziehung

$$\Gamma^{(n,l)}(\{p; q, 0\}) = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma^{(n,l-1)}(\{p; q\}) \quad (3.8)$$

zunutze, welche sich dadurch ergibt, daß das Massenquadrat als ortsunabhängige Quelle eines  $\phi^2$ -Terms interpretiert werden kann und damit die Ableitung nach der Masse nach (2.13) gerade die obige Beziehung liefert. Insbesondere erhält man

$$Z_2 = -\left( \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma^{(2)}(0) \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Die renormierten Parameter sind wie folgt definiert:

symmetrische Phase:

$$m_R^2 := -Z_3 \Gamma^{(2)}(p; m_0, g_0) \Big|_{p^2=0} \quad (3.10)$$

$$g_R := \frac{Z_3^2(g_0, m_0)}{Z_1(g_0, m_0)} g_0 \quad (3.11)$$

gebrochene Phase:

$$m_R^2 := -Z_3 \Gamma^{(2)}(m_0, g_0) \Big|_{p^2=0} \quad (3.12)$$

$$g_R := \frac{3m_R^2}{v_R^2} \quad (3.13)$$

Da die Kopplung die Massendimension  $(4 - D)$  trägt, können durch

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0^{4-D}} \quad (3.14)$$

$$u_R := \frac{g_R}{m_R^{4-D}} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

dimensionslose Kopplungen definiert werden.

Zusätzlich zu den renormierten Parametern führt man renormierte Vertexfunktionen ein, die in Abhängigkeit der renormierten Parameter stehen und durch in jeder Ordnung endliche Beiträge bestimmt sind:

$$\Gamma_R^{(n,l)}(m_R, g_R) := Z_3^{n/2-l} Z_2^l \Gamma^{(n,l)}(m_R, g_R) . \quad (3.17)$$

In diesen Funktionen läßt sich ein Renormierungsschema aufstellen, welches sich direkt aus der Definition der renormierten Parameter ableiten läßt und ohne nackte Größen auskommt:

symmetrische Phase:

$$\Gamma_R^{(2)}(0; g_R, m_R) = -m_R^2 \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p; g_R, m_R) \right|_{p^2=0} = -1 \quad (3.19)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(0; g_R, m_R) = -g_R \quad (3.20)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0; g_R, m_R) = -1 \quad (3.21)$$

gebrochene Phase:

$$\Gamma_R^{(2)}(0; g_R, m_R) = -m_R^2 \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p; g_R, m_R) \right|_{p^2=0} = -1 \quad (3.23)$$

$$\frac{3}{v_R^2} \Gamma_R^{(2)}(0; g_R, m_R) = -g_R \quad (3.24)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0; g_R, m_R) = -1 \quad (3.25)$$

Entwickelt man unter Benutzung des Renormierungsschemas die renormierte Zwei-Punkt-Funktion nach dem äußerem Impuls

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2)}(p) &= \Gamma_R^{(2)}(0) + p^2 \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} + O(p^4) \\ &= -m_R^2 - p^2 + O(p^4) , \end{aligned} \quad (3.26)$$

so zeigt sich, daß das Verhalten von  $\Gamma_R^{(2)}(p)$  und  $\Gamma^{(2)}(p)$  für kleine Impulse durch die renormierte Masse bestimmt ist.

Alternativ läßt sich anstelle der renormierten Masse  $m_R$  die *physikalische Masse*  $m_{phys}$  einführen. Diese ist definiert über die Nullstelle von  $\Gamma_R^{(2)}(p)$  bzw. die Polstelle von  $G_{cR}^{(2)}(p)$ , welche dem Ursprung am nächsten ist [MM93]:

$$\Gamma_R^{(2)}(p') = 0 \quad \text{mit} \quad p' = (im_{phys}, 0, 0) . \quad (3.27)$$

Im Fall einer freien Feldtheorie, in welcher der renormierte, volle Propagator durch

$$G_{cR}^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + m_R^2} \quad (3.28)$$

gegeben ist, stimmen die physikalische und die renormierte Masse überein.

Das langreichweitige Verhalten von  $G_{cR}^{(2)}(x)$  erhält man nach einer Fourier-Transformation von  $G_{cR}^{(2)}(p)$  [MM93]:

$$\begin{aligned} G_{cR}^{(2)}(p) &= -\frac{1}{\Gamma_R^{(2)}(p)} \\ \implies G_{cR}^{(2)}(x) &\simeq \text{const } e^{-|x|^{m_{phys}}} \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Damit ist gezeigt, daß  $\Gamma_R^{(2)}$  keine Korrelationsfunktion ist, da

$$\Gamma_R^{(2)} = -(G_{cR}^{(2)})^{-1} \simeq e^{+|x|^{m_{phys}}} \rightarrow \infty \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty . \quad (3.30)$$

Als Inverses der physikalischen Masse läßt sich eine Korrelationslänge definieren. Da das Amplitudenverhältnis dieser Korrelationslänge von dem Verhältnis der Korrelationslänge, die das Inverse der renormierten Masse ist, schon in 1-Loop-Ordnung um weniger als 0.5 % abweicht [HE193], werde ich mich bei den weiteren Berechnungen auf  $m_R$  beschränken.

## 3.2 Renormierungsgruppe

Um das Skalenverhalten eines physikalischen Modells im Bereich der kritischen Phänomene zu untersuchen, führt man den Begriff der Renormierungsgruppe ein. Universelle Eigenschaften können dabei mit Renormierungsgruppenflüssen und der Attraktivität von Renormierungsgruppenfixpunkten trotz abweichender mikroskopischer Eigenschaften einer Theorie erklärt werden. Im Kontext unserer Arbeit werden die Renormierungsgruppenfunktionen zur Bestimmung der Kopplung und der kritischen Exponenten benutzt. Der analytische Ansatz ist die Renormierungsgruppengleichung bzw. in diesem Fall die *Callan-Symanzik-Gleichung*. Hierin werden Skalenänderungen in der Theorie beschrieben, bzw. vielmehr die Renormierbarkeit mit Skalentransformationen verglichen.

### 3.2.1 Callan-Symanzik-Gleichung

Zur Herleitung der Renormierungsgruppengleichung geht man von einer Massenableitung der Vertexfunktionen aus:

$$\left. \frac{\partial}{\partial m_0^2} \right|_{g_0} \Gamma^{(n,l)}(\{p; q\}) = \Gamma^{(n,l+1)}(\{p; q, 0\}) . \quad (3.31)$$

Es werden dimensionslose *Renormierungsgruppenfunktionen* eingeführt:

$$\beta(u_R) := m_R \left. \frac{\partial u_R}{\partial m_R} \right|_{g_0} \quad (3.32)$$

$$\eta_2(u_R) := m_R Z_2^{-1} \frac{\partial Z_2(u_R)}{\partial u_R} \quad (3.33)$$

$$\eta_3(u_R) := m_R Z_3^{-1} \frac{\partial Z_3(u_R)}{\partial u_R} . \quad (3.34)$$

Benutzt man die Definition der renormierten Vertexfunktionen (3.17) und drückt Gleichung (3.31) durch renormierte Größen aus, so ergibt sich nach kurzer Rechnung unter Verwendung der Massen- u. Feldrenormierung (3.18, 3.19) die Callan-Symanzik-Gleichung [ID89]:

$$\begin{aligned} & \left( m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta \frac{\partial}{\partial u_R} - l\eta_2 + \left(l - \frac{n}{2}\right)\eta_3 \right) \Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}, m_R, u_R) \\ & = m_R^2 (2 - \eta_3) \Gamma_R^{(n,l+1)}(\{p; q, 0\}, m_R, u_R) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

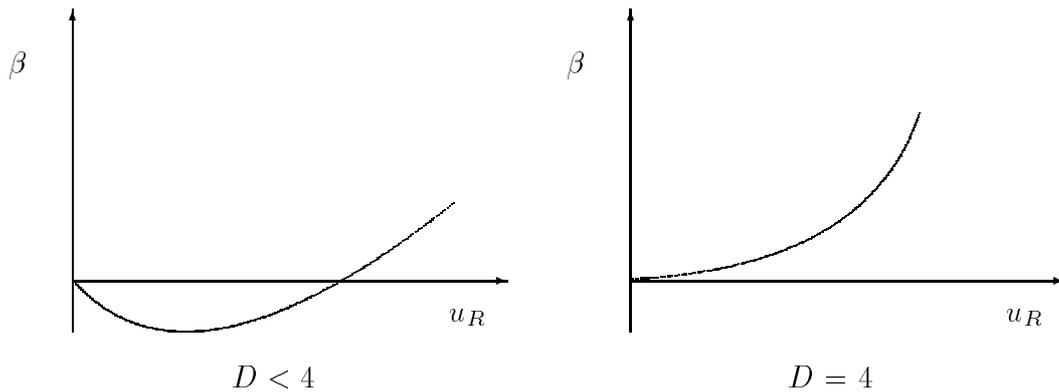
Solche Renormierungsgruppengleichungen lassen sich mit der Charakteristikenmethode lösen [BDFN92]. Dazu betrachtet man die CS-Gleichung für eine Funktion  $\Gamma_R^{(n,l)}(\{p/b; q/b\})$ , bei der die Impulse mit  $1/b$  skaliert werden. Lösungen für diese Gleichung ergeben sich längs sogenannter Charakteristiken. Diese sind Kurven im  $(u_R, b)$ -Raum, die bestimmt sind durch

$$u_R(b) \frac{\partial u_R(b)}{\partial b} = \beta(u_R(b)) . \quad (3.36)$$

Das Vorzeichen der  $\beta$ -Funktion steuert somit das Verhalten der renormierten Kopplung, d.h. für  $\beta < 0$  steigt die renormierte Kopplung mit  $b \rightarrow 0$  und umgekehrt. Ist die Kopplung beschränkt, so hat die  $\beta$ -Funktion am kritischen Punkt eine Nullstelle:

$$\beta(u_R^*) = 0 . \quad (3.37)$$

Diese wird auch als Infrarot-Fixpunkt bezeichnet, da er den Grenzfall großer Fluktuationen und somit kleiner Impulse beschreibt.



Die  $\beta$ -Funktion hat in drei bzw. vier Dimensionen obiges Verhalten. Wie aus den Diagrammen ersichtlich liegt für  $D < 4$  ein nichttrivialer Infrarot-Fixpunkt vor. Dieses qualitative Verhalten wird schon in 1-Loop-Ordnung richtig wiedergegeben, da dort gilt (5.30, 5.32):

$$\beta(u_{R\pm}) = -u_{R\pm} + \text{const} \cdot u_{R\pm}^2 .$$

In 3 Dimensionen ist die  $\phi^4$ -Theorie asymptotisch frei, da sie einen UV-Fixpunkt am Nullpunkt hat. Dieses Verhalten ist in 4 Dimensionen nicht gegeben. Dort verschwindet der Fixpunktwert der renormierten Kopplung für große Abstände. Zudem deuten numerische Rechnungen darauf hin, daß in diesem Fall Trivialität vorliegt, d.h. es existiert kein nichttrivialer UV-Fixpunkt [LW87b, LW87a, MM93].

Über die Renormierungsgruppenfunktionen kann man zwei neue Funktionen definieren

$$\nu(u_R) := (2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R))^{-1} \quad (3.38)$$

$$\gamma(u_R) := \nu(u_R) (2 - \eta_3(u_R)) \quad , \quad (3.39)$$

die nach Einsetzen des Fixpunktwertes direkt die kritischen Exponenten der Korrelationslänge sowie der Suszeptibilität liefern:

$$\nu = \nu(u_R^*) \quad (3.40)$$

$$\gamma = \gamma(u_R^*) \quad . \quad (3.41)$$

### 3.3 Regularisierung

Bei der Regularisierung wählen wir den Weg der dimensionellen Regularisierung. Diese Methode basiert auf der analytischen Fortsetzung von Integralen von  $D \in \mathbf{N}$  nach  $D \in \mathbf{C}$  [LEI75]. Speziell in unserem Fall werden die Integrale in der Dimension  $D = 3 - \epsilon$  ( $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ) berechnet. Diese sind eindeutig bestimmt durch die folgenden Axiome, welche Forderungen an Integrale in nicht-ganzzahligen Dimensionen sind [COL84]:

$$\text{Linearität: } \int d^D k \{a f(k) + b g(k)\} = a \int d^D k f(k) + b \int d^D k g(k) \quad (\text{a, b komplex})$$

$$\text{Skalierungseigenschaft: } \int d^D k f(sk) = s^{-D} \int d^D k f(k) \quad (\text{s Skalar})$$

$$\text{Translationsinvarianz: } \int d^D k f(k + p) = \int d^D k f(k) \quad .$$

Aus diesen Axiomen ergeben sich weitere Eigenschaften, so z.B. die Möglichkeit der Vertauschung von Integration und Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial p} \int d^D k f(k, p) = \int d^D k \frac{\partial}{\partial p} f(k, p) \quad , \quad (3.42)$$

wobei  $p$  auch ein Skalar sein kann.

Die Definition von Integralen in nicht-ganzzahligen Dimensionen erfolgt über die Teilintegration ganzzahliger Unterräume, in welchen der Integrand in Abhängigkeit von  $\epsilon$  steht [COL84]. Die Auswertung dieser Integrale und Entwicklung um  $\epsilon = 0$  liefert in führender Ordnung den isolierten, singulären Term. Für den Zwei-Loop-Graphen  , welcher in 3 Dimensionen logarithmisch divergent ist, ergibt sich

der singuläre Anteil zu  $1/\epsilon$ . Bei dem linear divergenten Term  tritt hingegen der Effekt auf, daß bei der Regularisierung in nicht-ganzzahligen Dimensionen  $D \geq 3$  interessanterweise keine Singularitäten für  $\epsilon = 0$  vorkommen. Bei der Regularisierung von Multi-Loop-Integralen ist zu beachten, daß jede einzelne Integration in der gleichen Dimension  $D = 3 - \epsilon$  zu erfolgen hat.

Die dimensionelle Regularisierung besitzt den großen Vorteil, daß sie in nicht-abelschen Feldtheorien lokale Eichsymmetrien erhält. Darüberhinaus gibt es noch andere Regularisierungen. Bei der *Pauli-Villars-Regularisierung* subtrahiert man von den divergenten Integralen solche Integrale, bei denen der Propagator ersetzt wird durch

$$\frac{1}{k^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} . \quad (3.43)$$

Diese Differenz ist konvergent. Für  $\Lambda \rightarrow \infty$  erhält man das ursprüngliche Ergebnis, wobei etwaige Divergenzen durch den Parameter  $\Lambda$  dargestellt sind. Speziell für das oben erwähnte Ein-Loop-Integral erscheint die Divergenz direkt in dem Summanden  $\Lambda$  [HE193].

Eine weitere Alternative zur dimensionellen Regularisierung stellt die Einführung von Gegentermen dar. Dazu entwickelt man renormierte Korrelationsfunktionen direkt als Reihe in den renormierten Parametern  $m_R$  und  $g_R$ , wobei die ursprünglichen Divergenzen durch Subtraktion von Gegentermen zu den divergenten Integralen beseitigt werden. Die Konstruktion dieser “counterterms” erfolgt nach dem BPHZ-Verfahren [IZ80]. Diese Vorgehensweise ist physikalisch identisch mit der von uns gewählten Prozedur.

# Kapitel 4

## Integrationsmethoden

Der besseren Übersichtlichkeit wegen werde ich im weiteren die Integrale mit aus-skaliertter Masse, ohne Fourierkoeffizienten und ohne Vertexfaktoren betrachten. Den dadurch vorgezogenen Faktor erhält man nach Ausmultiplizieren der Masse  $m_0^2$  aus jedem Propagator:

$$\frac{1}{(2\pi)^{LD}} m_0^{V_3} \frac{m_0^{DL}}{m_0^{2I}} = \frac{m_0^{(D-4)L-E+4}}{(2\pi)^{LD}} \quad (\text{nach (2.16, 2.17)}) \quad (4.1)$$

$$= \frac{m_0^{4-L-E}}{(2\pi)^{3L}} \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^{-L\epsilon} \quad (D = 3 - \epsilon) , \quad (4.2)$$

wobei  $m_0^{V_3}$  der Beitrag der Dreiervertices ist und  $m_0^{DL}$  von der Substitution der Integrationsvariablen  $k_i \rightarrow k_i m_0$  herrührt. Nach diesem Vorgang schreibt sich der äußere Impuls im Integranden als  $p/m_0$ , welchen ich im folgenden als  $p' := p/m_0$  bezeichne. Außerdem ist die Masse im Propagator damit gleich Eins gesetzt:

$$\Delta(k_i + p) \rightarrow \frac{1}{(k_i + p')^2 + 1} . \quad (4.3)$$

Für die Einpunktfunktionen ist zusätzlich noch ein Massenterm  $m_0^{-2}$  hinzuzufügen.

Bei der Berechnung der 3-Loop-Anteile sind Produkte aus 1- und 2-Loop-Anteilen zu bestimmen. Da der divergente Graph  in führender Ordnung einen  $1/\epsilon$ -Term hat, müssen die Ein-Loop-Integrale inkl. ihrer  $O(\epsilon)$ -Anteile berechnet werden. Für Diagramme, die in  $D = 3$  konvergent sind, kann in (4.2) direkt  $\epsilon = 0$  gesetzt werden. Bei divergenten Integralen, die im führenden Glied einen  $1/\epsilon$ -Anteil haben, trägt der  $\epsilon$ -Term aus (4.2) nach der Entwicklung

$$\left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^{-L\epsilon} = 1 - L\epsilon \log \frac{m_0}{2\pi} + O(\epsilon^2)$$

zu dem Integrationsergebnis bei.

Da ich für meine Berechnungen nur Korrelationsfunktionen benötige, deren Impulsargumente zu Null gesetzt werden, führe ich im weiteren Feynman-Diagramme ohne äußere Beine auf. Stattdessen wird deren Ansatzpunkt im Graphen durch einen hervorgehobenen Vertex angedeutet. Für Dreiervertices bleibt nur ein Punkt auf der entsprechenden inneren Linie erhalten. Damit ist eine Erhöhung der Potenz des zugehörigen Propagators um 1 verbunden. Es ist zu beachten, daß bei der Ableitung der 2-Punkt-Vertexfunktion Graphen auftreten, die weder  $\Gamma^{(2)}$  noch  $\Gamma^{(4)}$  zugeordnet werden können.

Im Anhang C findet man eine Liste der bis zur 3-Loop-Ordnung benötigten Graphen. Die Bezeichnung erfolgt derart, daß  $\mathcal{G}a_c^{(b)}$  den  $c$ -ten Graphen einer  $b$ -Punkt-Funktion in  $a$ -Loop-Ordnung bedeutet. Deren Berechnung wird im weiteren anhand einiger exemplarischer Beispiele methodisch angedeutet. Dabei wird folgende Konvention gewählt:

- Unter einem Feynmangraph  $\mathcal{G}a_c^{(b)}$  ist das Integral über Propagatoren zu verstehen, bei denen das Massenquadrat gleich Eins gesetzt ist:

$$\mathcal{G}a_c^{(b)} = \int d^D k_1, \dots, d^D k_n \frac{1}{k_1^2 + 1} \frac{1}{k_2^2 + 1} \dots \quad (4.4)$$

- Der Wert eines Feynmangraphen  $\mathcal{W}(\mathcal{G}a_c^{(b)})$  ist das Produkt von  $\mathcal{G}a_c^{(b)}$  mit seinem  $\epsilon$ -Vorfaktor aus (4.2):

$$\mathcal{W}(\mathcal{G}a_c^{(b)}) = \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^{-L\epsilon} \mathcal{G}a_c^{(b)} \quad (4.5)$$

Für konvergente Graphen wird  $\epsilon = 0$  gesetzt, so daß in dem Fall gilt:

$$\mathcal{W}(\mathcal{G}a_c^{(b)}) = \mathcal{G}a_c^{(b)} \quad (4.6)$$

- Der Beitrag eines Feynmangraphen zu einer Green- bzw. Vertexfunktion  $\mathcal{B}(\mathcal{G}a_c^{(b)})$  setzt sich aus seinem Wert, sowie den Masse- und Fourier-Faktoren nach (4.2) zusammen:

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}a_c^{(b)}) = \frac{m_0^{4-L-E}}{(2\pi)^{3L}} \mathcal{W}(\mathcal{G}a_c^{(b)}) \quad (\cdot m_0^{-2} \text{ bei Ein-Punkt-Funktionen}) \quad (4.7)$$

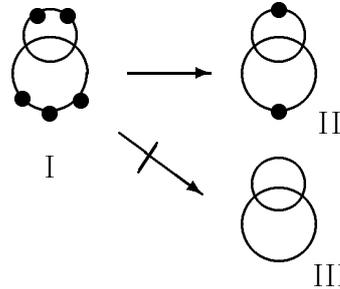
Als Summand in den Vertexfunktionen erscheint damit der Wert eines Graphen multipliziert mit den zugehörigen Symmetrie- und Permutationsfaktoren.

## 4.1 Partielle Integration

Feynmangraphen lassen sich mit partiellen Integrationen auf eine kleine Menge von Graphen zurückführen, bei denen jeder Propagator einfach auftritt bzw. in einer

minimalen Potenz auftritt, mit welcher das Integral noch konvergent ist:

Beispielsweise läßt sich Graph I auf den einfacher zu berechnenden Graphen II zurückführen. Eine Berechnung unter Verwendung von Graph III ist nicht sinnvoll, da dieser in drei Dimensionen divergent ist.



Unter Verwendung des Gaußschen Satzes ergibt sich eine verallgemeinerte partielle Integration [CT81], mit welcher Integrale in Termen einfacher zu berechnender Integrale geschrieben werden können:

Sei  $I(k_1, \dots, k_n)$  ein typischer Integrand eines Feynman-Graphen (inklusive Skalarprodukt im Zähler) und  $x, y$  der Grad des Polynoms von  $(k_1)_i$  im Zähler bzw. Nenner. Dann gilt<sup>1</sup>

$$\int d^D k_2, \dots, d^D k_n \int d^D k_1 \partial_{(k_1)_\mu} (k_1)_\mu I(k_1, \dots, k_n) \quad (4.8)$$

$$= \int d^D k_2, \dots, d^D k_n \int d^D k_1 \operatorname{div}_{k_1} k_1 I(k_1, \dots, k_n) \quad (4.9)$$

$$= \int d^D k_2, \dots, d^D k_n \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \int_{S_{K_1}} d\vec{A} \cdot k_1 I(k_1, \dots, k_n) \quad (\text{nach Satz von Gauß})$$

$S_{K_1}$ : Sphäre mit Radius  $K_1$

$$= \int d^D k_2, \dots, d^D k_n \lim_{K_1 \rightarrow \infty} \int_{S_{K_1}} dA K_1 I(k_1, \dots, k_n) \quad (4.10)$$

$$= \int d^D k_2, \dots, d^D k_n \int_{S_1} d\Omega \lim_{K_1 \rightarrow \infty} K_1^D I(k_1, \dots, k_n) \quad (4.11)$$

$$= 0 \quad \text{falls } y > D + x .$$

Der Beweis, daß der Ausdruck (4.8) gleich Null ist, läßt sich mit den Methoden dimensioneller Regularisierung auch für nicht-ganzzahlige Dimensionen zeigen [SMI91].

Anmerkung:

Die obigen Gleichungen gelten auch, falls man in Gl. 4.8 den Ausdruck  $\operatorname{div}_{k_1} k_1$  durch  $\operatorname{div}_{k_1} k_i$  ( $i = 2 \dots n$ ) ersetzt.

Als Beispiel betrachte ich die partielle Integration von

<sup>1</sup>Im folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

$$\begin{aligned} \textcircled{\bullet} &= \int d^D k_{1,2} \Delta(k_1)^2 \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &= \int d^D k_{1,2} \equiv \int d^D k_1 \int d^D k_2 . \end{aligned}$$

Nach obigen Gleichungen gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^D k_{1,2} \partial_{(k_2)_\mu} (k_2)_\mu \Delta^2(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &= \int d^D k_1 \Delta^2(k_1) \int d^D k_2 (D \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) - (k_2)_\mu 2(k_2)_\mu \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &\quad - (k_2)_\mu 2(k_1 + k_2)_\mu \Delta(k_2) \Delta^2(k_1 + k_2)) \\ &= \int d^D k_1 \Delta^2(k_1) \int d^D k_2 \{ D \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) - 2k_2^2 \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &\quad - \{(k_1 + k_2)^2 + k_2^2 - k_1^2\} \Delta(k_2) \Delta^2(k_1 + k_2) \} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Bei solchen Berechnungen erweist es sich grundsätzlich als sinnvoll, Impulsquadrate  $(k_1)_\mu (k_1)_\mu = k_1^2$  bzw. Skalarprodukte  $(k_1)_\mu (k_2)_\mu = k_1 k_2$  in Form inverser Propagatoren zu schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^D k_1 \Delta^2(k_1) \int d^D k_2 (D \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &\quad - 2(\Delta^{-1}(k_2) - 1) \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &\quad - \{\Delta^{-1}(k_1 + k_2) + \Delta^{-1}(k_2) - \Delta^{-1}(k_1) - 1\} \Delta(k_2) \Delta^2(k_1 + k_2)) . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Bei der Zusammenfassung von (4.13) verwenden wir die Integralgleichheit

$$\int d^D k_{1,2} \Delta^2(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) = \int d^D k_{1,2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta^2(k_1 + k_2) \quad (4.14)$$

und nutzen aus, daß

$$\int d^D k_2 \Delta(k_1 + k_2) = \int d^D k_2 \Delta(k_2) . \quad (4.15)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^D k_{1,2} \{ (D - 2) \Delta^2(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\ &\quad + 3 \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 + k_2) - \Delta^2(k_1) \Delta^2(k_2) \} \\ &\stackrel{D=3}{=} \textcircled{\bullet}_I + 3 \textcircled{\bullet}_{II} - \textcircled{\bullet} - \textcircled{\bullet} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mit Gleichung (4.16) läßt sich Graph II über die Berechnung von Graph I bestimmen.

Die hier vorgestellten Rechnungen sind bei 3-Loop-Graphen ungleich umfangreicher. Darüberhinaus müssen dort fast immer mehrere Gleichungen der Form (4.16) bestimmt werden. Dieses erfolgt über verschiedene Wahl der Zähler und der Ableitungsimpulse in (4.8). Die Anzahl dieser Möglichkeiten hängt mit der Symmetrie des Integrals unter Vertauschung der Integrationimpulse zusammen. Das entstehende Gleichungssystem liefert als Lösung die gesuchten Integrale in Abhängigkeit von einfacheren Graphen. Zur Handhabung der zahlreichen Umformungen habe ich das Verfahren unter Verwendung des Programmpaketes *Mathematica* [WOL91] weitestgehend automatisiert. Dabei wurden die verschiedenen Ableitungen ausgeführt. Die entstehenden Integrale wurden mit Variablentransformationen und Vorzeichenänderungen innerhalb der Propagatoren auf eine gewisse Standardform gebracht. Die zu berechnenden 1–3 Loop-Integrale wurden – soweit sie bekannt waren – einer Datenbank entnommen, in welche die jeweils neuesten Ergebnisse mit aufgenommen wurden. Die verbliebenen unbekanntenen Integrale wurden entweder systematisch mit verschiedenen Methoden aufbereitet und gelöst oder mußten von Hand berechnet werden.

## 4.2 Berechnungen in 1- und 2-Loop

In *Ein-Loop-Ordnung* ist nur ein Graph mit einem Propagator in beliebigen Potenzen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A circle with } n \text{ dots on its right side.} \quad (n-1)\text{-mal} \\
 &= \int d^D k \frac{1}{(k^2 + 1)^n} \\
 &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dK \frac{K^{D-1}}{(K^2 + 1)^n} \quad (\text{Kugelkoordinaten in D-Dimensionalen}) \\
 &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dK \frac{1}{2\sqrt{K}} \frac{K^{(D-1)/2}}{(K + 1)^n} \quad (\text{Substitution } K^2 \rightarrow K) \\
 &= \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{Integraldarstellung der } \Gamma\text{-Funktion}) \\
 &= \pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} . \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Da die  $\Gamma$ -Funktion in einer Umgebung von  $(n - 3/2)$  holomorph ist, ist sie dort in einer Taylorreihe entwickelbar:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z_0) + \Gamma'(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2) . \quad (4.18)$$

Für die Darstellung von  $\Gamma'$  kann man sich die Entwicklung der logarithmischen Ableitung zunutze machen:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} =: \psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z + \nu} - \frac{1}{\nu} \right) . \quad (4.19)$$

Mit diesem Ausdruck, sowie mit  $z = n - D/2$ ,  $z_0 = n - 3/2$  und  $D = 3 - \epsilon$ , ergibt sich für die Taylorreihe (4.18):

$$\Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \psi\left(n - \frac{3}{2}\right) \right) + O(\epsilon^2) . \quad (4.20)$$

Für den Wert des Ein-Loop-Graphen mit zugehörigem  $\epsilon$ -Anteil aus (4.2) erhält man nach Ersetzung der  $\Gamma$ -Funktion (4.20) in (4.17):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^{-\epsilon} \int d^D k \frac{1}{(k^2 + 1)^n} \\ &= \pi^{3/2} \frac{\Gamma(n - 3/2)}{\Gamma(n)} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \psi\left(n - \frac{3}{2}\right) - \log \pi - 2 \log \frac{m_0}{2\pi} \right) \right) + O(\epsilon^2) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die benötigten Werte der  $\psi$ -Funktion bestimmt man über ihre Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} \psi(z + 1) &= \psi(z) + z^{-1} \\ &\text{mit } \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi(1) - 2 \log(2) = -\gamma - 2 \log 2 . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Beispielsweise ergibt sich für den einfachsten Ein-Loop-Graphen

$$\mathcal{W} \left( \text{Ein-Loop-Graph} \right) = -2\pi^2 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \log \pi - 2 \log \frac{m_0}{2\pi} \right) \right) + O(\epsilon^2) . \quad (4.23)$$

Bei der Bestimmung des Endergebnisses werden die 1-Loop-Ausdrücke in den Störungsreihen nur noch in der Konstanten  $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$  geschrieben, auf welche sich alle anderen Werte von  $\psi$  mit Hilfe der Funktionalgleichung zurückführen lassen.

Der divergente Graph in 2-Loop-Ordnung ist in der Arbeit [HEI93] zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W} \left( \text{⊖} \right) &= \int d^D k_{1,2} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \\
 &= 2\pi^4 B^{(div)} \\
 B^{(div)} &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{C}{4\pi} - \log \frac{m_0^2}{4\pi} + O(\epsilon) \\
 C &\simeq -15.0448
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

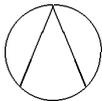
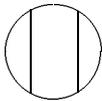
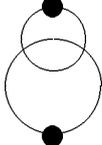
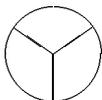
bestimmt worden, wobei die Konstante  $C$  für das Endergebnis nicht benötigt wird.

### 4.3 3-Loop-Graphen

Aufgrund der möglichen Fehler bei manuellen und maschinellen Berechnungen<sup>2</sup> wurden die berechneten Integrale in einer numerischen Integrationsroutine mit einer Toleranz von ca. 5% verifiziert.

Die Graphen, welche in unabhängige Teilintegrale zerfallen, lassen sich unter Verwendung der 1- und 2-Loop-Ergebnisse berechnen. Insbesondere für die Tadpole-Graphen existiert die Möglichkeit, diese durch Einführung eines neuen Propagators  $1/(k^2 + \tilde{m}_0^2)$ , welcher sich aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen der  $\phi^3/\phi^4$ -Theorie ergibt [RIV87], in jeder Ordnung zu eliminieren [KÜS95].

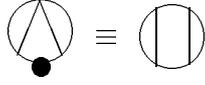
Die übrigen Graphen lassen sich mit partiellen Integrationen (nach Kapitel 4.1) auf 4 Grundgraphen zurückführen:

Integralwert $\cdot \pi^{-6}$	
	$= \frac{1}{4} - \log \frac{4}{3}$
	$= 32(a + \frac{1}{3} \log \frac{4}{3})$
	$= \frac{1}{2}$
	$= 0.1739006107$

---

<sup>2</sup>Damit sind vor allem bekannte Integrationsfehler bei den mathematischen Programmpaketen *Mathematica* und *Maple* gemeint.

wobei die ersten beiden Graphen identische Integralausdrücke liefern:



Die obigen Ergebnisse sind dem Artikel [BS92] entnommen, wobei die Konstante  $a$  in Anhang C definiert ist.

Zur Bestätigung einiger Ergebnisse, die durch partielle Integration erhalten worden sind, aber vor allem, weil es der Schnelligkeit der Berechnung diene, habe ich Integrale direkt berechnet. Dabei wurde ausgenutzt, daß bei fast allen Graphen Kugelkoordinaten eingeführt und Teilintegrale über 2 Propagatoren ausgeführt werden konnten:

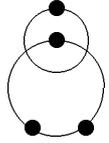
$$\begin{aligned}
& \int d^3 k_1 \Delta^n(k_1) \Delta^m(k_1 + k_i) \\
&= \int d^3 k_1 \frac{1}{(k_1^2 + 1)^n} \frac{1}{([k_1 + k_i]^2 + 1)^m} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dK_1 \frac{K_1^2}{(K_1^2 + 1)^n} \int_{-1}^1 dz \frac{1}{(1 + K_1^2 + K_i^2 + 2K_1 K_i z)^m} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dK_1 \frac{K_1^2}{(K_1^2 + 1)^n} \frac{1}{(1-m) 2K_1 K_i} \\
&\quad \left( (1 + K_1^2 + K_i^2 + 2K_1 K_i)^{-m+1} - (1 + K_1^2 + K_i^2 - 2K_1 K_i)^{-m+1} \right) \quad (m > 1) \\
&= \frac{\pi}{(1-m) K_i} \int_0^\infty dK_1 \left\{ \frac{K_1}{(K_1^2 + 1)^n} \frac{1}{(1 + [K_1 + K_i]^2)^{m-1}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{K_1}{(K_1^2 + 1)^n} \frac{1}{(1 + [K_1 - K_i]^2)^{m-1}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\pi}{(1-m) K_i} \left( \int_{-\infty}^\infty dK_1 \frac{K_1}{(K_1^2 + 1)^n} \frac{1}{(1 + [K_1 + K_i]^2)^{m-1}} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^\infty dK_1 \frac{K_1}{(K_1^2 + 1)^n} \frac{1}{(1 + [K_1 - K_i]^2)^{m-1}} \right). \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Nach Anwendung des Residuensatzes erhält man die gewünschten Ergebnisse für beliebige Potenzen  $n, m$ . Für  $n=1$  und  $m=2$  berechnet man

$$\int d^3 k_1 \Delta(k_1) \Delta^2(k_1 + k_i) = \frac{\pi^2}{(K_1^2 + 4)}. \quad (4.26)$$

Mehrere dieser Teilintegrale zusammengefaßt lassen sich dann oft wiederum mit einem Residuensatz lösen.

Beispiel:



$$\begin{aligned}
&= \int d^3 k_{1,2,3} \Delta^3(k_1) \Delta^2(k_2) \Delta^2(k_3) \Delta(k_1 + k_2 + k_3) \\
&= \int d^3 k_{1,2,3} \Delta^3(k_1) \Delta^2(k_1 + k_3) \Delta^2(k_2) \Delta(k_2 + k_3) \quad (\text{Variablentr.}) \\
&= \int d^3 k_3 \frac{\pi^2(20 + k_3^2)}{4(4 + k_3^2)^3} \frac{\pi^2}{4 + k_3^2} \quad (\text{Anw. von (4.25)}) \\
&= \pi^5 \int_0^\infty dK_3 K_3^2 \frac{20 + K_3^2}{(4 + K_3^2)^4} \quad (\text{Kugelkoordinaten}) \\
&= \frac{3}{128} \pi^6 \quad (\text{Residuensatz}) \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Speziell für  $m=n=1$  erhält man:

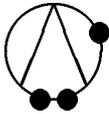
$$\int d^3 k_1 \Delta(k_1) \Delta(k_1 + k_i) = \frac{2\pi^2}{K_i} \arctan \frac{K_i}{2} \quad [\text{HEI93}] . \tag{4.28}$$

Die auf diese Weise erhaltenen arctan-Integrale lassen sich oft berechnen, indem man den Ausdruck  $\arctan(x/2)$  umschreibt zu

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{x}{2} &= \int_0^1 dE \partial_E \arctan \frac{x}{2} E \\
&= \int_0^1 dE \frac{2x}{4 + x^2 E^2} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

mit nachfolgender Anwendung des Residuensatzes.

Beispiel:



$$\begin{aligned}
&= \int d^3 k_{1,2,3} \Delta^3(k_1) \Delta^2(k_2) \Delta(k_1 + k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_1 + k_3) \\
&= \int d^3 k_1 \frac{1}{(k_1^2 + 1)^3} \frac{\pi^2}{(K_1^2 + 4)} \frac{2\pi^2}{K_1} \arctan \frac{K_1}{2} \quad (\text{Anw. von (4.26) u. (4.28)}) \\
&= 16\pi^5 \int_0^1 dE \int_0^\infty dK_1 \frac{K_1^2}{(K_1^2 + 1)^3} \frac{1}{K_1^2 + 4} \frac{1}{K_1^2 E^2 + 4} \quad (\text{Anw. von (4.29)}) \\
&= 8\pi^5 \int_0^1 dE \int_{-\infty}^\infty dK_1 \frac{K_1^2}{(K_1^2 + 1)^3} \frac{1}{K_1^2 + 4} \frac{1}{K_1^2 E^2 + 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^6}{27} \int_0^1 dE \frac{19E^2 + 25E + 10}{(E+1)(E+2)^3} \quad (\text{Residuensatz}) \\
&= \frac{4}{27} \pi^6 \log \frac{4}{3} \quad (\text{Partialbruchzerlegung und Integration}) \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Mit den skizzierten, sowie bekannten anderen Verfahren ist es gelungen, sämtliche benötigten Integrale analytisch zu bestimmen. Die einzige Ausnahme stellt der ‘‘Tetraeder’’-Graph

$$\text{⊙} = \int d^3 k_{1,2,3} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3 - k_1) \quad (4.31)$$

dar, weil hier Kugelkoordinaten nicht zum Erfolg führen. Im masselosen Fall konnte der Tetraedergraph mit einer Entwicklung der Propagatoren nach Gegenbauerpolynomen als Orthogonalpolynomen [TER80] gelöst werden [CG80]. Die Auswertung im massiven Fall durch die Mellin-Barnes-Propagator-Darstellung [BD91] ist nur praktikabel für einen einzigen massiven Propagator. Eine Teilberechnung von (4.31) ist möglich unter Verwendung von Zylinderkoordinaten [NIC78]. Die verbleibenden drei Integrationen widersetzen sich jedoch hartnäckig weiterer Auflösungen, so daß hier das Ergebnis einer numerische Integration genommen wird. Dieses liegt mit seiner Ungenauigkeit im Endergebnis weit unterhalb anderer numerischer Fehlerabschätzungen.

## 4.4 Impulsableitungen

Für die Bestimmung der Renormierungskonstanten  $Z_3$  ist es nötig, Ableitungen der Graphen nach äußeren Impulsen zu ermitteln. Für die praktische Berechnung benutzt man

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \equiv \frac{1}{2D} \sum_{\mu=1}^D \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} . \quad (4.32)$$

Die Ableitung, an der Stelle  $p^2 = 0$  genommen, kann in den meisten Fällen wiederum als eine Summe von Integralen ohne Zählerterme geschrieben werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\text{⊙} \\
&= \int d^3 k_{1,2,3} \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_1 + k_2 + p) \Delta(k_1 - k_3 + p) \\
&\quad (k_1 + p \rightarrow k_1)
\end{aligned}$$



## 4.5 Divergente Graphen

Wie schon in Kapitel 3.1 angedeutet, treten ab 3-Loop-Ordnung nur noch Graphen mit Subdivergenzen auf. Diese Diagramme müssen nicht mehr explizit regularisiert werden, sondern lassen sich in Termen der in 1- und 2-Loop-Ordnung dimensionell regularisierten Graphen schreiben. Dazu berechnet man die konvergente Summe des betreffenden Diagramms mit seinen (ebenfalls divergenten) Gegentermen. Diese Kombination läßt sich am schnellsten durch eine Massenableitung mit nachfolgender Integration bestimmen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& \text{Diagramm} \equiv \mathcal{G}3_1^{(2)} \\
&= \int d^D k_{1,2,3} \Delta(k_1)^2 \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_1 + k_2 + k_3) \\
&= \int_{-\infty}^1 dm_0^2 \partial_{m_0^2} \int d^D k_{1,2,3} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{k_2^2 + m_0^2} \frac{1}{k_3^2 + m_0^2} \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3)^2 + m_0^2} \\
&\quad \text{(Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)} \\
&= \int_{-\infty}^1 dm_0^2 \left( -2 \int d^D k_{1,2,3} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)^3} \frac{1}{k_2^2 + m_0^2} \frac{1}{k_3^2 + m_0^2} \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3)^2 + m_0^2} \right. \\
&\quad \left. -3 \int d^D k_{1,2,3} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{(k_2^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{k_3^2 + m_0^2} \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3)^2 + m_0^2} \right) \\
&\quad \text{(wegen Integralgleichheit der Teilintegrale)} \\
&= \int_{-\infty}^1 dm_0^2 \frac{(m_0^2)^{3D/2}}{(m_0^2)^6} \left\{ -2 \text{Diagramm} - 3 \text{Diagramm} \right\} \\
&\quad \text{(nach Ausklammerung von } m_0^2 \text{ und Substitution } k_i/m_0 \rightarrow k_i \text{ )} \\
&= \frac{1}{3D/2 - 5} \left\{ -2 \underbrace{\left( \text{Diagramm} - \text{Diagramm} - \text{Diagramm} \right)}_A - 2 \text{Diagramm} - \text{Diagramm} - 3 \underbrace{\text{Diagramm}}_{\mathcal{G}3_{51}^{(2)}} \right\} \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Die Integraldifferenz  $A$  ist bestimmt worden zu

$$A = \frac{1}{4} - \log \frac{4}{3} \quad [\text{BS92}] . \quad (4.37)$$

Mit

$$4 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} + \epsilon \pi^2 + O(\epsilon^2) \quad (\text{nach Anhang C}) \quad (4.38)$$

erhält man

$$4 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus = \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus + \epsilon \pi^2 \cdot \frac{2\pi^4}{\epsilon} + O(\epsilon) , \quad (4.39)$$

wobei der divergente Term des Zwei-Loop-Graphen (4.24) benutzt wurde. Der Vorfaktor aus (4.36) wird für  $D = 3 - \epsilon$  entwickelt:

$$\frac{1}{3D/2 - 5} = \frac{-2}{1 + 3\epsilon} = -2(1 - 3\epsilon) + O(\epsilon^2) . \quad (4.40)$$

Nach Einsetzen der Resultate (4.37) und  $\mathcal{G}3_{51}^{(2)}$  erhält man

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \bullet \end{array} &= (1 - 3\epsilon) \left\{ 6\pi^6 - 4\pi^6 \log \frac{4}{3} + \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus \right\} + O(\epsilon^2) \\ &= -4\pi^6 \log \frac{4}{3} + \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus + O(\epsilon) , \end{aligned} \quad (4.41)$$

wobei benutzt wurde, daß

$$-3\epsilon \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus = -3\epsilon \cdot \pi^2 \cdot \frac{2\pi^4}{\epsilon} + O(\epsilon) = -6\pi^6 + O(\epsilon) . \quad (4.42)$$

Damit erhält man mit  $\epsilon = 0$  den endgültigen Ausdruck für den Graphen inklusive Gegenterm:

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \ominus = -4\pi^6 \log \frac{4}{3}} . \quad (4.43)$$

Die linke Seite ist so zu verstehen, daß beide Graphen unter einem gemeinsamen Integral stehen. Damit ist die Differenz für  $D = 3$  konvergent und der Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  kann auf beiden Seiten der Gleichung vollzogen werden.

Für den Wert des Graphen  $\mathcal{G}3_1^{(2)}$  schreibt man

$$\mathcal{W}(\mathcal{G}3_1^{(2)}) = \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^{-3\epsilon} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - 3\epsilon \log \frac{m_0}{2\pi}) \text{Diagram} + O(\epsilon) \\
&= -4\pi^6 \log \frac{4}{3} + (1 - 3\epsilon \log \frac{m_0}{2\pi}) \text{Diagram} \ominus + O(\epsilon) \quad (\text{nach (4.41)}) \\
&= -4\pi^6 \log \frac{4}{3} + \mathcal{W}(\mathcal{G}_{1_3}^{(2)}) \mathcal{W}(\mathcal{G}_{2_1}^{(1)}) + O(\epsilon) \\
&= -4\pi^6 \log \frac{4}{3} + 2\pi^6 B_1^{(div)} + O(\epsilon) \tag{4.44} \\
&B_1^{(div)} := \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2}\gamma + \frac{C}{4\pi} - 3 \log m_0 + 2 \log 2 + \frac{3}{2} \log \pi \\
&\quad (\text{Definition von } C \text{ - siehe Anhang C}) .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden die  $\epsilon$ -Entwicklungen der beiden Graphen  $\mathcal{G}_{1_3}^{(2)}$  und  $\mathcal{G}_{2_1}^{(1)}$  verwendet. Als Ausnahme von der sonstigen Schreibweise wurden die Vorfaktoren  $(m_0/(2\pi))^{-L\epsilon}$  bei den obigen Gleichungen als nicht zu den Graphen zugehörig betrachtet.

Weitere divergente 3-Loop-Integrale, die für die Ableitung von  $\Gamma^{(2)}$  benötigt werden, lassen sich ebenfalls mit der obigen Verfahrensweise berechnen:

$$\text{Diagram} - \text{Diagram} \ominus = \frac{\pi^6}{2} \left( \frac{13}{48} - \log \frac{4}{3} \right) \tag{4.45}$$

$$\text{Diagram} - \text{Diagram} \ominus = \frac{\pi^6}{2} \left( \frac{15}{16} - \log \frac{4}{3} \right) . \tag{4.46}$$

# Kapitel 5

## Korrelationslänge

Am kritischen Punkt sind langreichweitige Fluktuationen für das zugrundeliegende physikalische System ausschlaggebend. Die Reichweite dieser Fluktuationen wird durch die Korrelationslänge  $\xi$  beschrieben, welche durch das zweite Moment der verbundenen Zwei-Punkt-Green-Funktion definiert wird:

$$\begin{aligned}\xi^2 &:= \frac{1}{2D} \frac{\int d^D x x^2 G_c^{(2)}(x)}{\int d^D x G_c^{(2)}(x)} \\ &= - \left. \frac{\frac{\partial}{\partial p^2} G_c^{(p)}}{G_c^{(2)}(p)} \right|_{p^2=0}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Da der letzte Ausdruck nach (3.10) bzw. (3.12) das Inverse des renormierten Massenquadrates ist, folgt  $m_R = 1/\xi$ .

Die Korrelationslänge divergiert für  $T \simeq T_c$ , wobei sie sich durch einen Ansatz der Form (1.3) beschreiben läßt:

$$T > T_c : \quad \xi_+ = \frac{1}{m_{R+}} \simeq f_+ t_+^{-\nu}; \quad t_+ = \frac{T - T_c}{T_c} = m_0^2 - m_{0c}^2 \quad (5.2)$$

$$T < T_c : \quad \xi_- = \frac{1}{m_{R-}} \simeq f_- t_-^{-\nu}; \quad t_- = \frac{T_c - T}{T_c} = m_{0c}^2 - m_0^2 . \quad (5.3)$$

### 5.1 Kritisches Amplitudenverhältnis

Um das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge  $f_+/f_-$  zu bestimmen, ist es nötig, eine Beziehung zwischen den renormierten Größen beider Phasen herzustellen. Dazu setzt man voraus, daß es möglich ist, beide renormierten Kopplungen durch eine gemeinsame Kopplung  $\bar{u}_R$  darzustellen:

$$u_{R+} = u_{R+}(\bar{u}_R); \quad u_{R-} = u_{R-}(\bar{u}_R) . \quad (5.4)$$

In dieser Kopplung sollten die beiden  $\beta$ -Funktionen

$$\bar{\beta}_{\pm}(\bar{u}_R) := m_{R\pm} \left. \frac{\partial}{\partial m_{R\pm}} \right|_{g_0} \bar{u}_R \quad (5.5)$$

bzgl. der funktionalen Abhängigkeit von  $\bar{u}_R$  identisch sein:

$$\bar{\beta}_+(\bar{u}_R(u_{R+})) = \bar{\beta}_-(\bar{u}_R(u_{R-})) . \quad (5.6)$$

Diese ad hoc formulierte Forderung ist die Basisgleichung für die Herleitung des Amplitudenverhältnisses. Ihre Motivation liegt darin begründet, daß a priori die Funktionen  $\bar{\beta}_\pm$  einen gemeinsamen Fixpunkt  $\bar{u}_R^*$  in der vereinheitlichten Kopplung  $\bar{u}_R$  am kritischen Punkt haben.

Nach Einführung einer neuen dimensionslosen Kopplung

$$u_\pm = \frac{g_0}{m_{R^\pm}^{4-D}} \quad (5.7)$$

läßt sich die  $\beta$ -Funktion aus (5.5) nach einer kurzen Rechnung umschreiben zu

$$\bar{\beta}_\pm(\bar{u}_R) = -(4-D) \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{u}_R} \Big|_{m_{R^\pm}} \log(u_\pm(\bar{u}_R)) \right]^{-1} . \quad (5.8)$$

Die Bedingung (5.6) ist damit erfüllt für

$$u_+(\bar{u}_R) = u_-(\bar{u}_R) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \implies \bar{u}_R(u_+) &= \bar{u}_R(u_-) \\ \Leftrightarrow \bar{u}_R\left(\frac{g_0}{m_{R^+}}\right) &= \bar{u}_R\left(\frac{g_0}{m_{R^-}}\right) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der Identität (5.10) entnimmt man, daß  $\boxed{m_{R^+} = m_{R^-}}$  sein muß. Mit dieser Gleichsetzung der Massen hat man die gesuchte Verknüpfung zwischen symmetrischer und gebrochener Phase hergestellt. Unter Einführung von

$$F_\pm := \frac{\partial m_{R^\pm}^2}{\partial m_{0^\pm}^2} \Big|_{g_0} \quad (5.11)$$

erhält man nach kurzer Rechnung aus den Gleichungen (5.2, 5.3) sowie der Beziehung  $m_{0^-}^2 = -2m_{0^+}^2$  (1.19) den Ausdruck

$$\frac{t_+}{t_-} = 2 \frac{F_-}{F_+} . \quad (5.12)$$

Damit ergibt sich aus dem Quotienten von (5.2) und (5.3)

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = \left[ 2 \frac{F_-(u_{R^-}(\bar{u}_R))}{F_+(u_{R^+}(\bar{u}_R))} \right]^\nu} \quad [\text{MH94}] . \quad (5.13)$$

Da zur Bestimmung von  $f_+/f_-$  zwei Fixpunkte  $u_{R^+}^*$  und  $u_{R^-}^*$  zur Verfügung stehen, gibt es für die Festlegung von  $\bar{u}_R$  zwei Möglichkeiten:

Hochtemperaturanpassung:

$$\bar{u}_R \equiv u_{R+} \Rightarrow u_+(\bar{u}_R) = u_-(u_{R-}(\bar{u}_R)) \quad (5.14)$$

Tieftemperaturanpassung:

$$\bar{u}_R \equiv u_{R-} \Rightarrow u_-(\bar{u}_R) = u_+(u_{R+}(\bar{u}_R)) \quad (5.15)$$

In der symmetrischen Phase läßt sich aus den renormierten Größen die Beziehung  $u_+(u_{R+})$  als Reihe in  $u_{R+}$  berechnen. In der Hochtemperaturanpassung setzt man andererseits eine Reihenentwicklung für  $u_-(u_{R+})$  an:

$$u_- = u_{R+} + a_1 u_{R+}^2 + a_2 u_{R+}^3 + a_3 u_{R+}^4 + O(u_{R+}^5) .$$

Damit lassen sich aus (5.9) die Koeffizienten  $a_i$  berechnen, so daß  $u_-(u_{R+})$  bekannt ist. Mit dem aus der gebrochenen Phase bekannten Zusammenhang  $u_-(u_{R-})$  ergibt sich somit  $u_{R-}(u_{R+})$ . Nach Ersetzung von  $u_{R-}$  in (5.13) und Betrachtung am kritischen Punkt mit  $u_{R+} = u_{R+}^*$  erhält man das gesuchte Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge. Dieses Verfahren ist analog auf die Tieftemperaturanpassung anzuwenden.

Bei der praktischen Berechnung ist es möglich, das Amplitudenverhältnis nach (5.13) inklusive der Renormierungsgruppenfunktion  $\nu(u_R)$  in eine Reihe zu entwickeln und zu berechnen. Da der kritische Exponent  $\nu$  direkt in einer Phase berechnet werden kann, ist er als Literaturwert aus verschiedenen Untersuchungen in einer höheren Genauigkeit bekannt, als sie hier erreicht werden kann. Daher beschränken wir uns hier auf die Reihenentwicklung von  $F_+/F_-$ . Für dieses Verhältnis führen wir hier für jede Wahl der gemeinsamen Kopplung eine neue Größe ein:

$$\Phi_+(u_{R+}) := \frac{F_-}{F_+}(u_{R+}) \quad (5.16)$$

$$\Phi_-(u_{R-}) := \frac{F_-}{F_+}(u_{R-}) . \quad (5.17)$$

## 5.2 Reihenergebnisse

Bei der Präsentation der Reihenentwicklungen, die für die Berechnung des Amplitudenverhältnisses benötigt werden, habe ich mich auf die wichtigsten Ergebnisse beschränkt. Eine ausführlichere Darstellung findet man bei [Küs95]. Die aufgeführten Reihen gelten für die nicht-geradzahlige Dimension  $D = 3 - \epsilon$ , wobei nur die Terme in Ordnung  $O(\epsilon)$  berücksichtigt werden, die zum Endergebnis beitragen. Sofern in jeder Ordnung konvergente Reihenentwicklungen vorliegen, wie z.B. bei den

Renormierungsgruppenfunktionen, ist der Grenzübergang  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  vollzogen worden. Die verwendeten Konstanten und Ausdrücke findet man in Anhang C.

### 5.2.1 Symmetrische Phase

Wie es aus dem Renormierungsschema in Kapitel 3.1 ersichtlich ist, mußten folgende Funktionen zur Bestimmung der renormierten Größen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(0) &= -m_{0+}^2 + \frac{u_{0+}}{8\pi} m_{0+}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{4\pi}{m_{0+}^2} \right) \right) \\ &\quad + \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^2 m_{0+}^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right) \\ &\quad + \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^3 m_{0+}^2 \left( \frac{11}{24} - \frac{7}{3} \log \frac{4}{3} - 8a - \frac{1}{6} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0+}^4) \quad (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} &= -1 - \frac{1}{81} \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^2 + \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^3 \left( -\frac{13}{81} + \frac{8}{27} \log \frac{4}{3} + \frac{8}{3} a \right) \\ &\quad + O(u_{0+}^4) \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(0) &= -u_{0+} m_{0+} + \frac{3}{2} \frac{u_{0+}^2}{8\pi} m_{0+} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{4\pi}{m_{0+}^2} \right) \right) - 2 \frac{u_{0+}^3}{(8\pi)^2} m_{0+} \\ &\quad + \frac{u_{0+}^4}{(8\pi)^3} m_{0+} \left( -\frac{7}{16} + \frac{15}{2} \log \frac{4}{3} + 48a + C^{(tet)} + \frac{1}{4} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0+}^5) . \quad (5.20) \end{aligned}$$

Mit der Renormierungskonstanten  $Z_3$  nach (3.6) berechnet sich die renormierte Masse nach (3.10), sowie die renormierte Kopplung nach (3.11) zu

$$\begin{aligned} m_{R+}^2 &= -Z_3 \Gamma^{(2)}(0) \\ &= m_{0+}^2 - \frac{u_{0+}}{8\pi} m_{0+}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( 2 + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{4\pi}{m_{0+}^2} \right) \right) \\ &\quad + \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^2 m_{0+}^2 \left( \frac{79}{162} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right) \\ &\quad + \left( \frac{u_{0+}}{8\pi} \right)^3 m_{0+}^2 \left( -\frac{131}{216} + \frac{71}{27} \log \frac{4}{3} + \frac{32}{3} a + \frac{1}{6} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0+}^4) \quad (5.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{R+} &= -\frac{1}{m_{R+}} Z_3^2 \Gamma^{(4)}(0) \\ &= u_{0+} - \frac{u_{0+}^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( -1 + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{4\pi}{m_{0+}^2} \right) \right) + \frac{u_{0+}^3}{(8\pi)^2} \left( \frac{293}{216} + \frac{1}{6} B^{(div)} \right) \\ &\quad + \frac{u_{0+}^4}{(8\pi)^3} \left( \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \log \frac{4}{3} - 48a - C^{(tet)} - \frac{1}{3} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0+}^5) . \quad (5.22) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit der Definition der Größe  $F_+$  (5.11) nach Ableiten von (5.21) und Einsetzen der invertierten Reihe  $u_{0+}(u_{R+})$

$$F_+(u_{R+}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1}{6} \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 + \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 \left( \frac{43}{108} - \frac{71}{54} \log \frac{4}{3} - \frac{16}{3} a \right) + O(u_{R+}^4) . \quad (5.23)$$

### 5.2.2 Gebrochene Phase

In dieser Phase ist zusätzlich zu  $\Gamma^{(2)}$  und seiner Ableitung die Ein-Punkt-Funktion  $G_c^{(1)}$  berechnet worden:

$$G_c^{(1)}(0) = \frac{u_{0-}^{1/2}}{8\pi} \sqrt{3m_{0-}} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} (2 + \psi(\frac{1}{2}) + \log \frac{4\pi}{m_{0-}^2}) \right) + \frac{1}{3} \frac{u_{0-}^{3/2}}{(8\pi)^2} \sqrt{3m_{0-}} B^{(div)} + \frac{u_{0-}^{5/2}}{(8\pi)^3} \sqrt{3m_{0-}} \left( -1 - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} - \frac{7}{2} a - \frac{1}{16} C^{(tet)} \right) + O(u_{0-}^{7/2}) \quad (5.24)$$

$$\Gamma^{(2)}(0) = -m_{0-}^2 - \frac{1}{2} \frac{u_{0-}}{8\pi} m_{0-}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} (8 + \psi(\frac{1}{2}) + \log \frac{4\pi}{m_{0-}^2}) \right) - \left( \frac{u_{0-}}{8\pi} \right)^2 m_{0-}^2 \left( \frac{3}{4} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right) + \left( \frac{u_{0-}}{8\pi} \right)^3 m_{0-}^2 \left( \frac{29}{24} - \frac{5}{6} \log \frac{4}{3} + \frac{85}{4} a + \frac{27}{32} C^{(tet)} - \frac{1}{6} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0-}^4) \quad (5.25)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -1 - \frac{1}{8} \frac{u_{0-}}{8\pi} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} (2 + \psi(\frac{1}{2}) + \log \frac{4\pi}{m_{0-}^2}) \right) + \frac{41}{648} \left( \frac{u_{0-}}{8\pi} \right)^2 + \left( \frac{u_{0-}}{8\pi} \right)^3 \left( -\frac{931}{864} + \frac{19375}{2592} \log \frac{4}{3} - \frac{703}{48} a - \frac{2481}{1024} C^{(tet)} + \frac{1}{24} B_1^{(div)} \right) + O(u_{0-}^4) . \quad (5.26)$$

Die renormierten Größen berechnet man daraus über ihre Definition (3.12,3.13):

$$m_{R-}^2 = -Z_3 \Gamma^{(2)}(0) = m_{0-}^2 + \frac{3}{8} \frac{u_{0-}}{8\pi} m_{0-}^2 \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} (10 + \psi(\frac{1}{2}) + \log \frac{4\pi}{m_{0-}^2}) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u_{0-}}{8\pi}\right)^2 m_{0-}^2 \left(\frac{3973}{5184} + \frac{2}{3}B^{(div)}\right) \\
& + \left(\frac{u_{0-}}{8\pi}\right)^3 m_{0-}^2 \left(-\frac{101245}{41472} + \frac{21535}{2592} \log \frac{4}{3} - \frac{1723}{48}a - \frac{3345}{1024}C^{(tet)} + \frac{1}{8}B_1^{(div)}\right) \\
& + O(u_{0-}^4) \tag{5.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{R-} &= \frac{3m_{R-}^2}{v_R^2} \\
&= u_{0-} - \frac{31}{16} \frac{u_{0-}^2}{8\pi} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{38}{31} + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{4\pi}{m_{0-}^2}\right)\right) \\
&\quad + \frac{u_{0-}^3}{(8\pi)^2} \left(\frac{45565}{13824} - \frac{1}{3}B^{(div)}\right) \\
&\quad + \frac{u_{0-}^4}{(8\pi)^3} \left(-\frac{341551}{73728} + \frac{21247}{1728} \log \frac{4}{3} - \frac{819}{32}a - \frac{8051}{2048}C^{(tet)} + \frac{31}{24}B_1^{(div)}\right) \\
&\quad + O(u_{0-}^4) . \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Nach Invertierung der letzten Reihe erhalten wir analog zur symmetrischen Phase

$$\begin{aligned}
F_-(u_{R-}) &= 1 + \frac{3}{16} \frac{u_{R-}}{8\pi} - \frac{233}{768} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3 \left(-\frac{338737}{663552} - \frac{21535}{5184} \log \frac{4}{3} + \frac{1723}{96}a + \frac{3345}{2048}C^{(tet)}\right) + O(u_{R-}^4) . \tag{5.29}
\end{aligned}$$

### 5.2.3 $\beta$ -Funktion

Das Reihenergebnis der  $\beta$ -Funktion erhalten wir für beide Phasen aus (3.32) oder (5.8) :

$$\begin{aligned}
\beta_+(u_{R+}) &= -u_{R+} + \frac{3}{2} \frac{u_{R+}^2}{8\pi} - \frac{77}{81} \frac{u_{R+}^3}{(8\pi)^2} \\
&\quad + \frac{u_{R+}^4}{(8\pi)^3} \left(-\frac{235}{27} + \frac{373}{18} \log \frac{4}{3} + 128a + 3C^{(tet)}\right) + O(u_{R+}^5) \tag{5.30}
\end{aligned}$$

$$= -u_{R+} + 0.05968u_{R+}^2 - 0.001505u_{R+}^3 + 0.0001219u_{R+}^4 + O(u_{R+}^5) \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_-(u_{R-}) \\
&= -u_{R-} + \frac{7}{4} \frac{u_{R-}^2}{8\pi} + \frac{239}{1296} \frac{u_{R-}^3}{(8\pi)^2} \\
&+ \frac{u_{R-}^4}{(8\pi)^3} \left( \frac{821989}{165888} - \frac{21319}{432} \log \frac{4}{3} + \frac{1045}{8} a + \frac{8547}{512} C^{(tet)} \right) + O(u_{R-}^5) \\
& \hspace{15em} (5.32)
\end{aligned}$$

$$= -u_{R-} + 0.06963u_{R-}^2 + 0.0002920u_{R-}^3 - 0.0001321u_{R-}^4 + O(u_{R-}^5). \quad (5.33)$$

Hierbei ist zu beachten, daß im Vergleich mit den Werten, welche aus numerischen Integrationen erhalten wurden [BNMG76, GZJ77, BNM77], eine Diskrepanz in der Hochtemperaturphase in 3-Loop-Ordnung vorliegt. Der hier berechnete Wert liegt um genau  $\frac{3}{4} \frac{1}{(8\pi)^3}$  über dem bisher ermittelten Wert.

	(1,0)-Padé	(2,0)-Padé	(1,1)-Padé
$u_{R+}^*$	16.7552	25.7773	29.0131
$u_{R-}^*$	14.3616	13.5875	13.5459

Tabelle 5.1: Nullstellen der  $\beta$ -Funktion in 1- und 2-Loop-Ordnung

	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé-Borel	(1,2)-Padé-Borel
$u_{R+}^*$	15.326	21.5825	18.7304 *
$u_{R-}^*$		14.2149	18.4775

Tabelle 5.2: Nullstellen der  $\beta$ -Funktion in 3-Loop-Ordnung

### Literaturwerte für $u_R^*$

$$\begin{aligned}
u_{R+}^* &= \begin{cases} 23.73(8) & [\text{ZJ89}], \text{ Renormierungsgruppe} \\ 24.56(10) & [\text{SIE93}], \text{ HT-Entwicklung} \end{cases} \\
u_{R-}^* &= \begin{cases} 14.73(14) & [\text{SIE93}], \text{ TT-Entwicklung} \\ 15.1(1.3) & [\text{MÜN90}], \text{ indirekt aus } [\text{TF75}, \text{ AH76}, \text{ BG80}] \end{cases}
\end{aligned}$$

Zur Konvergenzverbesserung sind die  $\beta$ -Funktionen bzw. vielmehr die Reihen  $\beta/u_R$  mit Hilfe des Padé-Borel-Verfahrens resummiert worden (s. Anhang B). Die

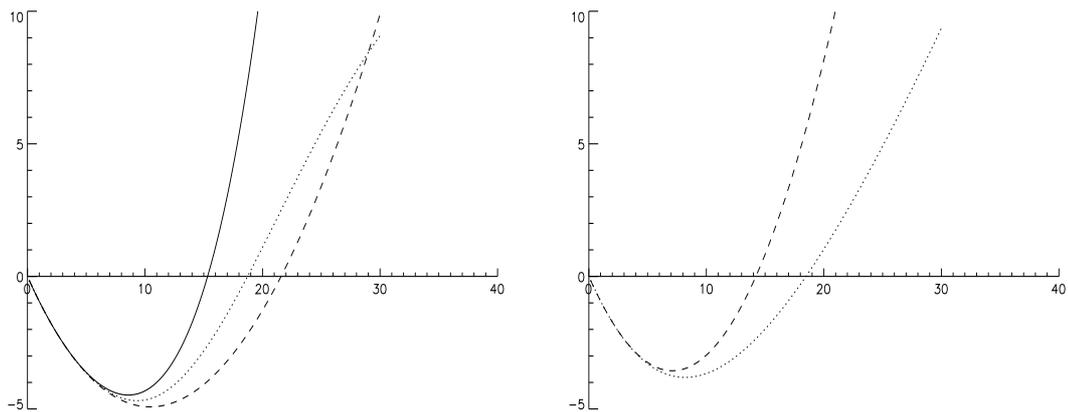
Werte, zu deren Bestimmung ein Hauptwertintegral (B.10) herangezogen werden mußte, sind mit einem Stern \* gekennzeichnet. Trotz Konvergenzverbesserungen sind die Kurven und damit die Nullstellen der  $\beta$ -Funktionen weit gestreut. Da der (3,0)-Padé in der geordneten Phase keine Nullstelle auf der positiven reellen Achse ausbildet, ist er hier nicht mit aufgeführt worden.

Die Nullstellen der geordneten Phase haben in jeder Ordnung (Tab. 5.1, 5.2 ) eine größere Übereinstimmung mit den Literaturwerten als die Resultate der symmetrischen Phase. Dennoch sind die Unterschiede der Nullstellen in 3-Loop-Ordnung so groß, daß sich hieraus kein hinreichend genauer Mittelwert bilden läßt, der mit den Literaturwerten konkurrieren könnte.

### $\beta$ -Funktion

symmetrische Phase

gebrochene Phase



durchgezogene Linie: (3,0)-Padé    gestrichelte Linie: (2,1)-Padé    gepunktete Linie: (1,2)-Padé

#### 5.2.4 $\nu$ -Funktion

Aus der durch ihre Definition (3.38) bestimmten Renormierungsgruppenfunktion  $\nu(u_R)$

$$\begin{aligned} \nu_+(u_{R^+}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{u_{R^+}}{8\pi} - \frac{11}{2592} \left( \frac{u_{R^+}}{8\pi} \right)^2 + \left( \frac{u_{R^+}}{8\pi} \right)^3 \left( -\frac{1343}{10368} + \frac{47}{72} \log \frac{4}{3} + a \right) + O(u_{R^+}^4) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$= 0.5 + 0.004973 u_{R+} - 6.718 \cdot 10^{-6} u_{R+}^2 + 5.714 \cdot 10^{-6} u_{R+}^3 + O(u_{R+}^4) \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \nu_-(u_{R-}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{10325}{41472} \left( \frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 \left( \frac{1763563}{1327104} - \frac{18295}{3456} \log \frac{4}{3} + \frac{193}{64} a + \frac{6147}{4096} C^{(tet)} \right) + O(u_{R-}^4) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$= 0.5 - 0.001243 u_{R-} + 0.0003941 u_{R-}^2 + 0.00001038 u_{R-}^3 + O(u_{R-}^4) \quad (5.37)$$

erhalten wir den kritischen Exponenten  $\nu$  für  $u_R = u_R^*$ . Die besten Abschätzungen für sein Ergebnis in der Hochtemperaturphase erhält man nach Anwendung der alternativen Borel-Transformierten (B.15). Dabei werden nur die Padé-Approximanten der letzten drei Reihenelemente gebildet. Andererseits erzeugen die reinen Padé-Approximanten in der Tieftemperaturphase die geringste Streuung. Da der aus

symmetrische Phase

$u_{R+}^*$	(3,0)-Padé	(1,1)-Padé-Borel	(0,2)-Padé-Borel
23.73	0.6906	0.6177	0.6150 *
24.56	0.7027	0.62184	0.617035 *

Tabelle 5.3: kritischer Exponent  $\nu_+$  für  $T > T_c$

gebrochene Phase

$u_{R-}^*$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
14.73	0.6003	0.6214	0.6948	0.6344
15.1	0.6068	0.6304	0.7173	0.6457

Tabelle 5.4: kritischer Exponent  $\nu_-$  für  $T < T_c$

### Literaturwerte für $\nu$

$$\nu = \begin{cases} 0.6300(8) & [\text{GZJ77}], \quad \text{Renormierungsgruppe} \\ 0.625(3) & [\text{CBSB76}], \quad \text{binäre Fluide} \\ 0.624(2) & [\text{BGHP92}], \quad \text{Monte-Carlo-Rechnungen} \end{cases}$$

den Tabellen 5.3 und 5.4 bestimmte Mittelwert  $\nu = 0.64(12)$  eine größere Varianz als die Literaturwerte hat, haben wir auf diese für die Berechnung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge zurückgegriffen.

### 5.2.5 Amplitudenverhältnis

In der *Hochtemperaturanpassung* setzt man  $\bar{u}_R = u_{R+}$ . Aus den renormierten Parametern (5.21, 5.22) bestimmt sich

$$u_+(u_{R+}) = \frac{g_0}{m_{R+}}(u_{R+}) \quad (D=3) ,$$

so daß wir mit dem oben skizzierten Verfahren erhalten

$$\begin{aligned} & u_{R-}(u_{R+}) \\ &= u_{R+} - \frac{1}{4} \frac{u_{R+}^2}{8\pi} - \frac{1309}{2592} \frac{u_{R+}^3}{(8\pi)^2} \\ & \quad + \frac{u_{R+}^4}{(8\pi)^3} \left( -\frac{251773}{55296} + \frac{30271}{1296} \log \frac{4}{3} - \frac{7}{8} a - \frac{2337}{512} C^{(tet)} \right) + O(u_{R+}^5) . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Mit den berechneten Reihen für  $F_+(u_{R+})$  und  $F_-(u_{R-})$  führt (5.38) auf

$$\begin{aligned} \Phi_+(u_{R+}) &:= \frac{F_-}{F_+}(u_{R+}) \\ &= 1 + \frac{u_{R+}}{8\pi} \frac{11}{16} + \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \frac{41}{256} \\ &= + \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 \left( -\frac{435937}{663552} - \frac{14719}{5184} \log \frac{4}{3} + \frac{745}{32} a + \frac{3345}{2048} C^{(tet)} \right) + O(u_{R+}^4) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$= 1 + 0.02735u_{R+} + 0.0002535u_{R+}^2 - 0.00002733u_{R+}^3 + O(u_{R+}^4) . \quad (5.40)$$

Nach Anwendung des Padé-Borel-Verfahrens erhält man als Mittelwert aus den in Tabelle 5.5 aufgeführten Werten:

$$\boxed{\Phi_+(u_{R+}) = 1.48(24)} .$$

Hierbei wie auch im folgenden ist die Fehlerangabe als Maximalfehler der vorliegenden Werte anzusehen, in welche die Unsicherheiten der Literaturwerte nicht mit einbezogen werden. Weiterhin berechnet man nach (5.13) mit der Beziehung

$$\frac{f_+}{f_-} = (2\Phi)^\nu \quad (5.41)$$

das Endergebnis für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}) = 1.98(20)} ,$$

welcher der Mittelwert der Amplitudenverhältnisse für die vorgegebenen Literaturwerte des kritischen Exponenten ist (Tabelle 5.6). Dieses Ergebnis stellt keine Verbesserung des 2-Loop-Ergebnisses  $f_+/f_- = 2.18(12)$  [HEI93] dar.

Entsprechend haben wir für die *Tieftemperaturanpassung*

$$\begin{aligned}
u_{R^+}(u_{R^-}) &= u_{R^-} + \frac{1}{4} \frac{u_{R^-}^2}{8\pi} + \frac{1633}{2592} \frac{u_{R^-}^3}{(8\pi)^2} \\
&\quad + \frac{u_{R^-}^4}{(8\pi)^3} \left( \frac{872999}{165888} - \frac{30271}{1296} \log \frac{4}{3} + \frac{7}{8} a + \frac{2337}{512} C^{(tet)} \right) + O(u_{R^-}^5) \quad (5.42)
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
\Phi_-(u_{R^-}) &:= \frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) \\
&= 1 + \frac{u_{R^-}}{8\pi} \frac{11}{16} + \left( \frac{u_{R^-}}{8\pi} \right)^2 \frac{85}{256} \\
&\quad + \left( \frac{u_{R^-}}{8\pi} \right)^3 \left( -\frac{95393}{663552} - \frac{14719}{5184} \log \frac{4}{3} + \frac{745}{32} a + \frac{3345}{2048} C^{(tet)} \right) + O(u_{R^-}^4) \quad (5.43)
\end{aligned}$$

$$= 1 + 0.02735 u_{R^-} + 0.0005256 u_{R^-}^2 + 4.992 \cdot 10^{-6} u_{R^-}^3 + O(u_{R^-}^4) . \quad (5.44)$$

Der Mittelwert der reinen Padé-Approximanten (Tabelle 5.7) dieser Reihe

$$\boxed{\Phi_-(u_{R^-}) = 1.536(18)}$$

scheint aufgrund des geringen Maximalfehlers der Padé-Approximanten eine höhere Genauigkeit als in der Hochtemperaturanpassung zu haben. Da außerdem eine Konvergenzverbesserung bzgl. des 2-Loop-Ergebnisses vorliegt, versuche ich hier einen Grenzwert der Reihe (5.44) mit Hilfe konvergenzfördernder Transformationen (Anhang A) abzuschätzen. Mit den Folgeelementen  $A_n$ , die sich als Aufsummation der Reihe (5.44) bis zur n-ten Ordnung ergeben

$$\begin{aligned}
u_{R^-}^* = 14.73 : \quad \{A_n\} &= \{1, 1.4029, 1.5169, 1.5330\} \\
u_{R^-}^* = 15.1 : \quad \{A_n\} &= \{1, 1.4130, 1.5329, 1.5501\} \quad ,
\end{aligned}$$

erhalte ich die möglichen Grenzwerte  $\Phi_-$  nach zweifacher Anwendung der  $e_1$ -Transformation:

$$\Phi_- = e_1^2(A_n) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \Phi_-(u_{R^-}^* = 14.73) &= 1.5356 \\ \Phi_-(u_{R^-}^* = 15.1) &= 1.5530 \quad . \end{aligned}$$

Ihr Mittelwert  $\Phi_- = 1.544(9)$  führt zu einem Amplitudenverhältnis von  $f_+/f_- = 2.028(28)$ . Dieser liegt etwas höher als der gemittelte Wert, welcher sich aus den Werten der Tabelle 5.8 ergibt

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-}(u_{R^-}) = 2.021(22)} \quad , \quad (5.45)$$

wobei zu beachten ist, daß die Padé-Borel-Resummation eine Verschlechterung des Ergebnisses mit sich bringt.

### 5.2.6 Diskussion

Wie sich schon in 2-Loop-Berechnungen gezeigt hat, sind die 3-Loop-Ergebnisse in der gemeinsamen Kopplung  $u_{R-}$  besser als in der Hochtemperaturanpassung. Dieses liegt darin begründet, daß der Koeffizient 3-ter Ordnung für  $\Phi_-$  sehr viel stärker abfällt als für  $\Phi_+$ . Mit eingesetzten Fixpunktwerten beträgt das Verhältnis von 3-Loop zu 2-Loop-Ordnung für  $\Phi_+$  2.5, während bei  $\Phi_-$  mit 0.14 eine echte Konvergenz vorliegt. In der gemeinsamen Kopplung  $u_{R+}$  weicht das 3-Loop-Ergebnis bzgl. des 2-Loop-Wertes nach unten ab. In der Tieftemperaturanpassung hingegen bleibt das 2-Loop-Ergebnis mit höherer Genauigkeit erhalten. Somit liefert (5.45) das Endresultat für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge. Dieser Wert ist insofern erfreulich, als daß sich die Wahrscheinlichkeit erhöht, daß das ermittelte Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge über Zwei liegt und damit insbesondere im Rahmen der Genauigkeit mit den experimentellen Meßwerten und den neuesten Monte-Carlo-Rechnungen übereinstimmt:

#### Literaturwerte

$$\frac{f_+}{f_-} = \left\{ \begin{array}{ll} 2.22(5), 2.04(20), 1.9(2) & [\text{KKG83}], \text{ binäre Fluide} \\ 1.94(3) & [\text{SIE93}], \\ 1.96(3) & [\text{TF73}], \end{array} \right\} \text{ HT/TT- Entw.}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1.91 & [\text{BGZJ74}], \text{ } \epsilon\text{-Entw.} \\ 2.063(12) & [\text{RZW94}], \text{ Monte-Carlo} \end{array} \right.$$

Erstaunlicherweise tritt in der Tieftemperaturanpassung das Phänomen auf, daß der Maximalfehler für  $\Phi_-$  bei ca. 1% liegt, obwohl die Ungenauigkeiten für die Nullstellen der  $\beta$ -Funktion und des kritischen Exponenten  $\nu$  bis zu 30% ausmachen. Die durch numerische Integrationen in der symmetrischen Phase bestimmten Renormierungsgruppenfunktionen [BNMG76] zeigen, daß zumindest bis zur 6-Loop-Ordnung die jeweiligen Reihen konvergieren. Da dieses auch für die gebrochene Phase zutreffen wird, ist bei Rechnungen in höheren Ordnungen mit einer weiteren Verbesserung der Genauigkeit zu rechnen.

## 5.3 Experimentelle Bestimmung

Das in dieser Arbeit ermittelte kritische Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge läßt sich am genauesten an binären Fluiden bestimmen. Diese sind Flüssigkeitsmischungen, bestehend aus einer polaren und einer nicht-polaren Komponente (z.B. Methanol und Hexan), welche erst ab einer bestimmten Temperatur  $T_c$  beliebig mischbar sind. Ein für dieses System geeigneter Ordnungsparameter ist die Differenz der Konzentration eines Stoffes in einem anderen Stoff  $c(x)$  mit der mittleren

$u_{R+}^*$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
23.73	1.4266	1.6962	1.4423	1.3687
24.56	1.4198	1.7211	1.4472	1.3578

Tabelle 5.5:  $\Phi_+(\mathbf{u}_{R+}^*)$  nach Padé-Borel Resummation

$\nu$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
$u_{R+}^* = 23.73$				
0.624	1.9237	2.1431	1.9369	1.8746
0.630	1.9358	2.1588	1.9492	1.8860
$u_{R+}^* = 24.56$				
0.624	1.9179	2.1672	1.9410	1.8653
0.630	1.9300	2.1788	1.9534	1.8765

Tabelle 5.6: Amplitudenverhältnis  $\frac{f_+}{f_-}(\mathbf{u}_{R+}^*)$ 

$u_{R-}^*$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
14.73	1.5330	1.5355	1.5178	1.5246
15.1	1.5501	1.5530	1.5330	1.5407

Tabelle 5.7: Padé-Approximanten von  $\Phi_-(\mathbf{u}_{R-}^*)$ 

$\nu$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
$u_{R-}^* = 14.73$				
0.624	2.0119	2.0140	1.9995	2.0051
0.630	2.0255	2.0277	2.0129	2.0186
$u_{R-}^* = 15.1$				
0.624	2.0259	2.0283	2.0120	2.0183
0.630	2.0397	2.0421	2.0255	2.0319

Tabelle 5.8: Amplitudenverhältnis  $\frac{f_+}{f_-}(\mathbf{u}_{R-}^*)$

Konzentration  $\bar{c}$  für  $T > T_c$ :

$$\phi(x) = c(x) - \bar{c} .$$

Treten die beiden Komponenten in einem bestimmten kritischen Mischungsverhältnis auf, hat man aufgrund von extremen lokalen Konzentrationsschwankungen bei  $T \sim T_c$  den Effekt der kritischen Opaleszenz. Der dabei gemessene differentielle Streuquerschnitt  $I(k)$  hängt direkt von der Zweipunktkorrelationsfunktion ab [BBC82] :

$$I(p) \propto G_c(p\xi) , \quad (5.46)$$

wobei  $\xi$  die Korrelationslänge ist. Das Verhalten der Zweipunktfunktion ist für kleine Impulse nach (??) und für große Skalierungen nach einem Theorem von Weinberg bekannt [CL84] :

$$\begin{aligned} G_c(p) &\sim p^2(a_0(\log p)^{b_0} + a_1(\log p)^{b_1} + \dots) \\ &\sim p^{2-\eta} \quad p \gg 1 , \end{aligned}$$

wobei  $\eta$  die anomale Dimension ist. Mit diesen bekannten Verhalten findet man einen Ansatz für die Funktion  $G_c^{(2)}(p\xi)$ . Betrachtet man die Korrelationslänge als Fitparameter, so ergibt sich aus den experimentellen Werten sowohl ihre Amplitude als auch der kritische Exponent  $\nu$ . Darüberhinaus kann man in der erweiterten Form von (1.3)

$$\begin{aligned} A|_{t \rightarrow 0} &= A_0 t^{-\lambda} (1 + at^\Delta + \dots) + A \\ &A \equiv \text{nichtsingulärer Anteil} \end{aligned}$$

den Korrekturterm  $\Delta$  messen. Dieser liegt in der Größenordnung von 0.5. Aus der Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen läßt sich generell sagen, daß binäre Fluide in der Universalitätsklasse des dreidimensionalen, einkomponentigen Ising-Modells liegen [CBSB76] .

# Kapitel 6

## Suszeptibilität

### 6.1 Amplitudenverhältnis

In der Thermodynamik ist die Suszeptibilität als Responsefunktion über die zweite Ableitung der freien Energie  $F(H, T) = \log Z$  nach dem äußeren Magnetfeld definiert:

$$\chi := \left. \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \right|_T . \quad (6.1)$$

Analog definiert man in der Feldtheorie

$$\begin{aligned} \chi &:= G_c^{(2)}(0) \\ &= -(\Gamma^{(2)}(0))^{-1} \\ &= \frac{Z_3}{m_R^2} \quad (\text{nach (3.10)}) . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Herleitung des Amplitudenverhältnisses erfolgt analog zur Korrelationslänge, so daß ich hier die Bezeichnungen aus Kapitel 5 übernehme. In der Nähe des Phasenüberganges hat die Suszeptibilität ein typisch kritisches Verhalten:

$$\chi_{\pm} = C_{\pm} t_{\pm}^{-\gamma} . \quad (6.3)$$

Der Quotient  $\chi_+/\chi_-$  liefert mit (6.2) den Ausdruck

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{m_{R-}^2 Z_{3+}}{m_{R+}^2 Z_{3-}} \left( \frac{t_+}{t_-} \right)^{\gamma} . \quad (6.4)$$

Mit der Forderung, daß die renormierten Massen gleich sind, sowie Benutzung der Gl. (5.12) erhält man

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = \frac{Z_{3+}}{Z_{3-}} \left[ 2 \frac{F_-}{F_+} \right]^{\gamma}} \quad [\text{HEI93}] . \quad (6.5)$$

## 6.2 $\gamma$ -Funktion

Für die Renormierungsgruppenfunktion  $\gamma(u_R)$  erhält man mit der Definition (3.39) aus den berechneten Vertexfunktionen eine Reihenentwicklung in  $u_{R\pm}$ :

symmetrische Phase:

$$\begin{aligned} \gamma_+(u_{R^+}) &= 1 + \frac{1}{4} \frac{u_{R^+}}{8\pi} - \frac{1}{48} \left(\frac{u_{R^+}}{8\pi}\right)^2 + \left(\frac{u_{R^+}}{8\pi}\right)^3 \left(-\frac{901}{1728} + \frac{7}{4} \log \frac{4}{3} + 6a\right) + O(u_{R^+}^4) \\ & \quad (6.6) \end{aligned}$$

$$= 1 + 0.009947u_{R^+} - 0.00003298u_{R^+}^2 + 0.00001113u_{R^+}^3 + O(u_{R^+}^4) \quad (6.7)$$

gebrochene Phase:

$$\begin{aligned} \gamma_-(u_{R^-}) &= 1 - \frac{1}{8} \frac{u_{R^-}}{8\pi} + \frac{169}{384} \left(\frac{u_{R^-}}{8\pi}\right)^2 \\ & \quad + \left(\frac{u_{R^-}}{8\pi}\right)^3 \left(\frac{96577}{110592} + \frac{5}{8} \log \frac{4}{3} - \frac{255}{16}a - \frac{81}{128}C^{(tet)}\right) + O(u_{R^-}^4) \quad (6.8) \end{aligned}$$

$$= 1 - 0.004973u_{R^-} + 0.0006967u_{R^-}^2 + 0.00002681u_{R^-}^3 + O(u_{R^-}^4) \quad (6.9)$$

Nach Ersetzung der renormierten Kopplungen  $u_{R\pm}$  durch ihre Fixpunktwerte  $u_{R\pm}^*$  erhält man den kritischen Exponenten  $\gamma$  der Suszeptibilität  $\gamma = 1.1(4)$ . Ebenso wie bei der Korrelationslänge bietet es sich auch hier an, auf die Literaturwerte zurückzugreifen:

$$\gamma = \begin{cases} 1.250(1) & [\text{GZJ80}], \quad \text{HT-Entwicklung} \\ 1.240(7) & [\text{CBSB76}], \quad \text{binäre Fluide} \\ 1.237(2) & [\text{BGHP92}], \quad \text{Monte-Carlo-Rechnungen} \end{cases} .$$

$u_{R^+}^*$	(3,0)-Padé	(1,1)-Padé-Borel	(0,2)-Padé-Borel
23.73	1.3663	1.2329	1.2319 *
24.56	1.3894	1.2410	1.2363 *

Tabelle 6.1: kritischer Exponent  $\gamma_+$  für  $T > T_c$

$u_{R-}^*$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé-Borel	(1,2)-Padé-Borel	(0,3)-Padé-Borel
14.73	1.1636	1.2256 *	0.9472 *	1.0292 *
15.1	1.1760	1.2357 *	0.9420 *	1.0258 *

Tabelle 6.2: kritischer Exponent  $\gamma_-$  für  $T < T_c$ 

### 6.3 Ergebnis

In der Hochtemperaturanpassung erhält man das Amplitudenverhältnis aus (6.5) nach Ersetzung von  $u_{R-}$  durch  $u_{R-}(u_{R+})$  (5.38). Um die Struktur der Reihe mittels Padé-Approximanten untersuchen zu können, wird der gesamte Ausdruck inklusive des Exponenten  $\gamma$  in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}
& \frac{C_+}{C_-}(u_{R+}) \\
&= 2^\gamma + 2^\gamma \frac{u_{R+}}{8\pi} \frac{2 + 11\gamma}{16} + 2^\gamma \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \left( \frac{1403}{10368} + \frac{5}{512}\gamma + \frac{121}{512}\gamma^2 \right) \\
&+ 2^\gamma \left( \frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 \left( \frac{117359}{110592} - \frac{18607}{2592} \log \frac{4}{3} + \frac{277}{16}a + \frac{2481}{1024}C^{(tet)} \right) \\
&+ \gamma \left( -\frac{127237}{221184} - \frac{14719}{5184} \log \frac{4}{3} + \frac{745}{32}a + \frac{3345}{2048}C^{(tet)} \right) - \frac{187}{8192}\gamma^2 + \frac{1331}{24576}\gamma^3 \\
&+ O(u_{R+}^4) \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.36772 + 0.0923157u_{R+} + 0.00192256u_{R+}^2 - 0.0000581302u_{R+}^3 + O(u_{R+}^4) \\
&(\gamma = 1.2435) . \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Der numerischen Ausdruck (6.11) ergibt sich für einen kritischen Exponenten, welcher der Mittelwert der theoretischen Literaturwerte ist. Entsprechendes gilt in der Tieftemperaturanpassung für  $u_{R+} = u_{R+}(u_{R-})$  nach (5.42):

$$\begin{aligned}
& \frac{C_+}{C_-}(u_{R-}) \\
&= 2^\gamma + 2^\gamma \frac{u_{R-}}{8\pi} \frac{2 + 11\gamma}{16} + 2^\gamma \left( \frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \left( \frac{1727}{10368} + \frac{93}{512}\gamma + \frac{121}{512}\gamma^2 \right) \\
&+ 2^\gamma \left( \frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 \left( \frac{14839}{12288} - \frac{18607}{2592} \log \frac{4}{3} + \frac{277}{16}a + \frac{2481}{1024}C^{(tet)} \right) \\
&+ \gamma \left( -\frac{91063}{663552} - \frac{14719}{5184} \log \frac{4}{3} + \frac{745}{32}a + \frac{3345}{2048}C^{(tet)} \right) + \frac{781}{8192}\gamma^2 + \frac{1331}{24576}\gamma^3 \\
&+ O(u_{R-}^4) \tag{6.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.3677 + 0.09231u_{R-} + 0.002840u_{R-}^2 + 0.000072194u_{R-}^3 + O(u_{R-}^4) \\
&(\gamma = 1.2435) . \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Reihen erfolgt mit den Literaturwerten von  $u_{R^\pm}^*$  und  $\gamma$ . Dabei treten hier die gleichen Phänomene auf wie bei der Korrelationslänge. Während die Padé-Borel-Resummation zu einer Konvergenzverbesserung für  $\bar{u}_R = u_{R^+}$  führt, ist dieses bei der Wahl des Tieftemperaturfixpunktes nicht der Fall. Die aus den Tabellen 6.3 und 6.4 bestimmten Mittelwerte liefern

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-}(u_{R^+}) = 4.3(2.6)}$$

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-}(u_{R^-}) = 4.70(16)} \quad .$$

Aufgrund der recht hohen Genauigkeit des letzten Wertes lohnt es sich die zugrundeliegende Reihe genauer zu betrachten. Für einen mittleren Exponenten von  $\gamma = 1.2435$  bilden die aufsummierten 0-3 Loop-Werte von  $C_+/C_-$  folgenden Verlauf:

$$\begin{aligned} u_{R^-}^* = 14.73 : \quad C_+/C_- &= \{2.3677, 3.7616, 4.4091, 4.6577\} \\ u_{R^-}^* = 15.1 : \quad C_+/C_- &= \{2.3677, 3.7274, 4.3436, 4.5744\} \quad . \end{aligned}$$

Da die Folge konvergent und monoton steigend ist, schätze ich einen mittleren Grenzwert mit der  $\epsilon_1^2$ -Transformation ab zu  $C_+/C_- = 4.7626$ .

Die Tieftemperaturkopplung ist hier ebenso wie bei der Korrelationslänge der bessere Entwicklungsparameter. Dies liegt hier jedoch nicht darin begründet, daß die Koeffizienten bei der Entwicklung in  $u_{R^+}$  eine schlechte Konvergenz vorweisen. Das Verhältnis des 3-Loop-Beitrags zur bisherigen Summe beträgt in diesem Fall 15%, während es in der Tieftemperaturanpassung bei 5% liegt. Vielmehr scheint der Vorzeichenwechsel in 3.ter Ordnung in (6.11) und die damit verbundene abbrechende Monotonie der Reihe zu bewirken, daß die Padé-Approximanten eine größere Streuung aufweisen. Beide ermittelten Amplitudenverhältnisse bestätigen im Rahmen ihrer Genauigkeit die Literaturwerte

#### Literaturwerte

$$\frac{C_+}{C_-} = \left\{ \begin{array}{ll} 4.3(3) & [\text{ZJ89}], \\ 4.95(15) & [\text{LF89}], \\ 4.82(5) & [\text{SIE93}], \\ 4.81 & [\text{ZJ89}], \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{binäre Fluide} \\ \text{HT/TT- Entwicklung} \\ \epsilon\text{-Entwicklung} \end{array}$$

$\gamma$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
$u_{R+}^* = 23.73$				
1.237	4.8263	5.1823	4.0431	2.8523
1.250	4.9024	5.2617	4.0983	2.8546
$u_{R+}^* = 24.56$				
1.237	4.8946	5.2961	4.0642	2.8013
1.250	4.9728	5.3780	4.1198	2.8027

Tabelle 6.3: Amplitudenverhältnis  $\frac{C_+}{C_-}(\mathbf{u}_{R+}^*)$  nach Padé-Borel-Resummation

$\gamma$	(3,0)-Padé	(2,1)-Padé	(1,2)-Padé	(0,3)-Padé
$u_{R-}^* = 14.73$				
1.237	4.5421	4.6782	4.6099	4.6338
1.250	4.6074	4.7474	4.6772	4.7004
$u_{R-}^* = 15.1$				
1.237	4.6246	4.7772	4.6987	4.7262
1.250	4.6916	4.8486	4.7679	4.7947

Tabelle 6.4: Amplitudenverhältnis  $\frac{C_+}{C_-}(\mathbf{u}_{R-}^*)$

# Kapitel 7

## Résumé

Durch Verknüpfung von symmetrischer und gebrochener Phase im dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell in dritter Ordnung wurden in dieser Arbeit universelle Amplitudenverhältnisse bestimmt. Dabei haben wir erhalten:

Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge:

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.021(22)}$$

Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität:

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 4.70(16)} .$$

Die Resultate stehen in guter Übereinstimmung mit den Literaturwerten. Insbesondere bei der Korrelationslänge liegt eine Verbesserung vor, da ihr Ergebnis sich eher an die experimentellen Resultate anpaßt als bei anderen Bestimmungsmethoden. Zur Erhärtung dieser Aussage ist es nötig (wie generell in der Störungstheorie), weitere Loop-Ordnungen mit einzubeziehen. Dabei gilt, daß das Verfahren der dimensionellen Regularisierung nicht für höhere Ordnungen zu empfehlen ist. Beispielsweise tragen in 4-Loop-Rechnungen Produkte von 2-Loop-Graph mit sich selber bei. Da in der 2-Loop-Ordnung aufgrund des Graphen  eine  $1/\epsilon$ -Divergenz auftritt, müssen alle Graphen bis  $O(\epsilon)$  regularisiert werden. Da dieses zusammen mit den Regularisierungen der 4-Loop-Graphen umfangreichere Rechnungen erfordert, ist es praktikabler, auf eine Regularisierung zu verzichten. Generell schlage ich folgende Vorgehensweise vor:

- Einführung der reduzierten Masse  $\tilde{m}_0$  zur Elimination sämtlicher Tadpole-Graphen [Küs95]. Dieses hat vor allem den Effekt, durch eine Verminderung der Anzahl der auszuwertenden Graphen mögliche Fehlerquellen zu beseitigen.

- Herleitung des Ausdruckes für das Amplitudenverhältnis in *unbestimmten* Koeffizienten für die Vertexfunktionen. Nach Ersetzung der Koeffizienten durch die entsprechende Summe von Feynman-Graphen besteht die Möglichkeit, daß sich einige Feynman-Integrale gegenseitig eliminieren und somit nicht explizit berechnet werden müssen. Außerdem wird auch hierdurch die Anzahl der Rechnungen reduziert.
- Berechnung der konvergenten Differenz von divergenten Integralen mit ihren Gegentermen, wie es schon in Kapitel 4.5 praktiziert wurde. Da das Amplitudenverhältnis in jeder Ordnung konvergent ist, werden die Gegenterme, gegebenenfalls nach Umformungen der Art (4.36), herausfallen. Damit kann auf eine dimensionelle Regularisierung verzichtet werden.

Bei der analytischen Auswertung in vierter Ordnung verbleibt das Problem, daß sich die acht Diagramme, in welchen der Tetraeder-Graph  auftritt, nur numerisch berechnen lassen.

# Anhang A

## Shanks-Extrapolation

Die  $e_k$ -Transformation ist eine Methode zur Beschleunigung der Konvergenz bei Folgen, sowie eine Möglichkeit zur Bestimmung eines “Antilimes” bei divergenten Reihen und damit zur analytischen Fortsetzung von Reihen außerhalb ihres Konvergenzradius [SHA55]. Ihre Motivation rührt daher, daß viele Reihen Überlagerungen exponentieller Verläufe sind (z.B. als Diskretisierung physikalischer Vorgänge). Sei  $A_n$  die Aufsummation einer Reihe bis zum  $n$ -ten Glied. Dann lassen sich im Idealfall die Folgeelemente  $\{A_0, A_1, \dots\}$  darstellen als Summe von  $k$  exponentiellen Anteilen der Form  $a_i q_i^n$ :

$$A_n = B + \sum_{i=1}^k a_i q_i^n \quad (q_i \neq 1, 0) . \quad (\text{A.1})$$

$B$  wird als Basis bezeichnet und ist je nach Fall der Grenzwert oder der “Antilimes”.

Wir gehen bei den Störungsentwicklungen nur von Reihen mit  $k = 1$  aus. Diese lassen sich im Einzelfall nicht exakt durch (A.1) wiedergeben. Jedoch läßt sich jede Folge lokal durch (A.1) beschreiben mit einer jeweils anderen Basis  $B_n$ . Dabei sind die 3-Glieder  $A_r$ , die um  $A_n$  zentriert sind, bestimmt durch

$$A_r = B_n + a_n (q_n)^r \quad (q \neq 1, 0) \quad (\text{A.2}) \\ (n-1 \leq r \leq n+1) \quad (n \geq 1) .$$

Hierbei ist  $B_n$  die lokale Basis erster Ordnung. Sie läßt sich nach (A.2) eindeutig aus den Folgeelementen  $A_n$  mit einer  $e_1$ -Transformation berechnen:

$$B_n = e_1(A_n) := \frac{A_{n+1}A_{n-1} - A_n^2}{A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n} . \quad (\text{A.3})$$

Mit der Annahme, daß  $\{A_n\}$  ungefähr die Form (A.1) für  $k = 1$  hat, werden die Elemente  $B_n$  nur geringe Abweichungen untereinander haben. Die Folge  $\{B_n\}$  hat in dem Fall eine bessere Konvergenz als die Folge  $\{A_n\}$ , besteht aber aus zwei Elementen weniger. Auf diese neue Folge  $\{B_n\}$  wendet man nun wiederum eine  $e_1$ -Transformation nach (A.3) an. Diese iterativen Transformationen können so oft fortgesetzt werden, bis nur noch ein einziges Reihenelement existiert, welches im Idealfall dem Grenzwert der ursprünglichen Folge  $\{A_n\}$  sehr nahe kommt. In vielen

Fällen, so z.B. bei Reihen der Form  $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f(m)/g(m)$ , in denen  $f(m)$  und  $g(m)$  Polynome in  $m$  sind, läßt sich streng beweisen, daß wiederholte Transformationen  $e_1^m$  zu einem besseren Konvergenzverhalten führen. Dieses gilt auch für viele monotone Folgen. Da bei den von uns untersuchten Störungsreihen keine Information über das Verhalten dieser Reihen für kleine Ordnungen vorliegt, ist das aus der Anwendung der  $e_1$ -Transformation ermittelte Ergebnis mehr als Richtwert, denn als exakter mathematischer Grenzwert zu interpretieren.



$c$ : durch das individuelle Problem festgelegt.

Dieses Verhalten wurde aus einer Sattelpunktsnäherung des zugrundeliegenden Pfadintegrals bestimmt und ist nur gültig für hohe Ordnungen  $K$  [BGZJ77].

Zur Verbesserung der Konvergenz der betrachteten Reihe kann man eine Resummation durchführen. Speziell die Einführung der Borel-Transformierten hat sich bei den numerischen Ergebnissen in der  $\phi^4$ -Theorie als erfolgreich erwiesen [BNMG76]:

Gegeben sei eine konvergente Reihenentwicklung einer Funktion  $f(g)$ :

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n . \quad (\text{B.2})$$

Die Borel-Transformierte  $B(g)$  ist definiert durch

$$B(g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} g^n . \quad (\text{B.3})$$

Mit der Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion

$$n! = \Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} \quad (\text{B.4})$$

finden wir den Zusammenhang

$$f(g) = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} dt B(t) e^{-t/g} \quad (\text{B.5})$$

$$= \int_0^{\infty} dt B(tg) e^{-t} \quad (\text{nach Variablentransformation}) . \quad (\text{B.6})$$

Die Funktion  $f(g)$  ist somit bis auf einen Vorfaktor eine Laplace-Transformierte von  $B(t)$ . Obwohl die von uns berechneten Reihen divergent und die obigen Gleichungen nur für endliche Reihen gültig sind, nimmt man die rechte Seite in (B.5) als gewünschten Reihenwert. Die Borel-Transformierte  $B(g)$  hat nach (B.1) in  $K$ -ter Ordnung das Element

$$\left(\frac{g}{a}\right)^K K^b c \left(1 + O\left(\frac{1}{K}\right)\right) . \quad (\text{B.7})$$

Nach Majorisierung ab einer bestimmten Ordnung  $K'$  mit einer geometrischen Reihe sieht man, daß die Reihendarstellung von  $B(g)$  einen Konvergenzradius von  $|g| = a$  hat.

Zur Abschätzung der Genauigkeit der berechneten Reihen bilden wir die Padé-Approximanten der Borel-Transformierten. Die inverse Borel-Transformierte (B.5) dieser rationalen Approximanten wird im Text auch mit  $(n, m)$ -Padé-Borel bezeichnet. Sofern nur numerische Werte der Reihen gewünscht sind, wie z.B. für das Amplitudenverhältnis oder den kritische Exponenten, genügt eine numerische Integration in (B.5). Zur Bestimmung des Fixpunktwertes der Kopplung wird die inverse Borel-Transformierte der  $\beta$ -Funktion durch numerische Integration an bestimmten Punkten  $u_{R_i}$  bestimmt. Die erhaltenen Punkte  $\beta_i$  werden durch eine Fitkurve angenähert,

deren Nullstellen mit genügender Genauigkeit die Fixpunktwerte  $u_R^*$  liefern. Sofern die Padé-Approximanten von  $B(t)$  Polstellen auf  $\mathbb{R}_+$  ausbilden, wendet man die entsprechenden Hauptwertintegrale an. Diese lassen sich gegebenenfalls nach Anwendung einer Partialbruchzerlegung jeweils zurückführen auf:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x_1 - x} e^{-x/u_R} = e^{-x_1/u_R} Ei\left(\frac{x_1}{u_R}\right) \quad x_1 > 0 \quad (\text{B.8})$$

$$Ei(x) := - \int_{-x}^{-\epsilon} dx \frac{e^{-x}}{x} - \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{x} \quad [\text{GR81}] . \quad (\text{B.9})$$

Damit lassen sich folgende Integrale berechnen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \frac{a + bx + cx^2}{x_1 - x} e^{-x/g} \\ &= (a + bd + cd^2) e^{-d/g} Ei\left(\frac{d}{g}\right) - (b + cd)g - cg^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \frac{a + bx}{(x_1 - x)(x_2 - x)} e^{-x/g} \\ &= \frac{a + bx_1}{x_2 - x_1} e^{-x_1/g} Ei\left(\frac{x_1}{g}\right) - \frac{a + bx_2}{x_2 - x_1} e^{-x_2/g} Ei\left(\frac{x_2}{g}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \frac{1}{(x_1 - x)(a + bx + x^2)} e^{-x/g} \\ &= \frac{1}{a + bx_1 + x_1^2} e^{-x_1/g} Ei\left(\frac{x_1}{g}\right) + \frac{1}{a + bx_1 + x_1^2} \int_0^{\infty} dx \frac{b + x_1 + x}{a + bx + x^2} e^{-x/g} . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Funktionen, die analytisch in einem Kreissegment in der komplexen Ebene sind und in diesem Bereich eine asymptotische Reihenentwicklung haben, sind unter bestimmten Voraussetzungen – u.a. eine Beschränkung der Form (B.1) – *eindeutig* durch diese Reihe bestimmt [ZJ81]. Die Rückgewinnung dieser analytischen Funktionen aus ihren divergenten Reihenentwicklungen kann z.B. durch eine Borel-Transformation erfolgen. Aufgrund des beschränkten Konvergenzradius von  $B(g)$  und des Integrals in (B.5) wäre es nötig, die unendliche Reihe  $B(g)$  analytisch längs der reellen Achse fortzusetzen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man sich die Abschätzung von (B.1) zunutze macht und den Analytizitätsbereich von  $B(g)$  bestimmt. Durch biholomorphe Abbildung dieses einfach zusammenhängenden Gebietes in  $\mathbb{C}$  auf  $\mathbb{E}$  (möglich nach Riemannschem Abbildungssatz) und entsprechender Variablentransformation

$$B(z) \rightarrow B(z(u)), \quad u \in \mathbb{E}$$

hat man eine Reihe von  $B(z(u))$  in  $u$ , deren Konvergenzradius den gesamten Analytizitätsbereich umfaßt. Anwendungen von rationalen Approximanten auf derart

transformierte endliche Reihen haben sich als erfolgreich in der  $\phi^4$ -Theorie erwiesen [GZJ77].

Eine Verbesserung der Genauigkeit für die Endergebnisse erreicht man mit der Borel-Leroy-Transformation

$$\tilde{B}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n+b+1)} g^n, \quad (\text{B.13})$$

womit die Beziehung (B.5) übergeht in

$$f(g) = \frac{1}{g^{(1+b)}} \int_0^{\infty} dt t^{-b} \tilde{B}(t) e^{-t/g}. \quad (\text{B.14})$$

Wird der beliebig wählbare Parameter  $b$  auf 1 gesetzt, erhält man wieder die reine Borel-Transformation. Die Größe  $b$  wird bei den praktischen Berechnungen optimal gewählt, d.h. mit  $b_{opt}$  ist der Fehler in den ursprünglichen Reihen, den man aus den Padé-Approximanten (0,3) bis (3,0) erhält, minimal.

Eine alternative Borel-Transformierte ist definiert über

$$B'(g) := a_0 \delta(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} g^n \quad (\text{B.15})$$

und liefert den Zusammenhang

$$f(g) = \int_0^{\infty} dt B'(t) e^{-t/g}. \quad (\text{B.16})$$

Nach Anwendung der Padé-Approximanten auf die Reihenelemente für  $n > 0$  erhält man eine weitere Möglichkeit, das Konvergenzverhalten der Reihen zu untersuchen.

# Anhang C

## Liste der 1-3 Loop-Graphen

Im folgenden werden alle Graphen aufgeführt, welche bei der perturbativen Berechnung der Erwartungswerte  $G_c^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  und  $\Gamma^{(4)}$  zu berücksichtigen sind. Die Listen beginnen jeweils mit den Diagrammen der symmetrischen Phase und umfassen alle Graphen für die geordnete Phase. Die Auflistung der Graphen ist nach Loop-Ordnung und Anzahl der externen Beine getrennt. Die Integralwerte sind ohne Fourierfaktoren  $(2\pi)^{-3L}$  aufgeführt. Um das vollständige Resultat jedes Graphen inkl. Vertex-, Masse- und Fourierfaktoren zu bekommen, muß der Vorfaktor

$$(-g_0)^{V_4} \cdot (-m_0\sqrt{3g_0})^{V_3} \cdot \frac{m_0^{4-L-E}}{(2\pi)^{3L}} \quad (\text{C.1})$$

anmultipliziert werden. Dieser setzt sich aus den Vierer- und Dreier-Vertexbeiträgen, sowie (4.2) zusammen.

Für die Ergebnisse werden folgende Konstanten benötigt:

$$\begin{aligned}
 a &:= \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \log^2 \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} Li_2\left(\frac{1}{4}\right) \quad (\text{nach [BS92]}) \\
 &\simeq 0.0324645 \\
 B^{(div)} &:= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{C}{4\pi} - \log \frac{m_0^2}{4\pi} + O(\epsilon) \quad (\text{nach [HEI93]}) \\
 B_1^{(div)} &:= \frac{1}{\epsilon} + \frac{C}{4\pi} - \frac{3}{2} \gamma - \log \frac{m_0^2}{4\pi} - \frac{1}{2} \log \frac{m_0^2}{\pi} + O(\epsilon) \\
 C &\simeq -15.0448 \quad (\text{nach [HEI93]}) \\
 C^{(tet)} &:= \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = 0.1739006107 \\
 \psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad \text{log. Ableitung der Eulerschen } \Gamma\text{-Funktion .}
 \end{aligned}$$

Der bei der Konstanten  $a$  erscheinende Dilogarithmus (auch Spence-Funktion) ist definiert als [F90] :

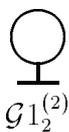
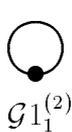
$$Li_2(x) := - \int_0^x dt \frac{\log(1-t)}{t} . \quad (\text{C.2})$$

## 1-Loop

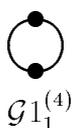
### Ein-Punkt-Funktion



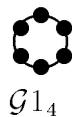
### Zwei-Punkt-Funktion



### Vier-Punkt-Funktion

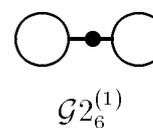
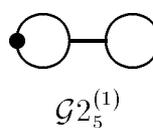
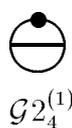
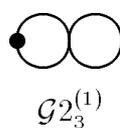
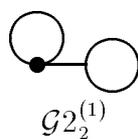
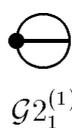


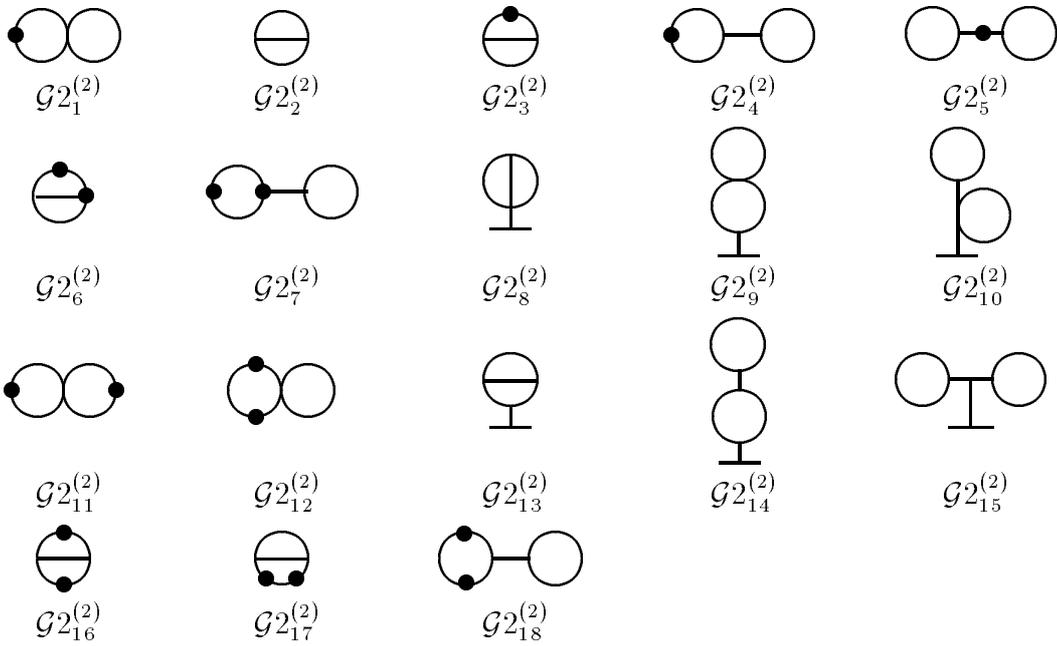
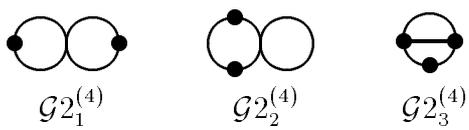
### sonstige Graphen



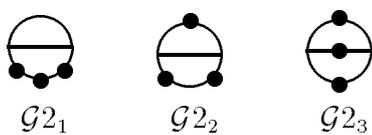
## 2-Loop

### Green-Funktion $G_c^{(1)}$



Vertexfunktion  $\Gamma^{(2)}$ Vertexfunktion  $\Gamma^{(4)}$ 

## sonstige Graphen



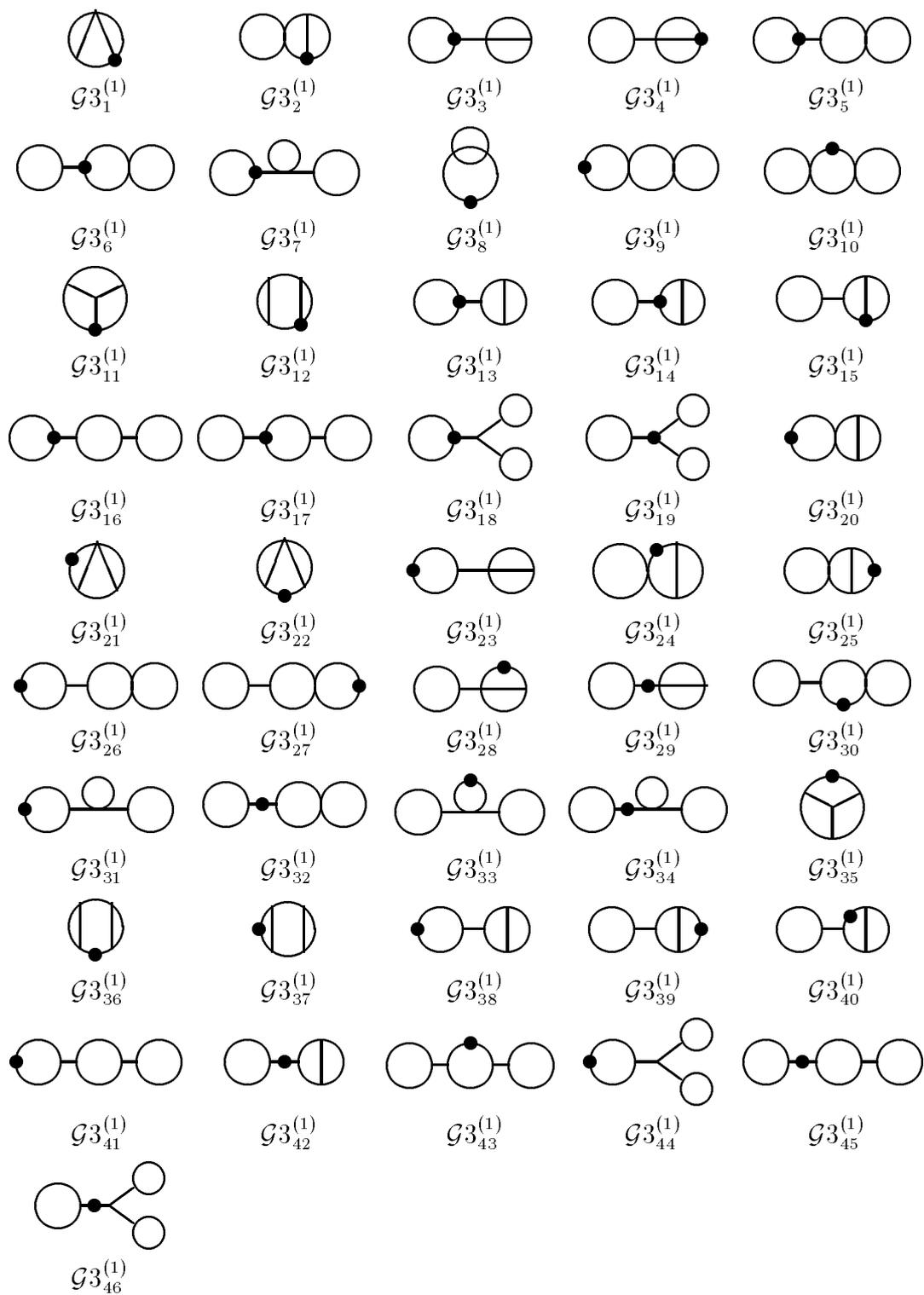
## Resultate der 1- und 2-Loop-Graphen

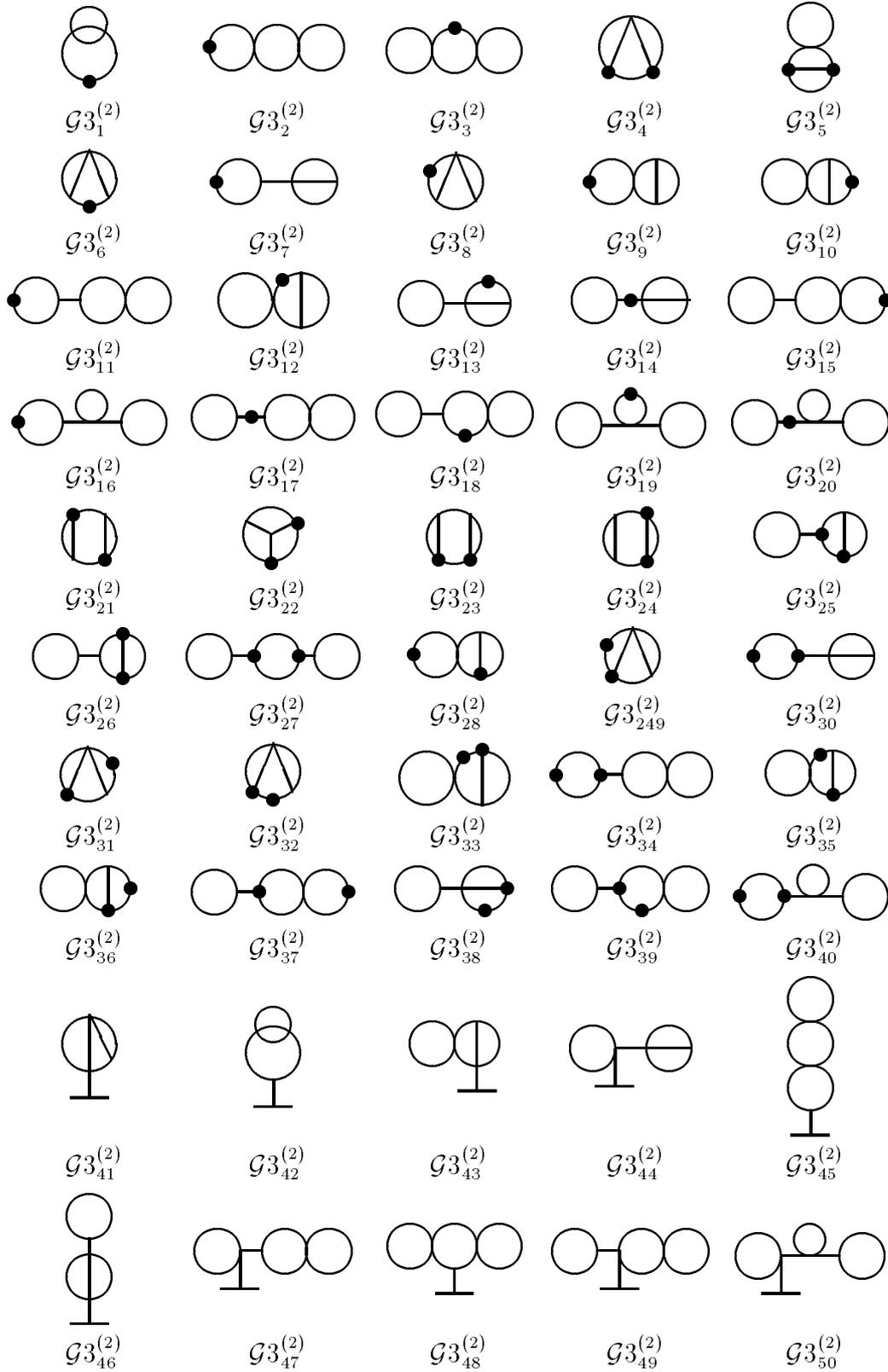
	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}1_1^{(1)}$	$-2(1 + \frac{\epsilon}{2}(2 - \gamma + \log(\pi/m_0^2)))$	0	1/2	1
$\mathcal{G}1_1^{(2)}$	$-2(1 + \frac{\epsilon}{2}(2 - \gamma - \log(4\pi)))$	0	1/2	1
$\mathcal{G}1_2^{(2)}$	$-2(1 + \frac{\epsilon}{2}(2 - \gamma - \log(4\pi)))$	0	1/2	1
$\mathcal{G}1_3^{(2)}$	$(1 + \frac{\epsilon}{2}(-\gamma + \log(\pi/m_0^2)))$	0	1/2	1
$\mathcal{G}1_1^{(4)}$	$\equiv \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/2	1
$\mathcal{G}1_1$	$\frac{1}{4}(1 + \frac{\epsilon}{2}(2 - \gamma + \log \frac{\pi}{m_0^2}))$			
$\mathcal{G}1_2$	$\frac{1}{8}(1 + \frac{\epsilon}{2}(\frac{8}{3} - \gamma + \log \frac{\pi}{m_0^2}))$			
$\mathcal{G}1_3$	$\frac{5}{64}(1 + \frac{\epsilon}{2}(\frac{46}{15} - \gamma + \log \frac{\pi}{m_0^2}))$			
$\mathcal{G}1_4$	$\frac{7}{768}(1 + \frac{\epsilon}{2}(\frac{352}{105} - \gamma + \log \frac{\pi}{m_0^2}))$			
$\mathcal{G}2_1^{(1)}$	$2B^{(div)}$	1/6	1	1
$\mathcal{G}2_2^{(1)}$	4		1/4	1
$\mathcal{G}2_3^{(1)}$	-2		1/4	1
$\mathcal{G}2_4^{(1)}$	2/3		1/4	1
$\mathcal{G}2_5^{(1)}$	-2		1/4	1
$\mathcal{G}2_6^{(1)}$	4		1/8	1
$\mathcal{G}2_1^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_2^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}2_1^{(1)}$	-2/27	1/6	1
$\mathcal{G}2_3^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_4^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_5^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}2_6^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}2_4^{(1)}$	-20/243	1/2	2
$\mathcal{G}2_7^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	$1/6 + O(\epsilon)$	1/4	2
$\mathcal{G}2_8^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/6	1
$\mathcal{G}2_9^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_{10}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_{11}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	-1/6	1/4	1
$\mathcal{G}2_{12}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1$	$1/8 + O(\epsilon)$	1/2	1
$\mathcal{G}2_{13}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/2	1
$\mathcal{G}2_{14}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}2_{15}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{243}$	1/2	1
$\mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{59}{972}$	1/2	1

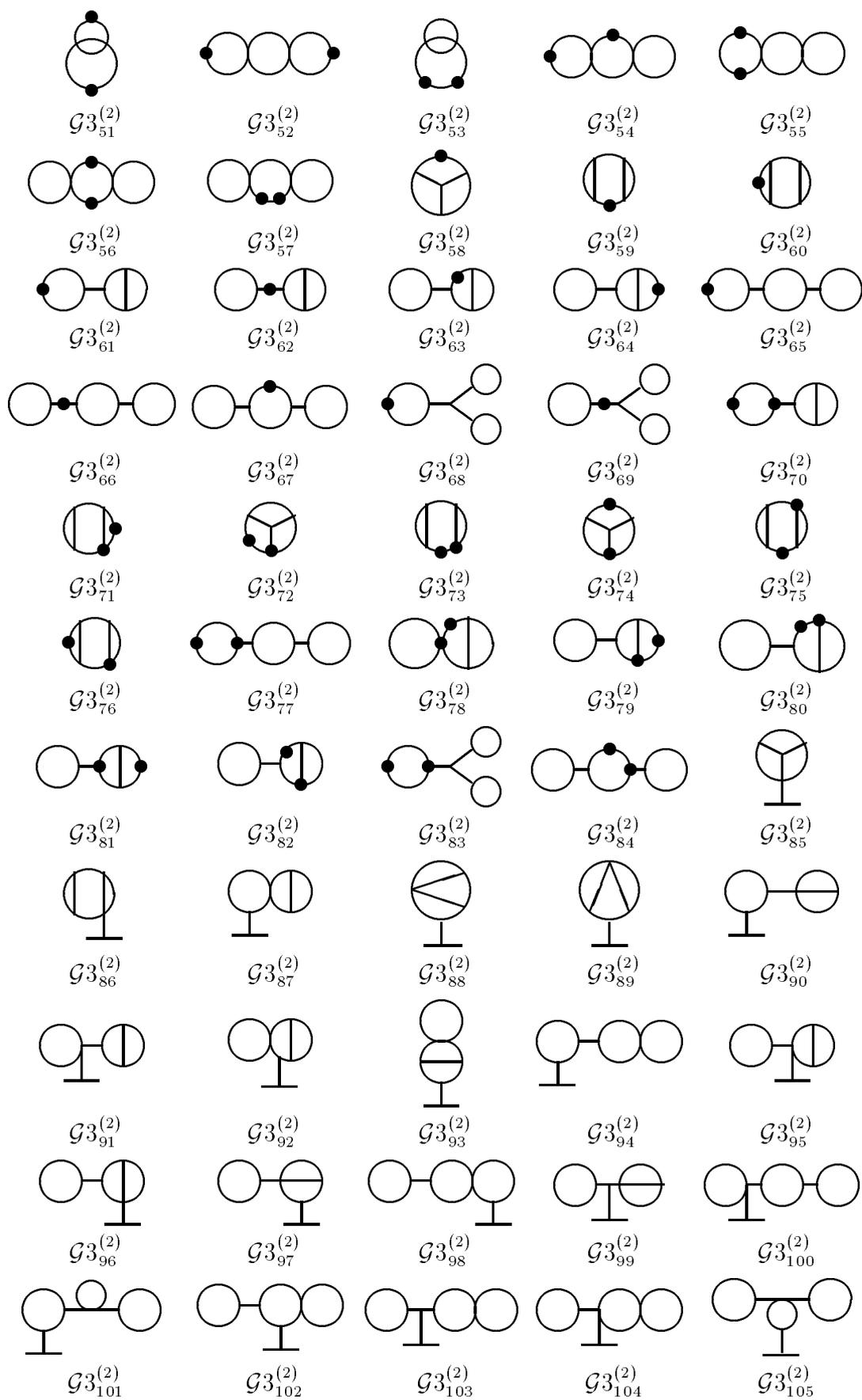
	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}2_{18}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1$	$1/8 + O(\epsilon)$	$1/2$	1
$\mathcal{G}2_1^{(4)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)2}$		$1/4$	3
$\mathcal{G}2_2^{(4)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1$		$1/2$	1
$\mathcal{G}2_3^{(4)}$	$\equiv \mathcal{G}2_4^{(1)}$		$1/2$	1
$\mathcal{G}2_1$	$\frac{19}{162}$			
$\mathcal{G}2_2$	$\frac{5}{108}$			
$\mathcal{G}2_3$	$\frac{1}{27}$			

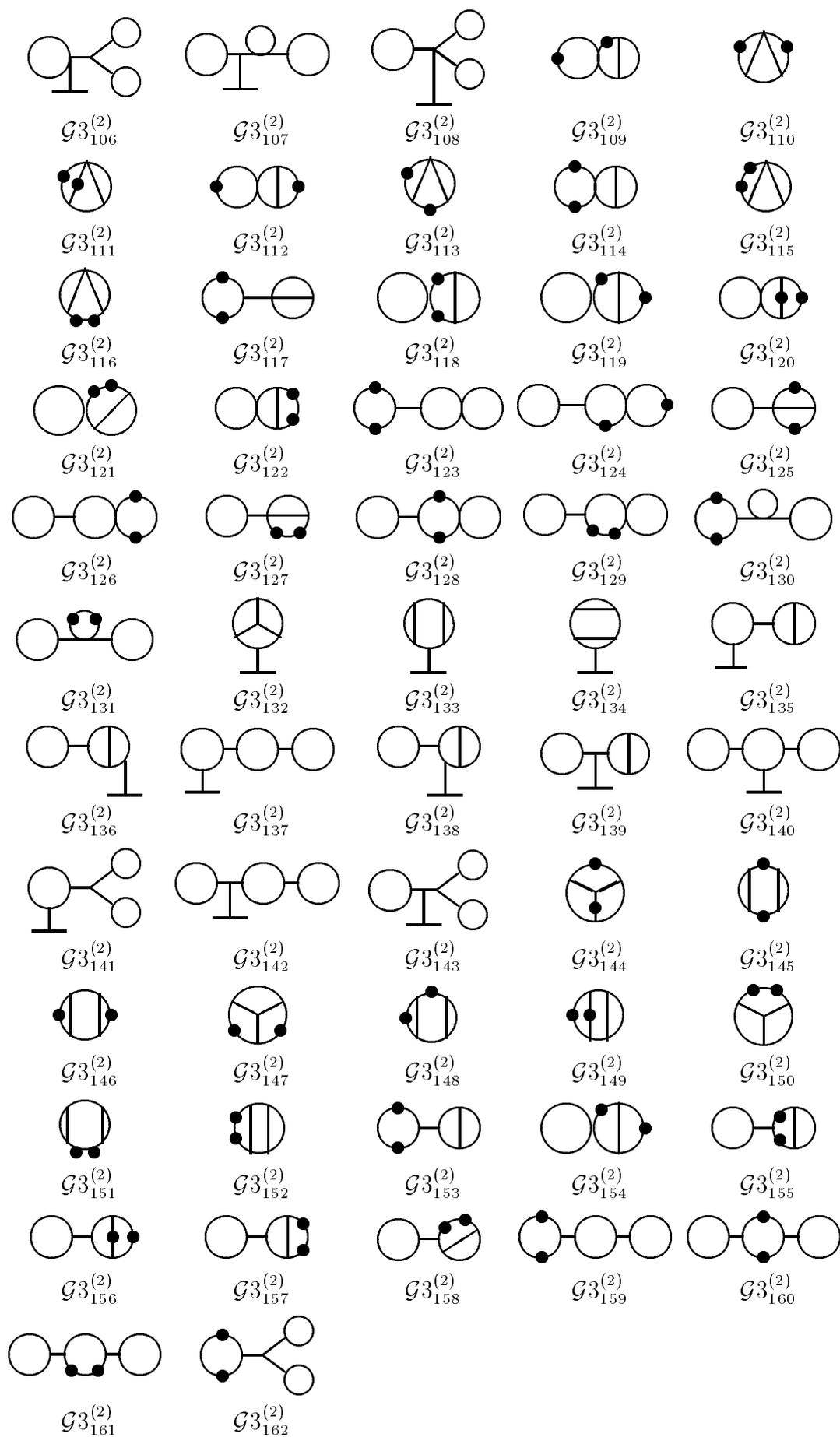
### 3-Loop

Green-Funktion  $G_c^{(1)}$



Vertexfunktion  $\Gamma^{(2)}$ 





## Resultate der 3-Loop-Graphen

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_1^{(1)}$	$32(a + \frac{1}{3} \log \frac{4}{3})$		1/4	1
$\mathcal{G}3_2^{(1)}$	$\mathcal{G}2_4^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1^{(1)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_3^{(1)}$	$\mathcal{G}2_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1^{(1)}$		1/12	1
$\mathcal{G}3_4^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_3^{(1)}$		1/12	1
$\mathcal{G}3_5^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_6^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_5^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_7^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$		1/8	1
$\mathcal{G}3_8^{(1)}$	$2(B_1^{(div)} - 2 \log \frac{4}{3})$		1/12	1
$\mathcal{G}3_9^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{10}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3 \cdot \mathcal{G}1_1$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{11}^{(1)}$	$C^{(tet)}$		1/6	1
$\mathcal{G}3_{12}^{(1)}$	$16a$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{13}^{(1)}$	$\mathcal{G}2_4^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_1^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{14}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{13}^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{15}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{13}^{(1)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{16}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{17}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{16}^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{18}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{16}^{(1)}$		1/16	1
$\mathcal{G}3_{19}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3 \cdot \mathcal{G}1_1$		1/48	1
$\mathcal{G}3_{20}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{21}^{(1)}$	$\frac{4}{3} \log \frac{4}{3}$		1/2	1
$\mathcal{G}3_{22}^{(1)}$	$16a$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{23}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$		1/12	1
$\mathcal{G}3_{24}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{25}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{26}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{27}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{26}^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{28}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{29}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$		1/12	1
$\mathcal{G}3_{30}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{31}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{32}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{31}^{(1)}$		1/8	1

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{33}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{31}^{(1)}$		1/16	1
$\mathcal{G}3_{34}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{35}^{(1)}$	$\frac{1}{4}C^{(tet)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{36}^{(1)}$	$\frac{4}{9}(-1 + 27a + 2 \log \frac{4}{3})$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{37}^{(1)}$	$\frac{2}{9}(1 - 2 \log \frac{4}{3})$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{38}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{39}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{40}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$		1/4	1
$\mathcal{G}3_{41}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{42}^{(1)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{43}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{44}^{(1)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$		1/16	1
$\mathcal{G}3_{45}^{(1)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{44}^{(1)}$		1/8	1
$\mathcal{G}3_{46}^{(1)}$	$(\mathcal{G}3_1^{(1)})^3$		1/16	1
$\mathcal{G}3_1^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_8^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_2^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_3^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_4^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_1^{(1)}$	$-\frac{16}{27}(-1 + 18a + 2 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_5^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$\frac{4}{81}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_6^{(2)}$	$\mathcal{G}3_{22}^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_7^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_8^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{21}^{(1)}$	0	1/2	1
$\mathcal{G}3_9^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{10}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{11}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{12}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{13}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{14}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{15}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{16}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{17}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{16}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{18}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{19}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{20}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$	0	1/8	1

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{21}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{12}^{(1)}$	$\frac{1}{243}(-21 - 324a + 40 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{22}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{11}^{(1)}$	$\frac{1}{216}(-16 - 81C^{(tet)} + 96 \log \frac{4}{3})$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{23}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{12}^{(1)}$	$\frac{4}{243}(21 - 567a - 26 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{24}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{12}^{(1)}$	$\frac{1}{81}(-11 + 32 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{25}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$\frac{40}{243}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{26}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{25}^{(2)}$	$\frac{4}{81}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{27}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	$-\frac{1}{3}$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{28}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$-\frac{67}{486}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{29}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{21}^{(1)}$	$\frac{1}{1944}(159 - 920 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{30}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	$-\frac{1}{6}B_1^{(div)}$	1/12	2
$\mathcal{G}3_{31}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{21}^{(1)}$	$\frac{1}{1944}(63 - 632 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{32}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{22}^{(1)}$	$\frac{4}{243}(21 - 567a - 26 \log \frac{4}{3})$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{33}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	$\frac{59}{486}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{34}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	$\frac{1}{6}$	1/8	2
$\mathcal{G}3_{35}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{33}^{(2)}$	$\frac{7}{54}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{36}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	$\frac{19}{486}$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{37}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	$\frac{1}{3}$	1/8	2
$\mathcal{G}3_{38}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$\frac{40}{243}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{39}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	$-\frac{1}{4}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{40}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	$-\frac{1}{3}$	1/8	2
$\mathcal{G}3_{41}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_1^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{42}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_8^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{43}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{44}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{45}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{46}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{44}^{(2)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{47}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{48}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{49}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{47}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{50}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{51}^{(2)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{61}{576}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{52}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_3^{(2)})^3$	$-\frac{1}{4}$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{53}^{(2)}$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}B_1^{(div)} - \log \frac{4}{3}$	$-\frac{1}{384}(107 + 48B_1^{(div)}) - 96 \log \frac{4}{3}$	1/6	1
$\mathcal{G}3_{54}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_1$	$\frac{1}{6}$	1/4	2

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{55}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{54}^{(2)}$	$\frac{1}{8}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{56}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_2$	$-\frac{1}{4}$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{57}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{55}^{(2)}$	$-\frac{3}{16}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{58}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{35}^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{59}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{36}^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{60}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{37}^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{61}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_4^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{62}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_4^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{63}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{64}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{65}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{66}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{67}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{68}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{66}^{(2)}$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{69}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{70}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$-\frac{1}{18}$	1/8	2
$\mathcal{G}3_{71}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{37}^{(1)}$	$\frac{1}{5832}(-715 + 2136 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{72}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{35}^{(1)}$	$\frac{1}{1296}(68 - 243C^{(tet)} - 128 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{73}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{36}^{(1)}$	$\frac{1}{729}(260 - 6075a - 378 \log \frac{4}{3})$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{74}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{35}^{(1)}$	$\frac{1}{5184}(-752 - 1323C^{(tet)} + 3232 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{75}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{36}^{(1)}$	$\frac{1}{729}(31 - 1215a - 162 \log \frac{4}{3})$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{76}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{37}^{(1)}$	$\frac{1}{5832}(-491 + 1080 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{77}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	$\frac{1}{6}$	1/8	2
$\mathcal{G}3_{78}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	$\frac{59}{486}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{79}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	$\frac{19}{486}$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{80}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{78}^{(2)}$	$\frac{59}{486}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{81}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{79}^{(2)}$	$\frac{16}{243}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{82}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{78}^{(2)}$	$\frac{7}{54}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{83}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	$-\frac{1}{3}$	1/16	2
$\mathcal{G}3_{84}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	$-\frac{1}{4}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{85}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_1^{(1)}$	0	1/6	1
$\mathcal{G}3_{86}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{12}^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{87}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_4^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{88}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{21}^{(1)}$	0	1/2	1

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{89}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{22}^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{90}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{91}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{92}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{93}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{94}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{95}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{96}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{95}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{97}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{95}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{98}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot (\mathcal{G}1_3^{(2)})^2$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{99}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	0	1/12	1
$\mathcal{G}3_{100}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{101}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{100}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{102}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{103}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{100}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{104}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{100}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{105}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{100}^{(2)}$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{106}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{107}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{106}^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{108}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{106}^{(2)}$	0	1/48	1
$\mathcal{G}3_{109}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	$-\frac{77}{972}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{110}^{(2)}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{793}{46656}$	1	1
$\mathcal{G}3_{111}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{110}^{(2)}$	$\frac{1}{15552}(2397 - 9856 \log \frac{4}{3})$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{112}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	$-\frac{41}{972}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{113}^{(2)}$	$\frac{2}{9}(1 - 2 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{5832}(-491 + 1080 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{114}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1 \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$-\frac{1}{24}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{115}^{(2)}$	$\frac{1}{36}(-3 + 28 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{31104}(2193 - 11936 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{116}^{(2)}$	$\frac{4}{9}(-1 + 27a + 2 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{729}(260 - 6075a - 378 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{117}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1 \cdot \mathcal{G}2_1^{(1)}$	$-\frac{1}{8}(B_1^{(div)} + 1)$	1/6	1
$\mathcal{G}3_{118}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1$	$\frac{151}{1215}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{119}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_2$	$\frac{31}{729}$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{120}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_3$	$\frac{20}{729}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{121}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{119}^{(2)}$	$\frac{2663}{29160}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{122}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{120}^{(2)}$	$\frac{167}{5832}$	1/2	1

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{123}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_1$	$\frac{1}{8}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{124}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{123}^{(2)}$	$\frac{1}{6}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{125}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	$\frac{16}{243}$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{126}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{123}^{(2)}$	$\frac{1}{8}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{127}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	$\frac{59}{486}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{128}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_2$	$-\frac{1}{4}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{129}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_2$	$-\frac{3}{16}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{130}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3$	$-\frac{1}{4}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{131}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{129}^{(2)}$	$-\frac{1}{4}$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{132}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{35}^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{133}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{36}^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{134}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{37}^{(1)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{135}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{136}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{16}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{137}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{138}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_{17}^{(2)}$	0	1/4	1
$\mathcal{G}3_{139}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{140}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{141}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)}$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{142}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{141}^{(12)}$	0	1/8	1
$\mathcal{G}3_{143}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^3$	0	1/16	1
$\mathcal{G}3_{144}^{(2)}$	$\frac{5}{9} + \frac{3}{16}C^{(tet)} - 2 \log \frac{4}{3}$	$\frac{1}{23328}(-20021 + 74016 \log \frac{4}{3} - 8019C^{(tet)})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{145}^{(2)}$	$-\frac{10}{27} + 10a + \frac{44}{81} \log \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3645}(139 - 8505a - 318 \log \frac{4}{3})$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{146}^{(2)}$	$\frac{1}{54}$	$-\frac{1295}{(279936)}$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{147}^{(2)}$	$\frac{1}{48}(-8 - 3C^{(tet)} + 32 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{41472}(7384 - 26080 \log \frac{4}{3} - 675C^{(tet)})$	1	1
$\mathcal{G}3_{148}^{(2)}$	$\frac{4}{27} \log \frac{4}{3}$	$\frac{1}{17496}(229 - 2040 \log \frac{4}{3})$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{149}^{(2)}$	$\frac{1}{54}(11 - 32 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{46656}(-9941 + 32512 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{150}^{(2)}$	$\frac{1}{18} + \frac{11}{32} - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3}$	$\frac{1}{373248}(-7304 + 68832 \log \frac{4}{3} - 85293C^{(tet)})$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{151}^{(2)}$	$-\frac{10}{27} + 10a + \frac{44}{81} \log \frac{4}{3}$	$\frac{1}{43740}(14206 - 331695a - 19122 \log \frac{4}{3})$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{152}^{(2)}$	$\frac{1}{108}(17 - 44 \log \frac{4}{3})$	$\frac{1}{93312}(-10393 + 32032 \log \frac{4}{3})$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{153}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1 \cdot \mathcal{G}2_4^{(1)}$	$\frac{-1}{24}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{154}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_2$	$\frac{31}{729}$	1/2	2
$\mathcal{G}3_{155}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1$	$\frac{151}{1215}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{156}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_3$	$\frac{20}{729}$	1/4	1

	Wert $\cdot \pi^{-2L}$	Ableitung $\cdot \pi^{-2L}$	Sym.	Per.
$\mathcal{G}3_{157}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_2$	$\frac{167}{5832}$	1/2	1
$\mathcal{G}3_{158}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}2_1$	$\frac{2663}{29160}$	1/4	2
$\mathcal{G}3_{159}^{(2)}$	$\mathcal{G}1_1^{(1)} \cdot \mathcal{G}1_3^{(2)} \cdot \mathcal{G}1_1$	$\frac{1}{8}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{160}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_2$	$-\frac{1}{4}$	1/8	1
$\mathcal{G}3_{161}^{(2)}$	$\equiv \mathcal{G}3_{160}^{(12)}$	$-\frac{3}{16}$	1/4	1
$\mathcal{G}3_{162}^{(2)}$	$(\mathcal{G}1_1^{(1)})^2 \cdot \mathcal{G}1_1$	$-\frac{1}{4}$	1/8	1

# Literaturverzeichnis

- [AEM95] M.H. ANDERSON, J.R. ENSHER, M.R. MATTHEWS, C.E. WIEMAN, and E.A. CORNELL. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science* **269** (1995) 198.
- [AH76] A. AHARONY and P.C. HOHENBERG. Universal relations among thermodynamical critical amplitudes. *Phys. Rev.* **B 13** (1976) 3081.
- [BBC82] D. BEYSENS, A. BOURGOU, and P. CALMETTES. Experimental determinations of universal amplitude combinations for binary fluids. *Phys. Rev.* **A26** (1982) 3589.
- [BD91] E.E. BOOS and A.I. DAVYDYCHEV. A method of calculating massive Feynman integrals. *Theor. and Math. Phys.* **89** (1991) 1052.
- [BDFN92] J.J. BINNEY, N.J. DOWRICK, A.J. FISHER, and M.E.J. NEWMAN. *The Theory of Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [BEL91] M. LE BELLAC. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1st english edition, 1991.
- [BG80] C. BERVILLIER and C. GODRÉCHE. Universal combinations of critical amplitudes from field theory. *Phys. Rev.* **B 21** (1980) 5427.
- [BGHP92] C.F. BAILLIE, R. GUPTA, K.A. HAWICK, and G.S. PAWLEY. Monte carlo renormalization-group study of the three-dimensional Ising model. *Phys. Rev.* **B 45** (1992) 45.
- [BGZJ74] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Universal ratios of critical amplitudes near four dimensions. *Phys. Lett.* **47 A** (1974) 285.
- [BGZJ77] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Perturbation theory at large order. *Phys.Rev.D* **15** (1977) 1544.
- [BNM77] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, and D.I. MEIRON. Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models. University of Guelph Report, 1977.

- [BNMG76] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, D.I. MEIRON, and M.S. GREEN. Ising-model critical indices in  $d = 3$  from the Callan-Symanzik equation. *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1351.
- [BS92] C. BERVILLIER and M. SHPOT. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system. *Physical Review* **B 46**(2) (1992) 955.
- [CBSB76] R.F. CHANG, H. BURSTYN, J.V. SENEGERS, and A.J. BRAY. Experimental determination of the critical correlation function form for a binary liquid mixture: evidence for universality. *Phys.Rev.Lett.* **37** (1976) 1481.
- [CG80] W. CELMASTER and R.J. GONSALVES. Fourth-order quantum-chromodynamics contributions to the  $e^+ - e^-$  annihilation cross section. *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3112.
- [CL84] TA-PEI CHENG and LING-FONG LI. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1984.
- [CLP78] P. CVITANOVIĆ, B. LAUTRUP, and R. B. PEARSON. Number and weights of Feynman diagrams. *Physical Review* **D 18** (1978) 1939.
- [COL84] J.C. COLLINS. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1984.
- [CT81] K.G. CHETYRKIN and F.V. TKACHOV. Integration by parts: the algorithm to calculate  $\beta$ -functions in 4 loops. *Nucl. Phys. B* **192** (1981) 159.
- [F90] J. FUJIMOTO et al. Radiative corrections to  $e^+e^-$ -radiations in electroweak theory. *Progr. of Theor. Phys. Suppl.* **100** (1990) 338.
- [GR81] I. GRADSTEIN and I. RYSHIK. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, volume 1 and 2. Verlag Harri Deutsch, Thun, 5th edition, 1981.
- [GZJ77] J.C. LE GUILLOU and J. ZINN-JUSTIN. Critical exponents for the n-vector-model in three dimensions from field theory. *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 95.
- [GZJ80] J.C. LE GUILLOU and J. ZINN-JUSTIN. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev.* **B 21** (1980) 3976.
- [HEI93] J. HEITGER. Feldtheoretische Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse in 2-Loop-Ordnung. Diplomarbeit, Universität Münster, 1993.
- [ID89] C. ITZYKSON and J.M. DROUFFE. *Statistical Field Theory*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1989.

- [IZ80] C. ITZYKSON and J. B. ZUBER. *Quantum Field Theory*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1st edition, 1980.
- [KKG83] A. KUMAR, H.R. KRISHNAMURTHY, and E.S.R. GOPAL. Equilibrium critical phenomena in binary liquid mixtures. *Phys. Rep.* **98 C** (1983) 57.
- [Küs95] J. KÜSTER. Anwendung der Dyson-Schwinger-Gleichung in der  $\phi^4$ -Theorie zur Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse. Diplomarbeit, Universität Münster, 1995.
- [LEI75] G. LEIBBRANDT. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 849.
- [LF89] A.J. LIU and M.E. FISHER. The three-dimensional Ising model revisited numerically. *Physica A* **156** (1989) 35.
- [LW87a] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice  $\phi^4$ -theory; one-component model in the phase with spontaneous broken symmetry. *Nucl. Phys.* **B 295** (1987) 65.
- [LW87b] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice  $\phi^4$ -theory; one-component model in the symmetric phase. *Nucl. Phys.* **B 290** (1987) 25.
- [MH94] G. MÜNSTER and J. HEITGER. Field-theoretic calculation of the universal amplitude ratio of correlation lengths in 3d Ising systems. *Nuclear Physics B* **424** (1994) 582.
- [MM93] I. MONTVAY and G. MÜNSTER. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1993.
- [MÜN90] G. MÜNSTER. Interface tension in three-dimensional systems from field theory. *Nucl. Phys.* **B 340** (1990) 559.
- [NIC78] B.G. NICKEL. Evaluation of simple Feynman-graphs. *J. Math. Phys.* **19** (1978) 542.
- [NOG93] P. NOGUEIRA. Automatic Feynman graph generation. *Journal of Computational Physics* **105**(2) (1993) 279.
- [ONS44] L. ONSAGER. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.
- [PAR80] G. PARISI. Field-theoretic approach to second-order phase transitions in two- and three-dimensional systems. *J. Stat. Phys.* **23** (1980) 49.
- [RIV87] R. J. RIVERS. *Path integral methods in quantum field theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

- [RZW94] C. RUGE, P. ZHU, and F. WAGNER. Correlation function in Ising Models. *hep-lat/9403009* (1994).
- [SHA55] D. SHANKS. Non-linear transformations of divergent and slowly convergent series. *j. math. and physics* **34** (1955) 1.
- [SIE93] E. SIEPMANN. Reihenanalysen für das 3-dimensionale Ising-Modell. Diplomarbeit, Universität Münster, 1993.
- [SMI91] V.A. SMIRNOV. *Renormalization and Asymptotic Expansion*. Birkhäuser-Verlag, 1991.
- [TER80] A.E. TERRANO. A method for Feynman diagramm evaluation. *Phys. Lett. B* **93** (1980) 424.
- [TF73] H.B. TARKO and M.E. FISHER. Critical scattering in a field and below  $t_c$ . *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 926.
- [TF75] H.B. TARKO and M.E. FISHER. Theory of critical point scattering and correlations; the Ising model below  $T_c$  and in a field. *Phys. Rev.* **B 11** (1975) 1217.
- [WF72] K.G. WILSON and M.E. FISHER. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 240.
- [WK74] K.G. WILSON and J. KOGUT. The renormalization group and the  $\epsilon$ -expansion. *Phys. Rep.* **12 C** (1974) 75.
- [WOL91] S. WOLFRAM. *Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, California, 2nd edition, 1991.
- [YEO92] J.M. YEOMANS. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [ZJ81] J. ZINN-JUSTIN. Perturbation series at large orders in quantum mechanics and field theories: application to the problem of resummation. *Phys. Rep.* **70** (1981) 109.
- [ZJ89] J. ZINN-JUSTIN. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1989.



# Danksagung

- Herrn Prof. Dr. Münster für die hilfreiche und geduldige Unterstützung während der Diplomarbeit.
- meinem Kommilitonen J. Küster, der mir bei allen Rechnungen mit Rat und Tat zur Seite stand.
- meinen Freunden P. Backhaus und D. Geschke, die immer hilfsbereit mit mir das Studium durchlaufen haben.
- der ganzen TP1 für ihre angenehme und motivierende Atmosphäre.
- sowie der Süßwarenabteilung aus Zimmer 402.



Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im August 1995



