

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Institut für Theoretische Physik

BACHELORARBEIT

---

# Hulthén-Potential und $1/N$ -Entwicklung in der supersymmetrischen Quantenmechanik

Hulthén potential and  $1/N$  expansion in supersymmetric quantum mechanics

---

Lucie Lücke  
Matrikelnr. 375701  
lluec05@wwu.de

Gutachter:  
Prof. Dr. Michael Klasen  
Zweitgutachter:  
Prof. Dr. Gernot Münster

28. Juli 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der supersymmetrischen Quantenmechanik</b>	<b>2</b>
2.1	Formalismus . . . . .	2
2.1.1	Faktorisierung . . . . .	2
2.1.2	Eigenschaften der SUSY-Partner . . . . .	3
2.1.3	SUSY-Ketten . . . . .	5
2.1.4	SUSY QM bei sphärischer Symmetrie in $N$ Dimensionen . . . . .	6
2.2	Bose-Fermi-Supersymmetrie . . . . .	7
2.2.1	Bosonen und Fermionen . . . . .	7
2.2.2	SUSY-Algebra . . . . .	8
2.2.3	SUSY-Transformationen . . . . .	9
2.2.4	Kanonische Darstellung . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Hulthén-Potential</b>	<b>12</b>
3.1	Eigenschaften des Hulthén-Potentials . . . . .	12
3.2	Exakte Lösung für $s$ -Wellen . . . . .	12
3.3	Generation der SUSY-Partner . . . . .	14
3.4	Yukawa-Potential . . . . .	16
3.5	Anwendung . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Supersymmetrische <math>1/N</math>-Entwicklung</b>	<b>20</b>
4.1	Verschobene $1/N$ -Entwicklung . . . . .	20
4.2	Verbesserung der $1/N$ -Entwicklung durch SUSY QM . . . . .	21
4.3	SUSY- $1/N$ -Entwicklung des Hulthén-Potentials . . . . .	21
4.4	SUSY- $1/N$ -Entwicklung des Yukawa-Potentials . . . . .	24
4.5	Diskussion . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>28</b>

## **Anhang**

<b>A</b>	<b>1/<math>N</math>-Entwicklung</b>	<b>29</b>
<b>B</b>	<b>Numerische Lösung der Schrödingergleichung</b>	<b>33</b>
<b>C</b>	<b>Tabellen und Abbildungen</b>	<b>36</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>42</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>43</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>44</b>

---

# 1 Einleitung

Symmetrien spielen in der Natur eine ganz besondere Rolle. Die Natur ist durchzogen von symmetrischen Strukturen, die sich auf unterschiedliche Weise äußern können, aber immer eines gemeinsam haben: die Erhaltung einer bestimmten Größe unter einer Symmetrietransformation. Eine dementsprechend hohe Bedeutung kommt dem Symmetriebegriff in der Physik zu. Das Auffinden der Symmetrie eines Systems bietet dort die Möglichkeit der Klassifizierung und der Vereinfachung bei der Untersuchung physikalischer Systeme.

Mit der Symmetrie fest verbunden sind Erhaltungsgrößen, aus deren Invarianz unter Symmetrietransformationen die Formulierung der Erhaltungssätze folgt. In der Quantenmechanik äußert sich das Vorliegen einer Symmetrie stets in der Entartung von Zuständen, diese bilden sogenannte Multipletts im Spektrum. Eine Symmetrie kann jedoch auch gebrochen werden, was die Aufhebung der Entartung zur Folge hat.

In der vorliegenden Arbeit soll die Schrödingergleichung für das Hulthén-Potential durch Ausnutzen einer solchen Symmetrie gelöst werden. Dazu werden Methoden der Quantenmechanik mit der Supersymmetrie (im Folgenden kurz: SUSY) verbunden. Die supersymmetrische Quantenmechanik geht auf die Einführung der Supersymmetrie in der Quantenfeldtheorie zurück, die die Vereinigung bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade in Superfeldern beabsichtigt. Supersymmetrische Theorien bieten die Perspektive, diese beiden Arten von Elementarteilchen unter einer Symmetrietransformation zu vereinen, bei der Fermionen in Bosonen, und Bosonen in Fermionen überführt werden. Die Energie bzw. Masse der Teilchen soll von dieser Transformation unberührt bleiben. Eine Vereinigung der beiden Elementarteilchenklassen durch die Supersymmetrie hätte damit die Einführung einer neuen Teilchenart zur Folge, die in zwei unterschiedlichen Zuständen vorliegen könnte: als bosonisches, oder als fermionisches Teilchen. [1]

Da seither jedoch keine experimentellen Hinweise auf das Vorliegen einer Entartung zwischen Bosonen und Fermionen gefunden wurden, muss diese Symmetrie in der Natur gebrochen sein. Zunächst lediglich zur genaueren Untersuchung dieses Symmetriebruchs eingeführt, wurde die supersymmetrische Quantenmechanik (im Folgenden kurz: SUSY QM) entwickelt [14, 22]. Aus dem Formalismus der SUSY QM lassen sich jedoch auch darüber hinaus wichtige Ergebnisse erzielen: so wurde beispielsweise mit dem Konzept der Forminvarianz eine Klassifikation lösbarer Potentiale eingeführt. [3] Des Weiteren lassen sich mit der SUSY QM eine Reihe von Näherungsmethoden entwickeln oder verbessern.

In dieser Arbeit soll die  $1/N$ -Entwicklung, eine wichtige quantenmechanische Näherungsmethode zur Lösung der Schrödingergleichung, mittels Methoden der SUSY QM verbessert werden. Diese Näherungsmethode wird im Folgenden dazu verwendet, eine analytische Lösung des Hulthén-Potentials zu erhalten.

---

## 2 Grundlagen der supersymmetrischen Quantenmechanik

### 2.1 Formalismus

#### 2.1.1 Faktorisierung

Die SUSY QM basiert von quantenmechanischer Seite auf einem schlichten Faktorisierungsansatz der Schrödingergleichung. Dieser Ansatz wurde schon vor der Entwicklung der Supersymmetrie erfasst (Infeld und Hull, [9]), und erst später in diesen Kontext gerückt. Durch die Faktorisierung eines Hamiltonoperators lässt sich ein sogenanntes Partnerpotential generieren, dessen Zustände bis auf den Grundzustand mit denen des Ausgangspotentials entartet sind. Die Supersymmetrie äußert sich in diesem Formalismus mit der Identifikation der beiden entarteten Zustände als bosonischem und fermionischem Zustand. Durch die Erzeugung bzw. Vernichtung eines Knotens in der Wellenfunktion lassen sich fermionische Zustände in bosonischen überführen, und umgekehrt.

Im Folgenden wird die Faktorisierungsmethode zunächst rein formal eingeführt, anschließend wird der Zusammenhang zur Supersymmetrie dargestellt.

Ausgangspunkt dieser Betrachtung sei ein beliebiges eindimensionales Potential  $V_1(x)$  mit dem Hamiltonoperator

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \quad (2.1)$$

Da die Grundzustandsenergie  $E_0^{(1)}$  für das Spektrum lediglich eine additive Konstante darstellt, und die Wellenfunktionen davon unabhängig sind, lässt sich eine verschwindende Grundzustandsenergie  $E_0^{(1)} = 0$  annehmen. Die Grundzustandswellenfunktion besitzt keine Knoten, daher folgt

$$H\psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)}\psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0^{(1)''}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (2.2)$$

Jeder Hamiltonoperator der Form (2.1) lässt sich nun als Produkt zweier adjungierter Operatoren schreiben: [1]

$$H_1 = A^+ A^-. \quad (2.3)$$

Die beiden Operatoren  $A^-$  und  $A^+$  ergeben sich unter Einführen der ortsabhängigen Funktion  $W(x)$ , des sogenannten Superpotentials, zu

$$A^- := \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad \text{und} \quad A^+ := -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (2.4)$$

Die beiden Operatoren sind adjungiert mit  $(A^\pm)^\dagger = A^\mp$ . Das Superpotential gehorcht der Riccati-Gleichung<sup>1</sup>

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x), \quad (2.5)$$

aus deren Lösung<sup>2</sup> ein Ausdruck für das Superpotential durch die Grundzustandswellenfunktion  $\psi_0^{(1)}(x)$  folgt mit

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0^{(1)'}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (2.6)$$

Die Bedeutsamkeit des Faktorisierungsansatzes für die supersymmetrische Quantenmechanik liegt nun darin, dass durch Vertauschen der beiden Leiteroperatoren der neue Hamiltonoperator [1]

$$H_2 = A^- A^+ \quad (2.7)$$

erhalten wird, durch den analog zu Gleichung (2.5) das korrespondierende Potential  $V_2(x)$  eingeführt wird mit

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad \text{mit} \quad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x). \quad (2.8)$$

$V_2(x)$  ist das supersymmetrische Partnerpotential (kurz: SUSY-Partner) von  $V_1(x)$ . Ausgedrückt durch  $V_1(x)$  ergibt sich dieses zu

$$V_2(x) = V_1(x) + \sqrt{\frac{2\hbar^2}{m}}W'(x). \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Eigenschaften der SUSY-Partner

Die Eigenwerte und Eigenvektoren der SUSY-Partner  $V_1(x)$  und  $V_2(x)$  sind durch die Faktorisierung fest miteinander verknüpft. Der Eigenvektor von  $H_2$  lässt sich durch den Ansatz  $\psi_n^{(2)} \propto A^- \psi_n^{(1)}$  erhalten, mit  $H_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}$  gilt dann die Eigenwertgleichung

$$H_2(A^- \psi_n^{(1)}) \stackrel{(2.7)}{=} A^- A^+(A^- \psi_n^{(1)}) \stackrel{(2.3)}{=} A^- H_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(A^- \psi_n^{(1)}). \quad (2.10)$$

Umgekehrt gilt

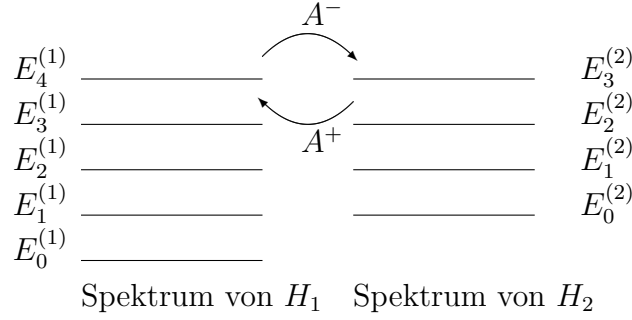
$$H_1(A^+ \psi_n^{(2)}) \stackrel{(2.3)}{=} A^+ A^-(A^+ \psi_n^{(2)}) \stackrel{(2.7)}{=} A^+ H_2 \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(A^+ \psi_n^{(2)}). \quad (2.11)$$

Die beiden Partner haben damit das gleiche Spektrum, und ihre entarteten Eigenzustände sind durch die Leiteroperatoren untereinander transformierbar. Durch die

---

<sup>1</sup>Beweis durch Ausmultiplizieren von (2.3), unter Verwendung von  $A, A^\dagger$  in Operatorschreibweise. Mit  $[P, W(Q)] = \frac{\hbar}{i}W'(Q)$  (vollständige Induktion) folgt die Riccati-Gleichung.

<sup>2</sup>Beweis durch Einsetzen von (2.2) in (2.5). Mit der Produktableitung  $\frac{\psi_0''}{\psi_0} = \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)' - \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)^2$  folgt Gleichung (2.6).



**Abbildung 2.1:** Veranschaulichung der Entartung der Energieniveaus von Potential und Partnerpotential. Umwandlung durch die Leiteroperatoren  $A^-$  und  $A^+$  unter Erzeugung bzw. Vernichtung eines Knotens. Nach [10]

Transformationen wird die Knotenzahl  $n$  verändert: die Operatoren  $A^+$  und  $A^-$  erzeugen bzw. vernichten einen Knoten. Aus Normierungsgründen kann es jedoch nur einen Grundzustand bei  $E_0 = 0$  geben, in der Regel wird dieser dem Potential  $V_1(x)$  zugeordnet.

Zusammengefasst gilt: [1]

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (2.12)$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{A^- \psi_{n+1}^{(1)}}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} \quad \text{und} \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{A^+ \psi_n^{(2)}}{\sqrt{E_n^{(2)}}}. \quad (2.13)$$

In Abbildung 2.1 ist die Entartung zwischen den Energieniveaus von Potential und Partnerpotential, sowie die Transformation zwischen den Niveaus durch die SUSY-Leiteroperatoren  $A^-$  und  $A^+$  dargestellt.

Besitzt keines der beiden Potentiale einen Grundzustand mit  $E_0 = 0$ , so ist die Symmetrie gebrochen, ansonsten exakt. [10] Ob ein solcher Symmetriebruch vorliegt oder nicht, hängt vom Verhalten des Superpotentials im Unendlichen ab, das die Normierbarkeit der Grundzustandswellenfunktionen  $\psi_0(r)$  von Potential und Partner festlegt. Da für diese die Gleichungen

$$H_1 \psi_0^{(1)} = A^+ A^- \psi_0^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad H_2 \psi_0^{(2)} = A^- A^+ \psi_0^{(2)} = 0 \quad (2.14)$$

gelten müssen, ergeben sich mit (2.4) die Differentialgleichungen

$$\left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0^{(1)} = 0, \quad \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - W(x) \right) \psi_0^{(2)} = 0, \quad (2.15)$$

mit den Lösungen

$$\left. \begin{matrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} C e^{-\frac{m}{\hbar} \int_0^x W(x') dx'} \\ C e^{+\frac{m}{\hbar} \int_0^x W(x') dx'} \end{matrix} \right. \quad \text{oder} \quad \left. \begin{matrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{matrix} \right\} = 0. \quad (2.16)$$

Die Normierungsbedingung ergibt dann einerseits

$$\int_{-\infty}^0 W(x') dx' = -\infty, \quad \int_0^{\infty} W(x') dx' = +\infty \quad \Rightarrow \quad \psi_0^{(1)} \text{ normierbar}, \quad (2.17)$$

und andererseits

$$\int_{-\infty}^0 W(x') dx' = +\infty, \quad \int_0^{\infty} W(x') dx' = -\infty \quad \Rightarrow \quad \psi_0^{(2)} \text{ normierbar}. \quad (2.18)$$

Da die beiden Forderungen unvereinbar sind, kann es folglich höchstens eine Lösung mit nichtverschwindender Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Wellenfunktion geben, deren Grundzustand bei  $E_0 = 0$  liegt.

### 2.1.3 SUSY-Ketten

Da zur Generation des Partnerpotentials  $V_2(x)$  eines beliebigen Potential  $V_1(x)$  lediglich die Grundzustandswellenfunktion  $\psi_0^{(1)}(x)$  bekannt sein muss, lässt sich auch das Partnerpotential als Ausgangspunkt einer Faktorisierung heranziehen. [10] Die Grundzustandswellenfunktion des Partners folgt dabei direkt aus der Kenntnis des ersten angeregten Zustands von  $V_1$ , da es unter Verwendung des Superpotentials  $W_1(x)$  durch die Transformation  $A_1^- \psi_1^{(1)}$  erhalten werden kann. Bei verschwindender Grundzustandsenergie kann der Partner refaktorisiert werden. Dabei werden neue Leiteroperatoren und ein neues Superpotential generiert:

$$A_2^-, A_2^+ = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad \text{mit} \quad W_2(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(2)}. \quad (2.19)$$

Aus ihnen wird ein neuer isospektraler Partner  $V_3(x)$  mit  $H_3 = A_2^- A_2^+$  erhalten, dem nur der Grundzustand von  $V_2(x)$  fehlt.

Die wiederholte Faktorisierung des Partnerpotentials ergibt auf diese Weise eine ganze Kette isospektraler SUSY-Partner, wobei dem  $i$ -ten Partner von  $V_1(x)$  lediglich die ersten  $i - 1$  Zustände von  $V_1(x)$  fehlen. Analog zu Gleichung (2.9) ist dieser durch wiederholte Faktorisierung von  $V_1(x)$  gegeben mit

$$V_i(x) = V_1(x) + \sqrt{\frac{2\hbar^2}{m}} \sum_{j=1}^{i-1} W^{(j)'}(x). \quad (2.20)$$

Er wird charakterisiert durch

$$H_i = A_i^+ A_i^- + E_{i-1}^{(1)}, \quad \text{mit} \quad A_i^-, A_i^+ = \pm \frac{\hbar}{2m} \frac{d}{dx} + W_i(x) \quad \text{und} \quad W_i(x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\psi_0^{(i)'}(x)}{\psi_0^{(i)}(x)}. \quad (2.21)$$

Ein Zustand  $\psi_i^{(1)}(x)$  von  $V_1(x)$  lässt sich unter wiederholtem Anwenden der Absteigeoperatoren bis auf den knotenlosen Grundzustand des  $i$ -ten Partners  $V_{i+1}$  zurückführen, und umgekehrt. Die Zustände der unterschiedlichen Partner ergeben sich



zu

$$E_n^{(i)} = E_{n+1}^{(i-1)} = \dots = E_{n+i-1}^{(1)}, \quad (2.22)$$

$$\psi_n^{(i)} \propto A_{i-1}^- A_{i-2}^- \dots A_2^- A_1^- \psi_{n+i-1}^{(1)}, \quad \text{und} \quad \psi_{n+i-1}^{(1)} \propto A_1^+ A_2^+ \dots A_{i-1}^+ \psi_n^{(i)}. \quad (2.23)$$

Zur Veranschaulichung dieser Transformationen ist die SUSY-Kette in Abbildung 2.2 graphisch dargestellt.

### 2.1.4 SUSY QM bei sphärischer Symmetrie in $N$ Dimensionen

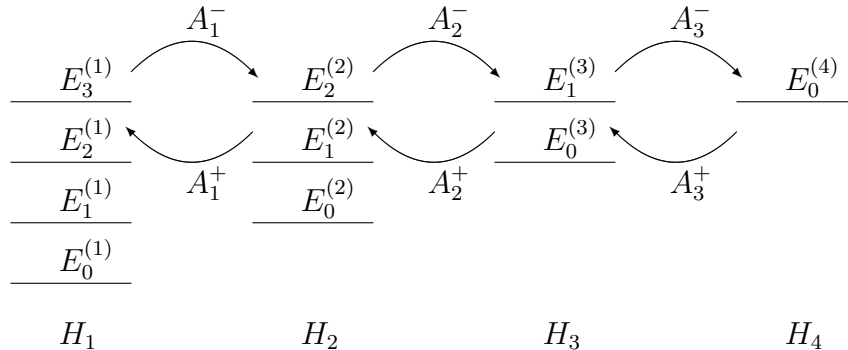
Sphärisch symmetrische Systeme lassen sich aufgrund der Separation der Wellenfunktion in Radial- und Winkelanteil durch den Formalismus der eindimensionalen SUSY QM optimal erfassen. Da im Folgenden die auf  $N$  Raumdimensionen verallgemeinerte sphärische Symmetrie die wesentliche Rolle spielt, wird der Formalismus an dieser Stelle direkt auf  $N$  Dimensionen erweitert. Der dreidimensionale Fall kann daraus jederzeit durch Setzen von  $N = 3$  erhalten werden.

Das  $N$ -dimensionale System wird in hypersphärischen Koordinaten, mit dem Hyperradius  $r$ , und den  $N - 1$  Hyperwinkeln  $\vec{\Omega}$  beschrieben. Im Laplace-Operator  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} - (N-1)\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$  taucht dann der verallgemeinerte  $N$ -dimensionale Drehimpulsoperator  $\vec{L}^2$  auf, der komplett den winkelabhängigen Teil enthält. Die Schrödingergleichung separiert damit in einen radial- und einen winkelabhängigen Teil mit

$$\Psi(r, \vec{\Omega}) = r^{\frac{N-1}{2}} \psi(r) Y(\vec{\Omega}), \quad (2.24)$$

wobei die Eigenfunktionen von  $\vec{L}^2$  durch  $Y(\vec{\Omega})$  gegeben sind, und die Eigenwerte durch  $\ell(\ell + N - 2)$ , mit  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . [20] Die radiale Schrödingergleichung lautet dann

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2(N + 2\ell - 1)(N + 2\ell - 3)}{8mr^2} + V(r) \right) \psi_{n,\ell}(r) = E_{n,\ell} \psi_{n,\ell}(r). \quad (2.25)$$



**Abbildung 2.2:** Kette von SUSY-Partnern zu  $H_1$ . Nach [10]

Die Eigenzustände sind durch die radiale Quantenzahl  $n_r = n - \ell - 1$  und die Drehimpulsquantenzahl  $\ell$  gekennzeichnet. Da diese in (2.25) stets fest verknüpft mit der Zahl  $N$  der Raumdimensionen auftaucht, lässt sich zu der neuen Quantenzahl  $k = N + 2\ell$  übergehen, [20]so dass sich die Radialgleichung auf

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2(k-1)(k-3)}{8mr^2} + V(r) \right) \psi_{n_r k}(r) = E_{n_r k} \psi_{n_r k}(r) \quad (2.26)$$

verürzt. Mit der Einführung des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}^k(r) = \frac{\hbar^2(k-1)(k-3)}{8mr^2} + V(r)$  erlangt die Schrödingergleichung die gleiche Gestalt wie in Gleichung (2.1), und lässt sich mit der Identifikation  $V_1(r) = V_{\text{eff}}^k(r)$  in der SUSY QM analog dazu behandeln.

Das Superpotential des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}^k$  lässt sich für ein festes  $k$  aus dessen Grundzustand  $\psi_0^{(1)}$  berechnen. Auch bei sphärischer Symmetrie legt es fest, ob ein Symmetriebruch vorliegt: die Normierungsbedingung der Gleichungen (2.17) und (2.18) wird für  $0 < r < \infty$  zu

$$\int_0^\infty W(r) dr = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi_0^{(1)}(r) \\ \psi_0^{(2)}(r) \end{array} \right\} \text{ normierbar.} \quad (2.27)$$

Die SUSY ist demnach gebrochen, falls das Superpotential im Unendlichen verschwindet.

Analog zu Gleichung (2.9) folgt daraus der SUSY-Partner des effektiven Potentials mit

$$V_2(r) = V_1(r) + 2\frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'(r) = V_1(r) - \frac{\hbar}{m} \frac{d}{dr} \left( \frac{\psi_0^{(1)'}(r)}{\psi_0^{(1)}(r)} \right). \quad (2.28)$$

## 2.2 Bose-Fermi-Supersymmetrie

### 2.2.1 Bosonen und Fermionen

Die Bedeutung des bis hierher sehr allgemein gehaltenen Formalismus erlangt erst in Verbindung mit der SUSY-Algebra einen direkten Bezug zu der Motivation, bosonische und fermionische Freiheitsgrade miteinander zu verknüpfen. Dazu müssen zunächst die unterschiedlichen statistischen Eigenschaften von Bosonen und Fermionen berücksichtigt werden. Bosonische Zustände gehorchen der Bose-Einstein-Statistik und tragen ganzzahligen Spin, wohingegen fermionische Zustände der Fermi-Dirac-Statistik gehorchen und halbzahligen Spin tragen. Die beiden Teilchensorten unterscheiden sich damit wesentlich: Fermionen sind vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung und können daher nicht denselben Zustand einnehmen, Bosonen hingegen sind vollständig symmetrisch unter Vertauschung, so dass sie bevorzugt den selben Zustand einnehmen. Für die folgenden Erläuterungen wird der fermionische bzw. der bosonische Fock-Raum

in der Dirac-Darstellung betrachtet, dessen Basis jeweils durch den bosonischen und fermionischen Besetzungszahloperator  $N_B$  und  $N_F$  gegeben ist, mit den Eigenwerten  $n_B$  und  $n_F$ , die die Besetzungszahl angeben. [18]

Für Bosonen ist die Besetzungszahl unbeschränkt. Durch die wiederholte Anwendung des bosonischen Erzeugers  $a^+$  lässt sich aus dem Vakuumzustand  $|0\rangle$  ein beliebiger Zustand erzeugen, umgekehrt durch den Vernichter  $a^-$  reduzieren: [10]

$$a^+|n_B\rangle \propto |n_B + 1\rangle, \quad \text{und} \quad a^-|n_B\rangle \propto |n_B - 1\rangle. \quad (2.29)$$

Bosonische Systeme werden beschrieben durch die Kommutatorrelationen<sup>3</sup>

$$[a^-, a^+] = 1 \quad \text{und} \quad [a^+, a^+] = [a^-, a^-] = 0. \quad (2.30)$$

Auch die Fermionenzahl kann durch Erzeuger/Vernichter mittels

$$f^+|n_F\rangle \propto |n_F + 1\rangle, \quad \text{und} \quad f^-|n_F\rangle \propto |n_F - 1\rangle \quad (2.31)$$

verändert werden. Aufgrund ihrer Antisymmetrie können sich zwei Fermionen nicht im gleichen Zustand befinden, ein Zustand kann demnach einzig besetzt ( $n_F = 1$ ), oder unbesetzt sein ( $n_F = 0$ ). Als grundlegende fermionische Eigenschaft folgt daraus die Nilpotenz des fermionischen Erzeugers/Vernichters:

$$(f^+)^2 = (f^-)^2 = 0. \quad (2.32)$$

Die fermionischen Erzeuger und Vernichter gehorchen damit den Antikommutatorrelationen<sup>4</sup>

$$\{f^-, f^+\} = 1, \quad \{f^+, f^+\} = \{f^-, f^-\} = 0. \quad (2.33)$$

Da der Zustandsraum zweidimensional ist, können die Fermioperatoren als  $2 \times 2$  Matrizen dargestellt werden, es gilt dann

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Die Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen der Bosonen und Fermionen sind entscheidend für die Generation der SUSY-Algebra. [10]

### 2.2.2 SUSY-Algebra

Die supersymmetrische Quantenmechanik basiert im Wesentlichen auf der Zusammenführung der nichtrelativistischen Quantenmechanik mit der SUSY-Algebra.

Eine Algebra besteht aus einem durch eine Verknüpfung erweiterten Vektorraum. Die Algebra wird durch Generatoren erzeugt, durch die jedes darin enthaltene Element mittels der Verknüpfung und den Vektorraumeigenschaften dargestellt werden kann.

---

<sup>3</sup> $[A, B] := AB - BA$

<sup>4</sup> $\{A, B\} := AB + BA$

Die SUSY-Algebra stellt eine Erweiterung der Lie-Algebra dar, bei der die Verknüpfung zwischen den Elementen durch die Kommutatorrelation  $[A, B] = C$  gegeben ist. In der SUSY-Algebra taucht zusätzlich zur Kommutatorrelation jedoch noch die Antikommutatorrelation auf.

Die einfachste SUSY-Algebra wird durch die Generatoren  $Q_1$  und  $Q_2$  erzeugt. Diese sogenannten Superladungen werden durch die Relationen

$$[H_S, Q_1] = [H_S, Q_2] = 0 \quad (2.35)$$

$$\{Q_1, Q_1\} = \{Q_2, Q_2\} = 2H_S \quad (2.36)$$

$$\{Q_1, Q_2\} = 0 \quad (2.37)$$

verknüpft, in denen sich die wesentlichen Eigenschaften der Algebra äußern. [10] Die Superladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  können als Operatoren interpretiert werden, die die Statistik des Systems ändern, und dabei bosonische Zustände in fermionische überführen, und umgekehrt. Für die Symmetrie ist es wesentlich, dass die Superladungen mit dem Hamiltonoperator kommutieren. Dies hat die Entartung der fermionischen und bosonischen Zustände zur Folge. [1]

Alle in der SUSY-Algebra auftauchenden Operatoren lassen sich in fermionische Operatoren  $F$  und bosonische Operatoren  $A$  klassifizieren. Zwischen diesen besteht der Zusammenhang

$$[A, A] \propto \tilde{A} \quad [A, F] \propto \tilde{F} \quad \text{und} \quad \{F, F\} \propto \tilde{A}, \quad (2.38)$$

was wiederum die Struktur der SUSY-Algebra darstellt. Das Auftauchen fermionischer Operatoren verändert daher stets die Statistik der Zustände, während bosonische Operatoren Zustände gleicher Statistik verknüpfen. Wesentlich ist hier, dass durch den Antikommutator fermionische Operatoren wieder auf bosonische zurückgeführt werden, so dass die Verknüpfungen durch die SUSY-Algebra nicht aus dem aufgespannten Raum herausführen, was die Algebra schließt.[10]

### 2.2.3 SUSY-Transformationen

Die Motivation der Supersymmetrie besteht darin, die Teilchensorten durch Transformationen ineinander zu überführen, die der SUSY-Algebra gehorchen. Um dies im Folgenden zu konkretisieren, wird der Produktraum der beiden Fock-Räume

$$|n_B n_F\rangle = |n_B\rangle \otimes |n_F\rangle, \quad \text{wobei} \quad n_B = 0, 1, \dots, \infty \quad \text{und} \quad n_F = 0, 1 \quad (2.39)$$

betrachtet. Es soll nun eine Symmetrie-Transformation gefunden werden, die, im einfachsten Fall, eine Umwandlung eines Fermions in ein Boson, sowie eine Umwandlung eines Bosons in ein Fermion bewerkstelligen kann. Die SUSY-Operatoren müssen in diesem Fall die entsprechende Wirkung

$$Q_+ |n_B, n_F\rangle \propto |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad \text{und} \quad Q_- |n_B, n_F\rangle \propto |n_B + 1, n_F - 1\rangle. \quad (2.40)$$

haben. Für das wechselwirkungsfreie System kann diese Transformation mittels der Identifikation

$$Q_+ \propto a^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- \propto a^+ f^-. \quad (2.41)$$

erfolgen, wobei  $a^\pm$  und  $f^\pm$  die bosonischen/fermionischen Erzeuger und Vernichter darstellen.

Rahmenbedingung der SUSY-Transformation ist, dass die Energie unter dem Wirken der Operatoren erhalten bleibt:

$$[H_S, Q_\pm] = 0. \quad (2.42)$$

Wegen der Nilpotenz des fermionischen Operators  $f^\pm$  ist dies durch den Ansatz [10]

$$H_S = \{Q_+, Q_-\} \quad (2.43)$$

gerade erfüllt, falls die SUSY-Operatoren linear von  $f^\pm$  abhängen. Der Ausdruck (2.41) lässt sich daher auf beliebige bosonische Operatoren  $A^\pm(a^+, a^-)$  verallgemeinern zu

$$Q_+ = A^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- = A^+ f^-. \quad (2.44)$$

Damit  $H_S$  hermitesch ist, muss für die bosonischen Operatoren  $(A^\pm)^\dagger = A^\mp$  gelten. Mit dem Einführen der hermiteschen SUSY-Operatoren, den Superladungen

$$Q_1 := Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 := -i(Q_+ - Q_-) \quad (2.45)$$

gilt schließlich

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2. \quad (2.46)$$

Damit erfüllen der supersymmetrische Hamiltonoperator  $H_S$  und die Superladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  die SUSY-Algebra (2.37).

### 2.2.4 Kanonische Darstellung

Durch den Übergang zu den nichtlinearen bosonischen Operatoren  $A^\pm$  wird jedoch ein Basiswechsel notwendig. Der SUSY-Hamiltonoperator vertauscht zwar noch mit dem fermionischen, jedoch nicht mehr mit dem bosonischen Besetzungszahloperator  $N_B$ :

$$[H_S, N_F] = A^- A^+ [f^+ f^-, f^+ f^-] + A^+ A^- [f^- f^+, f^- f^+] = 0, \quad (2.47)$$

$$[H_S, N_B] = [A^- A^+, a^+ a^-] f^+ f^- + [A^+ A^-, a^+ a^-] f^- f^+ \neq 0. \quad (2.48)$$

Die Eigenzustände von  $N_B$  sind demnach keine Eigenzustände von  $H_S$  mehr. Stattdessen wird ein Basiswechsel zu den Zuständen  $|E n_F\rangle$  durchgeführt. Unter Verwendung der Schreibweise (2.34) ergibt sich die kanonische Darstellung [10]

$$|E n_F\rangle = \begin{pmatrix} |E 0\rangle \\ |E 1\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Boson} \\ \text{Fermion} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

wobei die Fermioperatoren  $f^\pm$  wegfallen. Die SUSY-Operatoren werden dann als  $2 \times 2$  Matrizen geschrieben, in denen nur noch die bosonischen Operatoren  $A^\pm$  auftauchen mit

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ A^- & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & iA^+ \\ -iA^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Der SUSY-Hamiltonoperator ist in der kanonischen Darstellung diagonal:

$$H_S = \begin{pmatrix} A^+A^- & 0 \\ 0 & A^-A^+ \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Eine Separation der Schrödingergleichung ergibt in Ortsdarstellung die Gleichungen

$$H_1\psi^{(1)}(x) = A^+A^-\psi^{(1)}(x) \quad (2.52)$$

$$H_2\psi^{(2)}(x) = A^-A^+\psi^{(2)}(x), \quad (2.53)$$

mit der zweikomponentigen Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(x) \\ \psi^{(2)}(x) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

die die Partnerzustände aus (2.13) beinhaltet. Durch die Identifikation der anfänglich eingeführten Faktorisierungsoperatoren  $A^+$  und  $A^-$  mit den bosonischen Operatoren der SUSY-Algebra lässt sich der Zusammenhang zwischen dieser und der in Abschnitt 2.1 eingeführten SUSY-Partner herstellen.

Das Auftreten von Potential und Partner, das durch die Faktorisierung des Hamiltonoperators rein formal mit den Methoden der Quantenmechanik eingeführt wurde, führt damit über die Vereinigung der beiden durch den supersymmetrischen Hamiltonoperator zur Supersymmetrie.

---

## 3 Hulthén-Potential

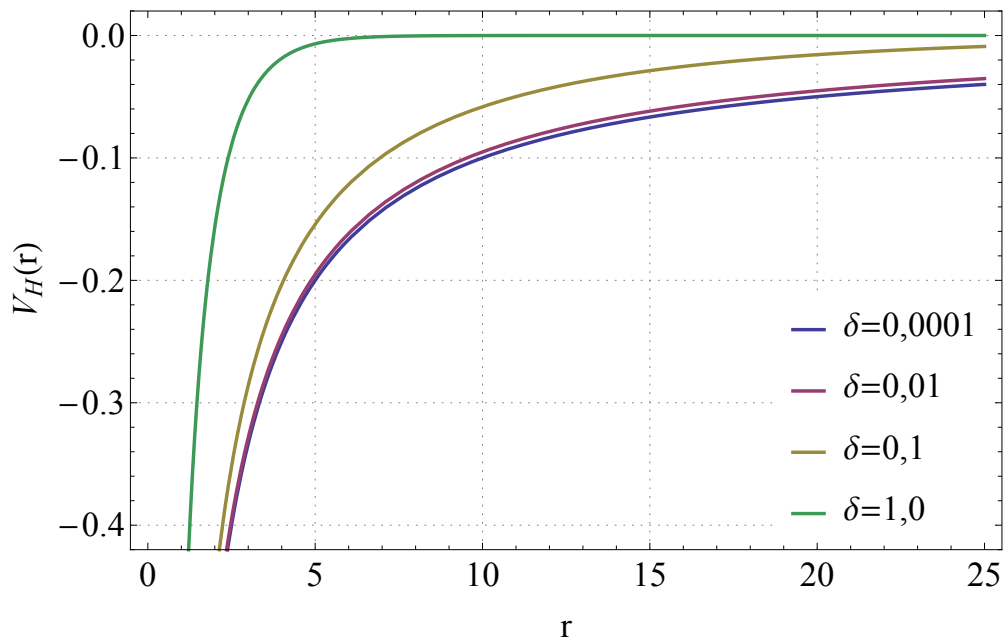
### 3.1 Eigenschaften des Hulthén-Potentials

Das Hulthén-Potential

$$V_H(r) = -V_0 \frac{\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} \quad (3.1)$$

verhält sich in der Nähe des Ursprungs wie das Coulomb-Potential, fällt mit steigendem Abstand  $r$  jedoch exponentiell ab. Das Potential gehört daher zu den exponentiell abgeschirmten Coulomb-Potentialen. In Abbildung 3.1 ist dargestellt, wie die Abschirmung  $\delta$  bei fester Potentialstärke  $V_0$  die Reichweite  $r_0 = 1/\delta$  dämpft, wodurch auch die Anzahl gebundener Zustände eingeschränkt wird. Im Falle geringer Abschirmung  $\delta \rightarrow 0$  stellt das Coulomb-Potential den Grenzfall dar.

Für  $s$ -Wellen bietet das Hulthén-Potential den wesentlichen Vorzug gegenüber anderen exponentiell abgeschirmten Coulomb-Potentialen, dass es exakt analytisch lösbar ist. Für Zustände mit  $\ell > 0$  ist die Schrödingergleichung jedoch nur noch numerisch bzw. mit analytischen Näherungsmethoden lösbar.



**Abbildung 3.1:** Das Hulthén-Potential mit unterschiedlichen Screening-Parametern, mit  $V_0 = 1, 0$ .

### 3.2 Exakte Lösung für $s$ -Wellen

Die radiale Schrödingergleichung lässt sich für  $\ell = 0$  geschlossen lösen. [2, 12] Durch eine Umskalierung der Variablen gelangt man zu den natürlichen Einheiten  $\hbar = m = 1$ ,

die für die folgenden Rechnungen ohne weiteren Verweis verwendet werden, außerdem soll gelten:  $V_0 = 1$ . Die erhaltenen Längen und Energien sind dann stets in atomaren Einheiten gegeben. Für  $\psi(r) = rR(r)$  lautet die Schrödingergleichung

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} \right) \psi(r) = E\psi(r). \quad (3.2)$$

Mit der Substitution  $x = \delta r$ , sowie den Abkürzungen

$$\alpha^2 = -\frac{2E}{\delta^2} > 0 \quad \text{und} \quad \beta^2 = \frac{2}{\delta^2} > 0 \quad (3.3)$$

lässt sie sich umschreiben als

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left( -\alpha^2 + \beta^2 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \psi = 0. \quad (3.4)$$

Mit der Transformation

$$y = e^{-x} \quad (3.5)$$

folgt aus (3.4) die Differentialgleichung

$$y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + y \frac{d\psi}{dy} + \left( -\alpha^2 + \beta^2 \frac{y}{1 - y} \right) \psi = 0. \quad (3.6)$$

Um diese Gleichung zu lösen, wird der Ansatz [2]

$$\psi(y) = y^\alpha (1 - y)w(y) \quad (3.7)$$

verwendet. Die Randbedingungen der radialen Wellenfunktion lauten, ausgedrückt durch (3.5)

$$\psi(y = 1) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(y = 0) = 0, \quad (3.8)$$

sie sind durch den Ansatz (3.7) erfüllt, falls  $w(y)$  am Ursprung und im Unendlichen endlich ist. Einsetzen von (3.7) in (3.4) ergibt die hypergeometrische Differentialgleichung

$$y(1 - y)w''(y) + [(2\alpha + 1) - (2\alpha + 3)y]w'(y) - (2\alpha + 1 - \beta^2)w(y) = 0. \quad (3.9)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist mit  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  gegeben durch die beiden hypergeometrischen Funktionen [2]

$$w(y) = A {}_2F_1(\alpha + 1 + \gamma, \alpha + 1 - \gamma, 2\alpha + 1; y) + B y^{-2\alpha} {}_2F_1(-\alpha + 1 + \gamma, -\alpha + 1 - \gamma, -2\alpha + 1; y). \quad (3.10)$$

Die beiden Randbedingungen geben die genaue Gestalt der Lösung  $w(y)$  vor. Der zweite Term aus (3.10) divergiert bei  $y \rightarrow 1$  und  $y \rightarrow 0$ , daher muss  $B = 0$  gelten. Das Verhalten des ersten Terms am Ursprung ergibt die Bedingung<sup>5</sup>

$$\gamma - \alpha = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.11)$$

---

<sup>5</sup> Der erste Ausdruck in (3.10) lässt sich mit der Identität

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha + 1 + \gamma, \alpha + 1 - \gamma, 2\alpha' + 1; y) &= \frac{\Gamma(2\alpha' + 1)\Gamma(\epsilon - 1)}{\Gamma(\alpha - \gamma + \epsilon)\Gamma(\alpha + \gamma + \epsilon)} {}_2F_1(\alpha + 1 + \gamma, \alpha + 1 - \gamma, 2\alpha' + 1; 1 - y) \\ &+ (1 - y)^{\epsilon - 1} \frac{\Gamma(2\alpha' + 1)\Gamma(1 - \epsilon)}{\Gamma(\alpha + 1 + \gamma)\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)} {}_2F_1(\alpha - \gamma + \epsilon, \alpha + \gamma + \epsilon, \epsilon; 1 - y), \end{aligned}$$



und damit

$$\alpha = \frac{\beta^2 - n^2}{2n} = \frac{1}{n\delta} - \frac{n}{2}. \quad (3.12)$$

Mit den Gleichungen (3.3) und (3.12) lassen sich die Energieeigenwerte sowie die unnormierten Eigenfunktionen erhalten zu

$$E_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta n}{2} - \frac{1}{n} \right)^2 \quad \text{und} \quad (3.13)$$

$$\psi_n(r) = e^{-\frac{r}{2}(\frac{2}{n} - n\delta)} (1 - e^{-\delta r}) {}_2F_1(2\alpha + 1 + n, 1 - n, 2\alpha + 1, e^{-\delta r}). \quad (3.14)$$

Da  $\alpha$  gemäß (3.3) positiv sein muss, muss zudem die Bedingung für gebundene Zustände

$$\delta \stackrel{!}{<} \frac{2}{n^2} \quad (3.15)$$

erfüllt sein, die die Abschirmung und die Potentialstärke mit der Anzahl gebundener Zustände in Verbindung bringt.

### 3.3 Generation der SUSY-Partner

Für die Generation der SUSY-Partner des effektiven Potentials wird dieses nach seinem Drehimpuls  $\ell$  bzw.  $k = N + 2\ell$  klassifiziert. Aus der knotenlosen Grundzustandswelle wird der zu einem festen Wert zugehörige SUSY-Partner generiert. Der in  $V_1(r)$  auftauchende Drehimpuls wird im Folgenden zur Indizierung der Funktionen verwendet.

Für das effektive Potential der  $s$ -Wellen

$$V_1^s(r) = -\frac{\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{(\delta - 2)^2}{8} \quad (3.16)$$

ist der Grundzustand gemäß den Relationen (3.14) und (3.13) gegeben durch

$$\psi_{1s}^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{4 - \delta^2}{\delta^2}} e^{-\frac{r}{2}(2 - \delta)} (1 - e^{-\delta r}), \quad \text{und} \quad E_{1s}^{(1)} = -\frac{(\delta - 2)^2}{8}. \quad (3.17)$$

Das Superpotential ergibt sich daraus mit (2.6) zu

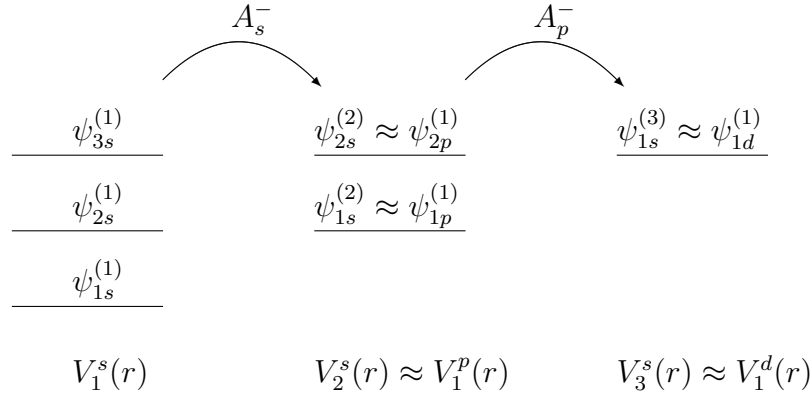
$$W^s(r) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{\delta}{1 - e^{-\delta r}} - 2 \right). \quad (3.18)$$

Da  $W_s(r)$  im Unendlichen verschwindet, ist die Supersymmetrie exakt. Das  $s$ -Partnerpotential hat damit die Gestalt

$$V_2^s(r) = V_1^s(r) + \frac{\delta^2 e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})}. \quad (3.19)$$

---

wobei  $\epsilon = 2(\alpha' - \alpha)$  untersuchen. Der erste Term verhält sich hierin im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  bei  $y = 1$  dann und nur dann endlich, wenn gilt:  $\alpha - \gamma = -n$ , mit  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . In diesem Fall gilt  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\epsilon - 1)}{\Gamma(\alpha - \gamma + \epsilon)} = (-1)^{n+1} n! < \infty$ . Der zweite Term verschwindet unter dieser Bedingung, außer für  $\alpha - \gamma = 0$ . Aus diesem Grund muss  $n \neq 0$  gelten, woraus die Bedingung (3.11) folgt. [2]



**Abbildung 3.2:** SUSY-Kette beim Hulthén-Potential

Da für die Partnerpotentiale von  $V_1^\ell$  mit  $\ell > 0$  keine exakte Lösung für die Grundzustandswellenfunktionen existiert, kann hier auf die numerische Berechnung der Wellenfunktion zurückgegriffen werden oder auf eine analytische Näherung. Durch die Nutzung einer SUSY-Kette lässt sich der SUSY-Partner  $V_2^s(r)$  für die Approximation der  $p$ -Wellenfunktion für nicht zu große Werte von  $r$  nutzen. [4, 16] In diesem Bereich verhält sich der zweite Term von (3.19) gerade wie  $1/r^2$  und damit wie eine  $p$ -Wellen-Potentialbarriere für das Hulthén-Potential. Dessen Grundzustand lässt sich durch die Vernichtung eines Knotens mittels (2.4) direkt aus dem exakten Ausdruck (3.14) erhalten. Aus dem Partner von  $V_1^p(r)$  kann wiederum der Grundzustand der  $d$ -Wellen gewonnen werden. Das Schema der SUSY-Kette ist in Abbildung 3.2 veranschaulicht.

Die Grundzustandswellenfunktion von  $V_2^s(r)$  wird mit dem Absteigeoperator  $A_s^-$  gemäß (2.4) und dem zugehörigen Superpotential  $W_s(r)$  gemäß (3.18) aus dem ersten angeregten Zustand von  $V_2^s(r)$  erhalten. Mit der Identifikation

$$\psi_{0p}^{(1)}(r) = \psi_{0s}^{(2)}(r) = A_s^- \psi_{1s}^{(2)}(r), \quad (3.20)$$

lässt sich der  $p$ -Wellen-Grundzustand angeben mit

$$\psi_{0p}^{(1)}(r) = \frac{1 + \delta}{2\sqrt{2}} e^{-r(\frac{1}{2}-\delta)} (1 - e^{-\delta r})^2. \quad (3.21)$$

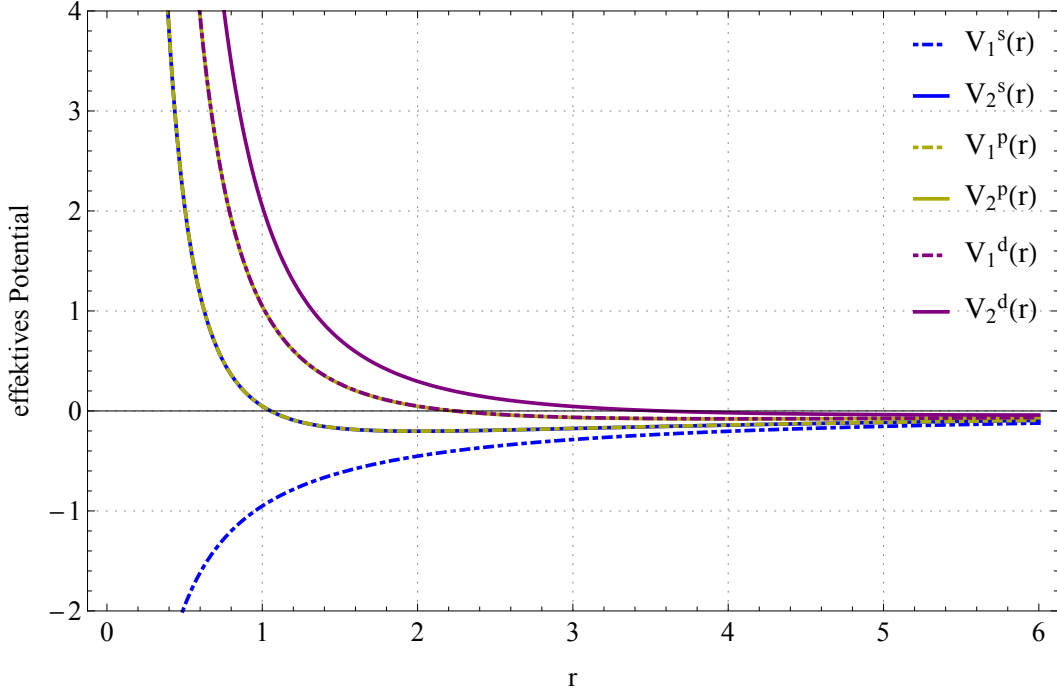
Daraus werden Partner  $V_2^p(r)$  und Superpotential  $W_p(r)$  zu  $V_1^p(r)$  bestimmt zu

$$V_2^p(r) = V_1^p(r) + \frac{2\delta^2 e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \quad \text{und} \quad W_p(r) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1 - e^{-\delta r})(-2 - \delta) + 2\delta}{1 - e^{-\delta r}}. \quad (3.22)$$

Auch hier verschwindet das Superpotential im Unendlichen, und die SUSY ist exakt.

Durch die erneute Identifikation des  $d$ -Wellen-Grundzustands  $\psi_{0d}^{(1)}(r)$  mit dem Grundzustand des  $p$ -Partners kann so auch der  $d$ -Partner bestimmt werden. [16] Er ergibt sich wieder durch Anwendung der Leiteroperatoren aus

$$\psi_{0d}^{(1)}(r) = \psi_{0p}^{(2)}(r) = A_p^- \psi_{1p}^{(1)}(r) \stackrel{(3.20)}{=} A_p^- \psi_{1s}^{(2)}(r) = A_p^- A_s^- 1 - \psi_{2s}^{(1)}(r). \quad (3.23)$$



**Abbildung 3.3:** Die effektiven Potentiale  $V_1^\ell(r)$  für  $\ell = 0, 1, 2$  sowie ihre SUSY-Partner  $V_2^\ell(r)$ .

Die Grundzustandswellenfunktion lautet dann

$$\psi_{0d}^{(1)}(r) = \frac{2 + 9\delta + 9\delta^2}{36} e^{-\frac{r}{6}(2-9\delta)} (1 - e^{-r\delta})^3. \quad (3.24)$$

Daraus folgt der Partner  $V_2^d(r)$  mit

$$V_2^d(r) = V_1^d(r) + \frac{3\delta^2 e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2}. \quad (3.25)$$

In Abbildung 3.3 sind die auf diese Weise generierten Partner, sowie die effektiven Potentiale aufgetragen.

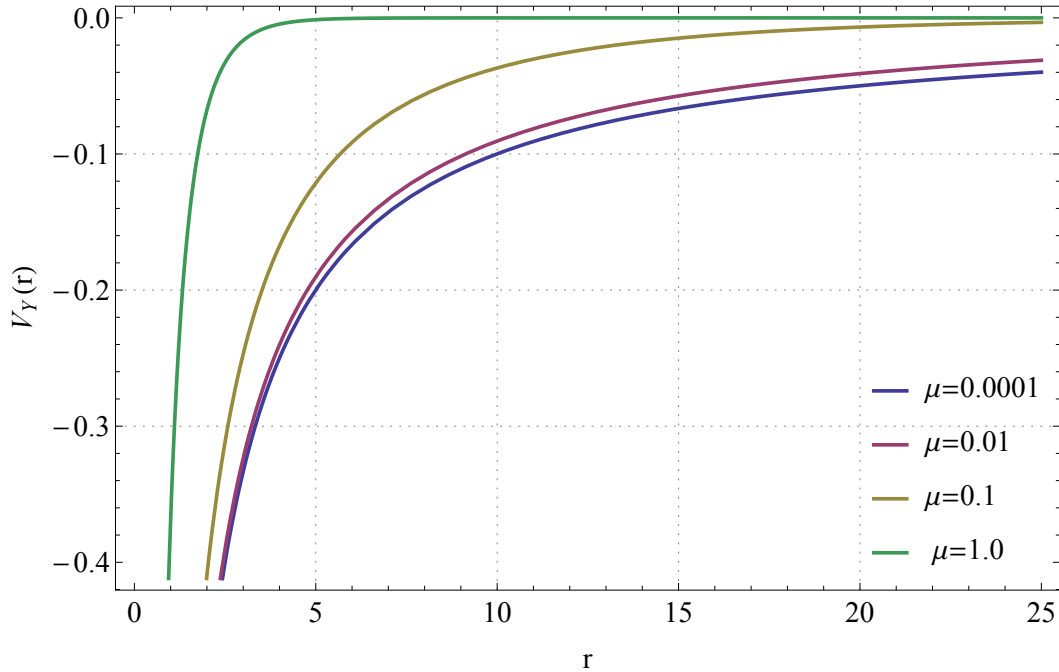
### 3.4 Yukawa-Potential

Das Yukawa-Potential

$$V_Y(r) = -\frac{V_0 e^{-\mu r}}{r}. \quad (3.26)$$

kommt dem Hulthén-Potential sehr nahe, fällt jedoch bei gleicher Abschirmung  $\mu$  schneller ab, und besitzt dementsprechend weniger gebundene Zustände als das Hulthén-Potential. Aufgrund der hohen Ähnlichkeit lässt sich das Hulthén-Potential jedoch nutzen, um das Yukawa-Potential zu approximieren, oder als Ausgangspunkt für Störungs- und Variationsrechnungen zu verwenden. [12]

Da das Potential in vielen Bereichen der Physik eine Anwendung findet, jedoch nicht



**Abbildung 3.4:** Das Yukawa-Potential  $V_Y(r)$  mit unterschiedlichen Werten von  $\mu$ , mit  $V_0 = 1, 0$ .

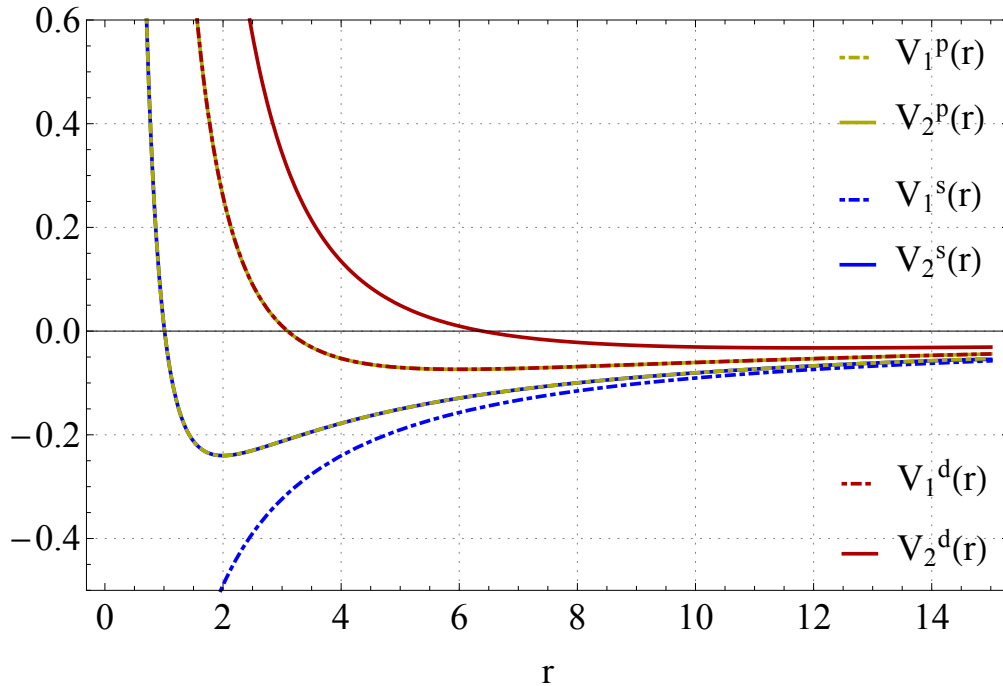
exakt lösbar ist, sind gute Approximationsmethoden zur Lösung der Schrödingergleichung wichtig. Neben der numerischen Lösung stehen hier als analytische Lösungsverfahren vor allem logarithmische Störungstheorie und Variationsmethoden im Vordergrund, auch die  $1/N$ -Entwicklung ist eine wertvolle Methode zur Generation der Energieeigenwerte. [7]

Die SUSY-Partner des effektiven Potentials ergeben sich aus den numerisch berechneten Grundzustandswellenfunktionen. Hierzu wurde das Numerov-Verfahren<sup>6</sup> angewandt. Aus diesen ergibt sich das Superpotential

$$W(r) \propto \frac{\psi'_0(r)}{\psi_0(r)}.$$

Dieses reagiert jedoch extrem empfindlich auf potentielle Nulldurchgänge, bzw. Abweichungen im Bereich  $\psi(r) \rightarrow 0$  reagiert, daher muss die Wellenfunktion mit sehr hoher Genauigkeit vorliegen. Die erhaltenen Partner für  $s$ -,  $p$ - und  $d$ -Wellen sind für  $\mu = 0,01$  in Abbildung 3.5 eingetragen. Im Bereich  $r > 18$  kommt es zur Divergenz des  $s$ -Partners, die auch durch Erhöhung der Genauigkeit der Iterationsschritte nicht behoben werden konnte.

<sup>6</sup>siehe dazu Anhang B



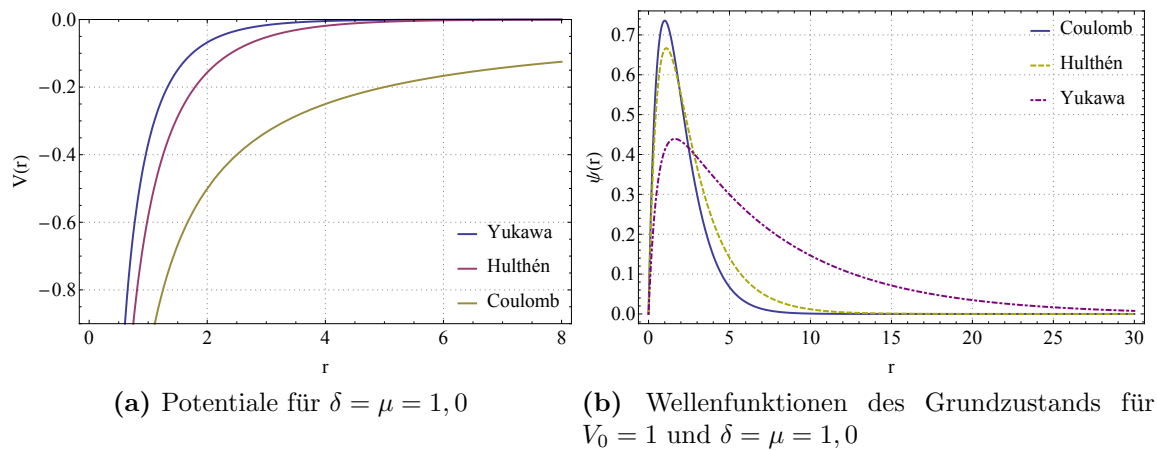
**Abbildung 3.5:** Das Yukawa-Potential und seine Partner für  $\ell = 0, 1, 2$  für  $\mu = 0, 01$  und  $V_0 = 1, 0$ .

### 3.5 Anwendung

Abgeschirmte Coulomb-Potentiale wie das Hulthén- und das Yukawa-Potential werden als kurzreichweitige attraktive Zentralpotentiale in vielen Bereichen der Physik verwendet. In Abbildung 3.6 lassen sich die Reichweiten von Hulthén-, Yukawa- und Coulomb-Potential, sowie die Lokalisation ihrer Wellenfunktionen miteinander vergleichen. In der Atomphysik können abgeschirmte Coulomb-Potentiale elektronische Zustände beschreiben, die vom Kernpotential durch innere Elektronen abgeschirmt werden, in der Festkörperphysik gibt das Debye-Hückel-Potential, das dem Yukawa-Potential entspricht, das elektrostatische Potential in einer Elektrolytlösung an, in der ein Ion sich im abgeschirmten elektrischen Feld der umgebenden Ionen bewegt. [19]

In der Kernphysik ist das Yukawa-Potential eng mit der Vorhersage des Pions durch Hideki Yukawa verknüpft. [23] Aus der feldtheoretischen Betrachtung der Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen, bei denen ein Meson ausgetauscht wird, lässt es sich direkt aus der niedrigsten störungstheoretischen Ordnung der Kopplung zwischen Nukleonen- und Mesonenfeld herleiten. Da das Meson eine nichtverschwindende Ruhemasse hat, ist die Wechselwirkung trotz stärkerer Kopplung kurzreichweitiger als die elektromagnetische. Die Abschirmung wird in diesem Fall mit der Masse  $m$  des Austauschteilchens identifiziert, die Potentialstärke mit der Kopplungskonstanten  $g$  des Kraftfeldes. [23]

Sowohl Hulthén- als auch Yukawa-Potential werden in der Kernphysik daher als phänomenologische Kernpotentiale für die Untersuchung von Zweinukleonenproblemen



**Abbildung 3.6:** Direkter Vergleich der Reichweite von Coulomb-, Hulthén- und Yukawa-Potential.

verwendet, speziell zur Beschreibung der gebundenen Zustände des Deuterons. [5]

Was die beiden Potentiale jedoch nicht wiedergeben können, ist das Hard-Core-Modell, das darauf aufbaut, dass die Nukleonen im Kern nicht am gleichen Ort lokalisiert sind, wodurch für kleinste Abstände  $r$  eine repulsive Wirkung des Potentials gegeben sein muss.

Mittels Supersymmetrie lassen sich jedoch Potentiale generieren, die diese Barriere besitzen, deren Energien jedoch mit den Energien der ursprünglichen Kernpotentiale übereinstimmen: die Partnerpotentiale von Yukawa-/Hulthén-Potential können als phänomenologische Kernpotentiale verwendet werden, um die Hard-core-Eigenschaft für das Deuteron einzubeziehen. [15] Dabei ist sowohl das kurzreichweitige attraktive Potential, als auch der repulsive harte Kern durch den Partner gegeben.

---

## 4 Supersymmetrische $1/N$ -Entwicklung

### 4.1 Verschobene $1/N$ -Entwicklung

Hinter der  $1/N$ -Entwicklung steckt das grundlegende Konzept, dass das Potential hoch angeregter Zustände (v.a. mit maximalem Drehimpuls  $\ell = n - 1 \gg 1$ ) bei  $r = r_0$  ein Minimum hat, in dem das Potential durch einen harmonischen Oszillator angenähert werden kann. In der nullten Approximation ist die Energie gegeben durch  $E = V(r_0)$ , was dem Fall eines klassischen Teilchens entspricht, das in der Potentialmulde ruht. [21] Die höheren Approximationsterme werden als Störung betrachtet, wobei die reziproke Raumdimension  $1/N$  bzw. der Parameter  $1/k$ , mit  $k = N + 2\ell$ , den Störungsparameter darstellt.

Ausgangspunkt ist das verallgemeinerte  $N$ -dimensionale sphärisch symmetrische Potential  $V(r)$  im festen Zustand  $n, \ell$ . Dabei wird  $N$  als groß angenommen. Die Parameter  $N$  und  $\ell$  sind in der Schrödingergleichung fest über  $k = N + 2\ell$  verknüpft, Zustände werden durch die radiale Quantenzahl  $n_r = n - 1 - \ell$  und den Parameter  $k$  charakterisiert.

Bei der verschobenen  $1/N$ -Entwicklung wird eine zusätzliche Verschiebung  $\bar{k} = k - a$  vorgenommen, die die Konvergenz der Entwicklung deutlich verbessert [8], dabei wird die Schrödingergleichung umgeschrieben in

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \bar{k}^2 \left( \frac{\left(1 - \frac{1-a}{k}\right) \left(1 - \frac{3-a}{k}\right)}{8r^2} + \frac{V(r)}{Q} \right) \right] \psi(r) = E\psi(r), \quad (4.1)$$

und die Entwicklung nach  $\bar{k}$  durchgeführt.

Die weitere Vorgehensweise basiert im Wesentlichen auf der Entwicklung und Umformung des effektiven Potentials in Potenzen des Entwicklungsparameters  $1/\bar{k}$ , so dass es in die Form eines gestörten harmonischen Oszillators gebracht wird. Mit diesem kann eine Rayleigh-Schrödinger-Störungsrechnung durchgeführt werden. Der aus der  $1/N$ -Entwicklung erhaltene Wert der Energie bis zur zweiten Ordnung ist gegeben durch

$$E^{(2)} = \frac{\bar{k}}{r_0^2} \left( \left( \frac{\bar{k}}{8} + \frac{r_0^2 \bar{k} V(r_0)}{Q} \right) + \frac{\Gamma_1}{\bar{k}} + \frac{\Gamma_2}{\bar{k}^2} \right), \quad (4.2)$$

und die Wellenfunktionen erhalten bei der Entwicklung bis zur zweiten Potenz  $1/\bar{k}^2$  schließlich die Form

$$\psi_{n\ell}^{(1)}(r) = e^{-\alpha_{n\ell}(r-\beta_{n\ell})^2} \cdot \sum_{i=-15}^{15} a_i r^i. \quad (4.3)$$

Die Herleitung dieser Terme, sowie die Werte der Konstanten  $\Gamma_1, \Gamma_2$  und  $r_0$  können im Anhang (A) nachgeschlagen werden. Die Koeffizienten der Wellenfunktion ergeben sich aus der Lösung der Matrixelemente (A.33 - A.36).

## 4.2 Verbesserung der $1/N$ -Entwicklung durch SUSY QM

Die Verbesserung der  $1/N$ -Entwicklung durch die SUSY QM ergibt sich daraus, dass der Entwicklungsparameter  $k$  durch den Übergang zum Partnerpotential erhöht werden kann, wodurch sich die Konvergenz der Entwicklung deutlich verbessert. Der Partner des effektiven Potentials ist gegeben durch

$$V_2(r) = V_1(r) + 2\frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'(r) = V_1(r) - \frac{\hbar}{m} \frac{d}{dr} \left( \frac{\psi_0^{(1)'}(r)}{\psi_0^{(1)}(r)} \right). \quad (4.4)$$

Für  $r \rightarrow 0$  verhält sich die Grundzustandswellenfunktion wie  $\psi_0^{(1)}(r) \propto r^{\frac{k-1}{2}}$ , [6] woraus der allgemeine Ansatz der Wellenfunktion

$$\psi_0^{(1)}(r) = r^{\frac{k-1}{2}} \Phi_0(r), \quad \text{mit} \quad \Phi_0(r \rightarrow 0) < \infty \quad (4.5)$$

resultiert. Mit Gleichung (2.28) folgt der Partner zu

$$V_2(r) = \frac{\hbar^2(k+1)(k-1)}{8mr^2} + V(r) - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dr} \left( \frac{\Phi_0'(r)}{\Phi_0(r)} \right). \quad (4.6)$$

Durch die Einführung des Parameters  $k' = k + 2$  erlangt das Partnerpotential  $V_2$  die Form eines effektiven Potentials mit erhöhter Drehimpulsbarriere:

$$V_2(r) = \frac{\hbar^2(k'-1)(k'-3)}{8mr^2} + V(r) - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dr} \left( \frac{\Phi_0'(r)}{\Phi_0(r)} \right). \quad (4.7)$$

Die Transformation von  $V_1(r)$  zu seinem Partner zeichnet sich somit dadurch aus, dass die Knotenzahl  $n_r = n - \ell - 1$  um einen Knoten reduziert und die Quantenzahl  $k$  um 2 erhöht wird. Die Leiteroperatoren vermitteln damit Übergänge zwischen  $n_r, k$  und  $n_r - 1, k + 2$ . Die Transformation von  $V_1(r)$  zu  $V_2(r)$  lässt sich als Übergang zwischen den Energieniveaus  $(n, \ell)$  und  $(n - 1, \ell)$  unter Erhöhung der Raumdimension  $N$  zu  $N' = N + 2$ , oder den Übergang zwischen den Niveaus  $(n, \ell)$  und  $(n, \ell + 1)$  bei gleicher Raumdimension  $N$  interpretieren. [6]

Die  $1/N$ -Entwicklung kann somit statt mit dem Potential  $V_1(r)$  äquivalent mit dem SUSY-Partner  $V_2(r)$  durchgeführt werden, wobei mit dem Zustand  $n_r - 1, k'$  gearbeitet wird um die Energie des entsprechenden Zustands  $n_r, k$  zu erhalten. Die Wellenfunktionen lässt sich durch den Absteigeoperator generieren.

## 4.3 SUSY- $1/N$ -Entwicklung des Hulthén-Potentials

Unter Nutzung der in Abschnitt 3 generierten Grundzustandswellenfunktionen kann die supersymmetrische  $1/N$ -Entwicklung vorgenommen werden. Aus diesen wird mit (4.7) der SUSY-Partner generiert, mit dem nach dem in Abschnitt A erläuterten Schema die  $1/N$ -Entwicklung durchgeführt wird. Die Ergebnisse der Entwicklung in 2. Ordnung



in  $1/k'$ , sowie die relative Abweichung zum exakten, bzw. numerisch ermittelten Wert<sup>7</sup> sind für einige Werte von  $\delta$  in Tabelle 4.1 aufgeführt.<sup>8</sup>

Die durch die Entwicklung mit und ohne SUSY generierten Wellenfunktionen sind in Abbildung 4.1 für  $s$ - und  $p$ -Wellen dargestellt.<sup>9</sup> Bei der mittels SUSY-1/ $N$ -Entwicklung erhaltenen Wellenfunktionen wurde der Aufsteigeoperator  $A^+$  auf die erhaltene Wellenfunktion des Partners angewandt. Dabei lassen sich in einiger Entfernung vom Ursprung sehr gute Ergebnisse erzielen. Bei Annäherung an den Ursprung divergiert die Wellenfunktion der S-1/ $N$ -Entwicklung jedoch stark. Da die 1/ $N$ -Entwicklung hier allgemein sehr schnell divergiert, kann das Verhalten am Ursprung durch die Entwicklung nicht gut wiedergegeben werden. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass das entwickelte Potential keine unendliche Potentialbarriere an  $r = 0$  besitzt, so dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit gerade bei Zuständen mit geringem  $k$  am Ursprung nicht verschwindet. [8]

Bei der Transformation durch den Aufsteiger wird dieses fehlerhafte Verhalten am Ursprung durch die Ableitung in (2.4) wesentlich verstärkt, so dass hier eine starke Divergenz auftritt. Im Bereich größerer  $r$  wird durch die SUSY jedoch der wesentliche Erfolg erreicht, die entwickelten Wellen so zu verschieben, dass die Extrema der entwickelten Wellenfunktionen mit den numerischen/exakten Extrema übereinstimmen.

	$\delta$	$-E$	$-E_{1/N}$	$\Delta_{1/N} / 10^{-4}$	$-E_{S-1/N}$	$\Delta_{S-1/N} / 10^{-4}$
2s	0.01	0.1200500	0.1200500	0.000	0.1200500	0.000
	0.1	0.0800000	0.0800046	0.569	0.0800000	0.000
	0.2	0.0450000	0.0450856	19.019	0.0449991	0.200
3s	0.01	0.0506681	0.0506681	0.000	0.0506681	0.000
	0.1	0.0168056	0.0169274	1.218	0.0168194	0.138
	0.05	0.0333681	0.0333746	1.953	0.0333687	0.180
3p	0.01	0.0506597	0.0506597	0.006	0.0506597	0.000
	0.02	0.0459723	0.0459724	0.013	0.0459723	0.000
	0.05	0.0331645	0.0331652	0.205	0.0331631	0.422
4s	0.01	0.0264500	0.0264501	0.027	0.0264500	0.000
	0.02	0.0220500	0.0220512	0.532	0.0220503	0.136
	0.05	0.0112500	0.0113035	47.591	0.0112642	12.622
4p	0.01	0.0264417	0.0264417	0.003	0.0264417	0.000
	0.02	0.0220170	0.0220174	0.164	0.0220170	0.000
	0.05	0.0110582	0.0110725	12.949	0.0110573	0.814
4d	0.01	0.0264250	0.0264251	0.025	0.0264250	0.000
	0.02	0.0219508	0.0219510	0.113	0.0219507	0.046
	0.05	0.0106661	0.0106690	2.699	0.0106559	9.563

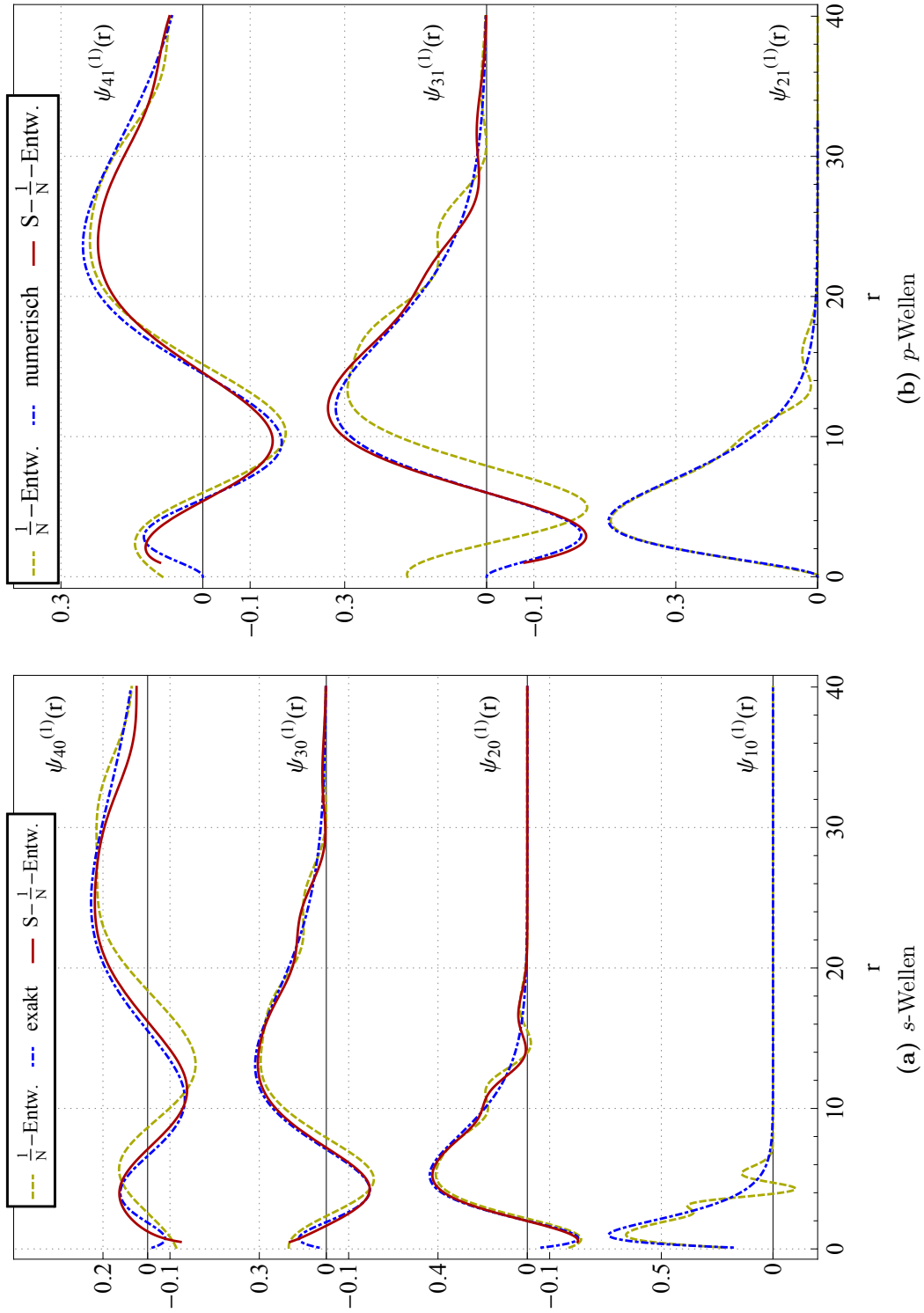
**Tabelle 4.1:** Mittels 1/ $N$ -Entwicklung in 2. Ordnung erhaltene Energieeigenwerte des Hulthén-Potentials, mit relativem Fehler zum exakten/numerischen Wert für unterschiedliche Werte von  $\delta$ . In Tabelle C.1 sind die kompletten Ergebnisse der durchgeführten Entwicklungen dargestellt.

---

<sup>7</sup>Die Werte wurden mit dem Numerov-Algorithmus erhalten, siehe dazu Anhang B

<sup>8</sup>Die gesamten Ergebnisse sind in Tabelle C.1 im Anhang B aufgeführt.

<sup>9</sup> Die Wellenfunktionen der Zustände  $1s - 4f$  des Hulthén-Potentials, sowie die Zustände  $1s - 3d$  des Partners befinden sich im Anhang B.



**Abbildung 4.1:** Direkt und durch Anwendung des Absteigers  $A$  mittels  $1/N$ -Entwicklung erhaltene Wellenfunktionen des Hulthén-Potentials im Vergleich mit den exakten/numerischen Funktionen.

## 4.4 SUSY-1/ $N$ -Entwicklung des Yukawa-Potentials

Da das Yukawa-Potential nicht exakt lösbar ist, muss die Generation des Partnerpotentials aus der numerisch vorliegenden Grundzustandswellenfunktionen  $\psi_0^{(1)}$  erfolgen, wofür hier der Numerov-Algorithmus verwendet wurde. Mit dem numerischen Partner kann schließlich die 1/ $N$ -Entwicklung vorgenommen werden.

Bei der supersymmetrischen 1/ $N$ -Entwicklung bis  $\mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$  wird das Partnerpotential bis zur siebten Ordnung abgeleitet. Dies erfordert, dass das Partnerpotential keine Divergenzen aufweist. Die erforderliche Genauigkeit konnte durch das Numerov-Verfahren nicht erreicht werden, da dieses nur mit einer Näherung der zweiten Ableitung bis zur vierten Ordnung, und nur mit begrenzter Auflösung des Eigenwertproblems arbeitet. Diese leichten Abweichungen im Bereich  $\psi/r) \rightarrow 0$  führen dabei stets zu einer leichten Divergenz des Partners. Daher wird auf die Entwicklung bis zur 2. Ordnung an dieser Stelle verzichtet.

Da die 1/ $N$ -Entwicklung jedoch in vielen Fällen die Energie schon in 0. Ordnung gut approximiert, lässt sich der Einfluss der SUSY QM auf die 1/ $N$ -Entwicklung des Yukawa-Potentials in dieser Ordnung überprüfen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 verzeichnet.

	$\mu$	$-E$	$-E_{1/N}$	$\Delta_{1/N} / 10^{-4}$	$-E_{\mathbf{s}-1/N}$	$\Delta_{\mathbf{s}-1/N} / 10^{-4}$
2s	0.01	0.1152933	0.1153415	4.185	0.1152935	0.022
	0.02	0.1061483	0.1063336	17.454	0.1061493	0.096
	0.05	0.0817712	0.0827778	123.101	0.0817894	2.231
3s	0.01	0.0462005	0.0463352	29.164	0.0462317	6.760
	0.02	0.0380446	0.0385088	122.021	0.0382318	49.210
	0.05	0.0195030	0.0214233	984.622	0.0202740	395.343
3p	0.01	0.0461531	0.0461990	9.947	0.0461533	0.053
	0.02	0.0378524	0.0380185	43.888	0.0378964	11.643
	0.05	0.0185583	0.0192772	387.354	0.0185760	9.551
4s	0.01	0.0223576	0.0226060	111.088	0.0176806	2091.906
	0.02	0.0153826	0.0161826	520.113	0.0151739	135.640
	0.05	0.0030737	0.0051739	6832.878	0.0050517	6435.194
4p	0.01	0.0223132	0.0224392	56.461	0.0222689	19.871
	0.02	0.0152334	0.0156421	268.297	0.0154917	169.586
	0.05	0.0025749	0.0029844	1590.448	0.0029049	1281.714
4d	0.01	0.0222278	0.0222704	19.189	0.0222286	0.358
	0.02	0.0149400	0.0150805	94.086	0.0149433	2.262
	0.05	0.0015331	0.0018468	2046.654	0.0017890	1669.153

**Tabelle 4.2:** Ergebnisse der 1/ $N$ -Entwicklung in 0. Ordnung mit und ohne SUSY, für unterschiedliche Werte von  $\mu$  und  $V_0 = 1.0$ , mit der relativen Abweichung  $\Delta$  vom numerischen Wert  $E$ .

## 4.5 Diskussion

An den Ergebnissen der  $1/N$ -Entwicklung des Hulthén-Potentials in Tabelle C.1 zeigt sich, dass die  $1/N$ -Entwicklung allgemein von Abschirmung, Hauptquantenzahl und Drehimpuls abhängt. Die Einflüsse dieser Größen auf die  $1/N$ -Entwicklung mit und ohne SUSY sollen im Folgenden erörtert werden.

**Die Abschirmung** hat erst bei Annäherung an einen kritischen Wert  $\delta_c$  einen deutlichen Einfluss auf die Qualität der Entwicklung. Diese liefert für geringe Abschirmungen entsprechend gute Ergebnisse. Die mit  $\delta$  steigende Abweichung kommt daher, dass in den Ableitungen des Potentials steigende Potenzen von  $\delta$  auftreten, die direkt in die Entwicklungskoeffizienten des Potentials (Gleichungen (A.17)-(A.22)) einfließen. Für steigende Abschirmung  $\delta$  sollten daher höhere Ordnungen miteinbezogen werden, um die Konvergenz sicherzustellen. Durch die SUSY QM gelingt es jedoch, sich weitaus näher an den kritischen Wert  $\delta_c$  anzunähern, es lässt sich daher eine gute Verbesserung der Entwicklung erzielen. Für  $\delta \rightarrow 0$  werden bereits durch die  $1/N$ -Entwicklung ohne SUSY in 0. Ordnung die exakten Ergebnisse gewonnen. Hier lassen sich auch die Eigenwerte des Coulomb-Potentials stets exakt reproduzieren (siehe Tabelle 4.3).

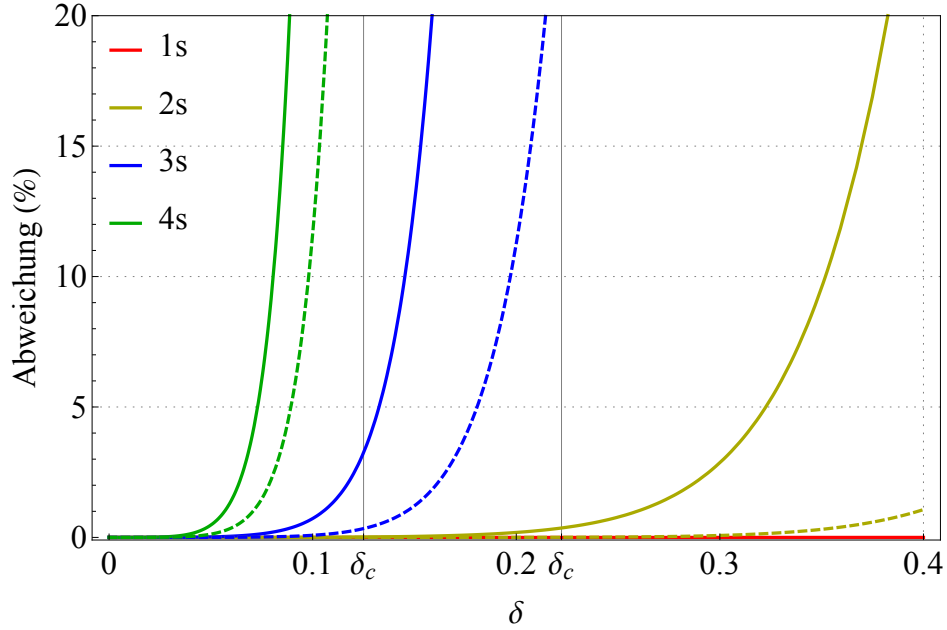
$n$	$-E_{\text{Coulomb}}$	$E_{\text{Hulthén}}$	$E_{\text{Yukawa}}$
1	0.5000000	0.4999500	0.4999000
2	0.1250000	0.1249500	0.1249000
3	0.0555556	0.0555056	0.0554556
4	0.0312500	0.0312000	0.0311501

**Tabelle 4.3:** Energieeigenwerte der ersten vier Zustände von Coulomb-, Hulthén- und Yukawa-Potential, berechnet mittels SUSY- $1/N$ -Entwicklung für  $\delta = \mu = 0,0001$  bzw.  $E_{\text{Coulomb}} = -\frac{1}{n^2}$  [13]. Bei allen Potentials tritt eine Drehimpulsentartung auf.

**Die Hauptquantenzahl** beeinflusst wesentlich den kritischen Wert  $\delta_c$ , der für  $s$ -Wellen nach Gleichung (3.15) durch

$$\delta_c = \frac{2}{n^2}, \quad (4.8)$$

gegeben ist. Wie in Abbildung 4.2 erkennbar, hat die Hauptquantenzahl mit der Einbeziehung dieser Bedingung jedoch keinen direkt negativen Einfluss auf die Qualität der Entwicklung. Mit steigendem  $n$  nähert sich die Entwicklung sogar etwas mehr dem kritischen Wert, Grund dafür ist, dass dem Entwicklungsparameter  $1/\bar{k}$  durch die Verschiebung  $a = 2 - 2(2n + 1)\omega$  eine von  $n$  linear abhängende Abweichung im Nenner hinzugefügt wurde. Da die Verschiebung allerdings nur künstlich in die Gleichung eingebaut wurde, enthalten die Entwicklungskoeffizienten die Hauptquantenzahl im Zähler, so dass die Entwicklung mit zunehmendem  $n$  nicht stark verbessert wird. Mit steigender Hauptquantenzahl rückt zudem der Entwicklungspunkt  $r_0$  immer weiter vom



**Abbildung 4.2:** Prozentuale Abweichung der Energieeigenwerte der  $s$ -Wellen vom exakt berechneten Wert. Durchgezogen:  $1/N$  ohne SUSY, gestrichelt:  $1/N$  mit SUSY. Die kritischen Werte liegen für  $n = 1, 2, 3, 4$  bei  $\delta_c = 2.0, 0.5, 0.222$  und  $0.125$ .

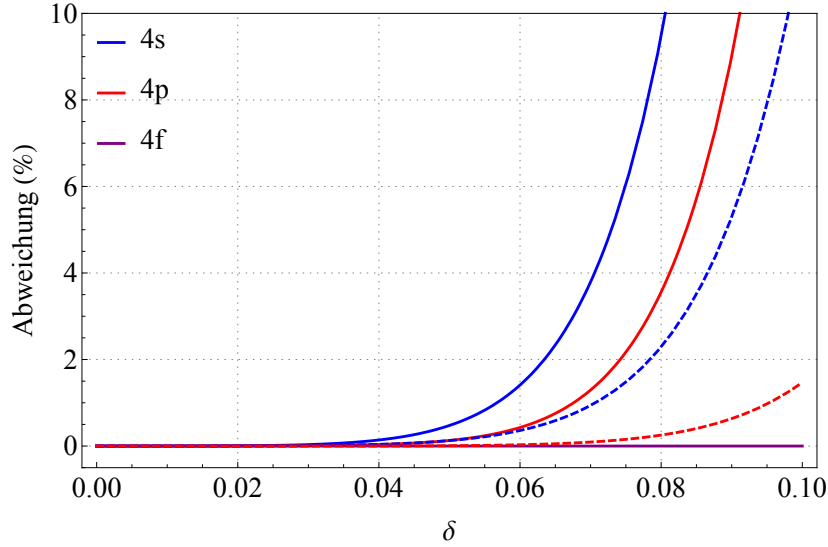
Ursprung weg (vgl. (A.25)), daher erlangen Terme höherer Ordnung einen größeren Einfluss auf das entwickelte Potential.

Mit steigender Hauptquantenzahl wird der Unterschied zwischen der Entwicklung mit und ohne SUSY hier jedoch immer geringer, in der Nähe von  $\delta_c$  tritt eine starke Divergenz auf.

**Der Drehimpuls** fließt linear in den Nenner des Entwicklungsparameters ein, daher nimmt die Konvergenz der Entwicklung, wie in Abbildung 4.3 dargestellt, mit steigendem Drehimpuls zu.

Durch den Übergang zum Partnerpotential wird hier noch eine deutliche Verbesserung erzielt, die sogar die Konvergenz der Entwicklung des Hulthén-Potentials mit nächsthöherem Drehimpuls zu übersteigen vermag. Für die minimale Knotenzahl  $n_r = n - \ell - 1$  werden dabei stets die besten Ergebnisse erzielt, hier kann die Entwicklung jedoch in der Regel bereits ohne SUSY exakte Ergebnisse liefern.

**Die Beurteilung der Wellenfunktionen** erfolgt analog zu den Energieeigenwerten. Hier sind es im Wesentlichen die starken Schwankungen, sowie die Verschiebung der entwickelten Wellenfunktion gegen den exakten Wert, die durch die SUSY behoben werden. Bei Annäherung an den Ursprung tritt jedoch erhöhte Divergenz auf, obwohl die Wellenfunktionen des Partners ein etwas besseres Verhalten am Ursprung aufweisen (siehe Abbildungen C.1b - C.3b). Dies ist durch die Transformation  $\psi_{n_r}^{(1)} = A^+ \psi_{n_r-1}^{(2)}(r)$  gegeben, durch die die leichte Abweichung am Ursprung verstärkt wird.



**Abbildung 4.3:** Prozentuale Abweichung der Energieeigenwerte der  $s$ -,  $p$ - und  $f$ -Wellen für  $n = 4$  zum numerischen Wert. Durchgezogen:  $1/N$  ohne SUSY, gestrichelt:  $1/N$  mit SUSY.

**Die Zunahme der Konvergenz** in niedriger Ordnung macht sich im Vergleich der Energieeigenwerte der Entwicklung mit und ohne SUSY mit den exakt/numerischen Werten bemerkbar. Bei einem Blick in Tabelle C.1 lässt sich feststellen, dass bereits die 0. Ordnung den Energieeigenwert meist besser approximiert, als die 2. Ordnung ohne SUSY. Da die Generation der Energieeigenwerte in dieser Ordnung mit extrem wenig Aufwand verbunden ist, zeigt sich hier die volle Attraktivität dieser Näherungsmethode.

**Abweichungen** von den bisher diskutierten Tendenzen treten jedoch für bestimmte Zustände auf. Die Werte der  $3p$ - und  $4d$ -Wellen, die mit SUSY erhalten wurden, weisen eine höhere Abweichung vom numerischen Wert auf, als die ohne SUSY. Diese Werte wurden daher mit den direkten numerisch berechneten Werten des Partners verglichen (s. Tabelle 4.4), wobei sich herausstellte, dass für diese Zustände die Eigenwerte von Potential und Partner voneinander abweichen. Da diese Tendenz bei der Entwicklung des Yukawa-Potentials nicht auftritt (s. Tabelle 4.2), liegt dies vermutlich daran, dass die mittels der SUSY-Kette genäherten Partnerpotentiale im Bereich des Entwicklungspunkts  $r_0$  leicht vom exakten Partner abweichen, da dieser mit steigender Hauptquantenzahl weiter vom Ursprung wegrückt.

		$-E_{\text{num.}, V_1}$	$-E_{\text{num.}, V_2}$	$-E_{1/N}$	$-E_{S-1/N}$
<b>3p</b>	0.02	0.0459723	0.0459723	0.0459724	0.0459723
	0.05	0.0331645	0.0331631	0.0331652	0.0331631
	0.1	0.0160534	0.0160314	0.0160677	0.0160314
<b>4d</b>	0.02	0.0219509	0.0219507	0.0219510	0.0219507
	0.05	0.0106663	0.0106559	0.0106690	0.0106559
	0.1	0.0005356	0.0004988	0.0002332	0.0003540

**Tabelle 4.4:** Abweichungen der Energien von  $V_1(r)$  und  $V_2(r)$ .

---

## 5 Fazit

Die verschobene  $1/N$ -Entwicklung liefert für zentralsymmetrische Potentiale sehr gute Ergebnisse. Mit dieser Methode lassen sich bis zu einer gewissen Abschirmung  $\delta_c$ , und zu einer gewissen Knotenzahl  $n_r$  in 2. Ordnung in  $1/\bar{k}$  exakte Ergebnisse erzielen. In dieser Arbeit wurde festgestellt, dass sich die Entwicklung durch den Formalismus der supersymmetrischen Quantenmechanik weiter verbessern lässt, wobei dies vor allem für Zustände mit hoher Knotenzahl oder großer Abschirmung wertvoll ist, da die  $1/N$ -Entwicklung ohne SUSY in diesen Fällen deutlich stärker abweicht als mit SUSY. Wie sich zudem zeigte, konvergiert die Entwicklung durch SUSY deutlich schneller, und es lässt sich in vielen Fällen bereits durch die 0. Ordnung eine bessere Approximation des Energieeigenwerts finden, als durch die 2. Ordnung der Entwicklung ohne SUSY.

Die Entwicklung der Wellenfunktionen hingegen basiert auf der Lösung einer Reihe komplizierter Matrixelemente, und weist bei der Entwicklung bis zur 2. Ordnung dennoch nur für geringe Knotenzahlen und im Bereich  $r \gg 0$  eine gute Konvergenz auf. Die SUSY bietet zwar in genügend großem Abstand eine Verbesserung, doch im Bereich des Ursprung kommt es hier zu noch stärkeren Divergenzen. Daher sollten höhere Ordnungen in die Entwicklung einbezogen werden, wobei diese jedoch mit einem wachsenden Rechenaufwand verbunden sind.

Da für das Hulthén-Potential die exakte Grundzustandsfunktion der  $s$ -Wellen bekannt ist, kann auf diese zur Entwicklung des Partners zurückgegriffen werden, wodurch sich stets sehr gute Werte ergaben. Auch für die Zustände mit nichtverschwindendem Drehimpuls wurden, trotz Näherung der Grundzustandswellenfunktion durch die SUSY-Kette, in den meisten Fällen verbesserte Werte erhalten. Durch das Vorliegen eines analytischen Ausdrucks für den Partner ist der Aufwand hier bei hoher Konvergenz der Energieeigenwerte sehr gering. Bei Vorliegen eines Potentials, deren Grundzustand nicht exakt bekannt ist, und dessen Partner numerisch berechnet werden muss, ist der Aufwand der SUSY- $1/N$ -Entwicklung allerdings recht hoch. Dennoch lässt sich durch die SUSY eine Verbesserung erzielen, da die Approximation der Entwicklung oftmals bereits in 0. oder 1. Ordnung ausreichend ist, und für diese Ordnungen noch gut auf das numerische Partnerpotential zurückgegriffen werden kann.

Die SUSY QM stellt insgesamt eine gute Erweiterung der  $1/N$ -Entwicklung dar, wobei auf diese vor allem dann zurückgegriffen werden sollte, wenn die Entwicklung ohne SUSY keine guten Ergebnisse mehr liefern kann.

---

# Anhang

## A $1/N$ -Entwicklung

Die Methode der verschobenen  $1/N$ -Entwicklung wurde 1984 von Imbo und Sukhatme entwickelt, womit ihnen eine erhebliche Verbesserung der Approximation gelang. Dabei wird der Parameter  $k$  künstlich um  $a$  verschoben, so dass die eigentliche Entwicklung mit  $\bar{k} = k - a$  durchgeführt wird. [8] Im Folgenden wird diese Methode ausführlich erläutert.

Die radiale Schrödingergleichung

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2(k-1)(k-3)}{8mr^2} + V(r) \right) \psi_{n_r k}(r) = E_{n_r k} \psi_{n_r k}(r). \quad (\text{A.1})$$

lässt sich unter Einführung des Parameters  $Q$  umschreiben zu

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \bar{k}^2 \left( \frac{(1 - \frac{1-a}{k})(1 - \frac{3-a}{k})}{8r^2} + \frac{V(r)}{Q} \right) \right] \psi(r) = E\psi(r), \quad (\text{A.2})$$

Der führende Term in  $\bar{k}$  des effektiven Potentials ist gegeben durch [8]

$$V_{\text{eff}}^{(0)}(r) = \frac{1}{8r^2} + \frac{V(r)}{Q}. \quad (\text{A.3})$$

Die weitere Betrachtung soll um das Minimum  $r_0$  von  $V_{\text{eff}}^{(0)}(r)$  stattfinden, für das mit  $V_{\text{eff}}^{(0)'}(r_0) = 0$  gilt

$$\frac{4r_0^3 V'(r_0)}{Q} = 1. \quad (\text{A.4})$$

Aus dieser Gleichung kann für einen gegebenen Wert von  $r_0$  der Wert von  $Q$  bestimmt werden.

Damit kann direkt der führende Energiebeitrag  $E^{(-2)}$  bestimmt werden mit

$$E^{(-2)} = \bar{k}^2 V_{\text{eff}}^{(0)}(r_0) = \frac{\bar{k}^2}{r_0^2} \left( \frac{1}{8} + \frac{r_0^2 V(r_0)}{Q} \right). \quad (\text{A.5})$$

Nun wird die neue Variable  $x = \frac{\sqrt{\bar{k}}}{r_0^2}(r - r_0)$  eingeführt. [8] Die Schrödingergleichung (A.2) erhält damit die Gestalt

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left( \frac{(\bar{k}-1)(\bar{k}-3)}{8 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\bar{k}}}\right)^2} \frac{1}{\bar{k}} + \frac{\bar{k}r_0^2}{Q} V(x) \right) \phi = \frac{r_0^2}{\bar{k}} E \phi. \quad (\text{A.6})$$



Der Zentrifugalterm wird nun um  $x = 0$  entwickelt zu

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{k} - (1-a))(\bar{k} - (3-a))}{8\bar{k} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\bar{k}}}\right)^2} &\doteq \frac{\bar{k} - 2(2-a) + \frac{(1-a)(3-a)}{\bar{k}}}{8} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (i+1) \left(\frac{x}{\sqrt{\bar{k}}}\right)^i \\ &= \left(\frac{\bar{k}}{8} - \frac{2-a}{4} + \frac{(1-a)(3-a)}{8\bar{k}}\right) \left(1 - \frac{2x}{\bar{k}^{1/2}} + \frac{3x^2}{\bar{k}} - \frac{4x^3}{\bar{k}^{3/2}} + \frac{5x^4}{\bar{k}^2} + \mathcal{O}(\bar{k}^{-5/2})\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die Taylorentwicklung des Potentials  $V(r)$  um  $x = 0$  ergibt die Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \left[ \frac{\bar{k}}{8} \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{\bar{k}}} + \frac{3x^2}{\bar{k}} - \dots\right) - \frac{2-a}{4} \left(1 - \dots\right) + \frac{(1-a)(3-a)}{8\bar{k}} \left(1 - \dots\right) \right. \\ \left. + \frac{r_0^2 \bar{k}}{Q} \left( V(r_0) + \frac{V''(r_0)r_0^2 x^2}{2\bar{k}} + \frac{V'''(r_0)r_0^3 x^3}{6\bar{k}^{3/2}} + \frac{V^{(4)}(r_0)r_0^4 x^4}{24\bar{k}^{3/2}} + \dots \right) \right] \phi = \frac{r_0^2}{\bar{k}} E \phi, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

wobei für Potential und Zentrifugalterm die Terme aus  $V_{\text{eff}}^{(0)'}(r_0) = 0$  jeweils wegfallen. Die Gleichung hat damit die Form des verschobenen harmonischen Oszillators mit der Störung  $\tilde{V}(x)$ :

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \tilde{V}(x) + \epsilon_0 \right] \phi(x) = \lambda \phi(x). \quad (\text{A.9})$$

Die Störung  $\tilde{V}(x)$  bis zur zweiten Ordnung in  $1/\bar{k}$  hat die Form

$$\tilde{V}(x) = \frac{\epsilon_1 x + \epsilon_3 x^3}{\bar{k}^{1/2}} + \frac{\epsilon_2 x^2 + \epsilon_4 x^4}{\bar{k}} + \frac{\gamma_1 x + \gamma_3 x^3 + \gamma_5 x^5}{\bar{k}^{3/2}} + \frac{\gamma_2 x^2 + \gamma_4 x^4 + \gamma_6 x^6}{\bar{k}^2}. \quad (\text{A.10})$$

Der konstante Term  $\epsilon_0$  beträgt

$$\epsilon_0 = \frac{\bar{k}}{8} - \frac{2-a}{4} + \frac{(1-a)(3-a)}{8\bar{k}} + \frac{r_0^2 V(r_0)}{Q} \bar{k}. \quad (\text{A.11})$$

Die weiteren Parameter ergeben sich aus dem Vergleich mit Gleichung (A.8) zu: [8]

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{r_0^4 V''(r_0)}{Q}}, \quad (\text{A.12}) \quad \gamma_1 = -\frac{(1-a)(3-a)}{4}, \quad (\text{A.17})$$

$$\epsilon_1 = \frac{2-a}{2}, \quad (\text{A.13}) \quad \gamma_2 = \frac{3(1-a)(3-a)}{8}, \quad (\text{A.18})$$

$$\epsilon_2 = -\frac{3(2-a)}{2}, \quad (\text{A.14}) \quad \gamma_3 = 2-a, \quad (\text{A.19})$$

$$\epsilon_3 = -\frac{1}{2} + \frac{r_0^5 V'''(r_0)}{6Q}, \quad (\text{A.15}) \quad \gamma_4 = -\frac{5(2-a)}{4}, \quad (\text{A.20})$$

$$\epsilon_4 = \frac{5}{8} + \frac{r_0^6 V^{(4)}(r_0)}{24Q}, \quad (\text{A.16}) \quad \gamma_5 = -\frac{3}{4} + \frac{r_0^7 V^{(5)}(r_0)}{120Q}, \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma_6 = \frac{7}{8} + \frac{r_0^8 V^{(6)}(r_0)}{720Q}. \quad (\text{A.22})$$

---

Der nächste Beitrag zur Energie hat die Ordnung  $\bar{k}$ . Er ist gegeben durch die in  $x$  quadratischen Terme, damit entspricht die Energie die des verschobenen harmonischen Oszillators mit

$$E^{(-1)} = \frac{\bar{k}}{r_0^2} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{2-a}{4} \right]. \quad (\text{A.23})$$

Aus diesem Term wird der Parameter  $a$  gerade so bestimmt, dass der Beitrag verschwindet. [8] Man erhält

$$a = 2 - 2(2n + 1)\omega. \quad (\text{A.24})$$

Mit den Gleichungen (A.4), (A.12) und (A.24) lässt sich schließlich durch die Lösung von

$$N + 2\ell - 2 + (2n + 1) \sqrt{3 + \frac{r_0 V''(r_0)}{V'(r_0)}} = \sqrt{4r_0^3 V'(r_0)} \quad (\text{A.25})$$

das Minimum  $r_0$  bestimmen.

Mit der Schrödingergleichung in der Form (A.9) wird nun eine einfache Rayleigh-Schrödinger-Störungsrechnung des durch (A.10) gestörten, um  $\epsilon_0$  verschobenen, harmonischen Oszillators durchgeführt. Der Störungsparameter ist  $1/\sqrt{\bar{k}}$ . Da beim harmonischen Oszillator nur die quadratischen Terme des Störungsparameter eingehen, wird die Rechnung bis zur vierten Ordnung durchgeführt, um die in  $1/\bar{k}$  quadratische Korrektur zu erhalten. Die Energie ergibt sich dann aus

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + \lambda_n^{(3)} + \lambda_n^{(4)} + \dots, \quad (\text{A.26})$$

wobei die Koeffizienten  $\lambda_n^{(i)}$  aus der Störungsrechnung generiert werden. Da für die Energiekorrekturen des harmonischen Oszillators die ungeraden Beiträge jeweils verschwinden, verbleibt für die Energie, geordnet nach den Potenzen in  $1/\bar{k}$ :

$$E^{(2)} = \frac{\bar{k}}{r_0^2} \left( \left( \frac{\bar{k}}{8} + \frac{r_0^2 \bar{k} V(r_0)}{Q} \right) + \frac{\Gamma_1}{\bar{k}} + \frac{\Gamma_2}{\bar{k}^2} \right). \quad (\text{A.27})$$

Dabei sind  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  gegeben durch [8]

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & \frac{(1-a)(3-a)}{8} + 3(2n^2 + 2n + 1)\epsilon_4 + (2n + 1)\epsilon_2 \\ & - \frac{1}{\omega} [(30n^2 + 30n + 11)\epsilon_3^2 + 6(2n + 1)\epsilon_3\epsilon_1 + \epsilon_1^2], \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 = & [3\gamma_4 (2n^2 + 2n + 1) + 5\gamma_6 (4n^3 + 6n^2 + 8n + 3) + \gamma_2(2n + 1)] \\
& - \frac{1}{\omega} [2\gamma_1\epsilon_1 + (30\gamma_5\epsilon_1 + 12\epsilon_4\epsilon_2) (2n^2 + 2n + 1) + 2\gamma_3 (30n^2 + 30n + 11) \epsilon_3 10\gamma_5\epsilon_3 \times \\
& (28n^3 + 42n^2 + 40n + 13) + 2 (34n^3 + 51n^2 + 59n + 21) \epsilon_4^2 + 6(\gamma_3\epsilon_1 + \gamma_1\epsilon_3 + \epsilon_2^2)(2n + 1)] \\
& + \frac{1}{\omega^2} [8 (78n^2 + 78n + 31) \epsilon_3\epsilon_4\epsilon_1 + 8 (30n^2 + 30n + 11) \epsilon_2\epsilon_3^2 + 12 (150n^3 + 225n^2 + 189n \\
& + 57) \epsilon_3^2\epsilon_4 + 24(2n + 1)\epsilon_4\epsilon_1^2 + 36(2n + 1)\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_1 + 4\epsilon_2\epsilon_1^2] - \frac{1}{\omega^3} [48 (30n^2 + 30n + 11) \times \\
& \epsilon_1\epsilon_3^3 + 30 (94n^3 + 141n^2 + 109n + 31) \epsilon_3^4 + 108(2n + 1)\epsilon_1^2\epsilon_3^2 + 8\epsilon_1^3\epsilon_3]. \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

Die Wellenfunktionen werden durch die Störungsrechnung des harmonischen Oszillators durch (A.10) bis zur vierten Ordnung in  $1/\sqrt{k}$  für  $x = \frac{\sqrt{k}}{r_0} (r - r_0)$  gewonnen. Die Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators, in der Dirac-Notation gegeben durch  $|n\rangle$ , lauten in Ortsdarstellung [13]

$$\chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(x\sqrt{\omega}) e^{-\frac{\omega}{2}x^2}. \quad (\text{A.30})$$

Die Wellenfunktion wird in Potenzen von  $1/\sqrt{k}$  entwickelt:

$$\psi_n(x) = \psi_n^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{k}}\psi_n^{(1)}(x) + \frac{1}{k}\psi_n^{(2)}(x) + \frac{1}{\sqrt{k}^3}\psi_n^{(3)}(x) + \frac{1}{k^2}\psi_n^{(4)}(x). \quad (\text{A.31})$$

Mit der ungestörten Wellenfunktion

$$\psi_n^{(0)}(x) = \chi_n(x) \quad (\text{A.32})$$

ergibt die Störungsrechnung:

$$\psi_n^{(1)}(x) = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V_1|n\rangle}{\omega(n-m)} \psi_m^{(0)}(x), \quad (\text{A.33})$$

$$\psi_n^{(2)}(x) = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V_2|n\rangle + \langle m|V_1|n^{(0)}\rangle}{\omega(n-m)} \psi_m^{(0)}(x), \quad (\text{A.34})$$

$$\psi_n^{(3)}(x) = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V_3|n\rangle + \langle m|V_2|n^{(0)}\rangle + \langle m|V_1|n^{(2)}\rangle - \lambda^{(2)}\langle m|n^{(0)}\rangle}{\omega(n-m)} \psi_m^{(0)}(x), \quad (\text{A.35})$$

$$\psi_n^{(4)}(x) = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m|V_4|n\rangle + \langle m|V_3|n^{(0)}\rangle + \langle m|V_2|n^{(2)}\rangle + \langle m|V_1|n^{(3)}\rangle - \lambda^{(2)}\langle m|n^{(2)}\rangle}{\omega(n-m)} \psi_m^{(0)}(x). \quad (\text{A.36})$$

Dabei sind die  $V_i(x)$  wie in Gleichung (A.10) je nach ihrer Ordnung  $\bar{k}^{i/2}$  zu wählen.

---

## B Numerische Lösung der Schrödingergleichung

Für die Lösung der stationären radialen Schrödingergleichung wurde der Numerov-Algorithmus in Kombination mit der Shooting-Methode verwendet. Der Numerov-Algorithmus kann für die Lösung von Randwertproblemen vom Typ  $y''(x) + k(x)y(x) = 0$  verwendet werden. Die Shooting-Methode dient zur Lösung des Eigenwertproblems. [17]

Dazu wird die Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r)\right)\psi(r) = E\psi(r) \quad (\text{B.1})$$

durch das Diskretisierungsintervall  $h$  diskretisiert zu

$$-\frac{1}{2}\psi_i'' + k_i\psi_i = 0, \quad \text{mit} \quad r_i = i \cdot h \quad \text{und} \quad k_i = 2(E - V_{\text{eff},i}), \quad \text{wobei} \quad i = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{B.2})$$

Der Definitionsbereich der Schrödingergleichung liegt bei  $r \geq 0$ , was den Integrationsbereich definiert. Als Randwertproblem müssen außerdem die Randbedingungen

$$\psi(r=0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0 \quad (\text{B.3})$$

erfüllt sein. Dabei wird das Verhalten am Ursprung ausgenutzt für den Numerov-Algorithmus (Generation der Wellenfunktionen), und das Verhalten im Unendlichen für die Shooting-Methode (Auffinden der Energieeigenwerte  $E$ ).

Beim Numerov-Algorithmus wird am Ursprung eine Vorwärts-Rückwärts-Iteration durchgeführt, durch die, ausgehend von zwei Startwerten, alle weiteren Punkte der Lösung berechnet werden können.

Die Taylor-Entwicklung der benachbarten Punkte  $\psi_{n-1}$  und  $\psi_{n+1}$  des Diskretisierungspunkts  $\psi_n$  ergibt [11]

$$\psi_{n+1} = \psi(r_n+h) = \psi(r_n) + h\psi'(r_n) + \frac{h^2}{2}\psi''(r_n) + \frac{h^3}{6}\psi^{(3)}(r_n) + \frac{h^4}{24}\psi^{(5)}(r_n) + \mathcal{O}(h^5), \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_{n-1} = \psi(r_n-h) = \psi(r_n) - h\psi'(r_n) + \frac{h^2}{2}\psi''(r_n) - \frac{h^3}{6}\psi^{(3)}(r_n) + \frac{h^4}{24}\psi^{(5)}(r_n) + \mathcal{O}(h^5). \quad (\text{B.5})$$

Daraus folgt

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi(r_n) + h^2\psi''(r_n) + \frac{h^4}{12}\psi^{(4)}(r_n) + \mathcal{O}(h^6), \quad (\text{B.6})$$

und daraus

$$\psi''(r_n) = \frac{1}{h^2} \left( \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n - \frac{h^4}{12}\psi^{(4)}(r_n) + \mathcal{O}(h^6) \right). \quad (\text{B.7})$$

Um die vierte Ableitung der Wellenfunktion  $\psi(r_n)$  zu finden, wird die Schrödinger-Gleichung (B.2) verwendet. Zweifaches Ableiten dieser Gleichung ergibt

$$\psi^{(4)}(r) = -\frac{d^2}{dr^2}(k(r) \cdot \psi(r)). \quad (\text{B.8})$$

Mit der Zweipunkte-Differenzenformel [11]

$$\psi''(r_n) = \frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{B.9})$$

erhält man einen Ausdruck für Gleichung (B.8) :

$$\psi^{(4)}(r_n) = -\frac{k_{n+1}\psi_{n+1} - 2k_n\psi_n + k_{n-1}\psi_{n-1}}{h^2}. \quad (\text{B.10})$$

Einsetzen der Gleichungen (B.7) und (B.10) in die Schrödinger-Gleichung (B.2) ergibt

$$\begin{aligned} -k_n\psi_n &= \psi''(r_n) = \frac{1}{h^2} \left( \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n - \frac{h^4}{12}\psi^{(4)} \right) \\ &= \frac{1}{h^2} \left[ \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n + \frac{h^2}{12}(k_{n+1}\psi_{n+1} - 2k_n\psi_n + k_{n-1}\psi_{n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} (\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) + \frac{1}{12}(k_{n+1}\psi_{n+1} - 2k_n\psi_n + k_{n-1}\psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Daraus folgt direkt die Iterationsformel des Numerov-Algorithmus

$$y_{n+1} = \frac{(2 - \frac{5}{6}h^2k_n)\psi_n - (1 + \frac{1}{12}h^2k_{n-1})\psi_{n-1}}{1 + \frac{h^2}{12}k_{n+1}} + \mathcal{O}(h^6), \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.11})$$

Aus dieser Formel kann die gesamte Wellenfunktion zu einer festen Energie  $E$  bestimmt werden, wobei schließlich noch die Normierung aufgrund

$$\sum_{i=0}^N \psi_i^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{B.12})$$

erfolgen muss.

Für Potentiale, die mit  $r \rightarrow 0$  divergieren, muss der für  $n = 2$  auftauchende Ausdruck  $k_0 \cdot \psi_0$  jedoch genauer betrachtet werden, da  $k_0 = 2(E - V_i - \frac{\ell(\ell+1)}{2r_i^2})$  und  $\psi_0 = 0$ . Dafür wird der Grenzwert [17]

$$k_0\psi_0 = \lim_{h \rightarrow 0} k(h)\psi(h) = \begin{cases} -2 \lim_{h \rightarrow 0} hV(h) & \text{für } \ell = 0 \\ -2 & \text{für } \ell = 1 \\ 0 & \text{für } \ell \geq 2 \end{cases}. \quad (\text{B.13})$$

Für radiale Probleme ist der Startwert  $\psi_0$  bei  $r = 0$  aus der Randbedingung (B.3) bekannt. Für den Bereich  $r \rightarrow 0$  gilt für die radiale Schrödingergleichung die Näherung

$$-\psi''_{r \rightarrow 0}(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi_{r \rightarrow 0}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{r \rightarrow 0}(r) = c_1 r^{\ell+1} + c_2 r^{-\ell}. \quad (\text{B.14})$$

Wegen der Randbedingung gilt damit  $\psi_{r \rightarrow 0}(r) \sim r^{\ell+1}$ . Der nächste Schritt  $\psi_1$  kann dementsprechend gewählt werden, womit die Anfangsbedingungen lauten

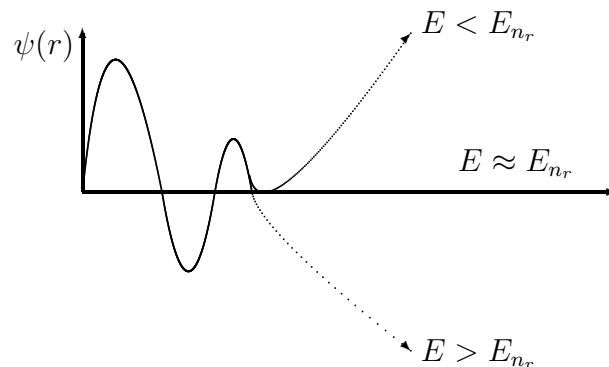
$$\psi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = h^{\ell+1}. \quad (\text{B.15})$$

Mit der Shooting-Methode werden die Energieeigenwerte der Schrödingergleichung gefunden. Da die Wellenfunktion nur für diskrete Werte von  $E$  im Unendlichen verschwindet, ist die Normierungsbedingung (B.12) nur für diese Werte erfüllt. Der Ansatz der vollständigen Lösung der Schrödingergleichung besteht daher im Ausnutzen der Randbedingung im Unendlichen

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} \psi(r_n) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Der Numerov-Algorithmus liefert Wellenfunktionen beliebiger Energie  $E$ . Mit der Shooting-Methode wird zunächst ein Wert für die Energie  $E$  abgeschätzt, und anschließend das Verhalten der zugehörigen Wellenfunktion im Unendlichen überprüft. Entspricht der Energiewert  $E$  keinem Eigenwert  $E_{n_r}$ , so wird der nächste Wert  $E + \Delta E$  überprüft. Mit einer genügend feinen Rasterung kann so ein guter Wert für  $E_{n_r}$  gefunden werden. Für die Überprüfung des Verhaltens im Unendlichen genügt es, einen Wert auszusuchen, der hinreichend größer ist als die typische Systemgröße. [17] Wellenfunktionen, die keine Eigenfunktionen darstellen, streben dort schnell gegen  $\pm\infty$ . Da sich das Vorzeichen der Wellenfunktion beim Passieren des Energieeigenwerts  $E_{n_r}$  ändert, kann der Energieeigenwert an dieser Stelle leicht lokalisiert werden.

Abbildung B.1 verdeutlicht das Verhalten der Wellenfunktion bei der Shooting-Methode graphisch.



**Abbildung B.1:** Verhalten der Wellenfunktionen bei der Shooting-Methode für beliebige Werte  $E < E_{n_r}$ ,  $E = E_{n_r}$  und  $E > E_{n_r}$ . Nach [11]

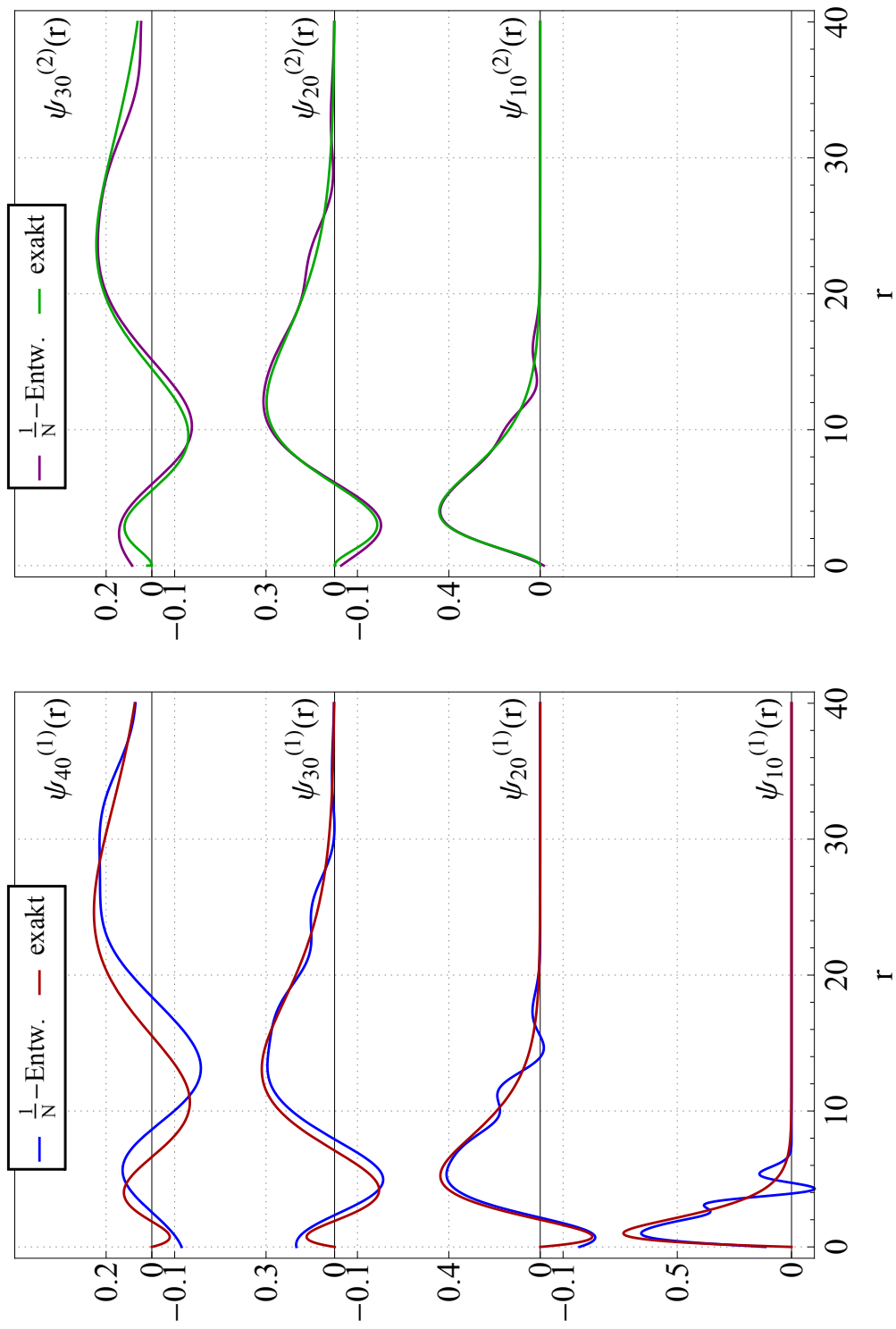
## C Tabellen und Abbildungen

	$\delta$	ex./num.	1/ $N$ -Entwicklung			SUSY-1/ $N$ -Entwicklung		
		$-E$	$-E^{(0)}$	$-E^{(1)}$	$-E^{(2)}$	$-E^{(0)}$	$-E^{(1)}$	$-E^{(2)}$
<b>1s</b>	$10^{-8}$	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000	-	-	-
	0.0001	0.4999500	0.4999500	0.4999500	0.4999500	-	-	-
	0.001	0.4995001	0.4995001	0.4995001	0.4995001	-	-	-
	0.002	0.4990005	0.4990005	0.4990005	0.4990005	-	-	-
	0.01	0.4950125	0.4950125	0.4950125	0.4950125	-	-	-
	0.05	0.4753125	0.4753125	0.4753125	0.4753125	-	-	-
	0.1	0.4512500	0.4512499	0.4512501	0.4512500	-	-	-
	0.2	0.4050000	0.4049980	0.4050017	0.4050000	-	-	-
	0.5	0.2812500	0.2811696	0.2813251	0.2812472	-	-	-
	1	0.1250000	0.1234887	0.1268399	0.1248161	-	-	-
	1.2	0.0800000	0.0765881	0.0848789	0.0795773	-	-	-
<b>2s</b>	$10^{-8}$	0.1250000	0.1250000	0.1250000	0.1250000	0.1250000	0.1250000	0.1250000
	0.0001	0.1249500	0.1249500	0.1249500	0.1249500	0.1249500	0.1249500	0.1249500
	0.002	0.1240020	0.1240023	0.1240020	0.1240020	0.1240020	0.1240020	0.1240020
	0.01	0.1200500	0.1200583	0.1200500	0.1200500	0.1200500	0.1200500	0.1200500
	0.05	0.1012500	0.1014559	0.1012486	0.1012503	0.1012499	0.1012501	0.1012500
	0.1	0.0800000	0.0807940	0.0799774	0.0800046	0.0799980	0.0800009	0.0800000
	0.2	0.0450000	0.0476974	0.0446802	0.0450856	0.0449641	0.0450198	0.0449991
	<b>2p</b>	$10^{-8}$	0.1250000	0.1250000	0.1250000	0.1250000	-	-
0.0001		0.1249500	0.1249500	0.1249500	0.1249500	-	-	-
0.002		0.1240017	0.1240017	0.1240017	0.1240017	-	-	-
0.01		0.1200417	0.1200417	0.1200417	0.1200417	-	-	-
0.02		0.1151667	0.1151667	0.1151667	0.1151667	-	-	-
0.05		0.1010425	0.1010423	0.1010425	0.1010425	-	-	-
0.1		0.0791794	0.0791765	0.0791804	0.0791794	-	-	-
0.2		0.0418860	0.0418279	0.0419079	0.0418857	-	-	-
<b>3s</b>	$10^{-8}$	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556
	0.0001	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056
	0.002	0.0545601	0.0545611	0.0545601	0.0545601	0.0545604	0.0545601	0.0545601
	0.01	0.0506681	0.0506930	0.0506680	0.0506681	0.0506764	0.0506680	0.0506681
	0.02	0.0460056	0.0461046	0.0460049	0.0460057	0.0460386	0.0460054	0.0460056
	0.05	0.0333681	0.0339556	0.0333442	0.0333746	0.0335653	0.0333630	0.0333687
	0.1	0.0168056	0.0187129	0.0164765	0.0169274	0.0174508	0.0167344	0.0168194
	0.2	0.0005556	0.0019934	0.0007674	0.0013130	0.0003115	0.0011326	0.0006182
<b>3p</b>	$10^{-8}$	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556
	0.0001	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056
	0.002	0.0545597	0.0545601	0.0545597	0.0545597	0.0545597	0.0545597	0.0545597
	0.01	0.0506597	0.0506680	0.0506597	0.0506597	0.0506597	0.0506597	0.0506597
	0.02	0.0459723	0.0460054	0.0459722	0.0459724	0.0459723	0.0459723	0.0459723
	0.05	0.0331645	0.0333623	0.0331594	0.0331652	0.0331623	0.0331633	0.0331631
	0.1	0.0160534	0.0166996	0.0159820	0.0160677	0.0160160	0.0160366	0.0160314
<b>3d</b>	$10^{-8}$	0.0555556	0.0555556	0.0555556	0.0555556	-	-	-
	0.0001	0.0555056	0.0555056	0.0555056	0.0555056	-	-	-
	0.002	0.0545591	0.0545591	0.0545591	0.0545591	-	-	-
	0.01	0.0506431	0.0506431	0.0506431	0.0506431	-	-	-
	0.02	0.0459058	0.0459058	0.0459058	0.0459058	-	-	-
	0.05	0.0327532	0.0327521	0.0327534	0.0327532	-	-	-
0.1	0.0144839	0.0144609	0.0144898	0.0144842	-	-	-	

	$\delta$	ex./num. $-E$	1/ $N$ -Entwicklung			SUSY-1/ $N$ -Entwicklung		
			$-E^{(0)}$	$-E^{(1)}$	$-E^{(2)}$	$-E^{(0)}$	$-E^{(1)}$	$-E^{(2)}$
<b>4s</b>	$10^{-8}$	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500
	0.0001	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000
	0.002	0.0302580	0.0302600	0.0302580	0.0302580	0.0302590	0.0302580	0.0302580
	0.01	0.0264500	0.0264996	0.0264497	0.0264501	0.0264748	0.0264499	0.0264500
	0.02	0.0220500	0.0222439	0.0220459	0.0220512	0.0221473	0.0220484	0.0220503
	0.05	0.0112500	0.0122645	0.0111083	0.0113035	0.0117648	0.0111940	0.0112642
	0.1	0.0012500	0.0028343	0.0001498	0.0018682	0.0018849	0.0009220	0.0013955
<b>4p</b>	$10^{-8}$	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500
	0.0001	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000
	0.002	0.0302577	0.0302587	0.0302577	0.0302577	0.0302580	0.0302577	0.0302577
	0.01	0.0264417	0.0264665	0.0264416	0.0264417	0.0264500	0.0264417	0.0264417
	0.02	0.0220170	0.0221144	0.0220155	0.0220174	0.0220495	0.0220167	0.0220170
	0.05	0.0110582	0.0115745	0.0110018	0.0110725	0.0112298	0.0110441	0.0110573
	0.1	0.0007267	0.0012795	0.0004627	0.0008808	0.0007647	0.0007637	0.0007374
<b>4d</b>	$10^{-8}$	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500
	0.0001	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000
	0.002	0.0302570	0.0302573	0.0302570	0.0302570	0.0302570	0.0302570	0.0302570
	0.01	0.0264250	0.0264334	0.0264250	0.0264251	0.0264250	0.0264250	0.0264250
	0.02	0.0219509	0.0219836	0.0219507	0.0219510	0.0219507	0.0219507	0.0219507
	0.05	0.0106663	0.0108420	0.0106556	0.0106690	0.0106526	0.0106566	0.0106559
	0.1	0.0005356	0.0004474	0.0001800	0.0002332	0.0006532	0.0003446	0.0003540
<b>4f</b>	$10^{-8}$	0.0312500	0.0312500	0.0312500	0.0312500	-	-	-
	0.0001	0.0312000	0.0312000	0.0312000	0.0312000	-	-	-
	0.002	0.0302560	0.0302560	0.0302560	0.0302560	-	-	-
	0.01	0.0264001	0.0264001	0.0264001	0.0264001	-	-	-
	0.02	0.0218515	0.0218514	0.0218515	0.0218515	-	-	-
	0.05	0.0100620	0.0100575	0.0100627	0.0100620	-	-	-

**Tabelle C.1:** Ergebnisse der  $1/N$ -Entwicklung mit und ohne SUSY, sowie Vergleich mit exakter/numerischer Lösung  $E$ . Der Index  $(i)$  gibt die Ordnung in  $1/\bar{k}$  an.

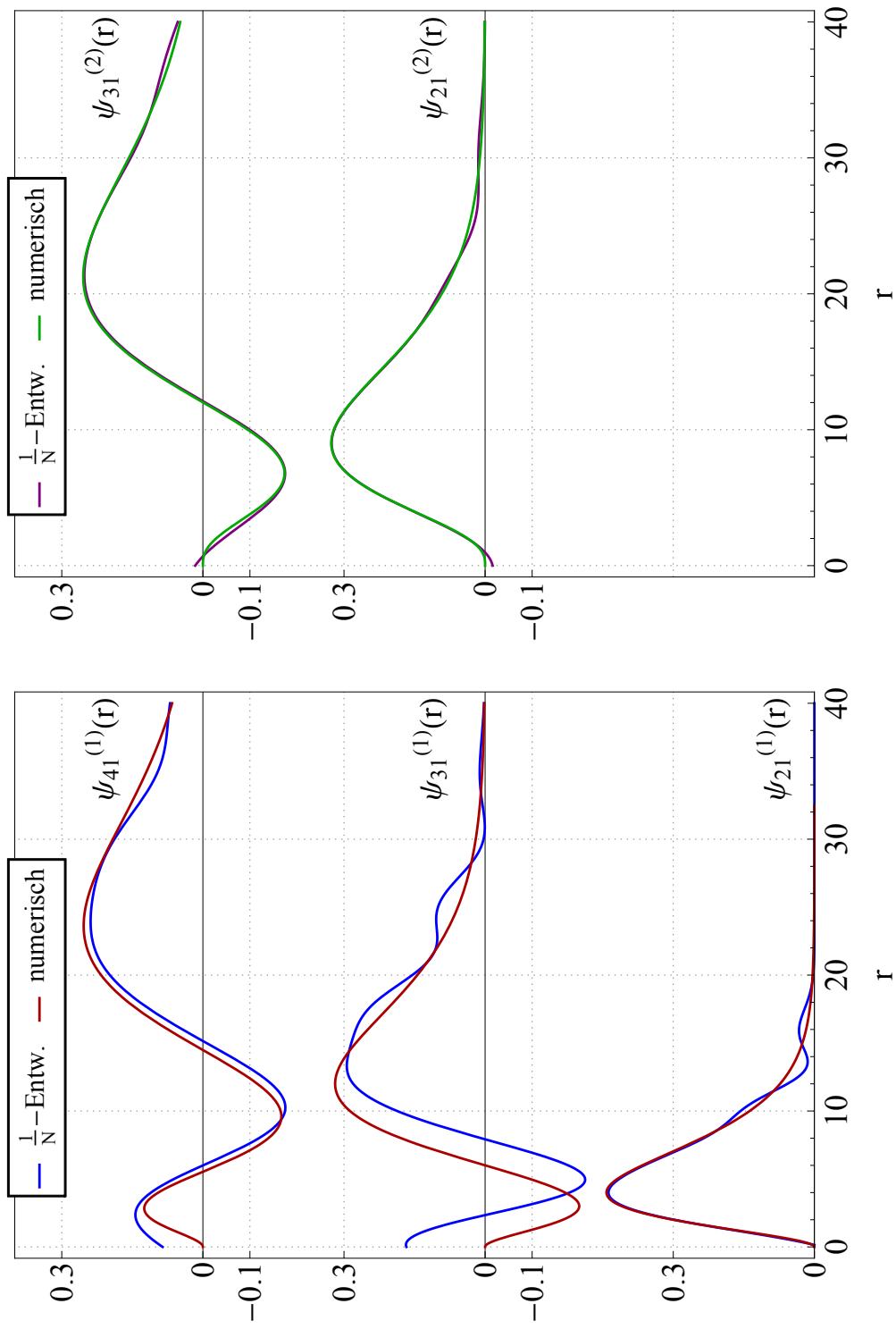




(a)  $s$ -Wellen des Hultén-Potentials

(b)  $s$ -Wellen des zugehörigen Partners

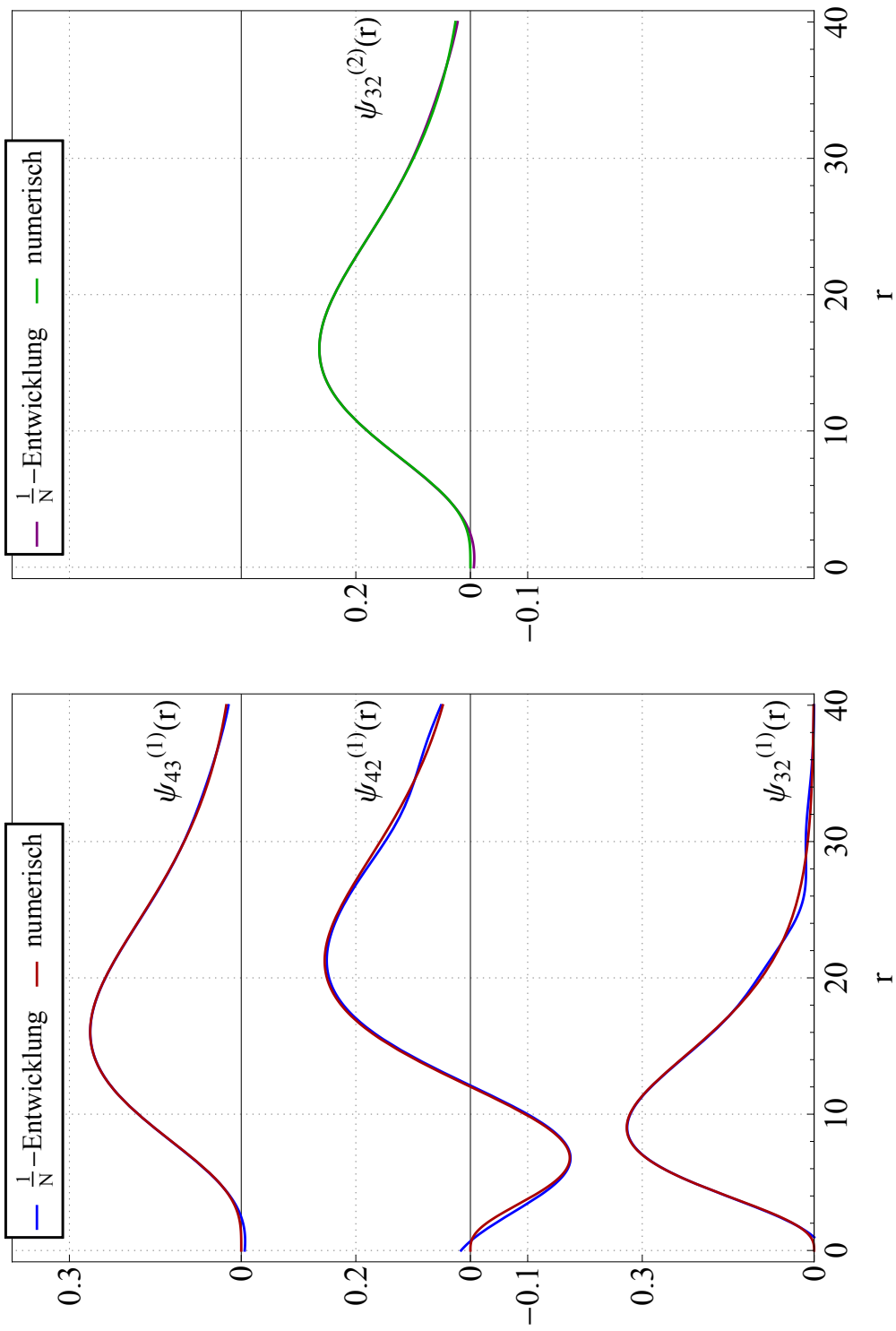
**Abbildung C.1:** Exakte und durch  $1/N$ -Entwicklung generierte  $s$ -Wellenfunktionen  $\psi_{n0}(r)$  des Hultén-Potentials und des Partners, mit  $\delta = 0, 01$ .



(a)  $p$ -Wellen des Hulthén-Potentials

(b)  $p$ -Wellen des zugehörigen Partners

**Abbildung C.2:** Exakte und durch  $1/N$ -Entwicklung generierte  $p$ -Wellenfunktionen  $\psi_{n1}(r)$  des Hulthén-Potentials und des Partners, mit  $\delta = 0, 01$ .



(a)  $d$ - und  $f$ -Wellen des Hulthén-Potentials

(b)  $d$ -Wellen des zugehörigen Partners

**Abbildung C.3:** Exakte und durch  $1/N$ -Entwicklung generierte  $d$ - und  $f$ -Wellenfunktionen  $\psi_{n2,3}(r)$  des Hulthén-Potentials und des Partners, mit  $\delta = 0,01$ .

## Literaturverzeichnis

- [1] Fred Cooper, Avinash Khare und Uday Sukhatme. *Supersymmetry*. Singapur: World Scientific Publishing, 2001.
- [2] Siegfried Flügge. *Practical Quantum Mechanics*. 2. Aufl. New York, Heidelberg und Berlin: Springer, 1970.
- [3] L. É. Gendenshtein. „Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by means of supersymmetry“. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 38.6 (1983), S. 299–302.
- [4] B. Gönül u. a. „Hamiltonian hierarchy and the Hulthén potential“. In: *Physics Letters A* 275.4 (2000), S. 238–243.
- [5] Lamek Hulthén und Masao Sugawara. „The Two-Nucleon Problem“. In: *Handbuch der Physik*. Hrsg. von Siegfried Flügge. 39. 1957.
- [6] Tom Imbo und Uday Sukhatme. „Supersymmetric Quantum Mechanics and Large  $N$  Expansion“. In: *Physical Review Letters* 54.20 (1985), S. 2184–2187.
- [7] Tom Imbo, Uday Sukhatme und A. Pagnamenta. „Bound States of the Yukawa Potential via the shifted  $1/N$  Expansion Technique“. In: *Physics Letters* 105A.45 (1984), S. 183–187.
- [8] Tom Imbo, Uday Sukhatme und A. Pagnamenta. „Energy Eigenstates of spherically symmetric potentials using the shifted  $1/N$  expansion“. In: *Physical Review D* 29.8 (1984), S. 1669–1681.
- [9] Leopold Infeld und T.E. Hull. „The Factorization Method“. In: *Reviews of Modern Physics* 23.1 (1951), S. 21–68.
- [10] Harald Kalka und Gerhard Soff. *Supersymmetrie*. 1. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner, 1997, S. 1–103.
- [11] Jan Krieger. *Computerphysik und Numerik*. 2006, S. 41–43. URL: <http://www.jkrieger.de/download/computerphysik.pdf>.
- [12] C. S. Lam und Y. P. Varshni. „Energies of  $s$  Eigenstates in a Static Screened Coulomb Potential“. In: *Physical Review A* 4.5 (1971).
- [13] Gernot Münster. *Quantentheorie*. 2. Aufl. Berlin, New York: De Gruyter, 2010, S. 91–92.
- [14] H. Nicolai. „Supersymmetry and spin systems“. In: *Journal of Physics A* 9.9 (1976).
- [15] Oscar Rosas-Ortiz. „Supersymmetric derivation of the hard core deuteron’s bound state“. In: *Group Theoretical Methods in Physics*. Hrsg. von G. Pogosyan, L. Vincent und K. Wolf. 2004, S. 485–490.
- [16] K. Roy u. a. „Hamiltonian hierarchy and the Hulthén potential“. In: 38.1 (1988), S. 558–560.
- [17] Jürgen Schnakenberg. *Algorithmen in der Quantentheorie und Statistischen Physik*. Ulmen: Zimmermann-Neufang, 1995, S. 1–5, 50–52.

- [18] Franz Schwabl. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997, S. 8–20.
- [19] Charles Ray Smith. „Bound States in a Debye-Hückel-Potential“. In: *Physical Review* 134.5 (1964), S. 1235–1237.
- [20] Uday Sukhatme. „Shifted Large  $N$  Expansions in Quantum Mechanics“. In: *Proceedings of the VII Warsaw Symposium on Elementary Particle Physics* (1984).
- [21] V. M. Vainberg u. a. „The  $1/N$  expansion in Quantum Mechanics“. In: *Theoretical and Mathematical Physics* 74.3 (1988), S. 269–278.
- [22] E. Witten. „Dynamical breaking of supersymmetry“. In: *Nuclear Physics B* 188 (1981), S. 513–554.
- [23] Hideki Yukawa. „On the Interaction of Elementary Particles“. In: *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*. 3. Ser. 17 (1931), S. 48–57.

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Veranschaulichung der Entartung der Energieniveaus von Potential und Partnerpotential. Umwandlung durch die Leiteroperatoren $A^-$ und $A^+$ unter Erzeugung bzw. Vernichtung eines Knotens. Nach [10] . . . . .	4
2.2	Kette von SUSY-Partnern zu $H_1$ . Nach [10] . . . . .	6
3.1	Das Hulthén-Potential mit unterschiedlichen Screening-Parametern, mit $V_0 = 1, 0$ . . . . .	12
3.2	SUSY-Kette beim Hulthén-Potential . . . . .	15
3.3	Die effektiven Potentiale $V_1^\ell(r)$ für $\ell = 0, 1, 2$ sowie ihre SUSY-Partner $V_2^\ell(r)$ . . . . .	16
3.4	Das Yukawa-Potential $V_Y(r)$ mit unterschiedlichen Werten von $\mu$ , mit $V_0 = 1, 0$ . . . . .	17
3.5	Das Yukawa-Potential und seine Partner für $\ell = 0, 1, 2$ für $\mu = 0, 01$ und $V_0 = 1, 0$ . . . . .	18
3.6	Direkter Vergleich der Reichweite von Coulomb-, Hulthén- und Yukawa-Potential. . . . .	19
4.1	Direkt und durch Anwendung des Absteigers $A$ mittels $1/N$ -Entwicklung erhaltene Wellenfunktionen des Hulthén-Potentials im Vergleich mit den exakten/numerischen Funktionen. . . . .	23
4.2	Prozentuale Abweichung der Energieeigenwerte der $s$ -Wellen vom exakt berechneten Wert. Durchgezogen: $1/N$ ohne SUSY, gestrichelt: $1/N$ mit SUSY. Die kritischen Werte liegen für $n = 1, 2, 3, 4$ bei $\delta_c = 2.0, 0.5, 0.222$ und $0.125$ . . . . .	26
4.3	Prozentuale Abweichung der Energieeigenwerte der $s$ -, $p$ - und $f$ -Wellen für $n = 4$ zum numerischen Wert. Durchgezogen: $1/N$ ohne SUSY, gestrichelt: $1/N$ mit SUSY. . . . .	27
B.1	Verhalten der Wellenfunktionen bei der Shooting-Methode für beliebige Werte $E < E_{n_r}$ , $E = E_{n_r}$ und $E > E_{n_r}$ . Nach [11] . . . . .	35
C.1	Exakte und durch $1/N$ -Entwicklung generierte $s$ -Wellenfunktionen $\psi_{n_0}(r)$ des Hulthén-Potentials und des Partners, mit $\delta = 0, 01$ . . . . .	38
C.2	Exakte und durch $1/N$ -Entwicklung generierte $p$ -Wellenfunktionen $\psi_{n_1}(r)$ des Hulthén-Potentials und des Partners, mit $\delta = 0, 01$ . . . . .	39
C.3	Exakte und durch $1/N$ -Entwicklung generierte $d$ - und $f$ -Wellenfunktionen $\psi_{n_{2,3}}(r)$ des Hulthén-Potentials und des Partners, mit $\delta = 0, 01$ . . . . .	40

## Tabellenverzeichnis

4.1	Mittels $1/N$ -Entwicklung in 2. Ordnung erhaltene Energieeigenwerte des Hulthén-Potentials, mit relativem Fehler zum exakten/numerischen Wert für unterschiedliche Werte von $\delta$ . In Tabelle C.1 sind die kompletten Ergebnisse der durchgeführten Entwicklungen dargestellt. . . . .	22
4.2	Ergebnisse der $1/N$ -Entwicklung in 0. Ordnung mit und ohne SUSY, für unterschiedliche Werte von $\mu$ und $V_0 = 1.0$ , mit der relativen Abweichung $\Delta$ vom numerischen Wert $E$ . . . . .	24
4.3	Energieeigenwerte der ersten vier Zustände von Coulomb-, Hulthén- und Yukawa-Potential, berechnet mittels SUSY- $1/N$ -Entwicklung für $\delta = \mu = 0,0001$ bzw. $E_{\text{Coulomb}} = -\frac{1}{n^2}$ [13]. Bei allen Potentials tritt eine Drehimpulsentartung auf. . . . .	25
4.4	Abweichungen der Energien von $V_1(r)$ und $V_2(r)$ . . . . .	27
C.1	Ergebnisse der $1/N$ -Entwicklung mit und ohne SUSY, sowie Vergleich mit exakter/numerischer Lösung $E$ . Der Index $^{(i)}$ gibt die Ordnung in $1/\bar{k}$ an. . . . .	37

## Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

### **Hulthén-Potential und $1/N$ -Entwicklung in der supersymmetrischen Quantenmechanik**

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind, und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken- auch elektronischen Medien- dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurde, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

Ort, Datum, Unterschrift