

Theoretische Physik

Lagrangesche Statistik in turbulenten Strömungen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Oliver Kamps
aus Rhede

– 2009 –

Dekan:	Prof. Dr. Johannes Peter Wessels
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Rudolf Friedrich
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Rainer Grauer
Tag der mündlichen Prüfung:	26. Februar 2010
Tag der Promotion:	26. Februar 2010

Kurzfassung

Die Beschreibung turbulenter Strömungen kann sowohl in einem ortsfesten Koordinatensystem als auch in einem Koordinatensystem geschehen, das mit den Fluidelementen mitbewegt wird. Die erste Sichtweise wird als *Eulerbild* bezeichnet, während der zweite Zugang *Lagrangebild* genannt wird. Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die Eigenschaften Lagrangescher Observablen in der inversen Energiekaskade zweidimensionaler Turbulenz systematisch zu untersuchen und darüber hinaus diese mit den entsprechenden Ergebnissen der Betrachtung dreidimensionaler Turbulenz zu vergleichen. Dieses ermöglicht die gezielte Untersuchung der universellen und damit systemunabhängigen Eigenschaften des Lagrangebildes und der Beziehung zwischen Observablen im Euler- und im Lagrangebild. Bei allen Betrachtungen in dieser Arbeit steht der statistische Zugang zur Turbulenz, d. h. die Beschreibung der Observablen mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen, im Zentrum.

Bevor das Hauptziel der Arbeit, die Untersuchungen im Lagrangebild, angegangen werden kann, müssen zuerst die Voraussetzungen für die numerische Simulation zweidimensionaler Turbulenz mit stationärer inverser Energiekaskade geschaffen werden. Es zeigt sich, dass das Zustandekommen eines konstanten Energieflusses in der inversen Kaskade von dem Mechanismus abhängt, mit dem man die durch die Antriebskraft zugeführte Energie wieder aus dem System entfernt. Neben dem Energiefluss und dem Energiespektrum wird die Statistik der Geschwindigkeitsinkremente im Eulerbild untersucht. Es stellt sich heraus, dass die Inkremente in der inversen Energiekaskade keine Intermitenz aufweisen und der Energiefluss, das Spektrum und die ungeraden Strukturfunktionen innerhalb des Inertialbereiches die Vorhersagen der K41-Theorie erfüllen. Dies steht im Gegensatz zu dreidimensionalen Strömungen, bei denen die Inkrementstatistik im Eulerbild Intermitenz aufweist und somit der K41-Theorie widerspricht. Darüber hinaus wird gezeigt, dass die Statistik der Geschwindigkeitsinkremente ab einer Länge, die in der Größenordnung der Taylorlänge liegt, als Markovprozess in der Skala aufgefasst werden kann. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen für dreidimensionale Turbulenz und deutet darauf hin, dass die Markoveigenschaft in der Skala ein universeller Bestandteil der Navier-Stokes-Gleichung ist.

Die Betrachtungen im Lagrangebild beginnen mit der Charakterisierung des Teilchentransportes in zweidimensionaler Turbulenz und der Untersuchung der Lagrangeschen Geschwindigkeitskorrelationen in zwei und drei Dimensionen. Das Hauptaugenmerk liegt dann auf der Beschleunigung eines Fluidelementes entlang seiner Bahn. Es wird gezeigt, dass die Einpunktverteilung der Beschleunigung in zweidimensionaler Turbulenz stark von einer Gaußverteilung abweicht und die Beschleunigung entlang der Trajektorie lange korreliert ist. Beide Eigenschaften finden sich in ähnlicher Form auch in dreidimensionaler Turbulenz. Darüber hinaus stellt sich heraus, dass die Komponenten der Lagrangeschen Beschleunigung sowohl in drei als auch in

zwei Dimensionen eine Markovzeitskala besitzen, die gegenüber der integralen Zeitskala nicht vernachlässigbar ist. Außerdem sind die Quadrate der Komponenten der Beschleunigung untereinander ebenfalls langzeitkorreliert.

Die anschließenden Untersuchungen der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente, die im Grenzfall kleiner Zeiten in die Beschleunigung übergehen, führen zu dem Ergebnis, dass die Inkrementstatistik sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen intermittent ist. Während letzteres eine bekannte Tatsache ist und aufgrund des intermittenten Verhaltens der Eulerschen Inkremente erwartet werden konnte, wird das Vorhandensein von Intermittenz in zwei Dimensionen in dieser Arbeit erstmals gezeigt. Besonders aufgrund der Tatsache, dass die Eulersche Inkrementstatistik in zwei Dimensionen nicht intermittent ist, wirft dieses Ergebnis die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Eulerschen und Lagrangeschen Beschreibung der Turbulenz auf.

Aus diesem Grund wird anschließend anhand der Geschwindigkeitsinkremente untersucht, wie man systematisch mittels Übergangswahrscheinlichkeiten Observablen vom Eulerbild zum Lagrangebild übersetzen kann. Die Strukturen der bei dieser Übersetzung auftretenden Übergangswahrscheinlichkeiten in zweidimensionaler und dreidimensionaler Turbulenz sind jeweils sehr ähnlich. Neben dieser generellen Erkenntnis liefert die Übersetzung auch die mathematische Erklärung, wie ein System, das im Eulerbild keine Intermittenz zeigt, im Lagrangebild dennoch intermittent sein kann.

Im letzten Abschnitt der Arbeit wird nach der Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizienten für die Beschleunigung eines Teilchens ein Ansatz zur Modellierung der Lagrangeschen Einteilchen-Statistik in zweidimensionaler Turbulenz auf Basis gekoppelter Langevingleichungen vorgestellt. Die Modellierung erfolgt dabei für die Beschleunigung. Die Verwendung gekoppelter Langevingleichungen führt zu einer qualitativ richtigen Modellierung der Nichtmarkoveigenschaften und der Korrelationsfunktionen der Beschleunigung.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der Vergleich der Lagrangeschen Statistik in zwei- und dreidimensionaler Turbulenz zeigt, dass Lagrangesche Observablen wie z. B. die Geschwindigkeitsinkremente oder die Beschleunigung insofern universelle Eigenschaften besitzen, als dass sie in ihrem qualitativen Verhalten unabhängig vom betrachteten System sind. Zu diesen Eigenschaften zählen unter anderem die Intermittenz der Inkrementstatistik und die Langzeitkorrelationen der Beschleunigung. Besonders der Nachweis von Intermittenz im Lagrangebild in zwei Dimensionen und die Übersetzung von Observablen vom Euler- in das Lagrangebild können dabei als zentrale Ergebnisse der Arbeit gesehen werden.

Abstract

Turbulent flows can be described in a fixed coordinate system or in a coordinate system which moves along with the fluid elements. The first is called the *Eulerian* frame, whereas the second is considered the *Lagrangian* frame.

The purpose of this study is to carry out a systematic investigation of the properties of the Lagrangian statistics in the inverse energy cascade of two-dimensional turbulence. Furthermore the observed properties of the two-dimensional turbulence are compared to those that have been previously described for three-dimensional turbulence. Based on these results a targeted investigation of the universal, system-independent properties of the Lagrangian frame as well as the relationship between observables among the Eulerian and the Lagrangian frame is conducted. In particular, the study focuses on the statistical approach to turbulence, meaning the description of the observables through probability distributions.

First of all, in order to analyze the Lagrangian statistics of two-dimensional turbulence, a numerical simulation that features a stable inverse energy cascade has to be established. The realization of the constant energy flux within the inverse cascade depends on the mechanism which is applied to dissipate the energy from the driving force. Looking at the energy flux and the energy spectrum this study also examines the statistics of velocity increments among the Eulerian frame. The results show that the Eulerian velocity increments in the inverse energy cascade do not display intermittency. In addition, predictions of the K41 theory are confirmed through results of energy flux, energy spectrum and the odd structure functions within the inertial range. These findings are contrary to those observed in three-dimensional flows, which exhibit intermittent increment statistics in the Eulerian frame and hence contradict the K41 theory. Moreover the statistics of velocity increments of a length similar to the Taylor length can be considered a Markovian process in scale. This is in accordance with the results for three-dimensional turbulence and suggests that Markovian properties in scale are universal to the Navier-Stokes equation.

The first step to evaluate the Lagrangian frame is to characterize the particle transport in two-dimensional turbulence as well as the Lagrangian velocity correlation in two and three dimensions. The main focus is then on the acceleration of the fluid elements along their trajectories. It is shown that the one-point distribution of acceleration in two-dimensional turbulence deviates strongly from a Gaussian distribution and that the acceleration along the trajectory is long-time correlated. Both properties are also typical of three-dimensional turbulence. Beyond these findings, the components of the Lagrangian acceleration in two and three dimensions are shown to have a Markov timescale which is not negligible compared to the integral time scale. In addition the squared acceleration components are also long-time correlated.

The following investigations on Lagrangian velocity increments, which in the case

of small time increments converge to the acceleration, lead to the conclusion that increment statistics is intermittent in two as well as in three dimensions. While this is known to be true for three dimensions, this study is the first to show, that intermittency can also be found in the inverse cascade in two dimensions. Since Eulerian increment statistics are non-intermittent in two dimensions, these results raise the question of the relation between the Eulerian and Lagrangian description of turbulence.

To evaluate the question of the connection between Eulerian and Lagrangian observables, this study subsequently suggests a systematic translation of the observables from the Eulerian frame into the Lagrangian frame via transition probabilities, particularly for the velocity increments. The transition probabilities appear to be structurally similar in two and three dimensional turbulence. Next to this basic finding, the translation provides also a mathematical explanation for the existence of intermittency in the Lagrangian frame despite its absence in the Eulerian frame.

Finally, drift and diffusion coefficients for the Lagrangian acceleration of a single particle are estimated. Furthermore a model for Lagrangian one-particle statistics of acceleration in two-dimensional turbulence based on coupled Langevin equations is suggested. In conclusion, the application of the coupled Langevin equations appears to be a qualitatively correct approach for the modeling of the finite Markov timescale and the correlation functions.

In summary, the comparison of two- and three-dimensional turbulence shows that Lagrangian observables, such as velocity increments or acceleration, exhibit universal properties since their qualitative behavior appears to be independent of the investigated system. Such universal properties include the intermittency of increment statistics and long time correlation of acceleration. The main results of this study are hence the proof of existence of intermittency in the Lagrangian frame in two dimensions and the translation of the observables from the Eulerian into the Lagrangian frame.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Turbulenz – Ein Phänomen zwischen Chaos und Selbstorganisation .	1
1.2	Motivation und Aufbau der Arbeit	4
I	Grundlagen	9
2	Die Grundgleichungen	11
2.1	Die Navier-Stokes-Gleichung	11
2.1.1	Die Wirbeltransportgleichung	13
2.1.2	Erhaltungsgrößen	14
2.2	Das Lagrangebild	16
3	Werkzeuge der Statistik	19
3.1	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen	19
3.1.1	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeit	19
3.1.2	Verteilungsfunktionen	20
3.1.3	Charakterisierung von Verteilungsfunktionen	23
3.2	Entwicklungsgleichungen für Verteilungsfunktionen	29
3.2.1	Kinetische Gleichungen	29
3.2.2	Stochastische Prozesse	29
4	Statistische Beschreibung der Turbulenz	35
4.1	Der Rahmen einer statistischen Beschreibung	35
4.1.1	Beschreibung der Turbulenz durch Verteilungsfunktionen . . .	38
4.1.2	Eulersche und Lagrangesche Beschreibung	41
4.1.3	Längen- und Zeitskalen	42
4.2	Statistische Theorien	45
4.2.1	Hierarchien und das Schließungsproblem	46
4.2.2	Phänomenologische Theorien	46

II Die inverse Energiekaskade	53
5 Die inverse Kaskade	55
5.1 Der Energietransport in turbulenten Strömungen	56
5.2 Ein Modell für die inverse Kaskade	62
5.2.1 Randbedingungen	63
5.2.2 Die Kraft	64
5.2.3 Die Dissipationsterme	70
5.2.4 Die Simulationstypen	72
5.3 Der Aufbau der Kaskade	73
5.4 Der stationäre Zustand	74
5.4.1 Der Energiefluss und das Spektrum	75
5.4.2 Das Vortizitätsfeld	80
6 Eulersche Statistik	83
6.1 Grundlegende Charakterisierung	83
6.2 Statistik der Geschwindigkeitsinkremente	86
6.2.1 Verteilungsfunktionen	86
6.2.2 Strukturfunktionen	89
6.3 Markoveigenschaften der Inkremente	90
III Lagrangesche Statistik	95
7 Trajektorien	97
7.1 Inkompressibilität	100
7.2 Der Transport von Tracern in zwei Dimensionen	100
8 Geschwindigkeitsstatistik	107
8.1 Die Verteilungsfunktion in drei Dimensionen	107
8.2 Korrelationsfunktionen in zwei und drei Dimensionen	108
9 Die Beschleunigungsstatistik	111
9.1 Die Verteilungsfunktion	111
9.1.1 Dreidimensionale Turbulenz	112
9.1.2 Zweidimensionale Turbulenz	113
9.2 Eindimensionale Analyse	117
9.2.1 Korrelationsfunktionen	117
9.2.2 Test auf Markoveigenschaften	121
9.3 Mehrdimensionale Analyse	126
9.3.1 Kreuzkorrelationen in zwei und drei Dimensionen	127

10 Geschwindigkeitsinkremente und Intermittenz	131
10.1 Vorbemerkungen	131
10.2 Verteilungsfunktionen	134
10.3 Kumulantenanalyse	139
11 Die Verknüpfung von Eulerscher und Lagrangescher Inkrementstatistik	143
11.1 Der Übergang für Inkremente	144
11.1.1 Die Übergangswahrscheinlichkeiten für zweidimensionale Turbulenz	148
11.1.2 Rekonstruktion	154
11.1.3 Die Übergangswahrscheinlichkeiten für dreidimensionale Turbulenz	157
11.1.4 Verhalten von p_b in Grenzfällen	159
11.1.5 Verbindung zur Übersetzung des Multifraktalen Modells . . .	160
11.1.6 Kompressible Turbulenz	162
12 Modellierung der Lagrangeschen Beschleunigung	165
12.1 Exkurs: Schätzung von Drift und Diffusion	166
12.1.1 Dreidimensionale Turbulenz	168
12.1.2 Zweidimensionale Turbulenz	169
12.2 Das Langevinmodell	170
13 Zusammenfassung und Ausblick	175
A Numerik	181
A.1 Das Pseudospektralverfahren	181
A.2 Bestimmung der Beschleunigung	183
A.3 Interpolation der Tracer	183
A.4 Berechnung von Strukturfunktionen	184
B Simulationen	187
C Dimensionsabschätzung der integralen Skala	189
D Schätzung der Markovlänge bei endlicher Datenmenge	193
Lebenslauf	205
Danksagung	207
Stichwortregister	209

1 Einleitung

Die nächste große Epoche der menschlichen Erkenntnis kann sehr wohl eine Methode hervorbringen, mit der man den qualitativen Inhalt von Gleichungen versteht. Heute können wir das nicht. Heute können wir nicht sehen, dass die Gleichungen der Wasserströmung Dinge wie die spiralförmigen Muster der Turbulenz enthalten, die man zwischen rotierenden Zylindern beobachtet. Heute können wir nicht sehen, ob die Schrödingergleichung Frösche, Komponisten oder Moral enthält oder nicht. Wir können nicht sagen, ob etwas darüber Hinausgehendes, wie Gott, notwendig ist oder nicht. Und so können wir alle feste Ansichten in beide Richtungen haben.

(Richard Feynman [FLS01])

1.1 Turbulenz – Ein Phänomen zwischen Chaos und Selbstorganisation

Der Begriff Turbulenz, abgeleitet vom lateinischen *turbare* (stören, verwirren), beschreibt die räumlich und zeitlich unregelmäßige Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen. Turbulente Strömungen sind ein allgegenwärtiger Bestandteil der uns umgebenden Natur. Die durch Temperaturdifferenzen erzeugte Bewegung der Luft in einem Zimmer, die aufsteigende Luft über einer Kerzenflamme oder der Wind sind Beispiele für Turbulenz. Auch die großskaligen Strömungen in der Atmosphäre, die das Wetter beeinflussen, oder die Strömungen in den Ozeanen gehören dazu. Turbulente Strömungen des flüssigen Erdkerns erzeugen das Magnetfeld der Erde, und Sonneneruptionen sowie die Explosion eines Sterns bei einer Supernova werden maßgeblich durch Turbulenz beeinflusst.

Das vielfältige Auftreten dieses Phänomens in der Natur würde für sich allein schon ausreichen, großes Interesse von Seiten der Physik hervorzurufen. Die Allgegenwärtigkeit der Turbulenz führt aber auch dazu, dass sie einen großen Einfluss auf technische Anwendungen hat. Der Luftwiderstand bei Flugzeugen oder Brücken oder der Einfluss auf Mischungs- und Verbrennungsvorgänge sind nur einige Beispiele dafür.

Die Navier-Stokes-Gleichung, die Grundgleichung, die die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen beschreibt, ist seit mehr als einem Jahrhundert bekannt. Obwohl seitdem in der Grundlagenforschung und der angewandten Forschung großer Auf-

wand betrieben wurde, das Phänomen Turbulenz zu verstehen, gilt das Problem bis heute als weitestgehend ungelöst. Dabei ist ungelöst in dem Sinne zu verstehen, dass bisher keine Theorie entwickelt wurde, die ausgehend von der Grundgleichung die Eigenschaften turbulenter Strömungen vorhersagt. So ist es bis heute nicht möglich, mittels einer solchen Theorie den Luftwiderstand eines Flugzeuges oder den Wärmetransport in einer Konvektionsströmung vorherzusagen. In den meisten Fällen ist man darauf angewiesen, die entsprechenden Observablen genau für den interessierenden Spezialfall im Experiment zu vermessen oder sie mit Hilfe von Computern numerisch auf Basis der Grundgleichung zu berechnen. Es ist aber wiederum nicht immer möglich, aus dem Wissen über die Einzelfälle auf andere Fälle zu schließen, d. h. die Vorhersagekraft ist beschränkt.

Um sich die Schwierigkeiten bei der Beschreibung turbulenter Strömungen zu veranschaulichen, kann man sich ein konkretes Beispiel einer solchen Strömung, wie den Rauch einer Zigarette, vor Augen führen. Auf der einen Seite sieht man in der Strömung Strukturen, die eine innere Ordnung besitzen. Diese Strukturen werden oft anschaulich als Wirbel bezeichnet. Andererseits scheint das räumliche und zeitliche Verhalten der Strömung insgesamt irregulär oder chaotisch zu sein. Die Bewegung der Wirbelstrukturen und deren Anordnung im Raum folgt keinem direkt greifbaren Muster. Eine turbulente Strömung enthält also Komponenten der Ordnung und der Unordnung, sie ist eine Mischung aus Ordnung und Chaos. Dies macht es nicht nur schwierig, das Phänomen zu beschreiben, sondern auch es überhaupt eindeutig zu definieren. Während die Physik gelernt hat, mit Systemen umzugehen, die entweder aus sich heraus eine sehr starke Ordnung hervorbringen, wie dies etwa beim Laser der Fall ist, oder die völlig ungeordnet sind, wie im Fall des idealen Gases im thermischen Gleichgewicht, so gibt es für Systeme zwischen Ordnung und Chaos noch keine adäquate Theorie.

Von Seiten der Mathematik liegt der Schlüssel zum Verständnis der Schwierigkeiten in den Eigenschaften der Grundgleichung. Sie ist nichtlinear, hochdimensional und nichtlokal. Ersteres bedeutet, dass es Rückkopplungsprozesse gibt, die dazu führen, dass eine Wirkung nicht mehr proportional zu ihrer Ursache ist, sondern zwischen beiden ein komplizierterer Zusammenhang herrscht. Hochdimensional kann anschaulich so verstanden werden, dass das System aus vielen Teilen bzw. Freiheitsgraden besteht, die miteinander wechselwirken. Im Fall der Turbulenz äußert sich dies darin, dass die Grundgleichung eine partielle Differentialgleichung ist. Der dritte Punkt, die Nichtlokalität, bedeutet, dass sich eine Änderung an einem Ort auf entfernte Orte auswirkt. Alle drei Tatsachen erschweren die Rückführung der beobachtbaren Phänomene auf die Grundgleichung enorm.

Die eben beschriebenen Eigenschaften treffen aber nicht nur auf die Turbulenz zu. Es gibt in der Natur viele Systeme, die zumindest nichtlinear und hochdimensional sind. Sie gehören alle zur Klasse der komplexen Systeme. In dieser Klasse sind neben Beispielen aus der Physik, wie der Supraleitung, auch unzählige Phänomene aus

dem Bereich der Chemie, der Biologie und der Medizin, wie Muster bei chemischen Reaktionen, biologische Netzwerke oder die Dynamik des Herzmuskels, zu finden. Die Klasse der komplexen Systeme geht aber nicht nur über den Rahmen der Physik hinaus, sondern über den Rahmen der klassischen Naturwissenschaften generell. Auch die mathematische Beschreibung von ökonomischen oder soziologischen Systemen gehört dazu. Hier seien stellvertretend nur der Aktienmarkt oder die Dynamik des Verkehrs genannt.

Unter den komplexen Systemen gibt es Beispiele, die aus sich selbst heraus Zustände mit einer sehr starken Ordnung hervorbringen. Dazu gehört neben dem schon genannten Laser auch die Rayleigh-Bénard-Konvektion bei einer niedrigen Temperaturdifferenz. Hier ist es im Rahmen der Synergetik möglich, die entstehenden Strukturen auf die Grundgleichung zurückzuführen.

Es gibt aber auch Systeme, wie z. B. die Turbulenz, bei denen die Ordnung extrem vielschichtig ist und die Fülle der beobachtbaren Phänomene nicht oder nur in Einzelfällen direkt auf die Grundgleichung zurückgeführt werden kann. Ein weiteres Beispiel dafür ist das menschliche Gehirn. Hier gibt es zwar nicht die eine Grundgleichung wie im Beispiel der Turbulenz, aber prinzipiell sind die Gesetze, die die Leitung der elektrischen Impulse entlang der Nervenbahnen beschreiben, bekannt. Doch die Kopplung unzähliger Neuronen zu einem Netz und deren nichtlineare Interaktion lassen es noch nicht zu, dass man beispielsweise die Reaktion des neuronalen Netzes auf äußere Reize vorausberechnet.

Durch die Einbettung in die Klasse der komplexen Systeme hat das Phänomen der Turbulenz über seine Allgegenwärtigkeit in der Natur und seine Relevanz für technische Fragestellungen hinaus eine weitere Bedeutung. Es ist ein Paradigma für komplexe Systeme. Die Hoffnung besteht darin, dass Fortschritte bei der Entwicklung von Methoden zur Beschreibung der Turbulenz sich positiv auf die Forschung an anderen komplexen Systemen auswirken.

Ein weiteres Problem der Turbulenzforschung ist die Tatsache, dass der Begriff Turbulenz nicht einfach zu definieren ist. Bei den eingangs erwähnten Beispielen turbulenter Strömungen ist nicht restlos klar, wie stark und auf welchen Skalen diese Phänomene von der konkreten Geometrie oder dem konkreten Erzeugungsmechanismus beeinflusst werden. Gibt es Eigenschaften dieser Strömungen, die unabhängig von den Randbedingungen und damit universell sind? Oder gibt es, abhängig von den entsprechenden Randbedingungen, verschiedene Arten von Turbulenz? Die Überzeugung ist, dass alle turbulenten Strömungen zumindest einige universelle Eigenschaften teilen. Die Suche nach diesen universellen Eigenschaften ist eine der Hauptaufgaben der grundlegenden Turbulenzforschung und bildet einen Teil der Motivation für diese Arbeit.

Das vorangestellte Zitat von R. Feynman fasst die eben beschriebenen Probleme bei der Behandlung der Turbulenz zusammen. Man kennt die Grundgleichung, aber die Verbindung dieser Gleichung mit den in der Natur beobachtbaren Phänomenen ist

schwierig. Das Ziel der Turbulenzforschung besteht darin, diese Lücke zu schließen.

1.2 Motivation und Aufbau der Arbeit

Die Beschreibung turbulenter Strömungen kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Zum einen kann man sich an einen festen Ort in die Strömung stellen und dort die Geschwindigkeit messen. Tut man dies für jeden Raumpunkt in der Strömung, erhält man die sogenannte *Eulersche* Beschreibung der Turbulenz. Zum anderen kann man sich auch vorstellen, dass man ein kleines Partikel mit der Strömung mitschwimmen lässt und zu jedem Zeitpunkt seine Geschwindigkeit angibt. Man begibt sich also in ein lokal mit der Strömung mitbewegtes Koordinatensystem. Dies ist die sogenannte *Lagrangesche* Beschreibung der Turbulenz.

Die theoretische Untersuchung der Turbulenz erfolgte unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten. Zum einen gab es Bemühungen, direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung Entwicklungsgleichungen für bestimmte Observablen, wie z. B. die Geschwindigkeitsstatistik, abzuleiten. Beispiele für solche Bemühungen sind in [Lun67, Nov67] zu finden. Alternativ dazu wurde versucht, auf der Basis phänomenologischer Theorien die statistischen Eigenschaften solcher Größen vorherzusagen. Die wohl bekannteste Theorie in diesem Zusammenhang wurde von Kolmogorov 1941 entwickelt [Kol41a, Kol41b]. Im Rahmen dieser Theorie wurde zur Charakterisierung der Fluktuationen des turbulenten Feldes die Statistik der Eulerschen Geschwindigkeitsinkremente, also der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei festen Punkten in der Strömung, benutzt. Eine zentrale Aussage dieser Theorie ist, dass die statistischen Eigenschaften der Eulerschen Inkremente in der Skala, d. h. bei verschiedenen Abständen, selbstähnlich sind. Nachfolgende Experimente zeigten jedoch, dass dies nicht der Fall ist. Das nichtselbstähnliche Verhalten der Inkremente wird seitdem in der Turbulenz mit dem Begriff *Intermittenz* bezeichnet. In Folge der Arbeit von Kolmogorov und der experimentellen Befunde gab es umfangreiche Bemühungen, das Phänomen der Intermittenz in verbesserten phänomenologischen Modellen zu berücksichtigen [Fri95]. Alternativ zu den phänomenologischen Theorien gab es Ansätze, die Inkrementstatistik mittels stochastischer Prozesse zu beschreiben. Es konnte beispielsweise gezeigt werden, dass die Inkrementstatistik durch einen Markovprozess in der Skala angenähert werden kann [FP97a].

Bei allen diesen Ansätzen erfolgte die Beschreibung im Eulerbild. Dies lag unter anderem daran, dass für das Eulerbild experimentelle Daten einfacher erhoben werden können als für das Lagrangebild. Dennoch gab es schon einige frühe Arbeiten zur Lagrangeschen Statistik [Obo59, Cor59]. Seit der Verfügbarkeit numerischer Daten [YP89] und besonders seit der Verfügbarkeit experimenteller Ergebnisse [VSB98, MMMP01] hat sich die Untersuchung der Turbulenz im Lagrangebild intensiviert [Yeu02, TB09]. Zwei Schwerpunkte aus Sicht der Grundlagenforschung lagen

dabei auf der Untersuchung der Intermittenz im Lagrangebild und der Übertragung der phänomenologischen Modelle vom Euler- in das Lagrangebild [Bor93, BBC⁺04a].

Turbulente Strömungen wie auch alle anderen Naturvorgänge spielen sich im dreidimensionalen Raum ab. Dennoch ist die Beschäftigung mit Turbulenz in zwei Dimensionen ein aktives Forschungsfeld [Tab02]. Das Interesse an zweidimensionaler Turbulenz hat hauptsächlich zwei Gründe. Zum einen können einige geophysikalische Systeme, wie z. B. Planetenatmosphären, aufgrund ihrer geringen Höhe relativ zu ihrer horizontalen Ausdehnung als quasi zweidimensional angenommen werden. Daneben gibt es in der Plasmaphysik Systeme, bei denen die Bewegung des Plasmas in einer Richtung durch Magnetfelder stark unterdrückt wird. Auch hier kann eine Beschreibung in nur zwei Dimensionen sinnvoll sein. Darüber hinaus ist die Beschäftigung mit zweidimensionaler Turbulenz interessant, da hier Phänomene wie die sogenannte inverse Energiekaskade und die Bildung großskaliger kohärenter Wirbel zu beobachten sind, die man in dreidimensionaler Turbulenz nicht findet. Das Hauptaugenmerk der Grundlagenforschung in diesem Bereich lag dabei in der Vergangenheit auf der Untersuchung der inversen Energiekaskade und der Eulerschen Statistik des Geschwindigkeitsfeldes sowie dem Vergleich dieser Ergebnisse mit den Vorhersagen der Kolomogorovschen Theorie von 1941. Ein zentrales Ergebnis dieser Bemühungen ist, dass hier im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall die Inkrementstatistik in der inversen Kaskade im Einklang mit den Vorhersagen der Kolmogorovschen Theorie ist, d. h. es gibt keine Eulersche Intermittenz in zwei Dimensionen.

Bezüglich des Lagrangebildes gibt es in zweidimensionaler Turbulenz allerdings nur sehr wenige Ergebnisse. Genau hier liegt der Ansatzpunkt der vorliegenden Arbeit. Zum ersten Mal soll die Lagrangesche Statistik in der inversen Energiekaskade zweidimensionaler Turbulenz systematisch untersucht werden. Hierdurch wird ein Vergleich der Lagrangeschen Statistik in zwei- und dreidimensionaler Turbulenz möglich. Dieser Vergleich ist besonders unter dem Aspekt der Universalität der Eigenschaften im Lagrangebild interessant, da sich die beiden Systeme im Eulerbild stark unterscheiden. Im zweidimensionalen Fall gibt es im Eulerbild keine Intermittenz, während es in drei Dimensionen Eulersche Intermittenz gibt. Darüber hinaus soll der Zusammenhang zwischen statistischen Größen im Eulerbild und im Lagrangebild näher untersucht werden.

Teil I: Grundlagen

Der erste Teil der Arbeit dient dazu, in die physikalischen und mathematischen Grundlagen einzuführen, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Im Rahmen von *Kapitel 2* wird die Grundgleichung der Hydrodynamik inkompressibler Fluide, die Navier-Stokes-Gleichung, eingeführt. Neben der Formulierung für die Geschwindigkeit wird auch die Formulierung für die Rotation der Geschwindigkeit, der sogenannten Wirbelstärke, eingeführt. Nach der Betrachtung der Erhaltungsgrößen wird im

Rahmen dieses Kapitels auch auf den Wirbelstreckungsterm eingegangen, der nur in drei Dimensionen vorkommt. Am Ende des Kapitels wird das Lagrangebild eingeführt.

Kapitel 3 führt die Begriffe ein, die für die statistische Behandlung der Turbulenz benötigt werden. Dies geschieht in einiger Ausführlichkeit, da die genaue Kenntnis der Definition der statistischen Größen an verschiedenen Stellen der Arbeit von großer Bedeutung ist. Dabei stehen im ersten Teil die Verteilungsfunktionen und die Größen, mit denen sie charakterisiert werden, im Vordergrund. Im zweiten Teil des Kapitels werden kurz die im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit wichtigsten Evolutionsgleichungen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgestellt.

In *Kapitel 4* wird auf die statistische Beschreibung der Turbulenz eingegangen. Im ersten Teil wird die Notwendigkeit eines statistischen Zuganges erläutert und angedeutet, welche Form ein solcher Zugang hat. Dabei wird besonderer Wert auf die Darstellung der Beziehung zwischen statistischen Observablen im Eulerbild und im Lagrangebild gelegt. Der zweite Teil stellt die für diese Arbeit relevanten phänomenologischen Theorien, darunter auch die K41-Theorie von Kolmogorov, vor. Auch der Begriff der Intermittenz und Erweiterungen der K41-Theorie sind Thema des zweiten Teils. Zum Schluss wird noch die Übertragung der phänomenologischen Theorien auf das Lagrangebild diskutiert.

Teil II: Inverse Kaskade

Der zweite Teil der Arbeit widmet sich der inversen Energiekaskade der zweidimensionalen Turbulenz. Hier werden die Voraussetzungen zur numerischen Simulation zweidimensionaler Turbulenz erarbeitet und die Simulationsdaten soweit wie möglich mit den in der Literatur vorhandenen Ergebnissen zur Eulerschen Statistik verglichen.

In Rahmen von *Kapitel 5* wird zunächst anhand der Herleitung des 4/5-Gesetzes gezeigt, welche Voraussetzungen nötig sind, um eine stationäre inverse Energiekaskade zu erhalten. Es zeigt sich, dass neben dem Kraftterm, der Energie in das System einbringt, ein weiterer Dissipationsterm nötig ist, um Stationarität zu gewährleisten. Mittels dieser Erkenntnisse werden im nächsten Abschnitt konkrete Ausdrücke für den Kraftterm und den zusätzlichen Dissipationsterm erarbeitet und davon ausgehend zwei Simulationstypen, die sich bei der Wahl der Kraft und der Dissipation unterscheiden, festgelegt. Bevor dann der stationäre Energiefluss und das stationäre Spektrum für die beiden Simulationstypen analysiert werden, wird noch kurz auf den Aufbau der inversen Kaskade eingegangen. Zum Schluss werden an der Struktur des Vortizitätsfeldes die grundlegenden Unterschiede zwischen der Struktur zwei- und dreidimensionaler Strömungen deutlich gemacht.

In *Kapitel 6* steht die Analyse der Statistik des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes mittels der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente im Mittelpunkt. Dazu werden

zunächst die Verteilungsfunktionen der Inkremente auf Selbstähnlichkeit untersucht. Eine genauere Charakterisierung des Skalierungsverhaltens der Verteilungsfunktionen anhand der Strukturfunktionen ermöglicht einen weiteren Vergleich mit bestehenden Theorien und Ergebnissen aus der Literatur. Hier zeigen sich auch deutliche Unterschiede zwischen den beiden Simulationstypen. Zum Abschluss des Kapitels wird die Inkrementstatistik auf Markoveigenschaften untersucht, da dies bisher nur für dreidimensionale Turbulenz geschehen ist.

Teil III: Lagrangesche Statistik

Der dritte Teil bildet den zentralen Abschnitt der vorliegenden Arbeit. Nachdem im zweiten Teil die Voraussetzungen zur numerischen Simulation der stationären inversen Energiekaskade geschaffen wurden, kann nun die Lagrangesche Statistik in zweidimensionaler Turbulenz untersucht und mit den entsprechenden Observablen in dreidimensionaler Turbulenz verglichen werden. Dabei werden auch für die Lagrangesche Statistik in drei Dimensionen neue Ergebnisse erarbeitet.

In *Kapitel 7* wird anhand der Teilchenbahnen ein erster Eindruck vom Verhalten der Teilchen in einer zweidimensionalen Strömung gewonnen. Darüber hinaus wird der transport der Teilchen mit Hilfe des mittleren Verschiebungsquadrates der Teilchenposition charakterisiert und mit einem Diffusionsprozess verglichen. Darüber hinaus wird die Erhaltung der Inkompressibilität bei der numerischen Integration der Teilchenbahnen untersucht.

Während *Kapitel 8* der Festlegung der Lagrangeschen Zeitskalen anhand der Autokorrelation der Lagrangeschen Geschwindigkeiten dient, beschäftigt sich *Kapitel 9* mit der Beschleunigung der Teilchen. Dabei werden sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen die Beschleunigungsverteilung sowie die Autokorrelationsfunktionen der Beschleunigung untersucht. Um mehr über die Beschleunigung eines Teilchens entlang seiner Bahn zu lernen, wird sowohl für den zwei- als auch für den dreidimensionalen Fall die Beschleunigung auf Markoveigenschaften untersucht. Zum Schluss des Kapitels werden auch die Kreuzkorrelationen zwischen den Komponenten der Beschleunigung analysiert.

Die Observablen, die den Übergang zwischen der Beschleunigungsverteilung und der Geschwindigkeitsverteilung charakterisieren, sind die Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente. Ihre statistischen Eigenschaften werden in *Kapitel 10* genauer untersucht. Neben der Beschleunigungsverteilung stellen die Inkrementverteilungen die in den letzten Jahren am meisten untersuchten Observablen im Lagrangebild in drei Dimensionen dar. An dieser Stelle werden sie erstmalig auch für zweidimensionale Turbulenz untersucht. Neben dem zeitabhängigen Verhalten der Verteilungsfunktionen werden auch die Strukturfunktionen betrachtet. Alternativ zu den Strukturfunktionen werden auch die Kumulanten der Inkrementverteilungen untersucht, da sie sich sehr gut dazu eignen, den Übergang von einer nichtgaußschen zu einer

Gaußverteilung zu charakterisieren. Diese Untersuchung ist auch für den dreidimensionalen Fall neu.

Die Untersuchung der Inkrementstatistik wirft die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Observablen im Euler- und im Lagrangebild auf. Aus diesem Grund wird der Übergang zwischen den beiden Beschreibungsweisen in *Kapitel 11* genauer untersucht. Im Mittelpunkt steht dabei die Ableitung einer Übersetzungsregel, mit deren Hilfe Inkremente aus dem Eulerbild in das Lagrangebild umgerechnet werden. Die bei dieser Übersetzung wichtigen statistischen Größen werden innerhalb dieses Kapitels auch numerisch untersucht.

In *Kapitel 12* werden die in den vorangehenden Kapiteln gemachten Erfahrungen dazu benutzt, auf Basis gekoppelter Langevingleichungen ein Modell für die Beschleunigung eines Teilchens in zweidimensionaler Turbulenz aufzustellen. Dazu wird zunächst kurz auf die Modellierung von Nichtmarkovprozessen durch Langevingleichungen und die Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizienten eingegangen. Mit Hilfe dieser Informationen wird ein aus zwei gekoppelten Langevingleichungen bestehendes Modell für die Lagrangesche Eintailchenstatistik aufgestellt.

Teil I

Grundlagen

2 Die Grundgleichungen

Die theoretische Beschreibung strömender Flüssigkeiten und Gase fußt auf der Navier-Stokes-Gleichung. Ihr und ihrer dimensionslosen Formulierung ist der erste Teil des vorliegenden Kapitels gewidmet. Des Weiteren wird auch auf eine alternative Darstellung der Navier-Stokes-Gleichung eingegangen, die sich der Wirbelstärke an Stelle der Geschwindigkeit zur Beschreibung der Strömungen bedient. Anhand dieser Formulierung lässt sich auch der Unterschied zwischen der Physik zwei- und dreidimensionaler Turbulenz anschaulich klarmachen. Im zweiten Teil des Kapitels wird die sogenannte *Lagrangesche* Beschreibung eingeführt. Sie stellt den Wechsel von einem festen Bezugssystem in ein Koordinatensystem dar, das sich lokal mit der Strömung mitbewegt. Das bedeutet, dass Observablen wie Geschwindigkeit oder Beschleunigung nicht mehr an festen Orten, sondern entlang von Bahnen mit der Strömung mitschwimmender Teilchen betrachtet werden.

2.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

Die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t')$ eines inkompressiblen Fluids wird durch die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu' \Delta \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}' \quad (2.1)$$

beschrieben [Nav23, Sto43]. Dabei ist ρ die Dichte und ν' die Viskosität des Fluids. Auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen noch der Druck $p'(\mathbf{x}', t')$ und eine von außen auf das Fluid einwirkende Kraft $\mathbf{f}'(\mathbf{x}', t')$. Physikalisch gesehen ist die Navier-Stokes-Gleichung eine Bilanzgleichung für die Impulsdichte $\rho \mathbf{u}'$. Sie kann im wesentlichen durch Anwendung des Newtonschen Kraftgesetzes auf ein Element des Fluids hergeleitet werden (siehe z. B. [Dav04]). Für eine vollständige Beschreibung wird zusätzlich zu (2.1) noch die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}') = 0$ benötigt. Aufgrund der angenommenen Inkompressibilität vereinfacht sie sich zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (2.2)$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t' = 0) = \mathbf{u}'_0$ und entsprechenden Randbedingungen komplettiert sie Gleichung (2.1). Es wird angenommen, dass alle Phänomene der Hydrodynamik inkompressibler Fluide durch die Gleichungen (2.1) und

(2.2) beschrieben werden. In der theoretischen Turbulenzforschung werden sie daher axiomatisch an den Anfang aller Überlegungen gestellt.

Für die weiteren Betrachtungen soll die Navier-Stokes-Gleichung zunächst dimensionslos formuliert werden. Dazu werden die feste Längenskala L und die feste Geschwindigkeit U eingeführt. Die Dichte ρ ist dabei konstant. Mit Hilfe der reskalierten Größen

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{U}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}'}{L}, \quad t = \frac{U}{L}t', \quad p = \frac{1}{\rho U^2}p', \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\rho U^2 L^2}\mathbf{f}' \quad (2.3)$$

kann die Navier-Stokes-Gleichung jetzt in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

geschrieben werden. Die dimensionslose Version der Gleichung enthält noch den Parameter

$$Re = \frac{1}{\nu} = \frac{UL}{\nu'}, \quad (2.5)$$

der als *Reynoldszahl* bezeichnet wird. Gleichung (2.4) wird nun durch die dimensionslose Version von (2.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.6)$$

komplettiert. Bildet man die Divergenz von (2.4) und benutzt die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes, so ergibt sich eine Poissongleichung für den Druck:

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.7)$$

Zur Lösung der Poissongleichung müssen noch Randbedingungen festgelegt werden. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass das betrachtete Volumen unendlich ausgeht und Randwerte vernachlässigt werden können. Die Lösung von (2.7) lautet

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_V d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}', t). \quad (2.8)$$

wobei $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ die Lösung zu $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, also die Greensfunktion des Laplaceoperators ist. Die Greensfunktion hat in drei bzw. zwei Dimensionen die Form

$$G^{3d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \text{bzw.} \quad G^{2d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (2.9)$$

Zur Berechnung des Druckes an einem Ort muss über das gesamte Geschwindigkeitsfeld integriert werden. Der Druck ist also eine nichtlokale Größe. Die Dynamik der Flüssigkeit an einem bestimmten Punkt wird daher durch das Geschwindigkeitsfeld im ganzen Raum beeinflusst.

Die Schwierigkeiten bei der mathematischen Behandlung von Gleichung (2.4) haben vor allem zwei Ursachen. Zum einen ist die Navier-Stokes-Gleichung, wie eben gezeigt, nichtlokal. Dadurch wird sie zu einer Integro-Differentialgleichung. Zum anderen ist sie durch das Auftreten des Konvektionsterms $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ eine nichtlineare Gleichung. Hierdurch entfällt die Möglichkeit, das Superpositionsprinzip zu nutzen. Die mathematischen Schwierigkeiten drücken sich zum Beispiel dadurch aus, dass bis heute nicht bewiesen werden konnte, ob (2.4) im dreidimensionalen Fall bei großen Reynoldszahlen eindeutige stetig differenzierbare Lösungen besitzt [Doe09].

An dieser Stelle soll noch auf die Bedeutung der Reynoldszahl eingegangen werden. In der dimensionslosen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichung ist sie der einzige Kontrollparameter und bestimmt damit die Eigenschaften der Strömung. Diese Tatsache ist z. B. dann interessant, wenn die Strömung um ein kleines Schiffsmodell und um ein Schiff miteinander verglichen werden sollen. Solange (durch die entsprechende Wahl von U und ν') die Reynoldszahl die gleiche ist, stimmen auch die Strömungseigenschaften in beiden Fällen überein. Dieses sogenannte *Ähnlichkeitsprinzip* bildet die Voraussetzung dafür, dass in der Hydrodynamik Modelle zur Untersuchung von Strömungseigenschaften größerer Objekte benutzt werden können.

Der Wert der Reynoldszahl ist ein Maß für den Turbulenzgrad. Je größer sie ist, desto turbulenter ist der Zustand der Strömung. Je nach Situation spricht man ab einer Größenordnung von $Re \sim 10^3$ bis $Re \sim 10^4$ vom Übergang zur Turbulenz. Für technische Fragestellungen wie z. B. dem Flugzeugbau liegen die Reynoldszahlen im Bereich von $Re \sim 10^9$. Bei astrophysikalischen Fragestellungen wie Supernovae-Explosionen können die Reynoldszahlen größer als $Re \sim 10^{14}$ werden.

2.1.1 Die Wirbeltransportgleichung

Anstatt eine Strömung durch die Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ zu charakterisieren, kann auch die *Wirbelstärke* bzw. *Vortizität*

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

zur Beschreibung herangezogen werden. Anschaulich gesehen ist die Wirbelstärke die doppelte Winkelgeschwindigkeit eines sich am Ort \mathbf{x} befindlichen infinitesimal ausgedehnten Flüssigkeitselementes. Die Bewegungsgleichung für die Vortizität

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (2.11)$$

erhält man durch Anwendung der Rotation auf die Navier-Stokes-Gleichung. Im Folgenden wird diese Gleichung als *Wirbeltransportgleichung* bezeichnet. Der Term $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ auf der linken Seite beschreibt den Transport der Wirbelstärke durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Der Term

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

ist der sogenannte *Wirbelstreckungsterm*. Eine für die numerische Behandlung günstigere Formulierung der Wirbeltransportgleichung ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.13)$$

In dieser Form kann der nichtlineare Term direkt zur Berechnung des Druckes mit Hilfe der Poissongleichung

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

wiederverwendet werden.

Übergang zu zwei Dimensionen

Bei zweidimensionalen Strömungen liegt der Geschwindigkeitsvektor in einer Ebene (z. B. $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$). Die Wirbelstärke steht somit immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = (0, 0, \partial_x u_y - \partial_y u_x)$), wodurch der Wirbelstreckungsterm (2.12) verschwindet. Die Wirbeltransportgleichung vereinfacht sich damit in zwei Dimensionen zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (2.15)$$

Im Rahmen der Beschreibung durch die Wirbeltransportgleichung unterscheiden sich zwei- und dreidimensionale Turbulenz somit durch das Fehlen des Wirbelstreckungsterms in zwei Dimensionen. Die anschauliche Bedeutung dieses Terms wird in Abbildung 2.1 gezeigt.

Auch in zwei Dimensionen wird die in (2.13) gezeigte Version der Wirbeltransportgleichung für numerische Berechnungen verwendet, da sie die einfache Wiederverwertung des nichtlinearen Terms zur Druckberechnung zulässt. Anzumerken ist noch, dass die Vortizität im Falle zweidimensionaler Strömungen nur eine Komponente besitzt. Das heißt, dass man in Gleichung (2.15) bzw. in der zweidimensionalen Version von (2.13) die Vortizität als Skalar auffassen und anstatt $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ auch $\omega(\mathbf{x}, t)$ schreiben kann.

2.1.2 Erhaltungsgrößen

Bei einer idealen Flüssigkeit ($\nu = 0$) und der Abwesenheit äußerer Kräfte bleiben in zwei- und dreidimensionalen Strömungen die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} \int_V d^n x \mathbf{u}^2 \quad \text{mit} \quad n = 2, 3. \quad (2.16)$$

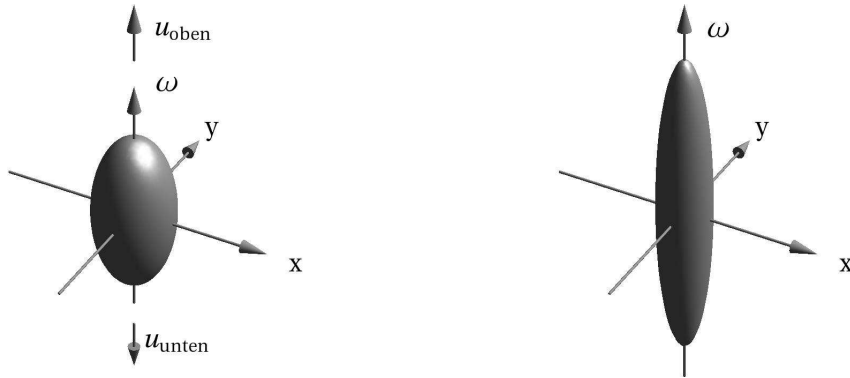


Abbildung 2.1 Den Mechanismus des Wirbelstreckungsterms kann man sich anhand eines kleinen Fluidelementes vorstellen, welches eine Gesamtwirbelstärke ω parallel zur z -Richtung hat und das Trägheitsmoment I besitzt. In diesem Beispiel befindet es sich in einer Strömung, bei der sich die z -Komponente der Geschwindigkeit entlang des Fluidelementes ändert. Durch die verschiedenen Geschwindigkeiten an den Enden des Fluidelementes wird es langgezogen. Aufgrund der Inkompressibilität wird es dabei schmaler, wodurch das Trägheitsmoment und damit der Drehimpuls abnimmt. Soll der Drehimpuls erhalten bleiben (siehe Abschnitt 2.1.2), muss die Vortizität des Fluidelementes größer werden. Dieser Mechanismus kann auch umgekehrt zur Erniedrigung der Wirbelstärke führen.

und der Drehimpuls

$$L = \int_V d^n x \mathbf{x} \times \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad n = 2, 3 \quad (2.17)$$

erhalten. Es gilt somit:

$$\frac{d}{dt} E = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} L = 0. \quad (2.18)$$

Die Erhaltung des Drehimpulses gilt dabei sogar für jedes endliche Volumen innerhalb der Flüssigkeit [Dav04]. Dies ist wichtig zum Verständnis des Mechanismus des Wirbelstreckungsterms. Analog zum Quadrat der Geschwindigkeit kann die Größe

$$Z = \frac{1}{2} \int_V d^n x \omega^2 \quad \text{mit} \quad n = 2, 3 \quad (2.19)$$

für die Wirbelstärke definiert werden. Sie wird *Enstrophie* genannt. Während der Wirbelstreckungsterm in drei Dimensionen Enstrophie erzeugen und vernichten kann, gilt in zwei Dimensionen

$$\frac{d}{dt} Z = 0. \quad (2.20)$$

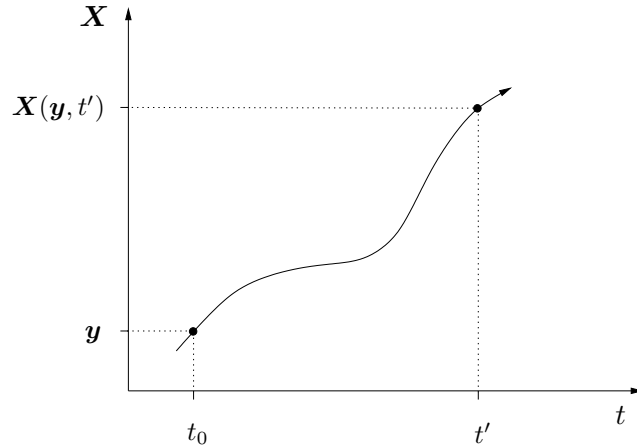


Abbildung 2.2 Schematische Darstellung der Trajektorie eines Tracers

Dieser Umstand führt, wie in Kapitel 5 noch gezeigt wird, zu den Unterschieden in der Richtung des Energietransportes. Neben der Enstrophie sind in zwei Dimensionen die Integrale über alle Potenzen von ω Erhaltungsgrößen [DG95], d. h.

$$\frac{d}{dt} \int_V d^2x \omega^n = 0. \quad (2.21)$$

Wichtig zu beachten ist jedoch, dass es sich bei fast allen Experimenten und numerischen Simulationen zur Turbulenz, bei denen die Gesamtenergie und der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt, um Fließgleichgewichte handelt. In diesen Fällen wird der Verlust von Energie oder Drehimpuls durch entsprechende äußere Kräfte wieder ausgeglichen.

2.2 Das Lagrangebild

Bisher wurde das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ an ortsfesten Punkten \mathbf{x} betrachtet. Dies ist das sogenannte *Eulersche* Bild. Alternativ kann auch ein mitbewegtes Koordinatensystem, das sogenannte *Lagrangebild* betrachtet werden. In diesem Fall wird die turbulente Strömung durch die Orte und Geschwindigkeiten mitbewegter Teilchen – im Folgenden *Tracer*, *Lagrange-Teilchen* oder einfach *Teilchen* genannt – charakterisiert. Der Startpunkt der Bahn bzw. Trajektorie $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ des Teilchens wird durch

$$\mathbf{X}(t = t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \quad (2.22)$$

festgelegt. Die Geschwindigkeit des Teilchens entspricht der lokalen Geschwindigkeit der Strömung am Ort des Teilchens, d. h.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t). \quad (2.23)$$

Für eine vollständige Beschreibung im Lagrangebild müssen noch die auf das Teilchen wirkenden Kräfte, die eine Geschwindigkeitsänderung bewirken, festgelegt werden. Diese Kräfte können aus der Navier-Stokes-Gleichung bestimmt werden. Dazu wird (2.23) noch einmal nach der Zeit abgeleitet und man erhält die totale zeitliche Ableitung des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t, \mathbf{y}) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})}, \quad (2.24)$$

ausgewertet am Aufenthaltsort des Tracers. Die Geschwindigkeitsänderung und damit die Beschleunigung eines Tracers ist demnach mit (2.4) durch

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{y}) = [-\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} \quad (2.25)$$

festgelegt. Zusammen mit den Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \quad (2.27)$$

bestimmt sie vollständig die Trajektorie des Teilchens. Die Beschleunigung ist offensichtlich eine zentrale Größe in der Beschreibung der Turbulenz.

Bisher wurde die Trajektorie eines Teilchens mit dem Startpunkt $\mathbf{X}(t = t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ betrachtet. Die Lagrangesche Beschreibung ist dann äquivalent zum Eulerbild, wenn das turbulente Feld an allen Punkten charakterisiert wird. Dazu stellt man sich vor, dass zu einem Zeitpunkt $t = 0$ an jedem Raumpunkt \mathbf{y} ein Teilchen startet. Über den Zusammenhang $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ wird jeder Startpunkt \mathbf{y} auf die aktuelle Position des Tracers abgebildet (siehe Abbildung 2.2). Damit zu allen Zeiten alle Raumpunkte mit Tracern abgedeckt sind, muss die Abbildung volumenerhaltend sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{Det} \left[\frac{\partial\mathbf{X}(t, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}} \right] = 1 \quad (2.28)$$

gilt. Im Fall, dass (2.28) nicht erfüllt ist, können sich Tracer an bestimmten Punkten ansammeln. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass die Dichte der Strömung an diesen Punkten größer ist als in der Umgebung und das Fluid damit kompressibel ist. Gleichung (2.28) folgt daher direkt aus der Forderung nach der Inkompressibilität des Fluids (2.6).

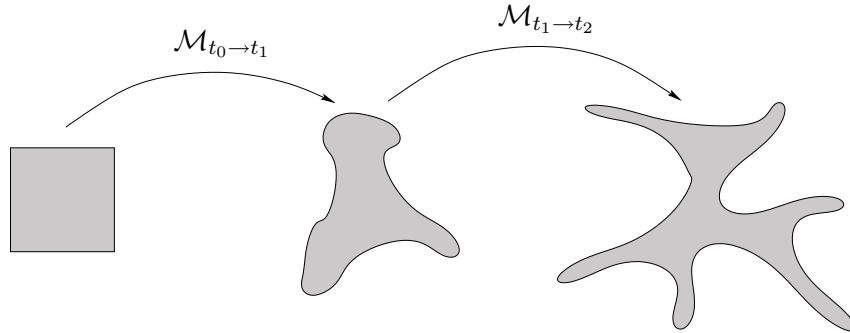


Abbildung 2.3 Das Lagrangebild definiert eine Abbildung $\mathcal{M}_{t_i \rightarrow t_j} : \mathbf{X}(t = t_i) \subset \mathbb{R}^{2,3} \rightarrow \mathbf{X}(t = t_j) \subset \mathbb{R}^{2,3}$, welche die turbulente Strömung vollständig beschreibt. Die Teilchenorte zur Zeit t_i werden durch \mathcal{M} in die Teilchenorte zur Zeit t_j überführt.

Eine weitere interessante Eigenschaft des Lagrangebildes wird deutlich, wenn man die Wirbeltransportgleichung entlang der Bahn eines Tracers betrachtet. Definiert man die Wirbelstärke entlang der Trajektorie als

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t), \quad (2.29)$$

so wird Gleichung (2.11) zu

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) = [\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f}]_{\mathbf{X}(t, \mathbf{y})}. \quad (2.30)$$

Die Wirbelstärke entlang einer Trajektorie wird demnach durch den Wirbelstreckungsterm, die viskose Dissipation und die äußere Kraft beeinflusst. In zwei Dimensionen entfällt noch der Wirbelstreckungsterm. Das heißt, dass im Fall einer idealen Flüssigkeit ($\nu = 0$) ohne Antrieb in zwei Dimensionen die Wirbelstärke entlang der Trajektorie erhalten bleibt und

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) = 0 \quad (2.31)$$

gilt, während sie in drei Dimensionen selbst im Falle einer idealen Flüssigkeit nicht konstant bleibt.

3 Werkzeuge der Statistik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe und Methoden eingeführt, die für eine statistische Beschreibung turbulenter Strömungen notwendig sind. Im ersten Teil werden die Begriffe Zufallsvariable und Verteilungsfunktion behandelt. Sie bilden die Grundlage für die Charakterisierung der statistischen Systemeigenschaften. Die damit verknüpften Begriffe wie Kumulanten und Momente von Verteilungsfunktionen werden ebenfalls eingeführt. Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit Evolutionsgleichungen für Verteilungsfunktionen. Zuerst wird kurz auf die Herleitung solcher Gleichungen auf Basis der deterministischen Grundgleichungen des Systems eingegangen. Anschließend wird die Theorie der stochastischen Prozesse, insbesondere der Markovprozesse, skizziert.

3.1 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

3.1.1 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden soll ein physikalischer Prozess betrachtet werden, dem wir die reelle Variable X zuordnen. Dabei repräsentiert X eine Realisierung des physikalischen Prozesses, z. B. die Messung einer Geschwindigkeit. Für ein bestimmtes X wie z. B. $X = 10$ m/s gibt es zunächst zwei Möglichkeiten. Entweder das Ereignis $X = 10$ m/s tritt mit Sicherheit ein oder das Ereignis ist unmöglich und tritt mit Sicherheit nicht ein. Die dritte Möglichkeit besteht darin, dass nicht mit Sicherheit feststeht, ob $X = 10$ m/s eintritt oder nicht. In diesem Fall bezeichnen wir X als Zufallsvariable.

Einem solchen Ereignis kann jetzt eine Zahl zwischen 0 (tritt mit Sicherheit nicht ein) und 1 (tritt mit Sicherheit ein) zugeordnet werden, die die *Wahrscheinlichkeit* $P(X)$ beschreibt, mit der das Ereignis X zwischen x_a und x_b liegt. Es gilt also

$$P(X) = P(x_a < X < x_b). \quad (3.1)$$

Dabei wurde die unabhängige *Ereignisraumvariable* x eingeführt. Diese Definition lässt sich problemlos auf Situationen mit mehreren Zufallsvariablen verallgemeinern. Wenn also dem Ereignis, dass X_1, \dots, X_n gemeinsam auftreten, eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden soll, gilt:

$$P(X_1, \dots, X_n) = P(x_{1a} < X_1 < x_{1b}, \dots, x_{na} < X_n < x_{nb}). \quad (3.2)$$

3.1.2 Verteilungsfunktionen

Die Zufallsvariable X wird vollständig durch eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* bzw. *Verteilungsfunktion* beschrieben. Die Verteilungsfunktion $f(x)$ von X wird so definiert, dass die Wahrscheinlichkeit das Ereignis X in einem kleinen Intervall Δx um x zu finden gleich $f(x)\Delta x$ ist. Die Wahrscheinlichkeit X im Intervall zwischen x_a und x_b zu finden, ist dann das Integral über $f(x)$ bezüglich dieses Intervalls:

$$P(x_a < X < x_b) = \int_{x_a}^{x_b} dx f(x). \quad (3.3)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist normiert, was bedeutet, dass für das Integral über den kompletten Definitionsbereich der Zufallsvariable

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx f(x) = 1 \quad (3.4)$$

gilt. Im Folgenden wird angenommen, dass $x_{min} \rightarrow -\infty$ und $x_{max} \rightarrow \infty$. Die physikalische Einheit der Verteilungsfunktion ist der Kehrwert der Einheit der Zufallsvariable X , damit $f(x)\Delta x$, und somit die Wahrscheinlichkeit selber dimensionslos ist. Die Gesamtwahrscheinlichkeit muss unter einer Transformation der Variablen $x \rightarrow y = h(x)$ erhalten bleiben. Somit gilt

$$f(x)\Delta x = g(y)\Delta y \quad (3.5)$$

und die Verteilungsfunktion transformiert sich gemäß

$$g(y) = f(x) |df/dx|^{-1}. \quad (3.6)$$

Eine der wichtigsten Verteilungsfunktionen ist die *Normal-* bzw. *Gaußverteilung*. Sie hat die Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(m_1 - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.7)$$

und wird durch die Parameter m_1 und σ , deren Bedeutung später noch klar wird, festgelegt.

Multivariate Verteilungen

Analog zur Definition (3.3) der Verteilungsfunktion für eine einzelne Zufallsvariable kann die Prozedur für mehrere Zufallsvariablen wiederholt werden. Dies führt zu

$$P(x_{1a} < X_1 < x_{1b}, \dots, x_{na} < X_n < x_{nb}) = \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} dx_1 \dots \int_{x_{na}}^{x_{nb}} dx_n f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.8)$$

und damit zur Definition der *Verbundverteilung* $f(x_1, \dots, x_n)$, die Informationen über das gemeinsame Auftreten von X_1, \dots, X_n liefert. Aus der Verbundverteilung lassen sich einzelne Variablen durch Integration eliminieren:

$$\int dx_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n). \quad (3.9)$$

Man erhält die sogenannte *Marginalverteilung*. Eine weitere wichtige Frage ist die nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Ereignisse X_1, \dots, X_m unter der Bedingung, dass die Ereignisse X_{m+1}, \dots, X_n mit Sicherheit eintreten. Dies führt im Sinne der Ereignisraumvariablen x_1, \dots, x_m zur Definition der *bedingten Verteilung*:

$$p(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) := \frac{f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}{f(x_{m+1}, \dots, x_n)}. \quad (3.10)$$

Die Variablen rechts vom vertikalen Strich sind bei dieser Schreibweise die Variablen, auf die bedingt wird. Ist $f(x_{m+1}, \dots, x_n)$ an einer Stelle gleich null, so ist die bedingte Verteilung an dieser Stelle nicht definiert. Darüber hinaus besitzt die bedingte Verteilung alle Eigenschaften einer normalen Verteilungsfunktion, d. h. sie ist nicht negativ und normiert. Aus (3.10) folgt sofort

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) f(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (3.11)$$

d. h., dass Verbundverteilungen mit Hilfe der bedingten Verteilung aufgebrochen werden können. Anhand der bedingten Verteilungen kann man auch die Bedeutung der statistischen Unabhängigkeit klar machen. Dazu betrachtet man die Verbundverteilung $f(x_1, x_2)$. Wenn es für die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes X_1 zu erhalten egal ist, welchen Wert X_2 angenommen hat, dann darf die Bedingung in $p(x_1 | x_2)$ keinen Einfluss haben. In diesem Fall gilt, dass die bedingte Verteilung gleich der Marginalverteilung ist:

$$p(x_1 | x_2) = f(x_1). \quad (3.12)$$

Daraus folgt, dass die Verbundverteilung faktorisiert

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad (3.13)$$

und damit ergibt sich, dass X_1 und X_2 *statistisch unabhängig* voneinander sind.

Funktionen von Zufallsvariablen

Wie schon bei der Variablentransformation für die Einpunktverteilung ist die Frage von Interesse, wie die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable Z , die eine Funktion

$$Z = h(X_1, \dots, X_n) \quad (3.14)$$

der Zufallsvariablen X_i ist, aussieht. Allgemein kann die Verteilungsfunktion durch

$$f(z) = \int dx_1 \dots \int dx_n \delta(z - h(x_1, \dots, x_n)) f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.15)$$

berechnet werden. Für die Addition zweier Zufallsvariablen $Z = X_1 + X_2$ erhält man

$$f(z) = \int dx_1 \int dx_2 \delta(z - x_1 - x_2) f(x_1, x_2) = \int dx_1 f(x_1, z - x_1). \quad (3.16)$$

Im Fall statistischer Unabhängigkeit ist die Verteilung der Summe die Faltung

$$f(z) = \int dx_1 f(x_1) f(z - x_1) \quad (3.17)$$

der Einzelverteilungen.

Notation

An dieser Stelle sollen noch zwei Bemerkungen zur Notation von Verteilungsfunktionen gemacht werden. In vielen Fällen ist die betrachtete Zufallsvariable noch von Parametern abhängig, zum Beispiel $X = X(r, t)$. In diesem Fall werden die Ereignisraumvariablen und die Parameter durch ein Semikolon getrennt, d. h. $f(x; r, t)$ ist bezüglich der Variablen links vom Semikolon eine Wahrscheinlichkeitsdichte und bezüglich der anderen Variablen eine normale Funktion.

Für bedingte Verteilungen wie $f(x_1|x_2; r_1, t_1, r_2, t_2)$ gilt diese Schreibweise genauso. Hier ist noch zu beachten, dass es anstatt $f(x_1|x_2)$ ausführlich $f(x_1|x_2 = X_2)$ geschrieben werden müsste, aber meistens die Kurzform benutzt wird. Dies ist an sich nicht problematisch, aber in manchen Fällen ist es hilfreich, genau zu wissen, welche Zufallsvariable X der entsprechenden Ereignisraumvariable x zugeordnet ist. Es kann in manchen Situationen dazu kommen, dass die Zufallsvariable zuerst von einem Parameter a abhängt, also $x = X(a)$ gilt, aber nach einer Umformung (z. B. Änderung der Messvorschrift für die Zufallsvariable) $x = X(b)$ gilt.

Erwartungswerte

Eine weitere wichtige Größe ist der *Erwartungswert* einer Funktion $Q(X)$ der Zufallsvariablen X , welcher durch

$$\langle Q(X) \rangle = \int dx Q(x) f(x) \quad (3.18)$$

definiert wird. Analog dazu können auch der Erwartungswert für Funktionen mit mehreren Variablen

$$\langle Q(X_1, \dots, X_n) \rangle = \int dx_1 \dots \int dx_n Q(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.19)$$

und der bedingte Erwartungswert

$$\begin{aligned} & \langle Q(X_1, \dots, X_n) | X_{m+1}, \dots, X_n \rangle \\ &= \int dx_1 \dots \int dx_m Q(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

definiert werden.

Feinkörnige Verteilungen

Die *feinkörnige Verteilung* für die Zufallsvariable $X(r, t)$ wird über

$$\hat{f}(x; r, t) = \delta(x - X(r, t)) \quad (3.21)$$

definiert. Anschaulich gesprochen entspricht die feinkörnige Verteilung dem Elementarereignis, dass die Zufallsvariable $X(r, t)$ den Wert x annimmt. Die normale Verteilungsfunktion erhält man aus der feinkörnigen Verteilung formal durch Erwartungswertbildung gemäß (3.18)

$$f(x; r, t) = \langle \delta(x - X(r, t)) \rangle = \int dx' \delta(x - x') f(x'; r, t). \quad (3.22)$$

Diese Schreibweise kann problemlos auf Verbundverteilungen und bedingte Verteilungen erweitert werden:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2; r_1, t_1, r_2, t_2) &= \langle \delta(x_1 - X_1(r_1, t_1)) \delta(x_2 - X_2(r_2, t_2)) \rangle \\ &= \langle \delta(x_1 - X_1(r_1, t_1)) | x_2 = X_2(r_2, t_2) \rangle \langle \delta(x_2 - X_2(r_2, t_2)) \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= f(x_1 | x_2; r_1, t_1, r_2, t_2) f(x_2; r_2, t_2) \quad (3.24)$$

3.1.3 Charakterisierung von Verteilungsfunktionen

Die volle Information bezüglich einer Zufallsvariable ist im funktionalen Verlauf der entsprechenden Verteilungsfunktionen kodiert. In vielen Fällen ist es jedoch sinnvoll, die Eigenschaften der Verteilungsfunktion und damit der Zufallsvariable durch einzelne Kenngrößen, also einzelne Zahlen, anstatt durch eine Funktion zu beschreiben. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichten noch von Parametern abhängen und ihre Darstellung mehrere Dimensionen erfordern würde.

Die charakteristische Funktion

Die Fouriertransformation der Verteilungsfunktion $f(x)$ definiert die sogenannte *charakteristische Funktion*

$$\tilde{f}(k) = \int dx e^{ikx} f(x). \quad (3.25)$$

Aus dieser kann über die inverse Transformation wieder die ursprüngliche Verteilungsfunktion bestimmt werden:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \tilde{f}(k). \quad (3.26)$$

Die Normierung von $f(x)$ entspricht der Bedingung $\tilde{f}(0) = 1$. Mit der Definition des Erwartungswertes aus dem vorherigen Kapitel lässt sich die charakteristische Funktion auch als Erwartungswert

$$\langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} f(x) \quad (3.27)$$

darstellen. Die charakteristische Funktion der Normalverteilung (3.7) hat wiederum die funktionale Form einer Gaußverteilung.

Momente

Die sogenannten *Momente* sind die gebräuchlichsten Kenngrößen zur Charakterisierung einer Verteilungsfunktion. Sie werden als Erwartungswerte von Potenzen von x definiert:

$$m_n = \langle X^n \rangle = \int dx x^n f(x). \quad (3.28)$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Momentes m_n der Ordnung n ist, dass die Verteilung für $x \rightarrow \pm\infty$ schneller als $1/|x|^{n+1}$ abfällt. Oft werden auch die über

$$m_n^z = \langle (X - \langle X \rangle)^n \rangle \quad (3.29)$$

definierten *zentralen Momente* betrachtet. Das zweite zentrale Moment ist die *Varianz* $\sigma^2 = m_n^z = m_2 - m_1^2$. Die positive Wurzel der Varianz σ wird *Standardabweichung* genannt. Neben der ursprünglichen Definition (3.28) können die Momente auch mit der in (3.25) definierten charakteristischen Funktion in Zusammenhang gebracht werden. Dazu wird diese um $k = 0$ in eine Potenzreihe entwickelt:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (ik)^n. \quad (3.30)$$

Die Entwicklungskoeffizienten

$$m_n = (-i)^n \left. \frac{d^n}{dk^n} \tilde{f}(k) \right|_{k=0} \quad (3.31)$$

der Potenzreihe entsprechen wieder den in (3.28) definierten Momenten. Die Kenntnis aller Momente ist im Prinzip äquivalent zur Kenntnis der Verteilungsfunktion. Es gibt jedoch Ausnahmen (siehe z. B. [Sor04]).

Kumulanten

Wird nicht wie in (3.30) die charakteristische Funktion selbst, sondern deren Logarithmus $\ln \tilde{f}(k)$ in eine Potenzreihe entwickelt, so erhält man:

$$\tilde{f}(k) = \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (ik)^n \right] \quad (3.32)$$

mit

$$c_n = (-i)^n \left. \frac{d^n}{dk^n} \ln \tilde{f}(k) \right|_{k=0}. \quad (3.33)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_n definieren die *Kumulanten*. Eine Kumulante c_n ist als Kombination von Momenten m_l der Ordnung $l \leq n$ darstellbar. Dies ist insofern wichtig, da die Kumulanten zwar sehr interessante Eigenschaften haben, aber die Momente in Messungen meist sehr viel einfacher zugänglich sind. Eine konkrete Darstellung einer Kumulante c_n auf Basis der Momente liefert die Rekursionsformel

$$c_n = m_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} c_k m_{n-k}. \quad (3.34)$$

Für die ersten sechs Kumulanten erhält man:

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 \\ c_2 &= m_2 - m_1^2 \\ c_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \\ c_4 &= m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4 \\ c_5 &= m_5 - 5m_4m_1 - 10m_3m_2 + 20m_3m_1^2 + 30m_2^2m_1 \\ &\quad - 60m_2m_1^3 + 24m_1^5 \\ c_6 &= m_6 - 6m_5m_1 - 15m_4m_2 + 30m_4m_1^2 - 10m_3^2 \\ &\quad + 120m_3m_2m_1 - 120m_3m_1^3 + 30m_2^3 \\ &\quad - 270m_2^2m_1^2 + 360m_2m_1^4 - 120m_1^6. \end{aligned}$$

Sobald die Verteilungsfunktion symmetrisch ist, fallen alle ungeraden Momente, und damit auch alle ungeraden Kumulanten, weg. Die verbleibenden Kumulanten gerader Ordnung vereinfachen sich dann zu:

$$c_2 = m_2 \quad (3.35)$$

$$c_4 = m_4 - 3m_2^2 \quad (3.36)$$

$$c_6 = m_6 - 15m_4m_2 + 30m_2^3. \quad (3.37)$$

Die kompensierten Kumulanten werden durch

$$\lambda_n = \frac{c_n}{\sigma^n} \quad (3.38)$$

definiert. Dabei ist $\lambda_3 = c_3/\sigma^3$ die *Schiefte* und

$$\lambda_4 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \quad (3.39)$$

die *Kurtosis*. Eine interessante Eigenschaft der Kumulanten ist, dass für die Gaußverteilung alle c_n mit $n > 2$ verschwinden. Somit kann mit Hilfe der Kumulanten die Abweichung einer Verteilung von der Gaußverteilung quantifiziert werden. Besonders die Kurtosis ist eine häufig in diesem Zusammenhang gebrauchte Größe.

Charakterisierung multivariater Verteilungsfunktionen

Analog zum vorherigen Abschnitt können die Begriffe charakteristische Funktion, Momente sowie Kumulanten auch für multivariate Verteilungen eingeführt werden. An dieser Stelle soll nicht der allgemeine Fall $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ untersucht, sondern nur zweidimensionale Verbundverteilungen betrachtet werden. Für die charakteristische Funktion der Verteilung $f(x_1, x_2)$ gilt dann:

$$\tilde{f}(k_1, k_2) = \int dx_1 \int dx_2 e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} f(x_1, x_2). \quad (3.40)$$

Wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig voneinander sind, die Verbundverteilung also faktorisiert, dann faktorisiert auch die charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_1, k_2) &= \int dx_1 f(x_1) e^{ik_1x_1} \int dx_2 f(x_2) e^{ik_2x_2} \\ &= \tilde{f}(k_1) \tilde{f}(k_2). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die Momente sind jetzt gemischte Potenzen von X_1 und X_2 :

$$\langle X_1^i X_2^j \rangle = \int dx_1 \int dx_2 x_1^i x_2^j f(x_1, x_2). \quad (3.42)$$

Im Fall der statistischen Unabhängigkeit faktorisieren auch die Momente, d. h. es gilt: $\langle X_1^i X_2^j \rangle = \langle X_1^i \rangle \langle X_2^j \rangle$. Analog dazu werden wieder die zentrierten Momente eingeführt:

$$\langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)^i (X_2 - \langle X_2 \rangle)^j \rangle = \int dx_1 \int dx_2 (x_1 - \langle X_1 \rangle)^i (x_2 - \langle X_2 \rangle)^j f(x_1, x_2). \quad (3.43)$$

Der Spezialfall $i = 1, j = 1$ wird Kovarianz genannt und lässt sich zu

$$K(X_1, X_2) = \langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)(X_2 - \langle X_2 \rangle) \rangle = \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \quad (3.44)$$

vereinfachen. Wenn man die Kovarianz normiert, erhält man die *Korrelation*

$$C(X_1, X_2) = \frac{\langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle}{\sqrt{\langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)^2 \rangle \langle (X_2 - \langle X_2 \rangle)^2 \rangle}}. \quad (3.45)$$

Die Normierung führt dazu, dass die Korrelation eins ist, wenn X_1 und X_2 identisch sind. Bei statistischer Unabhängigkeit sind sowohl die Kovarianz als auch die Korrelation gleich null. Analog zum univariaten Fall können die Momente wiederum aus der charakteristischen Funktion gewonnen werden:

$$\tilde{f}(k_1, k_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{(ik_1)^{n_1} (ik_2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \langle X_1^{n_1} X_2^{n_2} \rangle. \quad (3.46)$$

Für den Fall statistischer Unabhängigkeit faktorisieren alle gemischten Momente, d. h. $\langle X_1^{n_1} X_2^{n_2} \rangle = \langle X_1^{n_1} \rangle \langle X_2^{n_2} \rangle$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k_1, k_2) &= \left(\sum_{n_1} \frac{(ik_1)^{n_1}}{n_1!} \langle X_1^{n_1} \rangle \right) \left(\sum_{n_2} \frac{(ik_2)^{n_2}}{n_2!} \langle X_2^{n_2} \rangle \right) \\ &= \tilde{f}(k_1) \tilde{f}(k_2). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Aus Gleichung (3.47) wird sofort klar, dass zwar aus der statistischen Unabhängigkeit das Verschwinden der Kovarianz und damit der Korrelation folgt, der umgekehrte Schluss aber nicht zulässig ist. Für diesen Schluss müssen die Korrelationen aller Momente

$$C(X_1^n, X_2^m) = \frac{\langle X_1^n X_2^m \rangle - \langle X_1^n \rangle \langle X_2^m \rangle}{\sqrt{\langle (X_1^n - \langle X_1^n \rangle)^2 \rangle \langle (X_2^m - \langle X_2^m \rangle)^2 \rangle}} \quad (3.48)$$

verschwinden. Dies sollte unbedingt beachtet werden, da oft nur die normale Korrelationsfunktion als Maß für das Verschwinden der statistischen Abhängigkeit betrachtet wird.

Der zentrale Grenzwertsatz

Bei zwei statistisch unabhängigen Variablen erhält man nach (3.17) die Verteilungsfunktion der Summe der Variablen durch die Faltung der beiden Einzelverteilungen. Viele physikalische Observablen, wie zum Beispiel die Gesamtenergie eines turbulenten Feldes, erhält man durch die Addition vieler gleichwertiger anderer Observablen. Sind die in die Summe eingehenden Größen unabhängige Zufallsvariablen, so steht man vor der Frage, wie sich ihre Verteilungsfunktionen unter vielfacher Faltung verhalten. Zum einen gibt es Verteilungen, die unter Faltung erhalten bleiben, die sogenannten *stabilen* Verteilungen. Zum anderen konvergiert unter bestimmten Voraussetzungen die mehrfache Faltung einer beliebigen Verteilung gegen eine stabile Verteilung. Unter den stabilen Verteilungen ist die Gaußverteilung durch den

zentralen Grenzwertsatz besonders ausgezeichnet. Er lautet [Sor04]:

Die mit $1/\sqrt{N}$ normierte Summe N unabhängiger Zufallszahlen mit gleicher Verteilungsfunktion f ist eine Zufallsvariable, die für $N \rightarrow \infty$ unter der Voraussetzung, dass f einen verschwindenden Mittelwert und eine endliche Varianz besitzt, gegen eine Gaußverteilung konvergiert.

Die Voraussetzungen können insofern abgeschwächt werden, als dass die Konvergenz auch für schwach korrelierte Zufallsvariablen erhalten bleibt. Außerdem müssen die Variablen nicht alle die gleiche Verteilungsfunktion besitzen, solange die Varianzen der einzelnen Verteilungen ungefähr die gleiche Größenordnung haben. Eine ausführlichere Diskussion dazu findet man in [Sor04]. In der Praxis reicht oft schon eine Summation über eine geringe Anzahl von Variablen ($\mathcal{O}(10)$), um im Zentrum der Verteilung eine gute Konvergenz gegen die Gaußverteilung zu erzielen.

Neben der Gaußverteilung gibt es noch andere stabile Verteilungen. Sie treten dann als Grenzverteilungen auf, wenn die Verteilungsfunktionen f beispielsweise keine endliche Varianz besitzen [PB00].

Abstandsmaße für Verteilungen

In einigen Fällen ist es interessant zu testen, ob zwei Verteilungen $f(x), g(x)$ gleich sind. Dazu ist es sinnvoll, ein Abstandsmaß zwischen den Verteilungen zu definieren. Ein aus der Informationstheorie begründetes Abstandsmaß ist das *Kullback-Leibler*-Maß [KL51]. Es ist definiert durch:

$$K = \int dx f(x) \ln \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]. \quad (3.49)$$

Es gilt $K \geq 0$ und für $f(x) = g(x)$ ist $K = 0$. Bei der numerischen Auswertung des Maßes ist allerdings zu beachten, dass die Verteilungsfunktionen an bestimmten Punkten x gleich null sein können.

Eine andere Möglichkeit zur Definition eines Abstandsmaßes besteht darin, einfach die Korrelation zwischen den beiden Funktionen zu

$$C = \int dx \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{f^2(x)g^2(x)}} \quad (3.50)$$

berechnen. In Abschnitt 4.1.3 wird noch genauer spezifiziert werden, wie die Abstandsmaße bei dem Vergleich bedingter Verteilungen zum Einsatz kommen.

3.2 Entwicklungsgleichungen für Verteilungsfunktionen

In der Physik werden Observablen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung oder die elektrische Feldstärke eingeführt, um den Zustand eines physikalischen Systems zu beschreiben. Die Einführung dieser Observablen alleine ist jedoch nicht ausreichend. Für eine vollständige Beschreibung des Systems sind zusätzlich Gleichungen nötig, die die Entwicklung der Observablen in Abhängigkeit von der Zeit oder anderen Parametern beschreiben.

Im vorigen Abschnitt wurde das Konzept der Verteilungsfunktion eingeführt, um Systeme zu charakterisieren, bei denen die Observablen Zufallsvariablen sind. Auch hier ist das Ziel Entwicklungsgleichungen für die Änderung der Verteilungsfunktion in Abhängigkeit eines Parameters, meistens der Zeit, abzuleiten.

3.2.1 Kinetische Gleichungen

Eine Möglichkeit die Entwicklungsgleichung für die Verteilungsfunktion einer Observablen abzuleiten ist es, direkt von der entsprechenden deterministischen Bewegungsgleichung auszugehen. Betrachtet man eine Observable $X(t)$ mit der zugehörigen Bewegungsgleichung $\dot{X}(t) = h(X)$, so erhält man durch Ableiten der feinkörnigen Verteilung nach der Zeit die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(X(t) - x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\delta(X(t) - x) \frac{d}{dt} X(t) \right]. \quad (3.51)$$

Die rechte Seite folgt aus der Verwendung der Kettenregel und der Tatsache, dass $\partial_X \delta(X - x) = -\partial_x \delta(X - x)$ gilt. Die Erwartungswertbildung führt wieder auf die normale Verteilungsfunktion und man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \langle \dot{X} | x \rangle f(x). \quad (3.52)$$

Hieran sieht man, dass die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion der Observablen X über den bedingten Erwartungswert mit ihrer deterministischen Zeitentwicklung verknüpft ist. Eine ausführliche Darstellung dieser Technik findet sich in [Pop00].

3.2.2 Stochastische Prozesse

Einen stochastischen Prozess kann man sich als zeitlich geordnete Abfolge

$$X(t_N), \dots, X(t_1) \quad (3.53)$$

von Zufallsvariablen $X(t_i)$ vorstellen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Sequenz und damit die komplette Information über den stochastischen Prozess ist

durch die Verbundverteilung

$$f(x_N, \dots, x_1) = p(x_N|x_{N-1}, \dots, x_1) \times \dots \times p(x_2|x_1)f(x_1) \quad (3.54)$$

gegeben, wobei x_i die Ereignisraumvariable zu $X(t_i)$ ist. Im Folgenden wird auch $X(t_i)$ abkürzend als X_i bezeichnet. Im einfachsten Fall sind die Zufallsvariablen voneinander statistisch unabhängig und die Verbundverteilung faktorisiert

$$f(x_N, \dots, x_1) = f(x_N) \times \dots \times f(x_1), \quad (3.55)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$p(x_N|x_{N-1}, \dots, x_1) = f(x_N). \quad (3.56)$$

In diesem Fall hängt die Wahrscheinlichkeit zu einem Zeitpunkt t_i die Realisierung $X(t_i)$ zu finden nicht von der Vergangenheit ab. Der Prozess hat kein Gedächtnis. Ein Beispiel für einen solchen Prozess ist der radioaktive Zerfall. Die Anzahl der Zerfälle zu einem bestimmten Zeitpunkt hängt nur von der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Menge der Kerne des radioaktiven Materials ab.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass der Prozess anstatt von der Zeit auch von anderen Parametern abhängen kann. Beispielsweise kann die Zufallsvariable $X(r_i)$ ortsabhängig sein. In diesem Fall würde man die Zufallsvariable nacheinander an verschiedenen Orten anstatt zu verschiedenen Zeitpunkten betrachten. Dies wird später bei der Untersuchung der Struktur des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes wichtig sein.

Markovprozesse

Die nächste Stufe bilden die *Markovprozesse*. Sie werden dadurch definiert, dass die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t_N ein bestimmtes X_N zu finden, nur vom Zustand direkt davor, also von X_{N-1} , abhängt. Die den Markovprozess definierende Eigenschaft lässt sich somit durch

$$p(x_N|x_{N-1}, \dots, x_1) = p(x_N|x_{N-1}) \quad (3.57)$$

ausdrücken. Der Prozess hat anschaulich gesprochen ein Ein-Schritt-Gedächtnis. Aus (3.57) folgt sofort, dass sich die Verbundverteilung (3.54) als Produkt von Zweipunktverteilungen darstellen lässt:

$$f(x_N, \dots, x_1) = p(x_N|x_{N-1}) \times \dots \times p(x_2|x_1)f(x_1). \quad (3.58)$$

Markovprozesse spielen eine enorm wichtige Rolle bei der Modellierung in der Physik und darüber hinaus. Die Brownsche Bewegung [Ein05] ist eines der berühmtesten Beispiele dafür. Jeder Markovprozess muss

$$p(x_N|x_{N-2}) = \int dx_{N-1} p(x_N|x_{N-1})p(x_{N-1}|x_{N-2}) \quad (3.59)$$

erfüllen. Sie wird die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* genannt und besagt dass die Wahrscheinlichkeit bei X_n anzukommen, unter der Bedingung dass man bei X_{N-2} gestartet ist, die Summe über die Beiträge aller möglichen Wege die über X_{N-1} von X_{N-2} nach X_N führen, ist.

Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung ist allerdings nur eine notwendige Bedingung. Ein Prozess, der (3.59) erfüllt, ist nicht zwangsläufig ein Markovprozess [Lév49, Fel59]. Da die in der Literatur beschriebenen Ausnahmen jedoch sehr spezieller Natur sind, kann die Chapman-Kolmogorov-Gleichung trotzdem als ein Mittel zur Überprüfung der Markoveigenschaft benutzt werden.

Fokker-Planck-Gleichung und Langevingleichung

Im vorigen Abschnitt wurde die Verbundverteilung für den kompletten Prozess betrachtet. Dies entspricht der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, eine konkrete Realisierung eines stochastischen Prozesses von t_1 bis t_N zu finden. Meist steht jedoch eine andere Frage im Vordergrund. Wie wahrscheinlich ist es, zum Zeitpunkt t_{i+1} ein X_{i+1} zu finden, wenn zum Zeitpunkt t_i der Wert X_i gegeben war? Oder wie sieht $f(x_{i+1})$ aus, wenn ich $f(x_i)$ kenne? Im Falle einer kontinuierlichen Zeitentwicklung würde man nach einer Gleichung der Form $\partial_t f(x) = \dots$ suchen.

Die Information über die Entwicklung des stochastischen Prozesses steckt in den bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(x_{i+1}|x_i, \dots, x_1)$ – oder $p(x_{i+1}|x_i)$ im Falle eines Markovprozesses. Der Ausgangspunkt zur Herleitung einer Entwicklungsgleichung für $f(x)$ ist Gleichung (3.59) in der Form

$$f(y; t + \tau) = \int dy p(y|x; t + \tau, t) f(x; t). \quad (3.60)$$

Hier wurden die Ersetzungen $x = x_i$ und $t = t_i$ sowie $y = x_{i+1}$ und $t + \tau = t_{i+1}$ vorgenommen, um den Übergang auf eine kontinuierliche Zeitentwicklung vorzubereiten. Am Ende der Herleitung (siehe [Gar04, Ris96] für Details) steht die *Kramers-Moyal-Entwicklung*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-\nabla^n) D^n(x, t) \right] f(x, t) \quad (3.61)$$

mit den Koeffizienten

$$D^{(n)}(x, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(n)}(x, t, \tau). \quad (3.62)$$

Diese Koeffizienten sind nichts anderes als die bedingten Momente

$$M^{(n)}(x, t, \tau) := \langle [X(t + \tau) - X(t)]^n | X(t) = x \rangle \quad (3.63)$$

$$= \int dy (y - x)^n p(y|x; t + \tau, t) \quad (3.64)$$

der Übergangsverteilung eines Markovprozesses im Grenzfall einer verschwindenden Zeitdifferenz. Das Pawula-Theorem [Paw67] besagt, dass die Kramers-Moyal-Entwicklung entweder nach dem zweiten Term abbricht, also $D^{(n)} = 0$ für $n \geq 3$, oder unendlich viele Terme berücksichtigt werden müssen. Der Fall, in dem nur die ersten zwei Terme der Entwicklung berücksichtigt werden, entspricht der *Fokker-Planck-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right] f(x, t). \quad (3.65)$$

In diesem Fall wird $D^{(1)}$ als *Driftkoeffizient* und $D^{(2)}$ als *Diffusionskoeffizient* bezeichnet. Bei gegebenen Drift- und Diffusionskoeffizienten kann die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion berechnet werden. Die Definition der beiden Terme als Grenzwerte der Kramers-Moyal-Entwicklung ermöglichen es, sie aus der gemessenen Datenreihe eines stochastischen Prozesses zu schätzen. Da in diesem Fall der Grenzübergang zu verschwindenden Zeitdifferenzen nicht möglich ist, begnügt man sich mit der Approximation

$$D^{(n)}(x, 1) \approx \frac{1}{n!} \frac{1}{\tau} \langle [X(t + \tau) - X(t)]^n | X(t) = x \rangle. \quad (3.66)$$

Auf diese Weise kann man die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung aus Messdaten schätzen. Ein Überblick über diese Methode und ihre Anwendungen findet sich in [FP09].

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass die Kramers-Moyal-Entwicklung nicht auf Markovprozesse beschränkt ist, d. h. man könnte auch für mehrfach bedingte Übergangsverteilungen eine zu (3.59) bzw. (3.60) äquivalente Gleichung aufstellen und sie als Startpunkt für eine Reihenentwicklung benutzen (siehe Artikel von Srinivas und Wolf in [Lan77]).

Die Fokker-Planck-Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der kompletten Verteilungsfunktion. Alternativ kann aber auch eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Zufallsvariable $X(t)$ formuliert werden. Dieser Ansatz geht auf Langevin [Lan08] zurück, der sie im Zusammenhang mit einer Beschreibung der Brownschen Bewegung entwickelt hat. Eine *Langevingleichung* ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\dot{x} = h(x) + g(x)\Gamma(t), \quad (3.67)$$

die eine stochastische Kraft $\Gamma(t)$ enthält. Um die Gleichung zu komplettieren, müssen die Eigenschaften der stochastischen Kraft festgelegt werden. Dazu gehören die Verteilungsfunktion der Amplitude der Kraft und die Autokorrelation. Im Prinzip unterliegen beide Größen keinerlei Beschränkungen. Der Spezialfall mit einer Gaußverteilung für die Amplitude der Kraft und

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{sowie} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t') \quad (3.68)$$

ist jedoch von besonderem Interesse, da in diesem Fall (3.67) äquivalent zur Fokker-Planck-Gleichung ist. Die δ -Korrelation sorgt dafür, dass (3.67) einen Markovprozess beschreibt und die Gaußverteilung der Amplitude sorgt dafür, dass die ersten beiden Terme der Kramers-Moyal-Entwicklung zur Beschreibung des Prozesses ausreichen. In der Formulierung von Itô¹ gilt:

$$h(x) = D^{(1)}(x) \quad (3.69)$$

$$g(x) = \sqrt{D^{(2)}(x)}. \quad (3.70)$$

Die zur numerischen Lösung diskretisierte Form von Gleichung (3.67) lautet:

$$x(t + \tau) = x(t) + h(x)\tau + g(x)\Gamma(t)\sqrt{\tau}. \quad (3.71)$$

Dabei ist $\Gamma(t)$ eine gaußverteilte Zufallszahl.

Die bisherigen Betrachtungen können leicht auf Prozesse erweitert werden, deren Zufallsvariablen Vektoren $\mathbf{X}(t_i) \in \mathbb{R}^n$ sind. Die Fokker-Planck-Gleichung lautet in mehreren Dimensionen:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \left[- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right] f(\mathbf{x}, t). \quad (3.72)$$

Entsprechend ist die Langevingleichung durch

$$\dot{x}_i = h_i(\mathbf{x}) + \sum_j g_{ij}(\mathbf{x})\Gamma_j(t) \quad (3.73)$$

gegeben. Unter den gleichen Voraussetzungen wie im eindimensionalen Fall, also bei der Wahl

$$\langle \mathbf{\Gamma}(t) \rangle = 0 \quad \text{sowie} \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t - t') \quad (3.74)$$

für die stochastische Kraft, entsprechen sich die beiden Gleichungen. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten ist diesmal durch

$$D_i^{(1)}(x) = h_i(x) \quad (3.75)$$

$$D_{ij}^{(2)}(x) = \sum_k g_{ik}(x)g_{kj}(x) \quad (3.76)$$

gegeben. Bei gegebenem $D_{ij}^{(2)}$ können g_{ik} bzw. g_{kj} durch eine Cholesky-Zerlegung [Sch04] berechnet werden.

¹ Auf die verschiedenen Interpretationen nach Itô und Stratonovich soll hier nicht näher eingegangen werden. Eine Darstellung der verschiedenen Zugänge findet sich z. B. in [Gar04].

Statistik von Korrelationsfunktionen

An dieser Stelle soll noch auf zwei Zusammenhänge eingegangen werden, die später an verschiedenen Stellen der Arbeit eine Rolle spielen werden. Sind zwei stochastische Prozesse x und v über

$$\dot{x} = v \tag{3.77}$$

miteinander verbunden, so lässt sich zeigen [McC92], dass unter der Voraussetzung, dass der v -Prozess stationär ist und $\langle x \rangle$ verschwindet, die Varianz der Observable x über

$$\langle x^2(t) \rangle = \left\langle \int_0^t dt' v(t') \int_0^t dt'' v(t'') \right\rangle \tag{3.78}$$

$$= 2 \langle v^2 \rangle \int_0^t ds (t-s) C_v(s) \tag{3.79}$$

mit der Autokorrelationsfunktion von v in Verbindung steht. Betrachtet man nun die zeitliche Ableitung der Varianz von x

$$\partial_t \langle x^2(t) \rangle = 2 \langle v^2 \rangle \int_0^t ds C_v(s), \tag{3.80}$$

so sieht man, dass der zu x gehörige Prozess dann stationär wird, wenn die Fläche unterhalb der Autokorrelationsfunktion von v Null ist:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \partial_t \langle x^2(t) \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t ds C_v(s) \rightarrow 0. \tag{3.81}$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben kann man zeigen [TL72, Pop00], dass zwischen den Korrelationsfunktionen von x und v der Zusammenhang

$$C_v(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} C_x(\tau) \tag{3.82}$$

besteht. Dies bedeutet auch, dass die Fläche unter $C_v(\tau)$ genau dann zu null wird, wenn für $\tau = 0$ und $\tau \rightarrow \infty$ auch die Ableitung von $C_x(\tau)$ verschwindet.

4 Statistische Beschreibung der Turbulenz

Das vorliegende Kapitel behandelt den statistischen Zugang zur Beschreibung der voll entwickelten Turbulenz. Im ersten Teil wird begründet, warum ein solcher Zugang sinnvoll ist, während im zweiten Teil genauer darauf eingegangen wird, welche Art von Observablen bei diesem Zugang eine Rolle spielen.

Der dritte Teil behandelt einige Theorien, die Voraussagen für die statistischen Observablen machen und die für diese Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Dazu zählen vor allem die phänomenologische Theorie von Kolmogorov und ihre Erweiterungen. Dabei wird auch kurz auf die Unzulänglichkeit dieser Zugänge bei der Beschreibung voll entwickelter Turbulenz eingegangen.

4.1 Der Rahmen einer statistischen Beschreibung

Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine deterministische Entwicklungsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Dennoch wählt man bei der Beschreibung des turbulenten Zustandes einen statistischen Zugang. Das heißt, anstatt explizit die Zeitentwicklung einer Observable an jedem Punkt zu verfolgen, betrachtet man Wahrscheinlichkeitsverteilungen der entsprechenden Größen. Die Frage, warum in Anbetracht einer deterministischen Entwicklungsgleichung ein solcher Zugang sinnvoll und nötig ist, soll im Folgenden beantwortet werden. Die dazu nötigen Überlegungen sind für die vorliegende Arbeit insoweit von Interesse, als dass sie aufzeigen, welche Art von Untersuchungen einen Beitrag zu einem tieferen Verständnis der Turbulenz liefern können und somit einige der in dieser Arbeit gemachten Analysen motivieren.

Im Allgemeinen wird die Dynamik eines räumlich ausgedehnten physikalischen Systems in Form von partiellen Differentialgleichungen formuliert. Beispiele dafür sind Reaktions-Diffusions-Gleichungen und die Navier-Stokes-Gleichung. Im Prinzip würde die vollständige Festlegung des Zustandes eines solchen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt die Kenntnis der entsprechenden Observablen an unendlich vielen Raumpunkten erfordern. Meistens gibt es aber eine Längen- oder Zeitskala, unterhalb der das betrachtete System glatt ist. Dies bedeutet, dass man in Experimenten oder numerischen Simulationen das System unterhalb dieser Skalen nicht weiter abtasten muss, aber dennoch eine weitestgehend vollständige Beschreibung des

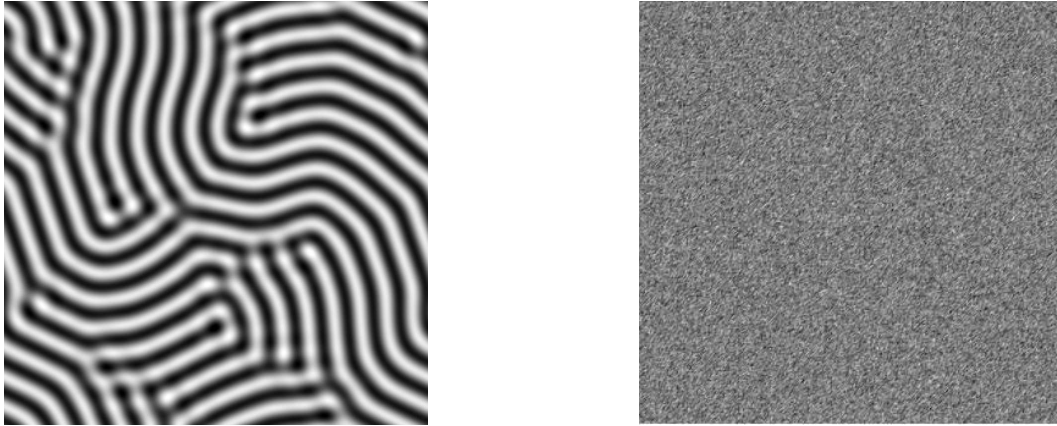


Abbildung 4.1 Links: Lösung $\Psi(\mathbf{x})$ der Swift-Hohenberg-Gleichung für die Parameter $\epsilon = 0.3$, $\delta = 0$, $k_c = 1$ und die Seitenlänge $L = 100$ [Lül09]. Deutlich zu sehen sind die geordneten Strukturen. Rechts: Zufallsfeld aus 128^2 unabhängig voneinander gewählten gaußverteilten Zufallszahlen.

Systemzustandes erhält. In diesem Fall reichen endlich viele Punkte bei der Beschreibung des Systems aus. Trotzdem ist immer noch eine enorme Menge an Information nötig, um den Systemzustand festzulegen. Würde man beispielsweise das Temperaturfeld in einem Würfel mit einem Meter Kantenlänge mit einer Auflösung von einem Millimeter festlegen wollen, so bräuchte man 10^{15} Messwerte.

Die Erfahrung zeigt aber, dass viele dieser Systeme sehr geordnete raumzeitliche Muster bilden können [Hak83, CH93]. Ein konkretes Beispiel dafür ist die in Abbildung 4.1 gezeigte mäanderartige Struktur. Sie ist eine stationäre Lösung der *Swift-Hohenberg-Gleichung* $\partial_t \Psi = [\epsilon - (k_c^2 + \Delta)^2] \Psi + \delta \Psi^2 - \Psi^3$ [SH77]. Ein solches Muster versteht man als geordneten Zustand des Systems. Beispielsweise kann man es im Fourierraum durch relativ wenige Fourierkoeffizienten beschreiben. Dies reduziert die zur Festlegung des Systemzustandes nötige Informationsmenge extrem und vereinfacht dadurch die Behandlung des Systems.

Auf der anderen Seite gibt es Fälle, in denen ein System keinerlei Ordnung zeigt. Ein Beispiel dafür ist im rechten Teil von Abbildung 4.1 dargestellt. Es handelt sich dabei um ein Feld aus unabhängigen Zufallszahlen. Dies ist gerade ein Fall, bei dem zur Festlegung des Zustandes der Wert an jedem Punkt bekannt sein muss, also die maximale Information zur Beschreibung nötig ist. Die Frage, die sich dabei augenblicklich stellt, ist, ob die exakte Kenntnis des Zustandes überhaupt von Interesse ist. Wie im vorhin genannten Beispiel des Temperaturfeldes ist diese Art der Beschreibung nicht sehr aussagekräftig. Sinnvoller ist ein statistischer Zugang, bei dem man fragt, wie wahrscheinlich es ist, die Werte y_1 bis y_N an den Punkten x_1 bis x_N

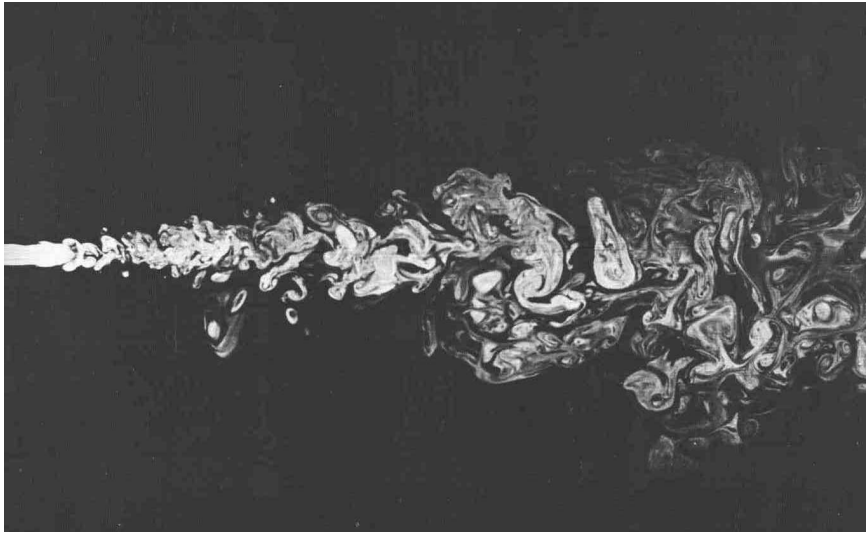


Abbildung 4.2 Bild eines turbulenten Freistrahls (entnommen aus [Dyk82]). In einer gewissen Entfernung von der Austrittsöffnung hat die Gesamtstruktur der Strömung einen eher zufälligen und ungeordneten Charakter. Die kleinen Strukturen, aus denen die Gesamtströmung aufgebaut ist, scheinen aber eine innere Ordnung zu besitzen.

zu finden. Die Festlegung des Systemzustandes geschieht durch die Verbundverteilung $f(y_1, \dots, y_N)$. Dies wäre allein kein Vorteil gegenüber der reinen Auflistung der Werte an jedem Punkt. Hier kommt der Zufallscharakter des Feldes zu tragen. Die Punkte sind alle statistisch unabhängig voneinander. Es gibt also keinerlei Ordnung im System. In diesem Fall zerfällt aber die Verbundverteilung in ein Produkt aus N Einpunktverteilungen $f_i(y_i)$. Da aber kein Punkt gegenüber den anderen besonders ausgezeichnet ist, gilt $f_i(y_i) = f(y)$ für alle i . Das bedeutet, dass sich die Beschreibung des Systemzustandes enorm vereinfacht. Die Vereinfachung erfolgt diesmal aber im Rahmen einer statistischen Beschreibung und nicht, wie im Falle des Musters, auf der Basis weniger Fourierkoeffizienten.

Die beiden eben genannten Beispiele stellen zwei Extremfälle bei der Beschreibung physikalischer Systeme dar. Auf der einen Seite erlaubt das Auftreten von geordneten Strukturen eine Beschreibung mittels weniger Variablen. Auf der anderen Seite führt der totale Verlust von Ordnung wiederum zu einer relativ einfachen Beschreibungsmöglichkeit in Form von Einpunktverteilungen.

Wo aber ist in diesem Zusammenhang die Turbulenz zu finden? Ein Blick auf Abbildung 4.2 gibt darauf einen Hinweis. Zu sehen ist die Aufnahme einer turbulenten Strömung, die durch einen von links kommenden Freistrahls erzeugt wurde. Betrachtet man den rechten Teil der Strömung, also einen Bereich, von dem man

annimmt, dass die Strömung dort unabhängig von der Geometrie der Austrittsöffnung geworden ist, so scheint die Gesamtstruktur eher zufällig und ungeordnet. Eine Beschreibung des Strömungszustandes auf Basis weniger Variablen scheint aussichtslos. Auch die genaue Kenntnis der Geschwindigkeit an allen Punkten stellt wiederum keine handhabbare Charakterisierung der Strömung dar. Obwohl die Strömung von einer deterministischen Gleichung beschrieben wird, scheint die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer bestimmten Geschwindigkeit an einem bestimmten Ort und damit ein statistischer Zugang sinnvoller zu sein. Man erkennt aber sofort, dass aus statistischer Sicht die Situation in der Strömung komplizierter ist als beim Zufallsfeld. Betrachtet man nämlich Abbildung 4.2 genauer, so sieht man, dass die Gesamtströmung aus einer Vielzahl kleinerer Strukturen aufgebaut ist. Diese filament- und wirbelartigen Strukturen selbst scheinen im Gegensatz zum Ganzen eine stärkere innere Ordnung zu besitzen. Durch das Auftreten dieser Strukturen sind die einzelnen Punkte in der Strömung auch nicht mehr statistisch unabhängig voneinander, was eine ausreichende Charakterisierung durch eine Einpunktverteilung ausschließt. Die Turbulenz scheint ein Phänomen zu sein, das sich irgendwo zwischen starker Ordnung und völligem Chaos befindet. Dabei hängt die Gewichtung von der Skala ab, auf der man das System betrachtet. Im Kleinen¹ scheint Ordnung zu überwiegen, während im Großen die Gewichtung mehr auf dem statistischen Aspekt liegt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass eine statistische Beschreibung der Turbulenz sinnvoll erscheint. Die vorhandene Ordnung sorgt allerdings dafür, dass Mehrpunktverteilungen zur Wiedergabe der wesentlichen Eigenschaften nötig sind. Die zentrale Frage ist, welche Art von Statistik bzw. wie viele Punkte für eine angemessene Beschreibung nötig sind.

4.1.1 Beschreibung der Turbulenz durch Verteilungsfunktionen

Im Fall eines inkompressiblen Fluids ist der Zustand des Strömungsfeldes zu einem beliebigen Zeitpunkt durch die Angabe der Geschwindigkeiten an allen Raumpunkten eindeutig bestimmt. Im Zusammenhang mit einer Beschreibung mittels Verteilungsfunktionen bedeutet dies, dass die Statistik der Strömung zu einem Zeitpunkt t^1 durch die Verbundverteilung

$$f_E^N(\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_N^1; \mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_N^1, t^1) \quad (4.1)$$

beschrieben wird. Hier nummerieren die tiefgestellten Indizes die Orte, während die hochgestellten Indizes die Zeitpunkte markieren. Betrachtet man mehr als einen Zeitpunkt, so erweitert sich die Verbundverteilung zu

$$f_E^{N \times M}(\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_N^M; \mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_N^M, t^1, \dots, t^M). \quad (4.2)$$

¹Mit *klein* sind Skalen gemeint, für die noch die Flüssigkeitsbeschreibung gilt.

Diese Verbundverteilung enthält für $N \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$ die komplette Information des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes. Wie im einleitenden Abschnitt erwähnt, ist die Bestimmung dieser Verteilungsfunktion weder praktisch möglich noch sinnvoll. Im Extremfall räumlicher und zeitlicher statistischer Unabhängigkeit der Geschwindigkeiten würde (4.2) in ein Produkt aus $N \times M$ Einpunktverteilungen zerfallen. Wenn zusätzlich alle Punkte in Raum und Zeit gleichberechtigt sind, wären alle diese Einpunktverteilungen gleich und man hätte $f_E^{N \times M} = f(\mathbf{v})^{NM}$. Am Beispiel des Freistrahls wurde schon diskutiert, dass dies für Turbulenz wohl nicht der Fall ist.

In der Praxis beschränkt man sich auf die Betrachtung von Untermengen von (4.2). Würde man sich beispielsweise ausschließlich für die räumliche Struktur der Strömung interessieren, so könnte man auch direkt mit (4.2) zu einem beliebigen Zeitpunkt arbeiten. Wie hochdimensional die Verteilungsfunktion, die alle relevanten Informationen zu einer bestimmten Fragestellung enthält, letztendlich ist, hängt auch von der Fragestellung selbst ab. Anstatt die Verbundverteilung der Geschwindigkeiten zu untersuchen, kann man auch direkt Verbundverteilungen für Größen wie die Beschleunigung oder die Energiedissipation aufstellen.

Äquivalent zu (4.2) kann die Strömung auch mittels der Ersetzung der Orte \mathbf{X} durch $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ im Lagrangebild beschrieben werden. Die Entsprechung zu (4.2) wäre dann

$$f_L^{N \times M}(\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_N^M, \mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_N^M; t^1, \dots, t^M). \quad (4.3)$$

Diese Verteilung enthält genau die gleichen Informationen, wie (4.2). Die Information liegt nur in anderer Form als dort vor. Formal sieht man es daran, dass $f_L^{N \times M}$ bezüglich der Orte eine Verteilungsfunktion ist, während diese in $f_E^{N \times M}$ die Rolle von Parametern spielen. Anzumerken ist, dass hier die Orte $\{\mathbf{x}_j^1 = \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{x}_j^M\}$ der Trajektorie² des Teilchens j entsprechen. Dabei wird der Anfangsort einer Teilchentrajektorie meist mit $\mathbf{y}_j := \mathbf{x}_j^1$ bezeichnet. Diese gesonderte Bezeichnung kommt daher, dass man im Lagrangebild den Startpunkt des Teilchens oft nicht als Zufallsvariable, sondern als festgelegten Parameter betrachtet. Dies bedeutet, dass man nicht direkt die Verteilung (4.3), sondern die auf die Anfangsorte \mathbf{y}_j bedingte Verteilung betrachtet.

Symmetrien und Mittelungen

Eine Vereinfachung der Beschreibung eines physikalischen Systems ist oft möglich, wenn Symmetrien vorhanden sind. Eine turbulente Strömung, wie sie z. B. in Abbildung 4.2 gezeigt wird, scheint jedoch keinerlei Symmetrien zu besitzen. Zum Beispiel ist weder zeitliche noch räumliche Homogenität gegeben, da sich die Strömung sowohl von Ort zu Ort als auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt ändert. Unter Symmetrien sind hier vielmehr statistische Symmetrien zu verstehen, d. h. nicht die Größen selbst,

²Dies ist die Entsprechung von $\{\mathbf{X}_j(t_1) = \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{X}_j(t_M)\}$ im Ereignisraum.

sondern ihre Verteilungsfunktionen sind unter den entsprechenden Transformationen invariant. Hier sind folgende Symmetrien relevant:

- *Zeitliche Homogenität/Stationarität*: Die Verteilungsfunktion ist invariant unter der Transformation $t \rightarrow t + t_0$.
- *Räumliche Homogenität / Translationsinvarianz*: Die Verteilungsfunktion bleibt beim Übergang $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ unverändert.
- *Isotropie*: Die Verteilungsfunktion ist invariant unter Drehung und Spiegelung des Koordinatensystems, d. h. $\mathbf{x} \rightarrow D\mathbf{x}$ mit $D \in O(3)$.

In Kapitel 3 spielte die Bildung von Erwartungswerten eine große Rolle. In der Praxis dient der Mittelwert als Schätzer für den Erwartungswert. Die eben angesprochenen statistischen Symmetrien erlauben dabei die Verwendung unterschiedlicher Daten zur Mittelung:

- *Ensemblemittelwerte*: Hier benutzt man verschiedene Realisierungen der Strömung zur Bildung des Mittelwertes. Dies ist prinzipiell immer möglich, aber in der Praxis sehr aufwändig.
- *Zeitliche Mittelwerte*: Im Fall stationärer Turbulenz kann innerhalb einer Realisierung das turbulente Feld zu verschiedenen Zeiten zur Mittelung herangezogen werden.
- *Räumliche Mittelwerte*: Bei räumlicher Homogenität können alle Punkte eines Feldes in den Mittelungsprozess miteinbezogen werden.

Selbstähnlichkeit

Neben dem Vorhandensein von Symmetrien, kann auch das Auftreten von *Selbstähnlichkeit* zu einer Vereinfachung der Beschreibung eines Systems führen. Betrachtet man die von den unabhängigen Variablen x und y abhängige Funktion $Q(x, y)$ und die von x abhängigen Skalen $Q_0(x)$ und $y_0(x)$, so kann man die skalierten und somit dimensionslosen Variablen $\pi = y(x)/y_0(x)$ und $\Pi(\pi, x) = Q(x, y)/Q_0(x)$ einführen. Wenn die skalierte abhängige Variable nicht von x abhängt, es somit eine Funktion Φ mit

$$\Pi(\pi, x) = \Phi(\pi) \tag{4.4}$$

gibt, dann ist $Q(x, y)$ bezüglich der Variablen x selbstähnlich, d. h. in den skalierten Koordinaten hängt die Funktion nicht mehr von x ab.

Das Auffinden der Funktionen Q_0 und y_0 geschieht mit Hilfe der *Dimensionsanalyse*. Jede physikalische Observable z hat eine zugehörige Dimension $[z]$, die in entsprechenden Basiseinheiten (in der Mechanik: Länge L , Masse M und Zeit T)

angegeben wird. Wenn man vermutet, dass zwischen den Observablen z , x und y der Zusammenhang $z = f(x, y)$ besteht, muss für die Dimensionen der Zusammenhang $[z] = [f(x, y)] = \phi(L, M, T)$ gelten. Man kann zeigen [Bar03], dass $\phi(L, M, T)$ immer die Form

$$\phi(L, T, M) = L^a M^b T^c \quad (4.5)$$

hat. Wenn dies so ist, muss für $z = f(x, y)$ der Ansatz $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ gemacht werden und es folgt

$$[z] = [x]^\alpha [y]^\beta. \quad (4.6)$$

Hieraus kann man die Potenzen α und β berechnen. Ein Beispiel für dieses Vorgehen findet sich in Abschnitt 5.2.3. Aus der Tatsache, dass die Dimensionsfunktion die Form eines Produktes von Potenzen hat, folgt sofort, dass die bei der Erklärung der Selbstähnlichkeit eingeführten Größen Q_0 und y_0 Potenzgesetze sein müssen.

4.1.2 Eulersche und Lagrangesche Beschreibung

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, kodieren die Verteilungsfunktion im Eulerbild (4.2) und die entsprechende Lagrangesche Darstellung (4.3) die gleiche Information auf unterschiedliche Weise. Im Allgemeinen lassen sich die beiden Darstellungen dennoch nicht einfach ineinander umrechnen.

In der Praxis nutzt man das Eulersche und das Lagrangesche Bezugssystem dazu, verschiedene Ausschnitte aus der durch (4.2) und (4.3) gegebenen Gesamtinformation zu untersuchen. Die Wahl der Darstellung hängt dabei von der zu behandelnden Problemstellung ab. Im Rahmen des Eulerschen Zuganges wird oft die N-Punkt-Einzeit-Verteilung

$$f_E^{N \times 1}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \quad (4.7)$$

als Ausgangspunkt betrachtet. Sie charakterisiert das komplette turbulente Feld zu einem festen Zeitpunkt. Dieser Zugang eignet sich beispielsweise sehr gut zur Untersuchung der in der Strömung vorkommenden kohärenten Strukturen. In der Praxis beschränkt man sich aber meist auf Zwei- oder Drei-Punkt-Statistiken. Natürlich kann die Betrachtung im Eulerbild auch auf mehrere Zeiten ausgedehnt werden. Beispielsweise werden im Eulerbild auch Zwei-Punkt-Zwei-Zeit-Korrelationen untersucht ($f_E^{N \times 2}$). Im Lagrangebild wird meist die Einteilchen-M-Zeiten-Verteilung

$$f_L^{1 \times M}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^M, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^M; t^M) \quad (4.8)$$

betrachtet, d. h. die Geschwindigkeit wird entlang der Trajektorie eines Teilchens gemessen. Solche Informationen eignen sich gut dazu, Mischungs- und Diffusionsvorgänge zu untersuchen. Analog zum Eulerbild beschränkt man sich in der Praxis meist auf zwei oder drei Zeiten. Wiederum kann die Darstellung auf mehrere Punkte bzw. Teilchen erweitert werden. Beispielsweise interessiert man sich für die relative Diffusion zweier Teilchen [Saw01] ($f_L^{2 \times M}$) oder das Verhalten von drei bzw. vier Punkten

($f_L^{3 \times M}$ bzw. $f_L^{4 \times M}$), den sogenannten *triangles* bzw. *tetrads* [CP01, CPS99], in einer turbulenten Strömung.

Die Beispiele sollen zeigen, dass man durch die Verwendung der beiden verschiedenen Zugänge meist Statistiken betrachtet, die unterschiedliche Informationen enthalten und daher nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Informationen ineinander umgerechnet werden können. Dies wird in Kapitel 11 noch eine wichtige Rolle spielen.

An dieser Stelle soll noch ein Spezialfall betrachtet werden, bei dem beide Darstellungen die gleichen Informationen enthalten bzw. sich einfach ineinander umrechnen lassen. Für homogene Turbulenz kann gezeigt werden [Pop00], dass die Einpunkt-Einzeit-Verteilungen

$$f_E^{1 \times 1}(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad f_L^{1 \times 1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}; t) \quad (4.9)$$

in beiden Bildern gleich sind:

$$f_E^{1 \times 1}(\mathbf{v}; t) = f_L^{1 \times 1}(\mathbf{v}; t). \quad (4.10)$$

Dies gilt natürlich auch für andere Observablen, wie z. B. die Beschleunigung, d. h. $f_E(\mathbf{a}, t) = f_L(\mathbf{a}, t)$.

4.1.3 Längen- und Zeitskalen

Um die raumzeitliche Dynamik einer turbulenten Strömung zu beschreiben, ist es sinnvoll Längen- und Zeitskalen einzuführen, die durch die Physik des Problems vorgegeben sind. Die so definierten Skalen eignen sich nicht nur zur Beschreibung des turbulenten Feldes, sondern ermöglichen auch einen Vergleich experimenteller oder numerischer Daten aus verschiedenen Realisierungen turbulenter Strömungen.

Taylor skala und integrale Skala

Im Rahmen der statistischen Beschreibung einer turbulenten Strömung liegt die Idee nahe, Längen und Zeitskalen über die Korrelationsfunktion des Geschwindigkeitsfeldes zu definieren. Zunächst betrachtet man die Autokorrelationsfunktion

$$C_a(x) = \frac{\langle a(y+x)a(y) \rangle}{\langle a(y)^2 \rangle} \quad (4.11)$$

einer Observablen a . Die Größen x und y können Längen oder Zeiten sein. An dieser Stelle wird von einem stationären Signal ausgegangen, so dass die Korrelationsfunktion nicht von y abhängt. Die *integrale* Skala von a wird über

$$I_a = \int_0^\infty dx C_a(x) \quad (4.12)$$

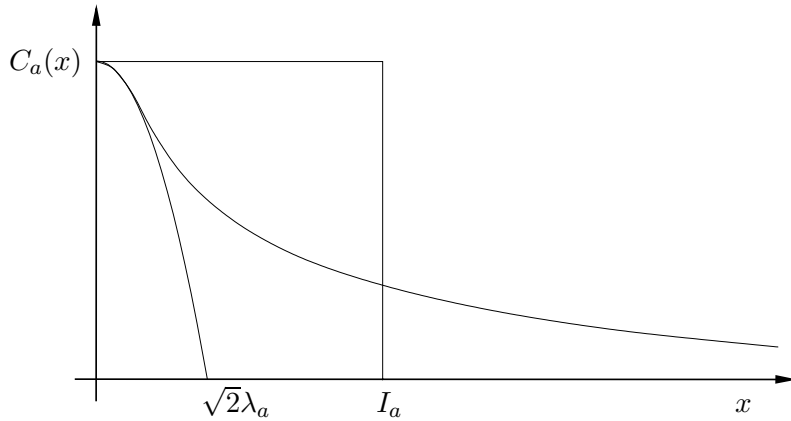


Abbildung 4.3 Schematische Darstellung einer Autokorrelationsfunktion mit den zugehörigen Skalen. Zu beachten ist, dass die durch (4.14) definierte Parabel die x -Achse bei $\sqrt{2}\lambda_a$ schneidet.

definiert. Über diese Skala kann man abschätzen, wann die Autokorrelation von a signifikant zerfallen ist. Im Spezialfall $C_a(x) = \exp(-x/x_0)$ markiert $I_a = x_0$ die Skala, auf der die Korrelation auf $1/e$ abgefallen ist. Zu beachten ist natürlich, dass oberhalb dieser Skala noch keine statistische Unabhängigkeit erreicht ist.

Eine andere Skala ist die sogenannte *Taylor skala* oder *Taylorlänge* [Tay35]. Zunächst entwickelt man (4.12) um den Ursprung in eine Taylorreihe

$$C_a(x) = C(0) + \left. \frac{d}{dx} C(x) \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{dx^2} C(x) \right|_{x=0} x^2 + \dots \quad (4.13)$$

Da bei den hier betrachteten Systemen die Steigung der Autokorrelationsfunktion im Ursprung verschwindet [Pop00], verschwindet der Term erster Ordnung in der Reihenentwicklung. In diesem Fall erhält man

$$C_a(x) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\lambda_a^2}, \quad (4.14)$$

wobei λ die Taylorlänge ist. Sie ist definiert durch

$$\lambda_a = \left[- \left. \frac{d^2}{dx^2} C(x) \right|_{x=0} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Die in der Definition auftretende zweite Ableitung der Korrelationsfunktion kann zu

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} C(x) \right|_{x=0} = \frac{\langle (\partial_y a(y))^2 \rangle}{\langle a(y)^2 \rangle} \quad (4.16)$$

umgeschrieben werden [Pop00]. Man erhält schließlich

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{\langle a(y)^2 \rangle}{\langle (\partial_y a(y))^2 \rangle}}. \quad (4.17)$$

An dieser Definition kann man erkennen, dass die Taylorlänge bei gleicher Varianz für sich schnell ändernde Signale kleiner ist als für langsam veränderliche Signale, da sie im Mittel eine größere Ableitung besitzen.

Die Markovskala

In Kapitel 3.2.2 wurde die Markoveigenschaft bei stochastischen Prozessen eingeführt. Die Definition ist natürlich nicht nur auf Prozesse in der Zeit beschränkt, sondern kann generell für Mehrpunktverteilungen wie z. B. (4.3) definiert werden. Wenn wir beim Beispiel der stochastischen Prozesse in der Zeit bleiben, müsste die Bedingung (3.57) im mathematisch strengen Sinne für beliebig dicht aufeinanderfolgende Zeitpunkte gelten. Aber schon bei der Beschreibung der Brownschen Bewegung merkte Einstein an [Ein05], dass die Markovbedingung erst oberhalb einer bestimmten endlichen Skala gilt. Das bedeutet, dass die Markovbedingung (3.57) zu

$$p(x_N|x_{N-1}) = p(x_N|x_{N-1}, \dots, x_1) \quad \text{für} \quad t_{i+1} - t_i \geq t_m \quad (4.18)$$

abgeändert wird. Unterhalb von t_m gilt diese Bedingung dann nicht mehr. Dieser Gedankengang kann ohne weiteres von Zeiten auf Längen oder andere Parameter übertragen werden.

In der Praxis ist eine Überprüfung von (4.18) aufgrund der endlichen Datenmenge³ nur für zweifach bedingte Verteilungen sinnvoll. Man begnügt sich also mit der Überprüfung der Relation

$$p(x_3|x_2) = p(x_3|x_2, x_1) \quad \text{für} \quad \tau := t_{i+1} - t_i \geq t_m. \quad (4.19)$$

Hier wurde noch τ als abkürzende Beschreibung für die Zeitdifferenz eingeführt. Als ersten Zugang zur Überprüfung der Markoveigenschaft kann man die Höhenliniendiagramme von $p(x_3|x_2)$ und $p(x_3|x_2, x_1 = \text{konstant})$ für verschiedene x_1 und τ vergleichen. Liegen die Höhenlinien der beiden Verteilungen überall aufeinander,

³Schätzt man die Verteilungsfunktionen mittels eines Histogramms, geht man davon aus, dass für eine ausreichende Konvergenz im Mittel mindestens zehn Ereignisse pro Bin benötigt werden. Bei einer Auflösung jeder Variable mit 100 Bins braucht man für die Schätzung einer Dreipunktverteilung mindestens 10^7 Datenpunkte. Dies ist im Rahmen von numerischen Simulation heutzutage möglich. Man kann sich aber leicht vorstellen, dass das Hinzufügen zusätzlicher Dimensionen oder eine Erhöhung der Anzahl der Bins Datenmengen erfordert, die im Rahmen solcher Simulationen und besonders im Rahmen von Experimenten nicht mehr zur Verfügung stehen.

so kann man (4.19) als zumindest näherungsweise erfüllt ansehen. Dieser graphische Vergleich liefert oft schon gute Hinweise darauf, ob und bei welchem τ die Markoveigenschaft erfüllt ist. Für eine quantitative Überprüfung kann man die in Abschnitt 3.1.3 eingeführten Abstandsmaße nutzen. Das jeweilige Maß hängt parametrisch von x_2, x_1 und τ ab, d. h. $d_{K,C} = d_{K,C}(x_2, x_1, \tau)$. In dieser Arbeit wird nur das numerisch recht robuste Korrelationsmaß [Vos09]

$$\tilde{d}_C(x_2, x_1, \tau) = \frac{\int dx_3 p(x_3|x_2)p(x_3|x_2, x_1)}{\sqrt{\int dx_3 p^2(x_3|x_2)}\sqrt{\int dx_3 p^2(x_3|x_2, x_1)}} \quad (4.20)$$

verwendet. Zusätzlich wird noch über die Bedingung x_2 gemittelt

$$d_C(x_1, \tau) = \mathcal{N} \int dx_2 \tilde{d}_C(x_2, x_1, \tau) \quad \text{mit} \quad 1/\mathcal{N} = x_2^{max} - x_2^{min}, \quad (4.21)$$

damit das Maß genau die Information liefert, die ein visueller Vergleich der Höhenliniendiagramme liefern würde. Zu beachten ist noch, dass eine Überprüfung von (4.19) mittels einer graphischen Überprüfung oder mittels des hier vorgestellten Abstandsmaßes prinzipiell für alle x_1 durchgeführt werden muss.

In der Praxis werden die Integrale in (4.20) und (4.21) durch Summen ersetzt, da zur numerischen Schätzung der Verteilungsfunktion die x_i diskretisiert werden. Für die Anwendung von (4.20) und (4.21) hat sich als wichtig herausgestellt, dass die Schätzung der Verteilungsfunktionen in den Außenbereichen aufgrund der endlichen Datenmenge mit großen Fehlern behaftet ist. Bei der Berechnung der Maße werden in dieser Arbeit daher nur die Bereiche der Verteilungsfunktionen miteinbezogen, in denen der relative Fehler kleiner als 20% ist (siehe [Vos09]). Prinzipiell können neben dem hier vorgestellten Maß auch noch weitere verwendet werden. Einen Vergleich verschiedener Maße findet sich in [NP06] oder [Vos09].

Die Überprüfung der Existenz einer endlichen Markovskala dient ganz im Sinne von Abschnitt 4.1 der Suche nach einer vereinfachten Beschreibung der Turbulenz. Ist die Markovskala klein gegenüber dem Beobachtungszeitraum, oder im Fall von Längen klein gegenüber den Systemabmessungen, bedeutet ihr Auftreten eine enorme Vereinfachung.

4.2 Statistische Theorien

Um eine statistische Beschreibung eines komplexen Systems zu entwickeln, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann der Versuch unternommen werden, aus den deterministischen Grundgleichungen des betrachteten Systems Entwicklungsgleichungen für Verteilungsfunktionen oder für Momente der interessierenden Observablen abzuleiten. Das bekannteste Beispiel einer Theorie dieser Art ist die

kinetische Gastheorie. Dieses Vorgehen ist aber nicht immer möglich. Zum einen kann es sein, dass, wie in der Hydrodynamik, die Grundgleichungen sehr komplex sind und somit eine systematische Herleitung der gewünschten Entwicklungsgleichungen erschwert wird. Zum anderen gibt es komplexe Systeme, für die gar keine Grundgleichungen bekannt sind. Dazu gehören beispielsweise neuronale Netze oder Finanzmärkte. In diesen Fällen kann man sich der Thematik dadurch nähern, dass man aufgrund von plausiblen oder durch die Beobachtung gestützten Annahmen ein Modell entwickelt und dessen Voraussagen mit Experimenten abgleicht. Beide der eben beschriebenen Vorgehensweisen wurden in der Vergangenheit auf die Turbulenz angewandt.

4.2.1 Hierarchien und das Schließungsproblem

Der erste der beiden oben angedeuteten Zugänge führt auf das sogenannte Schließungsproblem. Wie in Abschnitt 3.2.1 skizziert, versucht man unter Benutzung der Navier-Stokes-Gleichung Entwicklungsgleichungen für Verteilungsfunktionen oder Momente abzuleiten [Lun67, Nov93]. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichung enthalten die Entwicklungsgleichungen für Einpunktgrößen Terme mit Mehrpunktgrößen. Die Entwicklungsgleichung für die Mehrpunktgrößen enthalten wiederum Terme noch höherer Ordnung. So entsteht analog zu BBGKY-Hierarchie in der statistischen Mechanik eine Hierarchie von Entwicklungsgleichungen. Die Frage nach einem sinnvollen Abbruch dieser Gleichungshierarchie ist als das Schließungsproblem der Turbulenz bekannt. Neuere Arbeiten, die sich den hier geschilderten Zugang zu Eigen machen, sind z. B. [Fri03] und [WF09].

4.2.2 Phänomenologische Theorien

Neben dem eben beschriebenen Versuch die statistischen Eigenschaften einer turbulenten Strömung direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung abzuleiten, gibt es noch die Möglichkeit eines phänomenologischen Zugangs. Einer phänomenologischen Theorie liegen Hypothesen über das betrachtete System zugrunde, die nicht streng begründet werden können. Mit Hilfe dieser Hypothesen kann eine Theorie entwickelt werden, deren Voraussagen durch Experimente untermauert werden können. Diese Annahmen werden meist aus einer Modellvorstellung über das betrachtete Phänomen abgeleitet.

Die Richardsonkaskade

Im Falle der vollentwickelten Turbulenz fußen die meisten phänomenologischen Theorien auf der *Richardsonkaskade*, einer von Richardson [Ric22] entwickelten Modellvorstellung über die Struktur turbulenter Strömungen.

In der Vorstellung der Richardsonkaskade besteht die Strömung aus Wirbeln verschiedener Größe r . Diesen Strukturen können eine typische Geschwindigkeit $u(r)$

und eine typische Zeitskala $t_r = r/u(r)$ zugeordnet werden. Der Strömung wird auf der Längenskala L Energie mit konstanter Rate ϵ zugeführt, was zum Entstehen von Wirbeln auf dieser Längenskala führt. Nach der Vorstellung von Richardson zerfallen diese Wirbel in kleinere Wirbel. Auf der Längenskala L ist die Reynoldszahl $Re(L) = u(L)L/\nu$ sehr groß und damit die Dissipation sehr klein, so dass beim Zerfall die komplette Energie ϵ auf die kleineren Wirbelstrukturen übergeht. Auch diese Wirbel zerfallen wieder und übertragen dabei ihre Energie auf noch kleinere Wirbel. Dieser Kaskadenprozess kommt erst auf einer Skala η zum Erliegen, auf der die Reynoldszahl $Re(\eta) = u(\eta)\eta/\nu$ eine Größenordnung besitzt, in der die kleinen Wirbel nicht mehr aufbrechen, sondern durch die Viskosität ihre Energie in die molekularen Freiheitsgrade dissipiert wird. Die Annahme ist, dass dies bei $Re(\eta) \approx 1$ der Fall ist.

Der Richardsonkaskade liegen damit drei Vorstellungen zugrunde. Zum einen gibt es einen Bereich, in dem die Energie mit konstanter Rate weitergegeben wird. In diesem Bereich gilt:

$$\epsilon = \frac{u_r^2}{t_r} = \text{konstant.} \quad (4.22)$$

Weiterhin erfolgt der Energieübertrag nur lokal, d. h. die Energie wird immer nur an die nächstkleineren Wirbel übertragen. Außerdem füllen die Wirbel auf allen Skalen das Volumen der Strömung aus. Daraus folgt, dass die Strömung immer die gleiche Struktur hat, unabhängig davon auf welcher Längenskala innerhalb des Kaskadenbereiches sie betrachtet wird. Sie ist also skaleninvariant. Die Richardsonkaskade wird durch konstanten Energiefluss, lokale Interaktionen und Skaleninvarianz gekennzeichnet.

Die eben genannten Vorstellungen implizieren auch eine Trennung der Strömungsstruktur in drei Bereiche. Dazu gehören die Längenskala, auf der Energie zugeführt wird, der Bereich der Längenskala, ab der die Energie dissipiert wird, und der Bereich dazwischen. Die Bereiche werden wie folgt definiert:

- $r > L$: Der Bereich oberhalb der *integralen Längenskala* L . Auf diesen Skalen fließt Energie in das System.
- $\eta \ll r \ll L$: Im *Inertialbereich* wird die Energie kaskadenartig zu immer kleineren Längenskalen weitergeleitet. In diesem Bereich ist die Dissipation vernachlässigbar.
- $r \ll \eta$: Der *Dissipationsbereich* ist der Längenskalenbereich in dem die Energie der Wirbelbewegungen in Wärme umgesetzt wird.

Das Bild der Richardsonkaskade prägt die Entwicklung phänomenologischer Theorien bis heute. Auch wenn Teilaspekte des Kaskadenbildes im Laufe der Zeit verändert

worden sind (siehe [Fri95]), hat die Vorstellung, dass die Energie in einem Kaskadenprozess durch die verschiedenen Skalen der Strömung transportiert wird, Bestand. Es gibt jedoch nicht ganz unberechtigte Zweifel daran, ob die Vorstellung von einem Kaskadenprozess mit einem Inertialbereich überhaupt sinnvoll ist [KT09, Tsi09].

Die K41-Theorie

Aufbauend auf den Vorstellungen der Richardsonkaskade entwickelte Kolmogorov im Jahr 1941 [Kol41a, Kol41b]⁴ eine statistische Theorie der vollentwickelten Turbulenz, die im Folgenden kurz K41 genannt wird. Diese Theorie besteht aus mehreren Hypothesen, aus denen mit Hilfe der Dimensionsanalyse Aussagen über die statistischen Eigenschaften turbulenter Strömungen gewonnen werden. In ihrer Originalform besteht die Theorie aus drei Hypothesen.

Hypothese der lokalen Isotropie: Für ausreichend hohe Reynoldszahlen sind die kleinskaligen ($r \ll L$) turbulenten Bewegungen statistisch isotrop.

Dieser Hypothese liegt die Annahme zugrunde, dass die Strömung auf kleinen Skalen universelle Eigenschaften hat, also unabhängig von der Art ihrer Erzeugung oder von den Randbedingungen auf großen Skalen geworden ist. Damit hat sie auch alle Informationen über eventuelle, durch die Erzeugung oder Randbedingung aufgeprägten Anisotropien verloren.

Erste Ähnlichkeitshypothese: Für sehr hohe, aber nicht unendlich große Reynoldszahlen sind die Statistiken der kleinskaligen Bewegungen universell und eindeutig durch r , ν und ϵ bestimmt.

Ausgehend von dieser Hypothese können mit Hilfe der Dimensionsanalyse ($[\nu] = L^2T^{-1}$, $[\epsilon] = L^2T^{-3}$) eindeutige Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsskalen, die sogenannten Kolmogorovskalen, gebildet werden:

$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (\text{Länge}) \quad (4.23)$$

$$\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (\text{Zeit}) \quad (4.24)$$

$$u_\eta = \eta/\tau_\eta = (\epsilon\nu)^{1/4} \quad (\text{Geschwindigkeit}). \quad (4.25)$$

Da die auf Basis dieser Skalen bestimmte Reynoldszahl $Re(\eta) = \eta u_\eta/\nu = 1$ ist, bildet η den Endpunkt des kaskadenartigen Energietransportes und entspricht damit der Längenskala der kleinsten Strukturen.

Zweite Ähnlichkeitshypothese: Im Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen sind die Statistiken der kleinskaligen Bewegungen im Inertialbereich $\eta \ll r \ll L$ universell und eindeutig durch l und ϵ bestimmt und unabhängig von ν .

⁴Die englischen Übersetzungen der Artikel sind in [Kol91b, Kol91a] erschienen.

Neben der ersten postuliert auch die zweite Ähnlichkeitshypothese die Universalität der Statistik auf kleinen Skalen. Kolmogorov nutze diese Hypothese, um Aussagen über die statistischen Eigenschaften der *longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente*

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = [\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.26)$$

im Inertialbereich zu gewinnen. Die Statistik der Inkremente wird nach der zweiten Ähnlichkeitshypothese durch eine Verteilungsfunktion der Form

$$f(u, \epsilon, r) \quad (4.27)$$

beschrieben. Die Dimensionen der beteiligten Größen sind

$$[f] = \frac{T}{L}, \quad [u] = \frac{L}{T}, \quad [\epsilon] = \frac{L^2}{T^3}, \quad [r] = L. \quad (4.28)$$

Die Dimensionen von ϵ und r sind unabhängig, sie besitzen jeweils eine Basiseinheit, die die andere Größe nicht besitzt. Die Dimension der Observable u ist in dieser Betrachtung abhängig, da sie durch eine geschickte Kombination von r und ϵ gebildet werden kann. Nun kann nun aus den unabhängigen Variablen mit Hilfe von (4.5) eine dimensionslose Größe

$$\Pi = \frac{u}{(\epsilon r)^{1/3}} \quad (4.29)$$

gebildet werden, und nach dem Buckingham'schen Π -Theorem [Buc14, Bar03] gilt dann:

$$f(u, \epsilon, r) = \frac{1}{(\epsilon r)^{1/3}} \Phi(\Pi) \quad \Leftrightarrow \quad f(u, \epsilon, r) = \frac{1}{(\epsilon r)^{1/3}} \Phi\left(\frac{u}{(\epsilon r)^{1/3}}\right). \quad (4.30)$$

Die dimensionslose Funktion hängt nur noch von der entdimensionalisierten Geschwindigkeit Π ab. Die Verteilung $f(u, \epsilon, r)$ ist somit bezüglich ϵ und r selbstähnlich. Aus der Verteilungsfunktion erhält man die Momente

$$S_n(r) = C_n (\epsilon r)^{n/3}. \quad (4.31)$$

Die Momente $S_n(r)$ werden *longitudinale Strukturfunktionen* genannt. Ihre Exponenten sind eine lineare Funktion $\zeta_E(n) = nh$ mit $h = 1/3$. Nach Kolmogorov sind die hier auftauchenden dimensionslosen Konstanten C_n universell. Aus der Form der zweiten Strukturfunktion $S_n \sim r^{2/3}$ folgt für das Energiespektrum [Fri95]

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4.32)$$

Die Ergebnisse (4.31) und (4.32) können natürlich auch direkt aus Dimensionsbetrachtungen gewonnen werden.

Die phänomenologischen Ergebnisse werden durch das 4/5-Gesetz [Kol41b] abgerundet. Es stellt einen der wenigen direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung ableitbaren nichttrivialen Zusammenhänge dar. Es lautet:

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (4.33)$$

Es ist insofern exakt, als dass es im Limes verschwindender Viskosität und unter der Annahme, dass r im Inertialbereich liegt, ohne weitere Näherung hergeleitet werden kann.

Intermittenz und Erweiterungen von K41

Bis auf den Fall $n = 3$, der durch das 4/5-Gesetz festgelegt ist, stehen die Vorhersagen der K41-Theorie bezüglich dreidimensionaler Turbulenz im Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen (siehe z. B. [Fri95] und die darin aufgeführten Referenzen). Die Experimente zeigen, dass die Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente auf verschiedenen Skalen r verschiedene funktionale Formen besitzen. Sie sind also nicht selbstähnlich, was nicht kompatibel mit den Voraussagen für das Verhalten der Strukturfunctionsexponenten ist. Die experimentellen Daten legen ein nichtlineares Verhalten von $\zeta_E(n)$ nahe. Während die Tatsache, dass die Verteilungsfunktionen nicht selbstähnlich sind, eine gesicherte Erkenntnis ist, ist nicht restlos klar, ob die Strukturfunctionen im Inertialbereich skalieren. Das nicht selbstähnliche Verhalten der Inkrementstatistik wird in der Literatur zur Turbulenzforschung als *Intermittenz* bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird diese Nomenklatur übernommen.

Die Erkenntnis, dass die K41-Theorie nicht in der Lage ist, die experimentellen Ergebnisse zu reproduzieren, führte zur Entwicklung verfeinerter phänomenologischer Modelle. Neben dem Ansatz von Kolmogorov und Oboukhov [Kol62, Obo62], bei dem die Energiedissipationsrate ϵ im Gegensatz zur K41-Theorie als fluktuierend angenommen wird, gibt es zum Beispiel noch Ansätze von She und Leveque [SL94], auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Das von Parisi und Frisch eingeführte Multifraktale Modell [PF85] erweitert die K41-Theorie insofern, als dass sie nicht mehr davon ausgeht, dass im ganzen Volumen $h = 1/3$ gilt und das turbulente Feld damit monofraktal skaliert. Vielmehr wird die Existenz einer Menge von Skalierungsexponenten $h \in \{h_{min}, \dots, h_{max}\}$ postuliert. Anschaulich gesehen besteht das Volumen aus vielen Untermengen, denen jeweils ein bestimmtes h zugeordnet wird. Die Untermengen besitzen die Dimension $D(h)$. Für die Strukturfunctionen gilt:

$$S_n(r) = \beta_N \int dh P(h, r) \left(\frac{r}{L}\right)^{nh}, \quad (4.34)$$

wobei $P(h, r)$ die Wahrscheinlichkeit ist, ein Geschwindigkeitsinkrement mit Abstand r in einer Untermenge mit dem Skalierungsexponenten h zu finden. Der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit selbst hat die Form

$$P(h, r) = \left(\frac{r}{L}\right)^{3-D(h)}. \quad (4.35)$$

Daraus folgt für die Strukturfunktionen der Ausdruck

$$S_n(r) = \beta_N \int dh \left(\frac{r}{L}\right)^{nh+3-D(h)} \approx r^{\zeta_E(n)}. \quad (4.36)$$

Das Integral wurde dabei mit der Sattelpunktmethode ausgewertet. Die Exponenten werden somit durch

$$\zeta_E(n) = \inf_h [nh + 3 - D(h)] \quad (4.37)$$

festgelegt.

Die phänomenologischen Theorien im Lagrangebild

Die der K41-Theorie zugrundeliegende Dimensionsanalyse kann ohne weiteres auf das Lagrangebild übertragen werden. Die Geschwindigkeitsinkremente sind diesmal durch

$$U(\tau, \mathbf{y}, t) = v(t + \tau, \mathbf{y}) - v(t, \mathbf{y}) \quad (4.38)$$

gegeben, wobei v üblicherweise eine auf die Achsen des Koordinatensystems projizierte Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist. Aus Symmetriegründen werden die Statistiken als nicht von t und \mathbf{y} abhängig betrachtet. In die Dimensionsanalyse geht diesmal eine von ϵ , τ und u abhängige Verteilungsfunktion $f(u, \epsilon, \tau)$ ein, und man erhält:

$$f(u, \epsilon, \tau) = \frac{1}{(\epsilon\tau)^{1/2}} \Phi\left(\frac{u}{(\epsilon\tau)^{1/2}}\right). \quad (4.39)$$

Der Ausdruck für die Strukturfunktionen hat nun die Form

$$S_n(\tau) = C_n(\epsilon\tau)^{n/2}. \quad (4.40)$$

Wie im Eulerbild, so wurde auch im Lagrangebild eine Verletzung der Selbstähnlichkeit der Inkrementstatistiken festgestellt. Sowohl Experimente [MMMP01] als auch numerische Simulationen [BBC⁺04b, BBC⁺05] zeigen extreme Abweichungen von den K41-Vorhersagen. Im Lagrangebild ist die Frage, ob die Strukturfunktionen überhaupt skalieren, derzeit noch schwieriger zu beantworten als im Eulerbild und muss daher als Hypothese angesehen werden.

Auch das Multifraktale Modell wurde vom Eulerbild in das Lagrangebild übersetzt [Bor93, BBC⁺04a]. Nimmt man an, dass es eine Zuordnung der Form

$$\tau = \frac{r}{u(r)} \quad (4.41)$$

zwischen der Zeitskala τ und der Längenskala r gibt, wobei $u(r)$ eine typische Geschwindigkeitsdifferenz auf der Skala r ist, und dass die zu τ gehörigen Lagrange-schen Geschwindigkeitsinkremente proportional zu den zu r gehörigen Eulerschen Inkrementen sind, erhält man nach [BBC⁺04a] für die Strukturfunktionen:

$$S_n(\tau) = u_0^n \int dh \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\frac{nh+3-D(h)}{1-h}} \approx \tau^{\zeta_L(n)}. \quad (4.42)$$

Die Exponenten $\zeta_L(n)$ der Strukturfunktionen lauten in diesem Fall:

$$\zeta_L(n) = \inf_h \left[\frac{nh + 3 - D(h)}{1 - h} \right]. \quad (4.43)$$

Hier soll schon darauf verwiesen werden, dass es berechtigte Zweifel daran gibt, dass die hier gezeigte Übersetzung des Multifraktalen Modells in das Lagrangebild zu korrekten Ergebnissen führt [HGBM07].

Teil II

Die inverse Energiekaskade

5 Die inverse Kaskade

Die inverse Energiekaskade ist eines der zentralen Phänomene bei der Behandlung zweidimensionaler Turbulenz. Sie stellt ein Merkmal dar, an dem sich zwei- und dreidimensionale Strömungen fundamental unterscheiden.

In drei Dimensionen ist man ganz im Sinne der Richardsonkaskade die Vorstellung gewohnt, dass große Wirbelstrukturen, die beispielsweise beim Auftreffen einer gleichförmigen Strömung auf ein Hindernis entstehen, in immer kleinere Wirbel aufbrechen und somit Energie von großen zu kleinen Strukturen übertragen wird. In zwei Dimensionen ist dies nicht der Fall. Hier ist es möglich, dass die Erzeugung kleinskaliger Wirbelstrukturen zum Aufbau großskaliger Strömungen führt und somit die Energie von kleinen zu großen Strukturen transportiert wird. Der Transport von Energie von kleinen zu großen Skalen wird *inverse Energiekaskade* genannt.

Eine der ersten Arbeiten, die sich mit dem Verhalten zweidimensionaler Strömungen beschäftigte, war [Ons49]. Ausgehend von einer Punktwirbelbeschreibung zeigte Onsager mit Hilfe der statistischen Mechanik, dass im Fall der Eulergleichung Zustände existieren, in denen Punktwirbel mit gleichem Vorzeichen die Tendenz besitzen, Cluster zu bilden. Diese Tendenz und damit die Ordnung im System wird mit steigender Energie immer größer. Dies ist einer der seltenen Fälle, in denen die Entropie bei steigender Energie sinken kann, was zu Zuständen negativer Temperatur¹ führt. Onsagers Arbeit war ein erster Erklärungsversuch für die Entstehung großskaliger Strukturen in der Atmosphäre und gab einen Hinweis darauf, dass in zwei Dimensionen große Strukturen aus kleinen entstehen können und damit auch die Energie von kleinen zu großen Skalen transferiert werden kann.

Aufbauend auf der Arbeit von Fjørtoft [Fj53] beschäftigte sich Kraichnan ausführlich mit dem Energietransport in zweidimensionaler Turbulenz [Kra67]. Im Gegensatz zu Onsager betrachtete er dabei die Navier-Stokes-Gleichung mit Antrieb. Die in diesem Zusammenhang gemachten Voraussagen waren in den letzten Jahren Gegenstand umfangreicher numerischer (siehe z. B. [FS84, SA81, SY93, BCV00, DG01]) und experimenteller [PT97, PT98] Arbeiten. Besonders das Skalierungsverhalten des Energiespektrums und der Energiefluss in der inversen Energiekaskade standen im Mittelpunkt dieser Untersuchungen.

Das vorliegende Kapitel hat das Ziel, die Voraussetzungen für die numerische Simulation einer stationären zweidimensionalen Strömung mit inverser Energiekaska-

¹Der Begriff Temperatur ist hier so zu verstehen, wie er im Rahmen der statistischen Mechanik definiert wird.

de zu schaffen. Im ersten Abschnitt wird kurz auf die theoretischen Grundlagen des Energietransportes in turbulenten Strömungen im Allgemeinen und in der inversen Kaskade im Speziellen eingegangen. Anhand dieser Vorüberlegungen werden im zweiten Teil des Kapitels die für die Simulation nötigen Kraft- und Dissipationsterme modelliert. Der Abschnitt zum Aufbau der Kaskade zeigt, wie sich, ausgehend von einem ruhenden Geschwindigkeitsfeld, das Energiespektrum aufbaut. Im letzten Abschnitt werden das Energiespektrum und der Energiefluss im stationären Zustand einer genaueren Betrachtung unterzogen und ein erster Vergleich zwischen den Wirbelstrukturen in zwei und drei Dimensionen gemacht.

5.1 Der Energietransport in turbulenten Strömungen

Wenn im Zusammenhang mit Turbulenz von Energietransport gesprochen wird, ist der Transfer von Energie zwischen verschiedenen großen Strukturen der Strömung gemeint. Um den Energiefluss zwischen verschiedenen Skalen genauer zu untersuchen, ist es zweckmäßig, in die Fourierdarstellung zu wechseln. Das Energiespektrum ist durch

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int d\Omega \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t) \quad (5.1)$$

gegeben, wobei $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ die räumliche Fouriertransformierte des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ darstellt. Die Integration erfolgt über den gesamten Raumwinkel. Aus der Navier-Stokes-Gleichung (2.4) kann nun eine Evolutionsgleichung für das Energiespektrum abgeleitet werden [Pop00]. Die Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + F(k, t) \quad (5.2)$$

beschreibt die zeitliche Änderung der Energie in der Fouriermode k . Die Gleichung zeigt, dass der Mode k durch die viskose Dissipation Energie entzogen und durch die Kraft $F(k)$ zugeführt wird. Die Dissipation wirkt prinzipiell auf alle Moden, ist aber bei entsprechender Wahl der Viskosität ν für kleine k vernachlässigbar. Der Modenbereich, der von der äußeren Kraft beeinflusst wird, hängt von der konkreten Form der Kraft ab. Der Term

$$T(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty dp dq T(k, p, q) \quad (5.3)$$

wird *spektrale Energietransferfunktion* genannt und resultiert aus dem nichtlinearen Term der Navier-Stokes-Gleichung (siehe [Pop00] für konkrete Ausdrücke). Er sorgt dafür, dass Energie zwischen verschiedenen Fouriermoden transferiert wird. Die Interaktion erfolgt dabei immer zwischen den drei Wellenvektoren \mathbf{k} , \mathbf{p} und \mathbf{q} , den sogenannten *Triaden*. $T(k, p, q)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$

gilt, also wenn die Triaden ein Dreieck bilden. Alle anderen Kombinationen liefern keinen Beitrag zum Energietransfer. Durch die nichtlineare Interaktion der Moden wird dem System weder Energie zugeführt noch entzogen, was gleichbedeutend mit

$$\int_0^{\infty} dk T(k) = 0 \quad (5.4)$$

ist. Während $T(k)$ den Nettoabfluss von Energie aus der Mode k beschreibt, charakterisiert der *Energiefluss*

$$\Pi(k) = - \int_0^k dk' T(k') = \int_k^{\infty} dk' T(k') \quad (5.5)$$

den Energietransport von Moden kleiner als k in Moden, die größer als k sind. Wenn $\Pi(k)$ in einem Wellenzahlenbereich konstant ist, so gilt dort: $T(k) = -\partial_k \Pi(k) = 0$. Die Moden in diesem Bereich gewinnen weder Energie noch verlieren sie Energie. Man kann zeigen [DG95], dass für die in Abschnitt 2.1.2 eingeführte Enstrophie der Zusammenhang

$$Z = \langle \omega^2 \rangle = \langle (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2 \rangle \quad (5.6)$$

gilt. Hierbei sind die Erwartungswerte als räumliche Mittelung wie in (2.19) aufzufassen. Wie später noch klar wird, entspricht der Term auf der rechten Seite, wenn er mit ν multipliziert wird, der Energiedissipationsrate. Für die Enstrophie gilt weiterhin der Zusammenhang

$$Z = \int_0^{\infty} dk k^2 E(k). \quad (5.7)$$

Hieraus kann man sehen, dass die zu einer Wellenzahl k gehörige Enstrophie $Z(k)$ gleich $k^2 E(k)$ ist.

Die inverse Kaskade

Es stellt sich nun die Frage, in welche Richtung die Energie in einer zweidimensionalen Strömung fließt und warum es einen Unterschied zu dreidimensionalen Strömungen gibt. In Abschnitt 2.1.2 wurde schon betont, dass im nichtviskosen Fall in zwei Dimensionen die Enstrophie eine Erhaltungsgröße ist.

Um sich nun zu veranschaulichen, welchen Einfluss dieser Umstand auf den Energietransport hat, kann man sich ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld vorstellen, das sich ohne Dissipation und Antrieb frei entwickelt. Das Energiespektrum soll dabei wie in Abbildung 5.1 um eine Wellenzahl k_0 zentriert sein. Neben der Enstrophie ist in diesem Fall auch die Energie eine Erhaltungsgröße. Der Term $T(k)$ sorgt nun dafür, dass die Energie zwischen verschiedenen Wellenzahlen transportiert wird. Fließt

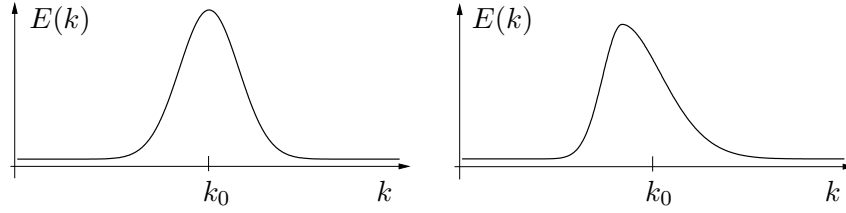


Abbildung 5.1 Veranschaulichung der inversen Kaskade. Ein Transport von Energie hin zu größeren Wellenzahlen erzwingt einen Transport einer noch größeren Energiemenge zu kleineren Wellenzahlen. Daraus folgend verschiebt sich die Masse des Spektrums zu kleineren Moden.

eine Menge Energie E_0 aus der Mode k_0 in die Mode $k_+ > k_0$, so erhöht sich die Enstrophie um $k^2 E_0$. Damit die Enstrophie bei diesem Prozess erhalten bleibt, muss dementsprechend mehr Energie in eine Mode $k_- < k_0$ fließen, da ein Energietransport zu großen Wellenzahlen stärker für die Enstrophiebilanz gewichtet wird als ein Transport in die entgegengesetzte Richtung. Im Endergebnis verschiebt sich, wie in Abbildung 5.1 angedeutet, die Masse des Spektrums hin zu kleinen Wellenzahlen.

Diese Überlegung kann ein wenig formalisiert werden [Fjøl53]. Dazu betrachtet man die drei Moden $k_+ > k_0 > k_-$. Der Einfachheit halber wird zusätzlich angenommen, dass $k_0 = 2k_-$ und $k_+ = 3k_-$ gilt. Die Annahme, dass zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 sowohl Energie als auch Enstrophie erhalten bleiben, führt dazu, dass der Energietransport $\Delta E_i = E(k_i, t_2) - E(k_i, t_1)$ zwischen zwei Wellenzahlen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \Delta E_- + \Delta E_0 + \Delta E_+ &= 0 \\ k_-^2 \Delta E_- + k_0^2 \Delta E_0 + k_+^2 \Delta E_+ &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen muss. Mit den oben gemachten Annahmen erhält man für die Energiebilanz

$$\Delta E_- = -\frac{5}{8} \Delta E_0 \quad \Delta E_+ = -\frac{3}{8} \Delta E_0 \quad (5.8)$$

und

$$k_-^2 \Delta E_- = -\frac{5}{32} k_0^2 \Delta E_0 \quad k_+^2 \Delta E_+ = -\frac{27}{32} k_0^2 \Delta E_0 \quad (5.9)$$

für die Enstrophiebilanz. Wenn die mittlere Wellenzahl k_0 Energie verliert ($\Delta E_0 < 0$), dann wird mehr Energie zu k_- transportiert als zu k_+ . Für die Enstrophie verhält es sich genau umgekehrt. Im Falle einer endlichen Viskosität kann auch angenommen werden, dass k_0 weit von Skalen entfernt ist, bei denen die Dissipation eine Rolle spielt. Die eben vorgestellte Argumentation kann so zumindest für die Anfangsphase beibehalten werden.

Für den Fall getriebener Turbulenz kam Kraichnan zu dem Ergebnis [Kra67], dass im stationären Zustand zwei getrennte Kaskaden existieren, wenn man dem System um die Wellenzahl k Energie zuführt. Zum einen fließt Energie in einer inversen Kaskade, ausgehend vom Bereich um k , zu kleineren Wellenzahlen. Das Energiespektrum ist in diesem Bereich genau wie in drei Dimensionen proportional zu $k^{-5/3}$. Zum anderen wird in einer direkten Kaskade Enstrophie, beginnend beim Wellenzahlenbereich um k , zu größeren Wellenzahlen hin transportiert. Hier ist das Energiespektrum proportional zu k^{-3} .

Energiefluss und Strukturfunktionen

Die Tatsache, dass in zwei Dimensionen der Energietransfer von kleinen zu großen Skalen verläuft, spiegelt sich auch in den Strukturfunktionen wider. Um dies näher zu beleuchten, wird im Folgenden kurz die Herleitung des Kolmogorovschen $-4/5$ -Gesetzes skizziert. Ein genauerer Blick auf die Herleitung ist insofern für die vorliegende Arbeit interessant, da sie wichtige Informationen für die Modellierung der zur Simulation der inversen Kaskade nötigen Terme gibt. Die Herleitung orientiert sich an [Ber99] (siehe auch [Ber00] und [Gaw99]).

Es wird angenommen, dass die Strömung in einem Zustand ist, in dem die Zweipunktkorrelation $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle$ stationär wird. Der erste Schritt in der Herleitung besteht darin, eine Zeitentwicklungsgleichung für die Zweipunktkorrelation abzuleiten. Dazu müssen zunächst noch die Eigenschaften der Kraft, die in die Navier-Stokes-Gleichung eingeht, festgelegt werden. Es wird angenommen, dass die Kraft gaußverteilt ist und die Korrelationsfunktion die Form

$$\langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle = C_{ij} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right) \delta(t - t') \quad (5.10)$$

besitzt. Dabei ist L_f die Längenskala, auf der die Kraft korreliert ist. Mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichung kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \int_t^{t+\delta t} dt' \partial_{t'} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t') \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p]_{\mathbf{x}, t} \delta t + \underbrace{\int_t^{t+\delta t} dt' f(\mathbf{x}, t')}_{\sim \sqrt{\delta t}} + \mathcal{O}(\delta t^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die zweite Zeile erhält man durch die Reihenentwicklung des Ausdrucks unter dem Integral bis zur Ordnung δt . Dabei ist zu beachten, dass das Integral über die Rauschkraft proportional zu $\sqrt{\delta t}$ ist (siehe z. B. [Hak83, Gar04]). Einsetzen von (5.11) in

$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \delta t) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t + \delta t) \rangle$ und Vernachlässigung aller Terme von höherer Ordnung als δt liefert:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle &= -\frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2 \rangle \\ &\quad - \nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i C_{ii} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der erste Term in (5.12) resultiert aus der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung und der zweite aus dem Dissipationsterm. In beiden Fällen wird bei der Herleitung Translationsinvarianz vorausgesetzt. Für das weitere Vorgehen wird noch die Abkürzung

$$C_f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right) := \frac{1}{2} \sum_i C_{ii} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right) \quad (5.13)$$

eingeführt. Unter der Annahme der Stationarität der Zweipunktkorrelation

$$\partial_t \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle = 0 \quad (5.14)$$

erhält man schließlich

$$-\frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2 \rangle - \nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle = C_f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right). \quad (5.15)$$

Diese Gleichung soll nun zunächst für den Fall dreidimensionaler Turbulenz genauer untersucht werden. Dazu betrachtet man zuerst den Grenzfall zweier identischer Punkte $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ unter der Voraussetzung endlicher Viskosität. Da die Geschwindigkeitskorrelationen bei endlicher Viskosität glatt sein sollen, verschwindet der erste Term. Lässt man jetzt auch noch die Viskosität gegen Null gehen, erhält man:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} \nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle = \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})^2 \rangle = C_f(\mathbf{0}) =: \epsilon. \quad (5.16)$$

Wichtig ist hier, dass der Energiedissipationsterm $\nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})^2 \rangle$ in drei Dimensionen beim Grenzübergang zu verschwindender Viskosität nicht verschwindet². Die Gleichung besagt, dass die gesamte in das System eingebrachte Energie durch die Viskosität dissipiert wird und somit zur Stationarität der Strömung führt.

Als nächstes betrachtet man den Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Gleichung (5.15) wird dann zu

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2 \rangle = C_f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right). \quad (5.17)$$

²Dies wird in der Literatur oft als *Dissipationsanomalie* bezeichnet.

Im Falle dreidimensionaler Turbulenz wird die Kraft so konstruiert, dass sie Energie auf großen Längenskalen in das System einbringt, d. h. L_f ist in der Größenordnung der Systemabmessung. Betrachtet man nun kleine Längenskalen mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \ll L_f$, so kann die Näherung $C_f((\mathbf{x} - \mathbf{x}')/L_f) \approx C_f(\mathbf{0})$ gemacht werden. Für diese Näherung folgt:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2 \rangle = C_f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f} \right) = \epsilon. \quad (5.18)$$

Das heißt, dass im Grenzfall verschwindender Viskosität auf kleinen Skalen die Energie, die auf großen Skalen in das System eingebracht und von der Viskosität auf noch kleineren Skalen dissipiert wird, allein durch den nichtlinearen Term transportiert wird. Der Erwartungswert im nichtlinearen Term hat eine ähnliche Form wie die in Abschnitt 4.2.2 definierte dritte Strukturfunktion. Unter der Annahme, dass die Strömung isotrop ist, kann aus (5.18) die Relation

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \epsilon r \quad (5.19)$$

abgeleitet werden, wobei $r := |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ gilt. Dies ist wiederum das Kolmogorovsche $-4/5$ -Gesetz, das im Grenzfall verschwindender Viskosität im Inertialbereich gilt.

Die eben gemachte Betrachtung wird jetzt für den Fall zweidimensionaler Turbulenz wiederholt. Ausgangspunkt ist wieder (5.15). Der Grenzübergang zu verschwindendem Abstand gefolgt vom Grenzübergang verschwindender Viskosität liefert:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \langle \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})^2 \rangle = 0 = C_f(\mathbf{0}) =: \epsilon. \quad (5.20)$$

Dass in zwei Dimensionen der Dissipationsterm verschwindet, wird klar, wenn man die Relation (5.6) betrachtet. Das räumliche Mittel über das Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten ist gleich der Enstrophie. Da diese in zwei Dimensionen eine Erhaltungsgröße ist, verschwindet der Dissipationsterm, wenn die Viskosität gegen Null geht³. Sobald Energie zugeführt wird, ist dadurch die Stationarität der Zweipunktkorrelationen nicht mehr gewährleistet:

$$\partial_t \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle \neq 0, \quad \text{wenn} \quad \epsilon \neq 0. \quad (5.21)$$

Die Energie des Systems wächst dann proportional zu ϵt . Damit das System stationär wird, muss noch eine Energiesenke zur Bilanzgleichung hinzugefügt werden.

³Die Enstrophie ist natürlich nur in einer idealen Flüssigkeit in zwei Dimensionen eine Erhaltungsgröße. Da während des Grenzüberganges die Viskosität aber endlich ist, hat man es in diesem Fall nicht mit einer idealen Flüssigkeit zu tun. Die Argumentation bleibt dennoch gültig, da die Wirbeltransportgleichung bei endlicher Viskosität nur um den Term $\nu \Delta \omega$ ergänzt wird, der aber nur Enstrophie vernichten und nicht erzeugen kann.

Analog zum Kraftterm C_f wird nun ein Dissipationsterm $C_d((\mathbf{x} - \mathbf{x}')/L_d)$ mit der Korrelationslängenskala L_d in die Bilanzgleichung (5.15) eingefügt und man erhält:

$$-\frac{1}{4}\nabla_{\mathbf{x}}\langle(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2\rangle - \nu\langle\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}')\rangle = C_f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f}\right) - C_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_d}\right). \quad (5.22)$$

Im Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ und $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ erhält man dann die Bedingung

$$C_f(\mathbf{0}) = C_d(\mathbf{0}) = \epsilon. \quad (5.23)$$

Der Energieeintrag wird also komplett durch den neuen Dissipationsterm aufgefangen. Unter der Annahme $\nu \rightarrow 0$ wird (5.22) zu

$$-\frac{1}{4}\nabla_{\mathbf{x}}\langle(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2\rangle = C_f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_f}\right) - C_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L_d}\right). \quad (5.24)$$

Jetzt stellt sich wieder die Frage, wie sich das System im Inertialbereich verhält. Dazu wählt man $L_f \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \ll L_d$. Unter dieser Annahme gilt $C_f \approx 0$ und $C_d \approx C_d(0) = \epsilon$. Die Bilanzgleichung lautet dann:

$$-\frac{1}{4}\nabla_{\mathbf{x}}\langle(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2\rangle = -\epsilon. \quad (5.25)$$

Der entscheidende Unterschied zum dreidimensionalen Fall ist das umgekehrte Vorzeichen auf der rechten Seite. Mit $r := |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ und unter Isotropie kann wieder eine Relation für die dritte Strukturfunktion abgeleitet werden. Sie lautet diesmal

$$S_3(r) = \frac{3}{2}\epsilon r. \quad (5.26)$$

Die inverse Energiekaskade macht sich durch die Umkehrung des Vorzeichens der dritten Strukturfunktion bemerkbar. Der geänderte Vorfaktor ist Folge der reduzierten Dimensionalität.

5.2 Ein Modell für die inverse Kaskade

Für die numerische Simulation der zweidimensionalen Turbulenz wird die Formulierung der Navier-Stokes-Gleichung für die Wirbelstärke (2.13) gewählt. Da die Vortizität im Fall zweidimensionaler Turbulenz nur eine Komponente besitzt, und sie somit als Skalar aufgefasst werden kann, reduziert sich der Aufwand für die numerische Simulation enorm. Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts muß die

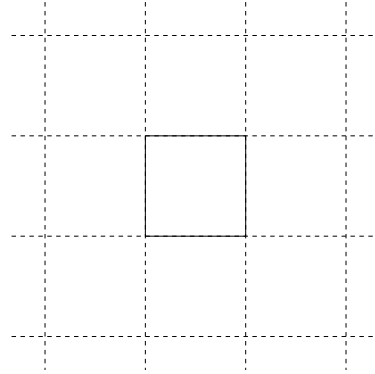


Abbildung 5.2 Die Verwendung periodischer Randbedingungen bedeutet anschaulich, dass das Simulationsgebiet (durchgezogene Linie) durch eine unendliche Anzahl von Kopien (durch die gestrichelten Linien angedeutet) von sich selbst fortgesetzt wird.

Navier-Stokes-Gleichung um einen zusätzlichen Dissipationsterm $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ ergänzt werden, damit das System in einen stationären Zustand gelangen kann. Im Fall der Wirbeltransportgleichung erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (5.27)$$

mit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Um die inverse Kaskade zu simulieren, müssen Randbedingungen festgelegt und sowohl für die Kraft als auch für den zusätzlichen Dissipationsterm konkrete Formelausdrücke angegeben werden, die die Anforderungen des letzten Abschnittes erfüllen. Dies wird die Aufgabe der nächsten beiden Unterabschnitte sein.

5.2.1 Randbedingungen

Die hier zu untersuchende Realisierung einer turbulenten Strömung entspricht einer idealisierten Situation. Im Prinzip wäre es wünschenswert, ein unendlich ausgedehntes Volumen zu betrachten, um die Einflüsse entsprechender Ränder auszuschließen. Dies ist jedoch in einer numerischen Simulation nicht möglich. Man versucht diesem Ideal durch die Wahl von periodischen Rändern möglichst nahe zu kommen. Dies bedeutet, dass man die turbulente Strömung in einem Simulationsgebiet mit dem Volumen L_{Box}^2 bzw. L_{Box}^3 betrachtet. Durch das Anfügen von Kopien dieses Gebietes an die Ränder setzt man das Simulationsgebiet periodisch fort (siehe Abb. 5.2).

Durch eine räumliche Fouriertransformation kann Gleichung (5.27) in ein gekoppeltes unendlichdimensionales System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{F}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + i\mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \times \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (5.28)$$

überführt werden, wobei mit $\mathcal{F}[h]$ die räumliche Fouriertransformation von h bezeichnet wird. Im Falle periodischer Randbedingungen kann das Vortizitätsfeld anstatt durch ein Fourierintegral durch eine Fourierreihe dargestellt werden. In zwei Dimensionen erhält man

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rightarrow \omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}_{nm}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.29)$$

Die Wellenvektoren \mathbf{k} sind jetzt nicht mehr kontinuierlich, sondern diskret mit $\mathbf{k}_{nm} = (2n\pi/L_{Box}, 2m\pi/L_{Box})$. Da bei einer numerischen Simulation das Grundgebiet nur mit endlich vielen Punkten abgetastet werden kann, wird bei einer Auflösung von $N \times N$ Punkten die unendliche zu einer endlichen Fourierreihe:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}_{nm}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}_{nm}\cdot\mathbf{x}} \rightarrow \omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,m=-N/2}^{N/2} \tilde{\omega}_{nm}(\mathbf{k}_{nm}, t) e^{i\mathbf{k}_{nm}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.30)$$

Da die Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung bzw. der Wirbeltransportgleichung nicht von den Abmessungen des Grundgebietes abhängen, kann man $L_{Box} = 2\pi$ wählen. Die Wellenvektoren vereinfachen sich mit dieser Wahl zu $\mathbf{k}_{n,m} = (n, m)$.

Die Wahl der periodischen Randbedingungen zusammen mit der Diskretisierung des Grundgebietes führen schließlich dazu, dass die ursprüngliche partielle Differentialgleichung durch eine endliche Anzahl gewöhnlicher Differentialgleichungen im Fourierraum approximiert werden kann. Die numerische Lösung dieser Gleichungen mittels des *Pseudospektralverfahrens* [CHQZ93, Boy01] wird in Anhang A beschrieben.

Bei der Benutzung von periodischen Randbedingungen ist noch ein wichtiger Punkt zu beachten. Die Periodizität führt dazu, dass Strukturen, die größer oder länger korreliert sind als $L_{Box}/2$, durch ihre Kopien in den periodisch fortgesetzten Bereichen beeinflusst werden. Um dies zu vermeiden, sollte für die größten Strukturen die Bedingung $l \ll L_{Box}/2$ gelten, wenn l die Größe dieser Strukturen selbst bezeichnet. Auf diesen Punkt wird in Abschnitt 6.1 noch einmal kurz eingegangen.

5.2.2 Die Kraft

Um die inverse Kaskade anzutreiben, muss dem System durch die Kraft $f(\mathbf{x}, t)$ Energie zugeführt werden. An die Kraft werden dabei mehrere Anforderungen gestellt. Sie muss divergenzfrei sein, sie muss, wie in Abschnitt 5.1 gefordert, die Energie auf kleinen räumlichen Skalen zuführen, und ihre Zeitabhängigkeit muss so gewählt werden, dass sie in der Zeit deltakorreliert ist. Den ersten Punkt kann man dadurch erfüllen, dass man ein Kraftfeld $f_{\perp}(\mathbf{x}, t)$ mit nur einer Komponente konstruiert, die per Definition senkrecht zum zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ steht.

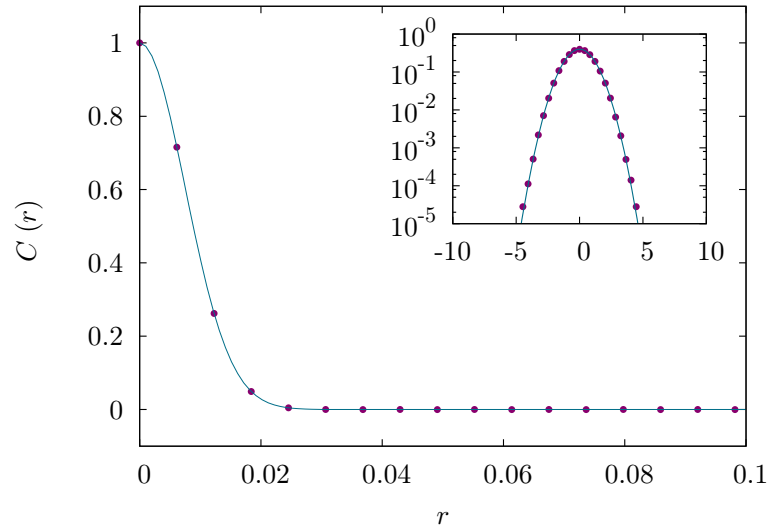


Abbildung 5.3 Vergleich der Korrelationsfunktion $C(r)$ (durchgezogene Linie) und der Autokorrelationsfunktion der in der Numerik nach (5.37) implementierten Kraft (Punkte). Die Korrelationslänge ist in beiden Fällen $l_f = 0.075$. Die räumliche Auflösung der Numerik liegt hier bei 1024 Gitterpunkten bei einer Kantenlänge von 2π . Damit entspricht die Korrelationslänge 1.22 Gitterlängen. Das Inset zeigt die aus einer Realisierung des Feldes $f_\perp(\mathbf{x})$ geschätzte normierte Verteilungsfunktion der Kraft $p(f_\perp)$ (Punkte) zusammen mit einer Gaußverteilung (durchgezogene Linie).

Bildet man dann die Rotation $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times f_\perp(\mathbf{x}, t)$ dieses Feldes, so erhält man per Konstruktion ein divergenzfreies Kraftfeld. In die Wirbeltransportgleichung geht dann der Term

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\Delta f_\perp(\mathbf{x}, t) \quad (5.31)$$

ein. Um die zweite Anforderung zu erfüllen, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man eine Kraft konstruieren, die eine kurze Korrelationslänge im Ortsraum besitzt. Zum anderen kann man die Kraft so gestalten, dass sie direkt im Fourierraum ausschließlich im Bereich großer Wellenzahlen wirkt. In beiden Fällen soll das Kraftfeld ein Zufallsfeld sein, d. h. der Strömung sollen durch die Kraft von außen keine regelmäßigen Strukturen aufgeprägt werden.

Der Gaußtreiber

In diesem Abschnitt wird die Kraft $f_\perp(\mathbf{x})$ so konstruiert, dass sie eine kurzreichweitige räumliche Korrelationsfunktion besitzt. An dieser Stelle wird für die Korrelati-

onsfunktion die Wahl

$$C(r) = \langle f_{\perp}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) f_{\perp}(\mathbf{x}) \rangle \quad (5.32)$$

$$= F_0 l_f^2 e^{-\frac{r^2}{2l_f^2}} \quad (5.33)$$

getroffen, wobei $r = |\mathbf{r}|$ gilt. Mit Hilfe des Faltungstheorems (der Erwartungswert entspricht hier einer räumlichen Integration über \mathbf{x}) kann die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion der Kraft als

$$\tilde{C}(k) = \tilde{f}_{\perp}(k) \tilde{f}_{\perp}^*(k) \quad (5.34)$$

$$= \mathcal{F}\{F_0 l_f^2 e^{-\frac{r^2}{2l_f^2}}\} \quad (5.35)$$

$$= F_0 l_f^2 e^{-\frac{k^2 l_f^2}{2}} \quad (5.36)$$

geschrieben werden. Hieraus kann $\tilde{f}_{\perp}(k)$ leicht durch Wurzelziehen gewonnen werden. Dabei ist zu beachten, dass bei der Multiplikation die Phasenfaktoren wegfallen. Man erhält

$$\tilde{f}_{\perp}(k) = \sqrt{F_0} l_f e^{-\frac{k^2 l_f^2}{4}} e^{i\phi_{\mathbf{k}}}. \quad (5.37)$$

Damit wurde die Kraft so konstruiert, dass sie die geforderte Korrelationsfunktion besitzt. Darüber hinaus soll $f_{\perp}(\mathbf{x})$ ein reelles Zufallsfeld sein. Dies erreicht man dadurch, dass man die Phasen als voneinander unabhängige und zwischen 0 und 2π gleichverteilte Zufallszahlen unter der Nebenbedingung wählt, dass $\phi_{\mathbf{k}} = -\phi_{-\mathbf{k}}$ gilt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\tilde{f}_{\perp}(\mathbf{k}) = \tilde{f}_{\perp}^{\text{re}}(\mathbf{k}) + i\tilde{f}_{\perp}^{\text{im}}(\mathbf{k})$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\perp}^{\text{re}}(\mathbf{k}) &= A(\mathbf{k}) \cos(\phi) & \tilde{f}_{\perp}^{\text{im}}(\mathbf{k}) &= A(\mathbf{k}) \sin(\phi) \\ \tilde{f}_{\perp}^{\text{re}}(-\mathbf{k}) &= A(\mathbf{k}) \cos(\phi) & \tilde{f}_{\perp}^{\text{im}}(-\mathbf{k}) &= -A(\mathbf{k}) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (5.38)$$

mit $A(\mathbf{k}) = \sqrt{F_0} l_f \exp[-(k^2 l_f^2)/4]$. Durch die Rücktransformation

$$f_{\perp}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}_{\perp}(\mathbf{k}) \approx \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}_{\perp}(\mathbf{k}) \quad (5.39)$$

erhält man das Kraftfeld im Ortsraum. Da die numerische Realisation der Kraft nur mit endlich vielen Wellenvektoren geschieht, wird das Integral in (5.39) durch eine Fourierreihe approximiert. In Abbildung 5.3 ist der Vergleich der in (5.33) vorgegebenen Korrelationsfunktion mit der aus einem numerisch erzeugten Kraftfeld gewonnenen Korrelationsfunktion zu sehen. Der Vergleich zeigt, dass die Approximation in Gleichung (5.39) bei der in der Simulation zur Verfügung stehenden Anzahl

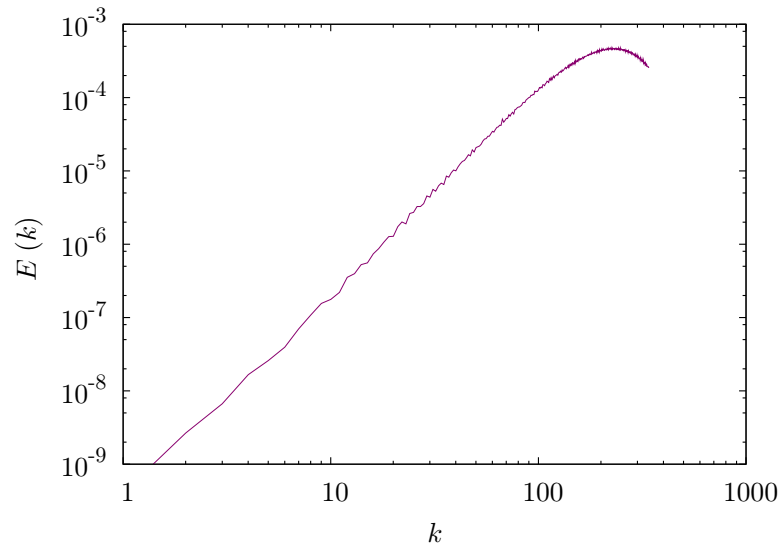


Abbildung 5.4 Energiespektrum einer Realisation des durch den Gaußtreiber erzeugten Kraftfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Die Parameter der Kraft sind die Parameter, die in der Simulation `sim2d1024gaussA` (siehe Anhang B) verwendet wurden. Das Maximum des Spektrums verschiebt sich bei kleiner werdendem l_f hin zu größeren Wellenzahlen.

von Wellenvektoren sehr gut erfüllt ist. Aus (5.39) wird auch direkt klar, dass die Amplituden von $f_{\perp}(\mathbf{x})$ gaußverteilt sind. Da die Phasen Zufallszahlen sind, können auch die in die Summe eingehenden $f_{\perp}(\mathbf{k})$ als Zufallszahlen betrachtet werden. Fasst man die Terme, deren Phasen nicht unabhängig voneinander gewählt werden immer zusammen, so besteht die Summe bei N zur Verfügung stehenden Wellenvektoren aus $N/2$ unabhängigen Zufallszahlen. Nach dem zentralen Grenzwertsatz müssen die Amplituden $f_{\perp}(\mathbf{x})$ gaußverteilt sein. Das Inset in Abbildung 5.3 zeigt, dass dies sehr gut erfüllt ist. Abbildung 5.4 zeigt das Energiespektrum eines durch die Kraft erzeugten Geschwindigkeitsfeldes und offenbart, dass die Kraft hauptsächlich bei großen Wellenzahlen, also kleinen Strukturen, Energie zuführt.

Der Deltatreiber

Ein Energieeintrag auf kleinen Längenskalen kann auch dadurch realisiert werden, dass man die Energie direkt in einem hohen Wellenzahlenbereich zuführt. Die Amplitude der Kraft wird durch

$$f_{\perp}(\mathbf{k}) = \sqrt{F_0} h(k, k_0) e^{i\phi_{\mathbf{k}}} \quad (5.40)$$

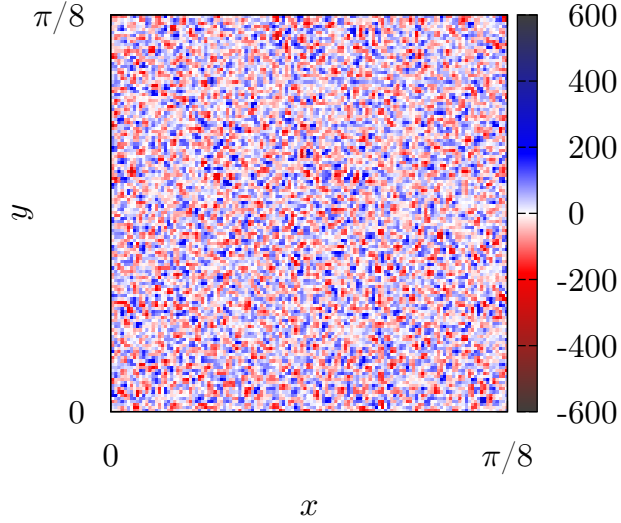


Abbildung 5.5 Darstellung eines Ausschnittes des in die Wirbeltransportgleichung im Ortsraum eingehenden Kraftterms. Die Farbskala gibt den Wert des Feldes an. Deutlich zu sehen ist, dass die erzeugten Strukturen sehr kleinskalig sind und das Gesamtfeld einen stark zufälligen Charakter hat.

festgelegt. Der Phasenfaktor ist hier wieder eine zwischen 0 und 2π gleichverteilte Zufallszahl, die wie beim Gaußtreiber unter Berücksichtigung der Symmetrie $\phi_{\mathbf{k}} = -\phi_{-\mathbf{k}}$ für jede Wellenzahl unabhängig gewählt wird. Die Funktion $h(k, k_0)$ ist um die Wellenzahl k_0 zentriert. Für ihre Wahl gibt es nun verschiedene Möglichkeiten. Will man die Energie nur in einer Wellenzahl zuführen, wählt man:

$$h(k, k_0) = \delta(k - k_0). \quad (5.41)$$

In der Praxis wird jedoch meist ein ganzer Wellenzahlenbereich um k_0 genutzt, d. h.

$$h(k, k_0) = \Theta[k - (k_0 + k_b)] - \Theta[k - (k_0 - k_b)], \quad (5.42)$$

wobei $\Theta[k]$ die Sprungfunktion ist. Die Breite des Wellenzahlenbereichs wird durch k_b bestimmt. Alternativ kann man auch eine Gaußfunktion

$$h(k, k_0) = \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{\sigma^2}\right], \quad (5.43)$$

die um k_0 zentriert ist, benutzen. Hier wird der Wellenzahlenbereich, in dem signifikant Energie zugeführt wird, durch die Varianz σ^2 festgelegt.

Aus einem Vergleich von Abbildung 5.4 und Abbildung 5.6 wird klar, dass der Vorteil dieses Treibers darin besteht, dass man gezielt auf einen schmalen Bereich des

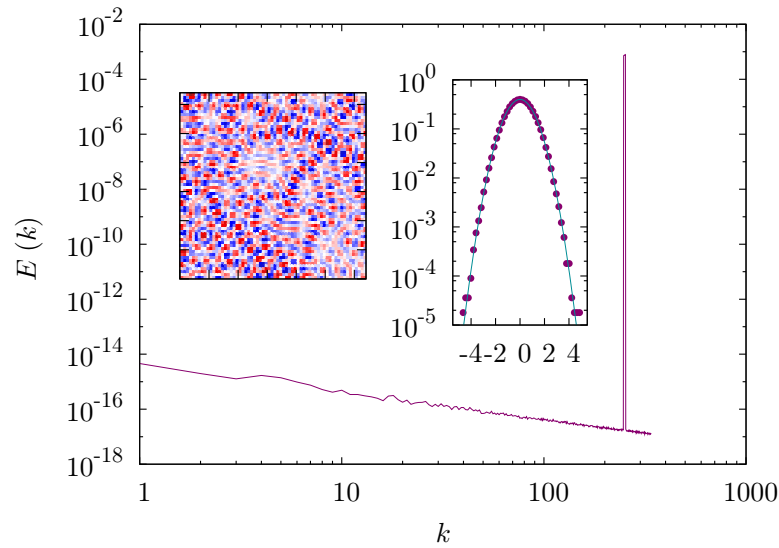


Abbildung 5.6 Die Abbildung zeigt das Energiespektrum der Kraft (5.40), wobei $h(k, k_0)$ durch (5.42) gegeben ist. Die Parameter sind $F_0 = 1$, $k_0 = 250$ und $k_b = 3$. Deutlich zu sehen ist, dass die Energie nur in einem sehr schmalen Wellenzahlenbereich in das System fließt. Das linke Inset zeigt das in die wirbeltransportgleichung eingehende Kraftfeld (Darstellung wie in Abb. 5.5). Auch hier sind die erzeugten Strukturen sehr klein, aber stärker strukturiert. Das rechte Inset zeigt die normierte Verteilungsfunktion der Amplituden der Kraft zusammen mit einer Gaußverteilung.

Spektrums zugreift und so der Rest des Spektrums nicht direkt durch die Kraft beeinflusst wird. Der Nachteil ist, dass aufgrund der starken Lokalisation dieses Treibers im Fourierraum die zugehörige Korrelationsfunktion $C(r)$ oszilliert. Wie im linken Inset von Abbildung 5.6 zu sehen, macht sich dies im vom Treiber erzeugten Wirbelfeld bemerkbar. Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, dass diese Eigenschaften keinen sichtbaren Einfluss auf die untersuchten Observablen haben. Die Oszillationen lassen sich durch ein größeres k_b in (5.42) bzw. ein größeres σ in (5.43) abschwächen.

Die Zeitabhängigkeit

Bisher wurde nur die räumliche Abhängigkeit des Feldes $f_{\perp}(\mathbf{x})$ festgelegt. Damit die Kraft zeitabhängig wird, kann man die in (5.37) und (5.40) auftauchenden Phasen zeitabhängig machen, d. h. $\phi_{\mathbf{k}} \rightarrow \phi_{\mathbf{k}}(t)$. Zu einem festen Zeitpunkt werden die Phasen durch gleichverteilte Zufallszahlen festgelegt. Wenn diese für jeden Zeitschritt unabhängig neu gewählt werden, erreicht man, dass die Kraft zeitabhängig und, wie in (5.10) gefordert, deltakorreliert in der Zeit ist. Indem nur die Phasen zeitabhängig

gewählt werden, ist gewährleistet, dass z. B. die räumlichen Korrelationen zu jedem Zeitpunkt gleich sind.

5.2.3 Die Dissipationsterme

Zusätzlich zu der Kraft f , die dem System Energie zuführt, gibt es nach den Überlegungen des vorherigen Abschnittes noch zwei Dissipationsterme, die dafür sorgen, dass das System einen stationären Zustand erreicht. Neben der viskosen Dissipation ist dies der in (5.22) zusätzlich eingeführte, auf großen Skalen wirkende Dissipationsterm \mathbf{d} .

Viskose Dissipation

Die viskose Dissipation ist Bestandteil der Navier-Stokes-Gleichung und dadurch im Prinzip vorgegeben. Im Fourierraum ist der Term gleich $-\nu k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k})$ bzw. $-\nu k^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})$, was bedeutet, dass zu größeren Wellenzahlen hin die Dämpfung durch die Viskosität immer größer wird. Unter der Randbedingung, dass bei einer numerischen Simulation aufgrund der Diskretisierung nur Wellenzahlen bis zu einem bestimmten k_{max} zur Verfügung stehen, ist man mit mehreren Problemen konfrontiert. Zum einen möchte man einen möglichst langen Inertialbereich realisieren. Dazu muss ν möglichst klein sein. Außerdem soll der Wirkungsbereich der Kraft bei möglichst großen k liegen, ohne dass in diesem Bereich die Viskosität eine zu große Rolle spielt. Dies verlangt wiederum nach einem möglichst kleinen ν . Andererseits soll die Viskosität so groß sein, dass sie im Bereich um k_{max} dominiert, damit das turbulente Feld hinreichend glatt ist. Um beide Ziele angemessen zu berücksichtigen, kann man den Laplaceoperator durch

$$\Delta \rightarrow \Delta^n \quad (\text{im Fourierraum: } -k^2 \rightarrow -k^{2n}) \quad (5.44)$$

ersetzen. Diese Ersetzung führt dazu, dass bei entsprechender Wahl von ν die viskose Dissipation erst bei viel größeren k signifikant wird als im Normalfall (siehe Abbildung 5.7), aber um k_{max} wieder ähnlich groß, wie im ursprünglichen Fall ist.

Der zusätzliche Dissipationsterm

Der zusätzliche Dissipationsterm $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ hat die Aufgabe, Energie aus dem System zu entnehmen, damit nach (5.22) ein stationärer Zustand erreicht werden kann. Er hat die Form

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = (-1)^{m+1} \gamma \Delta^{-m} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \mathbf{d}(\mathbf{x}) = (-1)^{m+1} \gamma \Delta^{-m} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (5.45)$$

Da die numerische Simulation im Fourierraum erfolgt, wird hier nur die Definition von Δ^{-m} im Fourierraum benötigt. Dort ist der Term gleich $-\gamma/k^{2m}$. Es gibt zwei

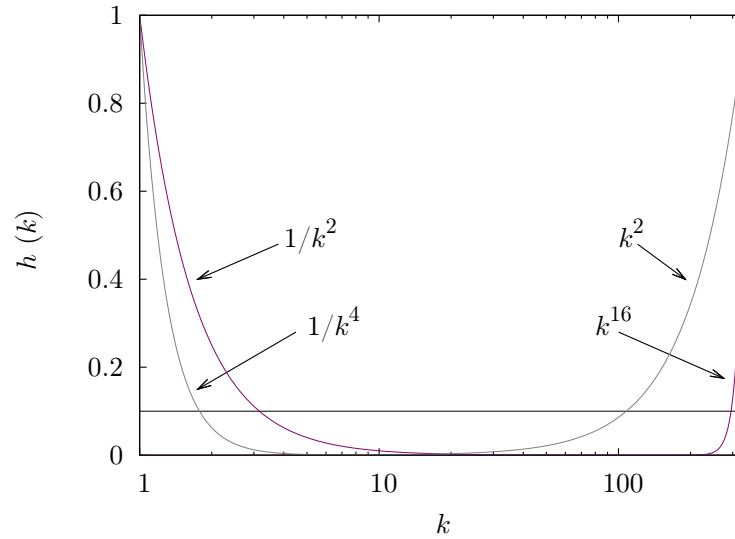


Abbildung 5.7 Darstellung des funktionalen Verlaufs der verschiedenen Dissipationsterme im Fourierraum. Während die konstante lineare Reibung bei allen Wellenzahlen gleich wirkt, wird der Einfluss der Hyporeibung ($1/k^2$ bzw. $1/k^4$) zu großen Wellenzahlen immer geringer. Die Hyperviskosität ($\sim k^{16}$) verschiebt den Einflussbereich der viskosen Dissipation hin zu größeren Wellenzahlen. Die Kombination aus Hyporeibung und Hyperviskosität schafft bei entsprechender Wahl der Vorfaktoren, einen Wellenzahlenbereich in dem der Einfluss der Dissipationsterme verschwindend ist.

grundlegend verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von m . Zum einen $m > 0$ (wobei m ganzzahlig ist) und zum anderen $m = 0$. Der erste Fall wird im Folgenden als *Hyporeibung* und der zweite Fall als *lineare Reibung* bezeichnet. Für den ersten Fall kann man sich schnell klar machen, dass der Dissipationsterm selektiv auf großen Längenskalen agiert und damit die Voraussetzung bei der Herleitung von (5.26) erfüllt. Betrachtet man den Term im Fourierraum, so ist er je nach Einstellung des Vorfaktors nur bei kleinen Wellenzahlen bzw. großen Längenskalen signifikant. Je nach Wahl von m kann sein Einfluss im Inertialbereich minimiert werden (siehe Abbildung 5.7). Der zweite Fall verhält sich prinzipiell etwas anders. Für $m = 0$ erhält man:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = -\gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \mathbf{d}(\mathbf{x}) = -\gamma \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (5.46)$$

Der Dissipationsterm hat nun die Form einer einfachen linearen Reibung und ist im Fourierraum proportional zu $-\gamma$. Im Gegensatz zu den vorhin betrachteten Termen wirkt er auf jeder Wellenzahl gleich, er ist also jetzt nicht mehr längenskalenselektiv. Setzt man (5.46) in die Navier-Stokes-Gleichung ein und verfolgt die Herleitung von

(5.11) bis (5.22), so erhält man:

$$C_d \sim \gamma \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (5.47)$$

Der Term ist damit proportional zur Autokorrelationsfunktion des Geschwindigkeitsfeldes. Dieselben Überlegungen, die zu $C_d(\mathbf{0}) = \epsilon$ in (5.23) geführt haben, führen nun zu $\gamma \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}') \rangle = \epsilon$. Nun kann man aber nicht mehr ohne weiteres annehmen, dass für den Inertialbereich $L_f \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \ll L_d$ die Näherung $C_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \approx C_d(\mathbf{0})$ gilt. Später (Abschnitt 6.1) wird noch gezeigt, dass in diesem Bereich die Autokorrelationsfunktion des Geschwindigkeitsfeldes stark von $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ abhängt. Prinzipiell kann man aber den Beitrag des Dissipationsterms als $C_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = C_d(\mathbf{0}) - h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \epsilon - h(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ schreiben. Analog zu (5.25) erhält man dann

$$-\frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}'))^2 \rangle = -[\epsilon - h(\mathbf{x} - \mathbf{x}')], \quad (5.48)$$

was zu einer Korrektur von (5.26) führen wird. Abbildung 5.7 zeigt noch einmal abschließend, wie die einzelnen Dissipationsterme im Fourierraum wirken.

Für die numerische Simulation wird aus praktischen Gründen der zusätzliche Dissipationsterm im Fourierraum als

$$-\nu \left[\frac{k}{k_{max}} \right]^{2n} \quad (5.49)$$

geschrieben. Dies ist dann praktisch, wenn man mit verschiedenen Ordnungen der Hyperviskosität arbeitet, da dann, egal welches n man wählt, der Term bei k_{max} immer den Wert $-\nu$ hat. Die Wellenzahl k_{max} ist dabei die maximale in der Simulation auftretende Wellenzahl. Außerdem vermeidet man durch diese Wahl das Auftauchen extrem kleiner Werte für ν .

5.2.4 Die Simulationstypen

Setzt man die in den letzten Abschnitten erarbeiteten Ausdrücke für die Dissipationsterme in das Gleichungssystem (5.28) ein, so erhält man

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{F}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + k^2 \mathbf{f}(\mathbf{k}) - \nu (k/k_{max})^{2n} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) - \gamma k^{-2m} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \quad (5.50)$$

als Grundlage für die numerischen Simulationen. Der vorherige Abschnitt hat gezeigt, dass es verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der Kraft und der Dissipationsterme gibt. Für die Simulationen zur inversen Energiekaskade werden im Folgenden zwei unterschiedliche Typen von Simulationen betrachtet.

Im ersten Fall wird der Gaußtreiber zusammen mit der linearen Reibung als Dissipationsterm verwendet. Dieser Simulationstyp ist an die in [BCV00] vorgestellten

Kraft	m	n	Bezeichnung
gauss	0	8	sim2d1024gauss
delta	1	8	sim2d1024delta

Tabelle 5.1 Tabelle der über den Simulationstyp entscheidenden Parameter mit der dazugehörigen Bezeichnung. Die einzelnen Simulationen innerhalb eines Typs werden durch einen angehängten Großbuchstaben unterschieden (z. B. `sim2d1024gaussA` oder `sim2d1024gaussB`).

Simulationen angelehnt und soll, zumindest was die Kraft und die zusätzliche Dissipation betrifft, den Verhältnissen bei den in [PT97, PT98] vorgestellten Experimenten möglichst nahe kommen. Der zweite Simulationstyp benutzt den Deltatreiber und einen Hypodissipationsterm erster Ordnung. Diese Simulationskonfiguration entspricht einer idealisierten Situation, bei der man einem konstanten Energiefluss in der inversen Kaskade und damit einem Skalieren der dritten Strukturfunktion möglichst nahe kommen will. Da die Auflösung numerischer Simulationen begrenzt ist, wird in beiden Fällen ein Hyperviskositätsterm achter Ordnung verwendet, um einen möglichst langen Inertialbereich zu erzeugen und die Enstrophiekaskade zu unterdrücken. In Tabelle 5.1 sind die für den Typ der Simulation entscheidenden Parameter und die zugehörige Bezeichnung zu finden.

Die Verwendung dieser beiden Grenzfälle hat den Sinn zu testen, wie sich die statistischen Eigenschaften der Tracer, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, zum einen in einem an das Experiment angelehnten Fall und zum anderen in einer idealisierten Situation verhalten. Wie schon im Vorwort angedeutet, ist die Frage, wie universell die Lagrangesche Statistik in der inversen Kaskade der zweidimensionalen Turbulenz ist, von zentraler Bedeutung für die vorliegende Arbeit.

Neben den Daten aus den zweidimensionalen Simulationen werden auch Daten aus Simulationen dreidimensionaler Turbulenz analysiert. Diese Daten stammen im Wesentlichen aus zwei Quellen und werden mit `sim3d1024` [Wil09a] bzw. `sim3d1024ita` [BBC⁺09] bezeichnet. Die vollständigen Parameter aller Simulationen sind in Anhang B zu finden.

5.3 Der Aufbau der Kaskade

Jede Simulation startet mit einem ruhendem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$ bzw. $\omega(\mathbf{x}, t = 0) = 0$. Durch die Einwirkung der Kraft steigt die Gesamtenergie des Systems an, bis sich die Energiezufuhr und die Dissipation komplett ausgleichen und das System seinen stationären Zustand erreicht. Die Anwachsphase der Energie kann grob in zwei Phasen eingeteilt werden. In einer relativ kurzen Phase steigt die Energie hauptsächlich in den Moden an, in denen sie zugeführt wird (siehe Abb.

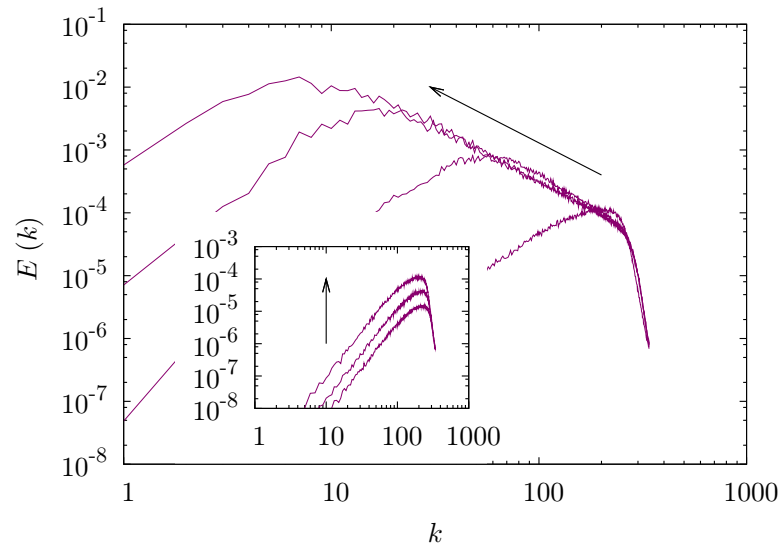


Abbildung 5.8 Aufbau der inversen Kaskade für Simulation `sim2d1024gaussA` für $t = 0.1, 0.75, 2.5, 20$. Das Inset zeigt die Phase des Aufbaus, bei der der inverse Transport von Energie noch keine Rolle spielt ($t = 0.01, 0.03, 0.1$). In beiden Darstellungen gibt die Pfeilrichtung die zeitliche Abfolge der Spektren an.

5.8). Danach beginnt die Energie in Richtung kleiner Wellenzahlen zu fließen, und die inverse Energiekaskade bildet sich aus (siehe wiederum Abb. 5.8). Im Fall der Simulation `sim2d1024deltaA` (nicht gezeigt) verhält sich der Aufbau der Kaskade ähnlich. Auch hier wächst zunächst nur die Energie in den Wellenzahlen an, auf die die Kraft einwirkt, bevor die Energie zu kleineren Wellenzahlen fließt.

5.4 Der stationäre Zustand

Nach der eben beschriebenen Einschwingphase befindet sich das System im stationären Zustand. In diesem Fließgleichgewicht wird die in das turbulente Feld einströmende Energiemenge vollständig durch die Dissipationsterme ausbalanciert und die Gesamtenergie bleibt bis auf Fluktuationen konstant (siehe Abbildung 5.9). Die Fluktuationen bewegen sich bei `sim2d1024gaussA` im Rahmen von ca. 0.5 Prozent der Gesamtenergie, während sie bei `sim2d1024deltaA` bei ca. 2 Prozent liegen.

Die Stationarität der Simulation ist die Voraussetzung für die statistische Analyse der Observablen im Euler- und im Lagrangebild. Nachdem der stationäre Zustand erreicht ist, wird in regelmäßigen Abständen (500 oder 1000 Zeitschritte) das Wirbelfeld $\omega(\boldsymbol{x})$ abgespeichert. Aus dem Wirbelfeld können dann alle relevanten

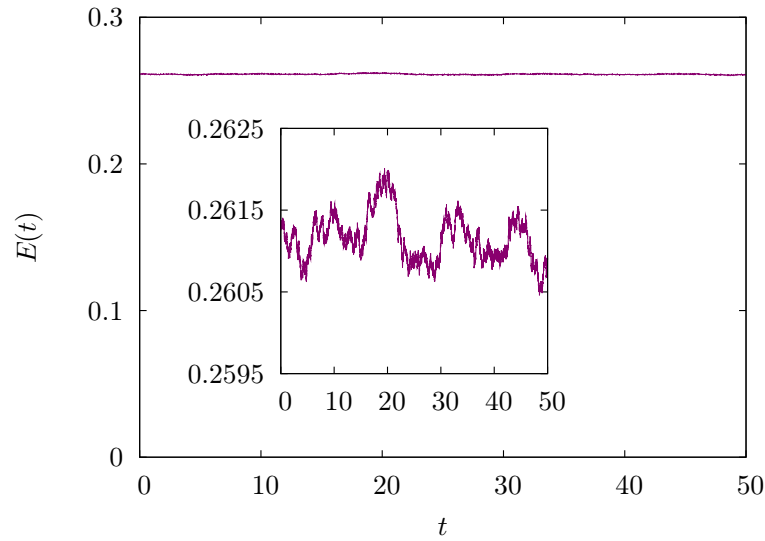


Abbildung 5.9 Die Abbildung zeigt den Verlauf der Gesamtenergie während der stationären Phase der Simulation `sim2d1024gaussA`. Bis auf leichte Fluktuationen ist der Wert konstant. Das Inset zeigt eine Vergrößerung der $E(t)$ -Achse, um die Fluktuationen deutlicher sichtbar zu machen.

Eulerschen Felder, wie z. B. das Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Bei der statistischen Analyse wird dann über alle herausgeschriebenen Felder gemittelt (100 bei `sim2d1024gaussA` bzw. 200 bei `sim2d1024deltaA`).

5.4.1 Der Energiefluss und das Spektrum

Zunächst soll der Energiefluss für den stationären Zustand bestimmt werden. Dazu wird an dieser Stelle ein für die numerische Auswertung geeigneter Ausdruck des Energieflusses $\Pi(k)$ hergeleitet, wie er auch in [VM91] benutzt wird. Berücksichtigt man die Tatsache, dass

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (5.51)$$

gilt, so kann die Navier-Stokes-Gleichung durch Ersetzung des Konvektionsterms in die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla\left(p + \frac{1}{2}u^2\right) + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (5.52)$$

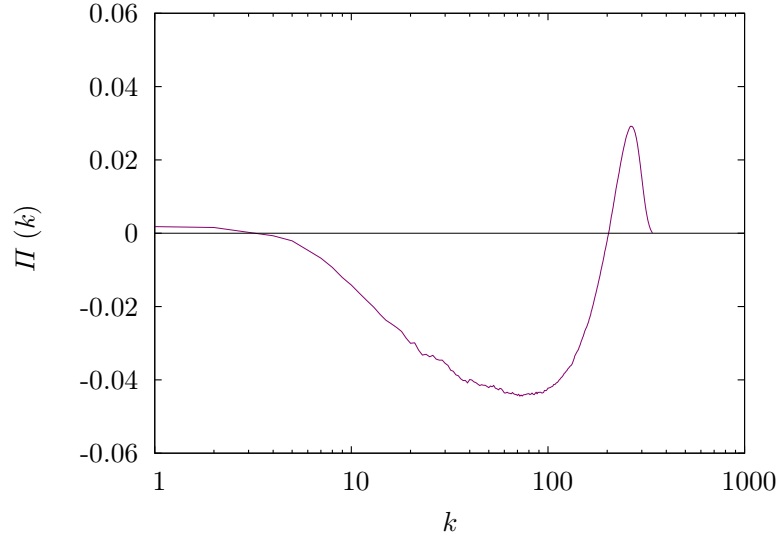


Abbildung 5.10 Der Energiefluss $\Pi(k)$ für die Simulation `sim2d1024gaussA`. Deutlich zu sehen ist, dass es bei dieser Art von Simulation keinen Bereich gibt, in dem der Energiefluss konstant ist.

überführt werden. Dabei darf die Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ nicht vergessen werden. Im Fourierraum lautet die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \mathcal{P}(\mathbf{k})(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_{\mathbf{k}} + \nu k^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}}. \quad (5.53)$$

Hier ist $\mathcal{P}(\mathbf{k})$ der Operator, der ein Vektorfeld auf seinen divergenzfreien Anteil projiziert. Er hat die Form

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}(\mathbf{k})\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k}. \quad (5.54)$$

Wird Gleichung (5.53) nun mit $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*$ multipliziert und eine Integration über den Raumwinkel Ω durchgeführt, gelangt man wieder zur Energiebilanzgleichung (5.2) mit

$$T(k) = \int d\Omega \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \mathcal{P}(\mathbf{k})(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_{\mathbf{k}}. \quad (5.55)$$

Hieraus lässt sich nach (5.5) der gesuchte Energiefluss $\Pi(k)$ berechnen. Abbildung 5.10 zeigt den Energiefluss für die Simulation `sim2d1024gaussA`. Zur Interpretation der Abbildung muss man sich noch einmal vor Augen führen, dass $\Pi(k)$ die Rate angibt, mit der Energie aus den Moden $k' < k$ in die Moden $k'' > k$ transferiert

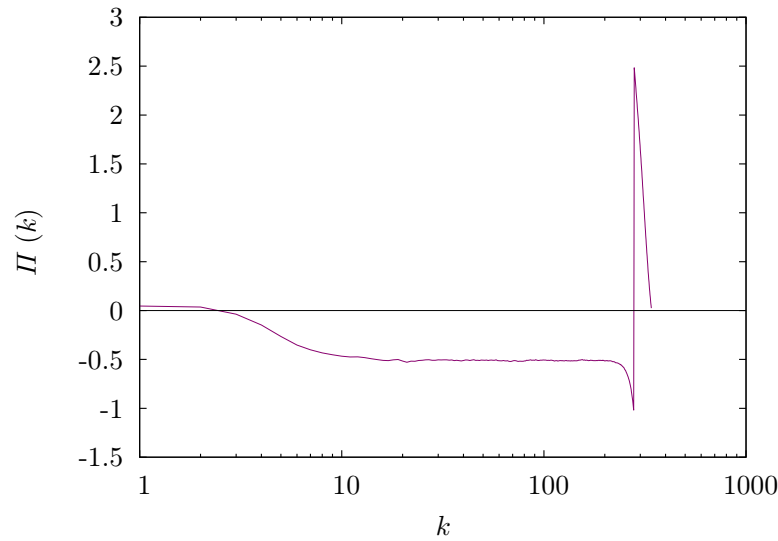


Abbildung 5.11 Der Energiefluss $\Pi(k)$ für die Simulation `sim2d1024deltaA`. Hier gibt es einen großen Bereich in dem der Energiefluss konstant ist.

wird. Das bedeutet, dass dort, wo die Funktion negativ ist, Energie aus dem Bereich $k'' > k$ in den Bereich $k' < k$ transferiert wird.

Die Abbildung zeigt deutlich, dass im stationären Fall die Energie im Bereich oberhalb von $k \approx 200$ zu großen Skalen transportiert wird. Hier beginnt der Inertialbereich. Die Wellenzahl am Nulldurchgang entspricht auch etwa dem Punkt, an dem der Skalierungsbereich des Spektrums in Abbildung 5.12 beginnt. Rechts des Nulldurchganges fließt die Energie in Richtung größerer Wellenzahlen. Am oberen Ende wird der Energiefluss durch die viskose Dissipation zum Erliegen gebracht, während am unteren Ende der k -Achse der Reibungsterm den Transport beendet.

Der Energiefluss im Inertialbereich ist nicht konstant. Nach den Überlegungen von Abschnitt 5.2.3 war dies zu erwarten. Der Dissipationsterm scheint einen signifikanten Einfluss auf den Inertialbereich zu haben. Diese Beobachtung deckt sich mit den Angaben in der Literatur [PT98, BCV00, DG01].

Trotz der Tatsache, dass es keinen Bereich gibt, in dem die Relation $\Pi(k) = \epsilon$ gilt, wird ϵ in der Literatur über

$$\epsilon = \max|\Pi(k)| \quad (5.56)$$

abgeschätzt. Dies geschieht meistens zu dem Zweck, die Kolmogorovkonstante C_K aus Gleichung (4.32) abzuschätzen. Um einen weiteren Vergleich der hier vorgestellten Ergebnisse mit der Literatur zu ziehen, wird an dieser Stelle Gleichung (5.56) benutzt, um die beiden Konstanten zu berechnen. Für den Energiefluss erhält man

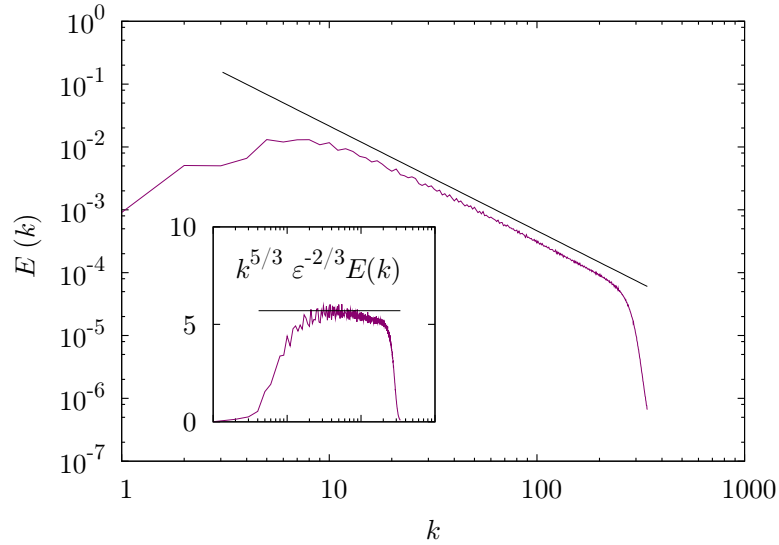


Abbildung 5.12 Die Abbildung zeigt das zur Simulation `sim2d1024gaussA` gehörige Energiespektrum $E(k)$ zusammen mit $k^{-5/3}$ (schwarz). Im Inset ist das Spektrum kompensiert dargestellt.

im Fall von Simulation `sim2d1024gaussA` den Wert

$$\epsilon \approx 0.0435. \quad (5.57)$$

Die Kolmogorovkonstante erhält man, indem man $E(k)\epsilon^{-2/3}k^{5/3}$ gegen k aufträgt und C_K aus dem nahezu konstanten Bereich abschätzt (siehe Inset in Abb. 5.12). Man erhält:

$$C_K \approx 5.7. \quad (5.58)$$

Das Ergebnis liegt am unteren Ende der in der Literatur angegebenen Werte von 5.8 bis 7.0 (siehe [BCV00] und dort enthaltene Literaturangaben). Für dreidimensionale Turbulenz erhält man wesentlich kleinere Werte um 1.5 bis 2 (siehe z. B. [VM91]).

Für die Simulation `sim2d1024deltaA` ist die Situation anders. In Abbildung 5.11 ist ein langer Bereich zwischen $k \approx 200$ und $k \approx 10$ zu sehen, in dem $\Pi(k)$ als konstant angesehen werden kann. Dies ist konsistent mit den Erwartungen aus den Überlegungen zum Einfluss des Dissipationsterms. Auffällig ist die ausgeprägte negative Spitze am Beginn des Bereiches mit dem konstanten Energiefluss. Ihr Auftreten ist auf die Verwendung des Deltatreibers zurückzuführen und kann wohl durch die Wahl eines breiteren Treiberbereiches oder eines gaußförmigen Treibers wie (5.43) unterdrückt werden. Für den Energiefluss bzw. die Kolmogorovkonstante erhält man

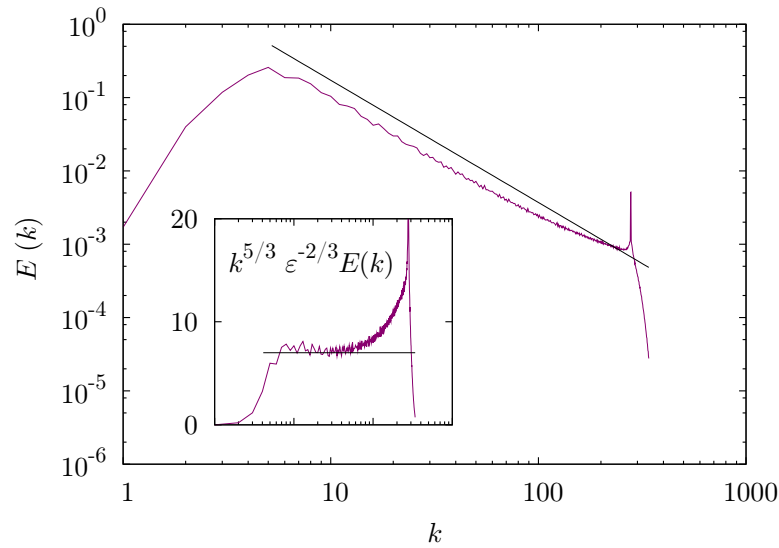


Abbildung 5.13 Die Abbildung zeigt das zur Simulation `sim2d1024deltaA` gehörige Energiespektrum $E(k)$ zusammen mit $k^{-5/3}$ (schwarz). Im Inset ist das Spektrum kompensiert dargestellt.

in diesem Fall

$$\epsilon \approx 0.5 \quad \text{bzw.} \quad C_K \approx 7, \quad (5.59)$$

wobei ϵ diesmal nicht nach (5.56), sondern direkt aus dem Plateau abgeschätzt werden konnte. Die bei dieser Simulation eingestellten Parameter führen zu einem um ca. eine Größenordnung gesteigerten Energiefluss. Dies war hier Absicht, um später testen zu können, wie stark sich der absolute Wert von ϵ auf die Lagrangesche Statistik auswirkt. Der Wert von C_K passt zu dem vorhin genannten Wertebereich und stimmt gut mit dem für eine ähnliche Simulation [GV04] erhaltenen C_K überein.

Die stationären Energiespektren (siehe Abb. 5.12 bzw. Abb. 5.13) zeigen zwischen $k \approx 200$ und $k \approx 20$ für `sim2d1024gaussA` bzw. $k \approx 100$ und $k \approx 20$ für `sim2d1024deltaA` einen Bereich, in dem sie der K41-Voraussage $E(k) \sim k^{-5/3}$ (4.32) relativ gut folgen. Bei der Simulation mit dem Deltatreiber wird das Spektrum im Bereich des Treibers (siehe Abb. 5.13) gestört. Diesen Effekt kann man durch eine etwas weniger starke Lokalisation des Treibers abschwächen. Aus den kompensierten Darstellungen in den Insets von Abbildung 5.12 bzw. 5.13 wird klar, dass nur eine näherungsweise, aber keine exakte Übereinstimmung mit dem $-5/3$ -Gesetz zu finden ist. Diese Feststellung ist konsistent mit den Angaben in der Literatur [BCV00, DG01, GV04]. Die Frage, ob die Abweichungen auf die endliche numerische Auflösung zurückzuführen sind, bleibt offen. Dazu müsste man Simulationen mit sehr

viel höheren Auflösungen betrachten.

Durch die unterschiedliche Wahl der Dissipationsterme unterscheiden sich die beiden Simulationstypen im Bereich kleiner Wellenzahlen. In diesem Bereich fällt das Spektrum bei `sim2d1024deltaA` schneller ab als bei `sim2d1024gaussA`. Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass der Hyporeibungsterm zu kleinen k hin schnell wächst, während der Dissipationsterm im zweiten Fall konstant bleibt.

5.4.2 Das Vortizitätsfeld

Das Aussehen der Strömung läßt sich am leichtesten durch das Wirbelfeld $\omega(\mathbf{x})$ visualisieren. Neben der Frage nach der prinzipiellen Struktur des Wirbelfeldes stellt sich zusätzlich die Frage, wie ähnlich sich die Wirbelfelder der beiden Simulationen im stationären Zustand sehen.

Abbildung 5.14 zeigt jeweils einen Ausschnitt aus einem Wirbelfeld der Simulationen `sim2d1024gaussA` (oben) und `sim2d1024deltaA` (unten) zu einem festen Zeitpunkt. Trotz der sehr unterschiedlichen Treiber sind sich die beiden Felder in ihrer Struktur sehr ähnlich. In beiden Fällen besteht das Wirbelfeld aus einer Ansammlung sehr kleiner Wirbel, die auf den ersten Blick keinerlei großskalige Ordnung zeigen⁴. Die Größe der Wirbelflecken liegt im Bereich der Antriebsskalen. Das bedeutet, dass die inverse Energiekaskade hier nicht durch das Verschmelzen von kleinen zu immer größeren Wirbeln zustande kommt, sondern auf das Zusammenwirken vieler kleiner Wirbel zurückzuführen ist.

In Abbildung 5.15 ist die Darstellung eines Ausschnittes aus dem Wirbelfeld einer dreidimensionalen Simulation zu sehen. Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall ist die Wirbelstärke hier nicht in kleinen Flecken, sondern in langgezogenen Wirbelfäden organisiert. Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, hat die Art der Wirbelstrukturen starke Auswirkungen auf die Eulersche Statistik des turbulenten Feldes. Der große Unterschied der Wirbelstrukturen zum zweidimensionalen Fall ist auf die Abwesenheit des Wirbelstreckungsterms in zwei Dimensionen zurückzuführen.

Strukturen wie die Wirbelfäden in Abbildung 5.15 werden auch als *kohärente Strukturen* bezeichnet. Wie stark sie die statistischen Eigenschaften der Strömung beeinflussen, ist Gegenstand umfangreicher Untersuchungen. Für einen ersten Überblick sei auf [PS98] verwiesen

Zum Abschluss sollen noch ein paar Punkte erläutert werden. Bezüglich des Energieflusses und der Spektren stimmen die hier gezeigten Ergebnisse zum einen mit den Erwartungen, die auf den Überlegungen von Abschnitt 5.1 begründet sind, überein. Außerdem reproduzieren die hier gezeigten Simulationen die Ergebnisse vergleichbarer, in der Literatur dokumentierter, Simulationen.

⁴Als Wirbel werden hier zusammenhängende Flächen bezeichnet, in denen die Vortizität das gleiche Vorzeichen besitzt.

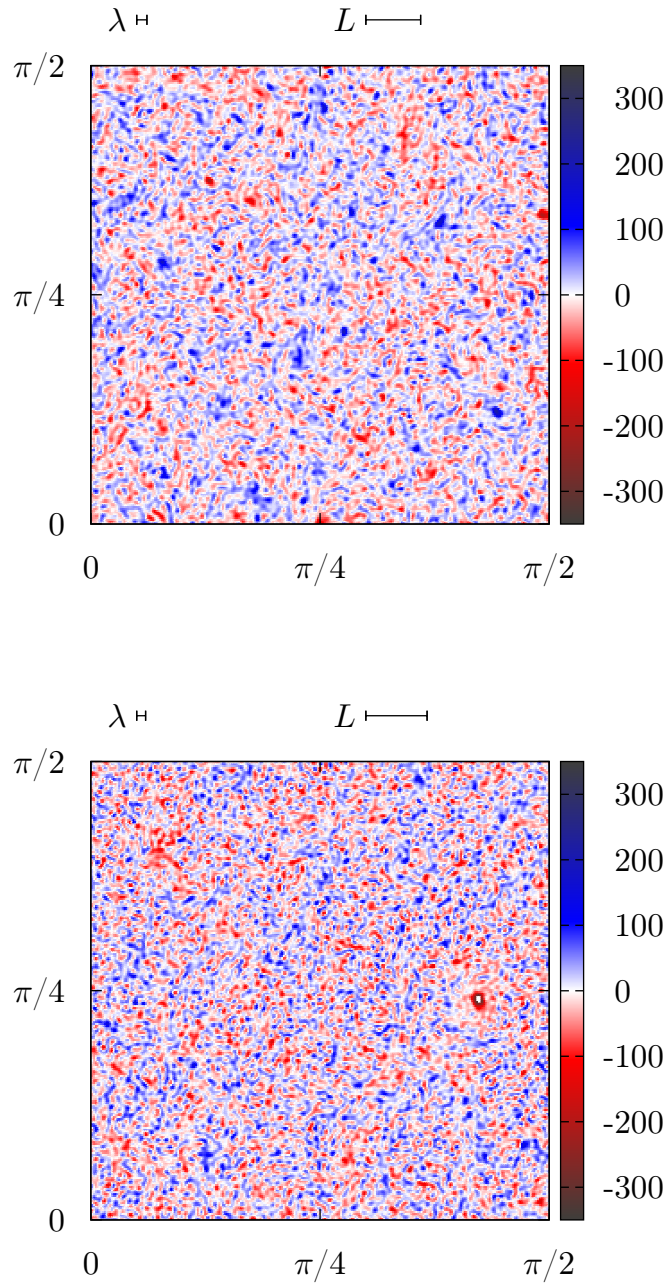


Abbildung 5.14 Darstellung eines Ausschnittes aus dem Wirbelfeld der Simulationen `sim2d1024gaussa` (oben) und `sim2d1024deltaA` (unten). Die Stärke und das Vorzeichen der Vortizität wird durch die Farbskala angegeben. Als Vorgriff auf das nächste Kapitel wurden als Vergleichsmaßstäbe die Taylorlänge λ (6.3) und die integrale Länge L (6.4) eingezeichnet.

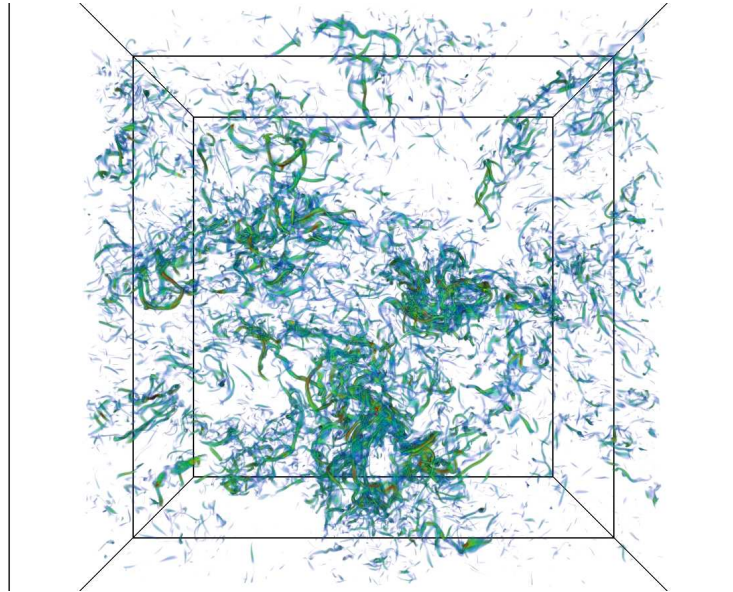


Abbildung 5.15 Visualisierung des Vortizitätsfeldes einer Simulation dreidimensionaler Turbulenz [Wil09b]. Hierbei handelt es sich um eine Volumendarstellung der Vortizität.

Um die Simulationen so zu präparieren, muss man allerdings zwei Dinge beachten. Zum einen muss die Viskosität groß genug gewählt werden, dass die direkte Enstrophiekaskade und damit einhergehend die Bildung kleiner intensiver Wirbel, unterdrückt wird. Ist die Viskosität nicht hoch genug, machen sich diese kleinen aber intensiven Wirbel deutlich in den Darstellungen der Vortizitätsfelder bemerkbar. Außerdem wird das Energiespektrum bei kleinen Wellenzahlen steiler, was bedeutet, dass sich mehr Energie in großen Skalen befindet. Dies rührt daher, dass die intensiven Wirbel das Wirbelfeld dominieren und zusätzliche großskalige Strömungen verursachen. Bezüglich der Wahl der Viskosität sind die hier vorgestellten Simulationen an der Grenze, d. h. die Viskosität sollte in zukünftigen Simulationen noch etwas größer gewählt werden. Dadurch, dass in diesen Simulationen mit Hyperviskosität gearbeitet wird, sollte dies den Inertialbereich nicht signifikant beeinträchtigen.

Der zweite Punkt betrifft die Wahl der Ordnung der Hyporeibung. Die Simulation `sim2d1024deltaA` zeigt, dass eine sehr niedrige Ordnung (hier $m = 1$) völlig ausreicht, um einen konstanten Energiefluss im Inertialbereich zu erzeugen. Der Einsatz höherer Ordnungen bringt kaum Vorteile. Im Gegenteil, eine zu starke Hyporeibung führt durch den sogenannten *bottleneck*-Effekt [Fal94, LMG95] zu einem Aufsteilen des Spektrums bei kleinen Wellenzahlen. Beispiele für diesen Effekt bei zu starker Hyporeibung sind in [DG01] und [Bor94] zu sehen.

6 Statistik des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes

Nachdem im letzten Kapitel der Aufbau und der stationäre Zustand der inversen Energiekaskade charakterisiert wurde, widmet sich dieses Kapitel den Eigenschaften des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes im stationären Zustand. Dabei stehen die statistischen Eigenschaften der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente im Mittelpunkt.

Zuerst wird kurz auf die Einpunktverteilung der Geschwindigkeit und ihre Ableitung eingegangen. Anhand der Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeiten werden dann die Längenskalen des Eulerschen Feldes festgelegt. Das Hauptaugenmerk liegt danach auf den Verteilungsfunktionen und deren Momenten, den Strukturfunktionen. Die hier gezeigten Ergebnisse ermöglichen teilweise einen Vergleich mit der Literatur und dienen daher als weiterer Konsistenztest für die Simulationen. Die Untersuchung der Markoveigenschaften der Inkrementstatistiken im letzten Abschnitt runden das Kapitel ab.

6.1 Grundlegende Charakterisierung

Startpunkt bei der grundlegenden Charakterisierung der Geschwindigkeitsstatistik sind die in Abbildung 6.1 zu sehenden Einpunktverteilungen für die Komponenten v_x und v_y des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes. Die Standardabweichung ist durch

$$\sigma_v = \sqrt{\langle v_i^2 \rangle} \quad (6.1)$$

definiert. Für `sim2d1024gaussA` erhält man $\sigma_v \approx 0.51$. Beide Verteilungen sind gaußförmig und liegen übereinander. Letzteres ist ein Hinweis darauf, dass die Geschwindigkeitsstatistik isotrop ist. Aus diesem Grund kann auf den Index verzichtet und die Verteilungsfunktion $f(v)$ betrachtet werden. Zur Schätzung dieser Verteilung werden dann beide Geschwindigkeitskomponenten herangezogen. Für die Simulation `sim2d1024deltaA` erhält man qualitativ die gleichen Ergebnisse. Hier ist $\sigma_v \approx 1.63$. Die Verteilungsfunktion für den dreidimensionalen Fall wird in Kapitel 8 besprochen.

Um die Längenskalen des Geschwindigkeitsfeldes festzulegen, wird die normierte

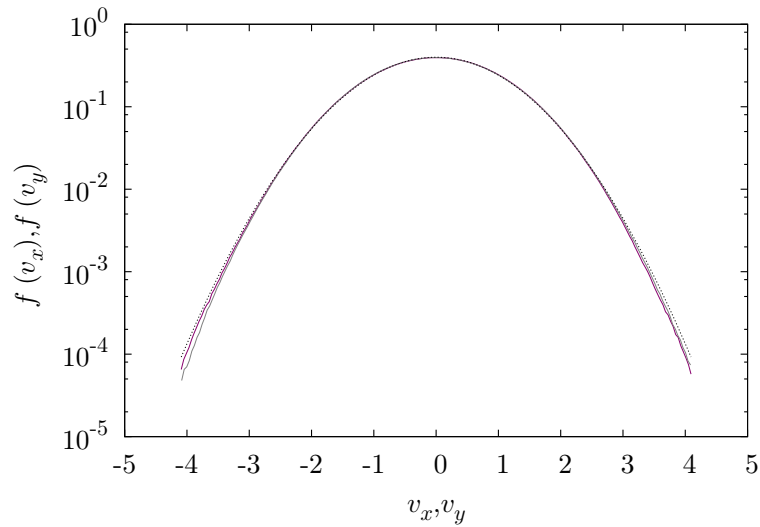


Abbildung 6.1 Die Verteilungsfunktionen $f(v_x)$ (violett) und $f(v_y)$ (grau) für die Simulation `sim2d1024gaussA`. Beide Verteilungsfunktionen sind auf $\sigma = 1$ normiert. Zusätzlich ist eine Gaußverteilung (schwarz, gestrichelt) eingezeichnet.

Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten v_i

$$C(r) = \frac{\langle v_i(\mathbf{x} + r \cdot \mathbf{e}_i, t) v_i(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle v_i(\mathbf{x}, t) \rangle^2}{\sqrt{\langle v_i(\mathbf{x}, t)^2 \rangle}} \quad (6.2)$$

betrachtet. Hier ist \mathbf{e}_i der Einheitsvektor in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse. Die Mittelung erfolgt aufgrund der angenommenen Symmetrien über beide Raumkomponenten, alle Orte \mathbf{x} und hundert Felder. Eine Darstellung von $C(r)$ für `sim2d1024gaussA` ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Nach Abschnitt 4.1.3 können hieraus sowohl die integrale Länge

$$L = \int_0^{L_{\text{Box}}/2} dr C_L(r) \quad (6.3)$$

als auch die Taylorlänge¹

$$\lambda = \sqrt{\frac{\langle v_i(\mathbf{x}, t)^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}, t) \right)^2 \right\rangle}} \quad (6.4)$$

¹Die so definierte Taylorlänge wird auch *longitudinale* Taylorlänge genannt. In Taylors ursprünglicher Arbeit [Tay35] wurde bei der Definition die Ortsableitung senkrecht zur Geschwindigkeitskomponente betrachtet. Diese Größe wird als *transversale* Taylorlänge bezeichnet. Näheres hierzu siehe [Pop00].

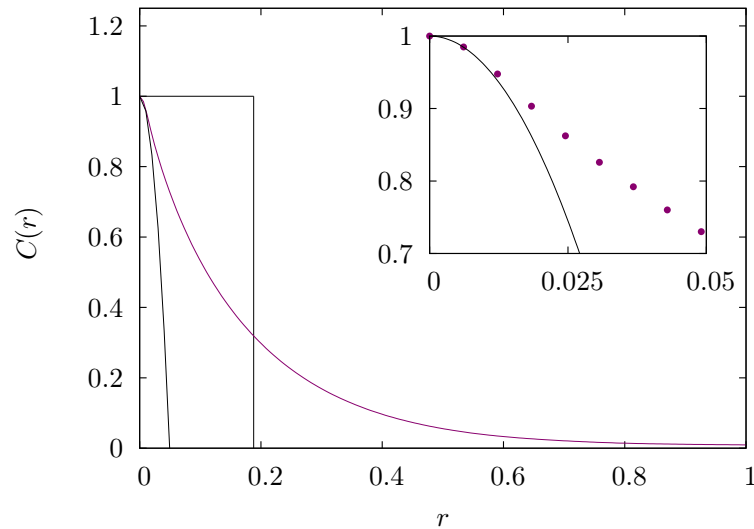


Abbildung 6.2 Eulersche Korrelationsfunktion $C_L(r)$ des Geschwindigkeitsfeldes. Die senkrechte Linie markiert die integrale Länge, während die umgekehrte Parabel die Funktion $1 - r^2/\lambda^2$ darstellt. Das Inset zeigt eine Vergrößerung der Autokorrelationsfunktion.

berechnet werden. Im zweiten Fall wird die Mittelung wie bei der Korrelationsfunktion durchgeführt. Für die Simulation `sim2d1024gaussA` erhält man $L \approx 0.188$ und $\lambda \approx 0.035$, während man für `sim2d1024deltaA` die Werte $L \approx 0.21$ und $\lambda \approx 0.03$ erhält. Die integralen Längen der beiden Simulationen sind relativ klein. Wie schon im vorherigen Kapitel erwähnt, sind die Parameter für die beiden Standardsimulationen so gewählt, dass die integrale Länge weit unterhalb der halben Boxlänge liegt. Das Verhältnis zwischen integraler Länge und Taylorlänge beträgt demnach $L/\lambda \approx 5.4$ bzw. $L/\lambda \approx 7$. Die Einpunktverteilungen und Autokorrelationsfunktionen sind für die beiden verschiedenen Simulationstypen qualitativ gleich. Auch im dreidimensionalen Fall ist die Korrelationsfunktion qualitativ ähnlich zu Abbildung 6.2. Dort sind sowohl die Taylorlänge, als auch die integrale Länge in der Regel größer. Ersteres liegt wahrscheinlich an der Tatsache, dass hier Hyperviskosität benutzt wird, während letzteres wohl darauf zurückgeführt werden kann, dass im dreidimensionalen Fall der Energieeintrag auf sehr großen Skalen stattfindet.

Im späteren Verlauf der Arbeit wird analog zur integralen Länge L die integrale Zeit T mittels der Lagrangeschen Geschwindigkeitsautokorrelation definiert. Man kann aber auch schon aus einer Realisierung des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes eine Zeitskala abschätzen. Sie wird *Eulersche integrale Zeitskala* oder *large-eddy-*

turnover-Zeit genannt und über

$$T_E = \frac{L}{\sigma_v} \quad (6.5)$$

definiert. Diese Abschätzung ist insofern nützlich, als dass sie Auskunft über die Zeitskalen gibt, auf denen sich die großen Strukturen des turbulenten Feldes verändern, ohne dass zeitlich aufgelöste Daten vorliegen müssen. Für die Simulation `sim2d1024gaussA` ist $T_E \approx 0.36$, während für `sim2s1024deltaA` $T_E \approx 0.13$ gilt.

6.2 Statistik der Geschwindigkeitsinkremente

Dieser Abschnitt behandelt die Statistik der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente. Sie gehören zu den sowohl experimentell als auch numerisch meistuntersuchten Observablen in der Turbulenzforschung. Dies liegt an der Tatsache, dass das dritte Moment der Verteilungsfunktion der Inkremente über das $-4/5$ - bzw. $2/3$ -Gesetz mit dem Energiefluss innerhalb der Strömung verknüpft ist und die K41-Theorie darüber hinaus Voraussagen für alle weiteren Momente macht. Weiterhin stellen die Inkremente einen recht einfachen ersten Zugang zur Zweipunktstatistik der Geschwindigkeit dar. Sie bieten somit die Möglichkeit, die Eigenschaften der turbulenten Strömung auf verschiedenen Längeskalen zu untersuchen und zu vergleichen.

Die Geschwindigkeitsinkremente $U(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t)$ werden hier so wie in Gleichung (4.26) definiert verwendet. Da ϵ für die jeweilige Simulation konstant ist, wird die zu den Inkrementen gehörige Verteilungsfunktion $f(u; r)$ nur als von u und r abhängig betrachtet.

6.2.1 Verteilungsfunktionen

Im Rahmen der K41-Theorie müssen die Inkrementverteilungen im Inertialbereich zwei wesentliche Eigenschaften erfüllen. Zum einen müssen sie im in Abschnitt 4.1.1 definierten Sinne selbstähnlich sein. Zum anderen muss das dritte Moment aufgrund des Energieflusses endlich und damit die Verteilung asymmetrisch sein.

Um ersteres zu überprüfen, müssen die Verteilungsfunktionen mit $(\epsilon r)^{1/3}$ reskaliert werden. Da die Varianz der Verteilung der zweiten Strukturfunktion entspricht, gilt $\sigma^2 \sim (\epsilon r)^{2/3}$. Daher können die Verteilungen zum Test auf Selbstähnlichkeit mit der Standardabweichung σ reskaliert werden.

In Abbildung 6.3 sind die reskalierten Verteilungsfunktionen für die beiden Simulationen für verschiedene r aus dem Inertialbereich zu sehen. Bis auf leichte Fluktuationen in den äußersten Flügeln liegen alle Verteilungen aus der jeweiligen Simulation sehr gut übereinander. Ihre funktionale Form ist innerhalb des Inertialbereiches unabhängig von r , sie sind also selbstähnlich, was kompatibel mit der K41-Theorie ist.

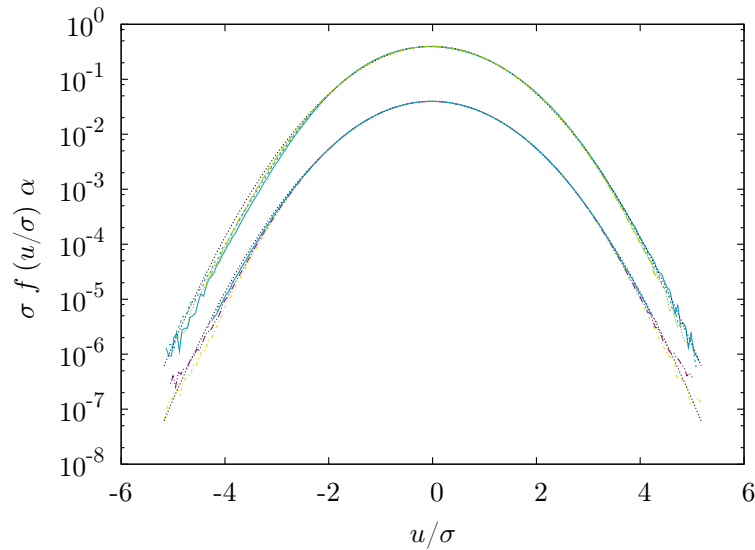


Abbildung 6.3 Darstellung der reskalierten Verteilungsfunktion der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente für `sim2d1024gaussA` ($\alpha = 1$) und `sim2d1024deltaA` (verschoben: $\alpha = 0.1$). In beiden Fällen sind die Verteilungsfunktionen für $r = \lambda, 2\lambda, L/2, L$ zu sehen. Zum Vergleich ist jeweils eine Gaußverteilung ($\sigma = 1$) als schwarze gestrichelte Linie eingezeichnet.

Asymmetrie

Laut den Betrachtungen zum Energietransport sollte im Fall eines endlichen Energieflusses die dritte Strukturfunktion, also das dritte Moment der Inkrementverteilung, einen endlichen Wert besitzen. Dies bedeutet aber, dass die in Abbildung 6.3 gezeigten Verteilungsfunktionen asymmetrisch sein sollten. Auf den ersten Blick sind sie aber kaum von einer einer Gaußverteilung zu unterscheiden. Bei genauerem Hinsehen kann man lediglich erkennen, dass der linke Flügel immer ein wenig unterhalb der Gaußverteilung liegt. Eine Möglichkeit, die Asymmetrie etwas deutlicher zu zeigen, ist, anstatt die Verteilung selbst mit einer Gaußverteilung zu vergleichen, die Größe $h(u) = (u/\sigma)^3 f(u/\sigma; r)$ zu betrachten. Die Fläche unter dieser Kurve entspricht dem dritten Moment.

Eine Darstellung dieser Größe bei $r = \lambda$ für `sim2d1024gaussA` ist in Abbildung 6.4 zu sehen. Zum Vergleich wurde auch $g(u) = u^3/(\sqrt{2\pi}) \exp(-0.5u^2)$ eingezeichnet, da die Fläche unter dieser Kurve verschwindet. In dieser Abbildung sieht man etwas deutlicher, dass die Verteilungsfunktion systematisch von einer Gaußverteilung abweicht, und vor allem, dass die Gesamtfläche unter der Kurve und damit auch das dritte Moment positiv ist. Dies sieht man daran, dass die Kurve links von der

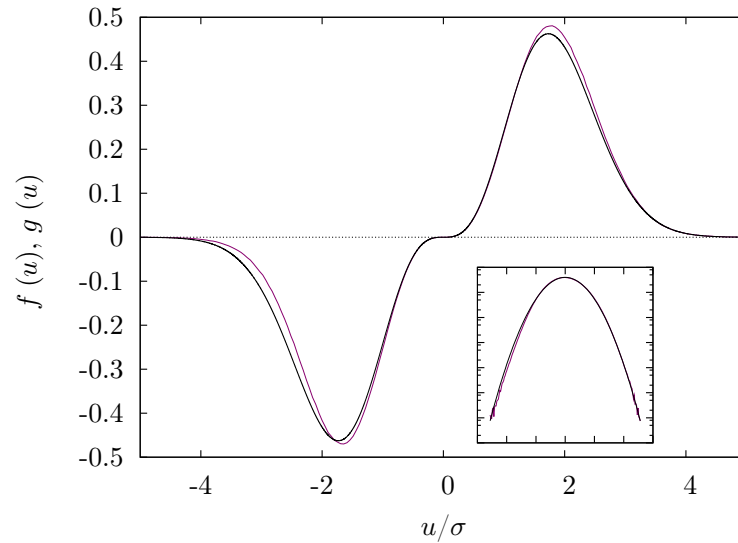


Abbildung 6.4 Darstellung von $h(u)$ (schwarz) für $r = \lambda$ (violett) aus `sim2d1024gaussA` zusammen mit $g(u)$. Man sieht, dass im negativen Bereich die Fläche von $h(u)$ kleiner ist als im positiven Bereich, wobei der Unterschied jedoch nicht sehr groß ist. Das Inset zeigt nochmal den halblogarithmischen Plot der Inkrementverteilung zusammen mit einer Gaußfunktion (schwarz).

Mitte hauptsächlich innerhalb der mit $(u/\sigma)^3$ multiplizierten Gaußverteilung liegt, während sie im rechten Teil systematisch größer ist.

Diese Darstellung lässt auch einen guten Vergleich mit der Inkrementstatistik in drei Dimensionen zu. In Abbildung 6.5 sind die gleichen Größen wie Abbildung 6.4 zu sehen, nur diesmal für die Simulation `sim3d1024`. Das Inset zeigt wiederum einen halblogarithmischen Plot der Inkrementverteilung $f(u; r)$ bei $r = \lambda$ zusammen mit einer Gaußverteilung. Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall sind hier die Abweichungen sehr stark. Dies ist mit der in Abschnitt 4.2.2 angesprochenen Tatsache verknüpft, dass in drei Dimensionen die K41-Theorie verletzt ist. An dieser Stelle ist jedoch wesentlich interessanter, dass die Verteilungsfunktion deutlich asymmetrischer als im zweidimensionalen Fall ist. Der linke negative Teil der Fläche unter $h(u)$ ist wesentlich größer als der rechte Teil. Daher ist hier das dritte Moment negativ. In der unterschiedlichen Asymmetrie der Verteilungsfunktionen spiegelt sich sehr gut die unterschiedliche Richtung des Energieflusses wider.

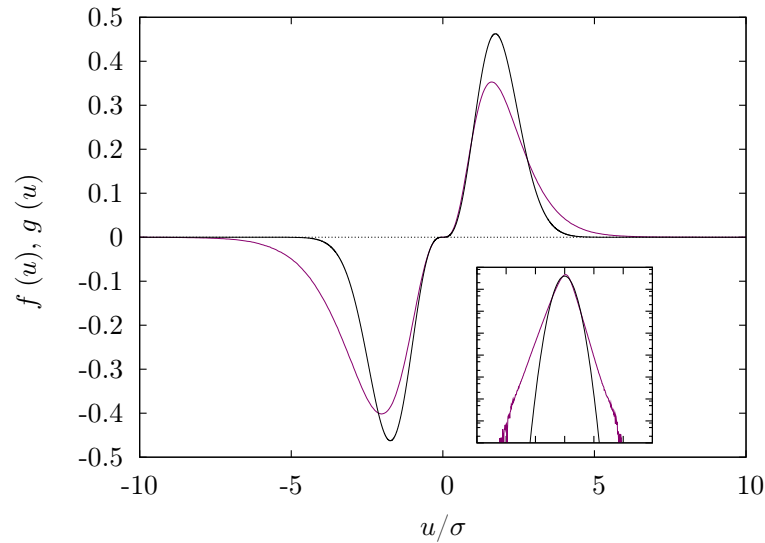


Abbildung 6.5 Darstellung von $h(u)$ (schwarz) für $r = \lambda$ (violett) aus `sim3d1024` zusammen mit $g(u)$. Hier sieht man einen wesentlich deutlicheren Unterschied zwischen den beiden Flächen links und rechts von $u/\sigma = 0$, wobei hier die negative Fläche überwiegt. Der Vergleich der Inkrementverteilung mit einer Gaußfunktion in der halblogarithmischen Darstellung im Inset zeigt, dass die Verteilungsfunktionen in dreidimensionaler Turbulenz wesentlich stärker von einer Gaußverteilung (schwarz) abweichen als in zwei Dimensionen.

6.2.2 Strukturfunktionen

Abbildung 6.6 und 6.7 zeigen jeweils im linken Diagramm die Strukturfunktionen der Ordnung $n = 2, 4, 6$ zusammen mit der von K41 vorhergesagten Abhängigkeit vom Abstand r . Für beide Simulationstypen zeigen die Strukturfunktionen im Inertialbereich kein erkennbares Skalierungsverhalten. Im Fall der Simulation mit Hyporeibung sind die Strukturfunktionen weniger gekrümmt als im Fall mit linearer Reibung.

Es scheint zwar so zu sein, dass sich der Unterschied zwischen der normalen Reibung und der Hyporeibung im Verhalten der geraden Strukturfunktionen niederschlägt, aber für eine Entscheidung, ob sie einen Skalenbereich zeigen oder nicht, sind wahrscheinlich höher aufgelöste Simulationen nötig.

Die jeweils im rechten Teil von Abbildung 6.6 und 6.7 zu sehenden, ungeraden Strukturfunktionen der Ordnung $n = 3, 5, 7$ zeigen ein etwas anderes Bild. Während im Fall von Simulation `sim2d1024gaussA` wiederum keinerlei Skalierungsverhalten zu beobachten ist, ist dies für `sim2d1024deltaA` anders. Zwischen $r \approx 0.03$ und $r \approx 0.2$ zeigen die ungeraden Strukturfunktionen einen Bereich, in dem sie relativ gut der K41-Vorhersage folgen. Dies ist konsistent mit den Überlegungen zu den Auswirkungen

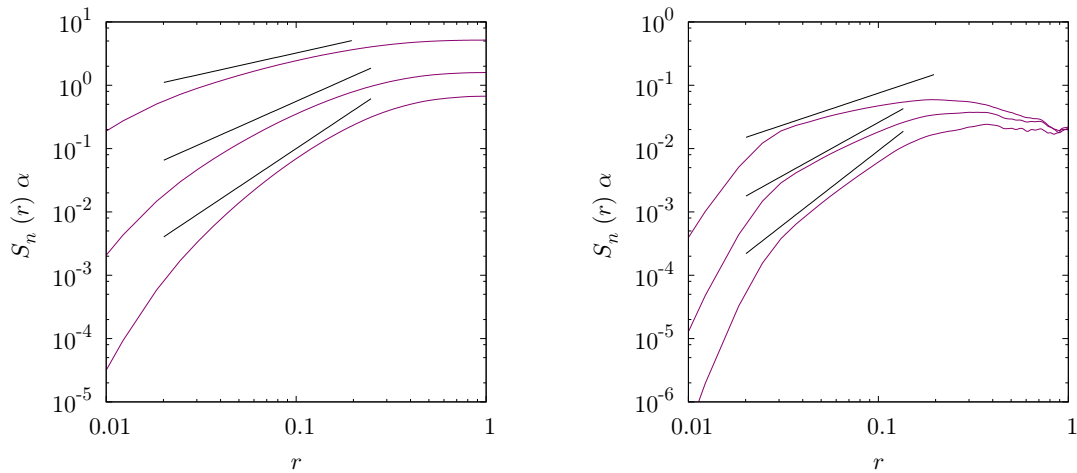


Abbildung 6.6 Darstellung der Eulerschen Strukturfunktionen für `sim2d1024gaussA`. Links: die geraden Strukturfunktionen mit $n = 2, 4, 6$ (von oben nach unten). Zur besseren Sichtbarkeit wurden sie mit dem Faktor $\alpha = 10, 2, 1$ multipliziert. Rechts: die ungeraden Strukturfunktionen $n = 3, 5, 7$ (von oben nach unten). Auch hier werden die Funktionen zur besseren Sichtbarkeit mit $\alpha = 10, 2, 1$ multipliziert. Die durchgezogenen Linien stellen die K41-Vorhersage $S_n(r) \sim r^{n/3}$ dar.

gen des zusätzlichen Dissipationsterms auf die dritte Strukturfunktion. Auf die Darstellung der Ergebnisse der Anwendung der ESS-Technik² [BCT⁺93, BSSB94] wurde hier verzichtet. Es sei nur erwähnt, dass die Anwendung von ESS im Fall beider Simulationstypen zu dem Ergebnis führt, dass die ESS-Strukturfunktionsexponenten genau der K41-Theorie folgen. Sie verschleiert also die Unterschiede zwischen den beiden Simulationstypen.

6.3 Markoveigenschaften der Inkremente

Im vorherigen Abschnitt wurden die Verteilungsfunktionen $f(u; r)$ der longitudinalen Inkremente für verschiedene Abstände r betrachtet. Prinzipiell kann die komplette

²Das Kürzel ESS steht für *Extended Self Similarity*. Der Begriff der Selbstähnlichkeit wird hier insofern erweitert, als dass, wenn $S_n \sim r^{\zeta(n)}$ nicht erfüllt ist, zumindest die Relation $S_n \sim S_3^{\alpha(n)}$ mit $\zeta(n) = \alpha(n)$ gegeben ist. Die Proportionalität der Strukturfunktionen zu Potenzen von S_3 wird, basierend auf der Überlegung, dass für hohe Reynoldszahlen aufgrund des $-4/5$ -Gesetzes $S_3 \sim r$ gelten muss, postuliert. Die Anwendbarkeit dieser Technik vorausgesetzt, besteht ihr Vorteil darin, dass man auch bei Reynoldszahlen, bei denen noch kein Skalierungsverhalten zu beobachten ist, die Exponenten $\zeta(n)$ gut bestimmen kann.

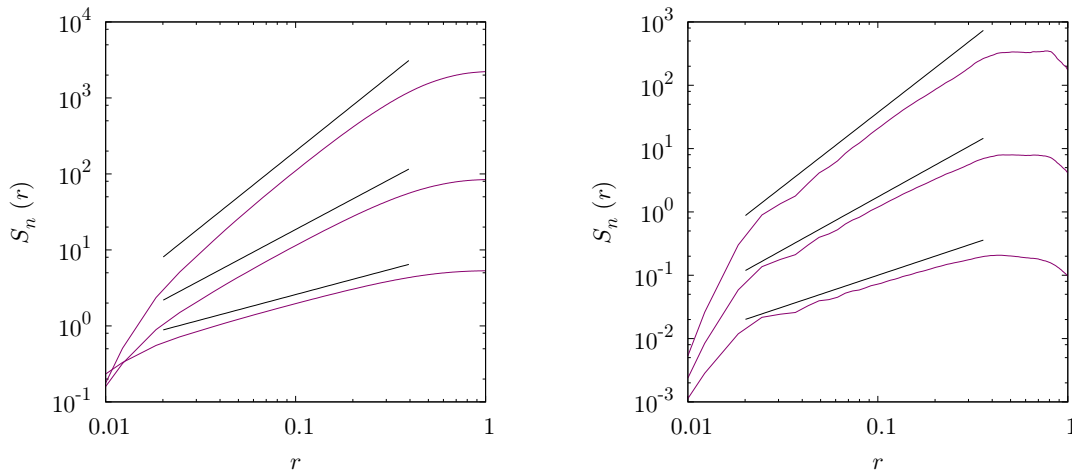


Abbildung 6.7 Darstellung der Eulerschen Strukturfunktionen für `sim2d1024deltaA`. Links: die geraden Strukturfunktionen mit $n = 2, 4, 6$ (von unten nach oben). Rechts: die ungeraden Strukturfunktionen $n = 3, 5, 7$ (von unten nach oben). Die durchgezogenen Linien stellen wieder die K41-Vorhersage $S_n(r) \sim r^{n/3}$ dar.

Kaskade durch eine Mehrpunktverteilung der Form

$$f(u_1(r_1), u_2(r_2), \dots, u_N(r_N)) = f(u_1(r_1)|u_2(r_2), \dots, u_N(r_N))f(u_2(r_2), \dots, u_N(r_N)) \quad (6.6)$$

beschrieben werden. Diese Sichtweise entspricht der Frage, wie wahrscheinlich es ist, auf den Skalen r_1 bis r_N die Geschwindigkeitsinkremente U_1 bis U_N zu finden. Dies ist völlig analog zu einem Prozess wie (3.54), bei dem nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, zu bestimmten Zeitpunkten t_i die Messwerte X_i zu finden. Die Verbundverteilung (6.6) beschreibt damit einen stochastischen Prozess, der diesmal nicht in der Zeit, sondern in der Skala verläuft.

Für das Eulersche Geschwindigkeitsfeld dreidimensionaler Turbulenz wurde dieser Prozess ausgiebig untersucht [FP97b, FP97a, RPF01]. Hierbei wurden zwei wichtige Beobachtungen gemacht. Zum einen genügt (6.6) genau dann der Definition eines Markovprozesses

$$f(u_1(r_1)|u_2(r_2), \dots, u_N(r_N)) = f(u_1(r_1)|u_2(r_2)), \quad (6.7)$$

wenn der Abstand Δr zwischen den Skalen r_i und $r_i + \Delta r$ größer als eine bestimmte endliche Länge ist. Zum anderen gibt es Hinweise darauf, dass $l_m \sim \lambda$ ist [LRPF06]. Es muss natürlich betont werden, dass die in [FP97b, FP97a, RPF01] gemachten Untersuchungen im strengen Sinn kein Beweis für die Markoveigenschaft sind. Die auf Basis dieser Annahme gemachten Rekonstruktionen der Inkrementstatistik zeigen jedoch, dass die Markovannahme zumindest eine extrem gute Näherung darstellt.

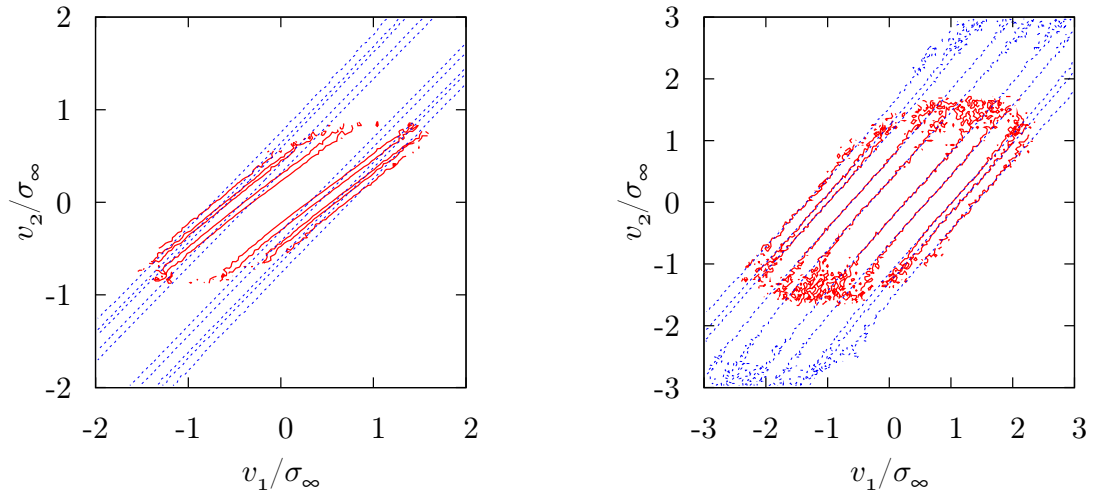


Abbildung 6.8 Höhenliniendiagramme der bedingten Verteilungen $p(u_1|u_2)$ (blaue Linien) und $p(u_1|u_2, u_3 = 0)$ (rote Linien) für $r_1 = L/2 + 2/3\lambda, r_2 = L/2 + 1/3\lambda, r_3 = L/2$ (links) und $r_1 = L/2 + 2\lambda, r_2 = L/2 + \lambda, r_3 = L/2$ (rechts).

Bezüglich der Diskussion der Markoveigenschaften der Inkrementstatistik stellt sich die Frage, ob das Auftreten einer endlichen Markovlänge mit universellen Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung verknüpft ist oder sich auf spezielle Strömungstypen beschränkt. Um der Beantwortung dieser Frage ein wenig näher zu kommen, wird in diesem Abschnitt die Statistik der longitudinalen Inkremente in zweidimensionaler Turbulenz auf Markoveigenschaften untersucht³.

Um einen ersten Hinweis auf eine endliche Markovlänge zu bekommen, wird die Beziehung (6.7) zunächst beispielhaft anhand der in Simulation `sim2d1024gaussA` numerisch gewonnenen Daten getestet. Da die Verteilungsfunktionen der Inkremente auf verschiedenen Skalen verschiedene Standardabweichungen besitzen, werden die Daten der Konvention in [RPF01] folgend auf

$$\sigma_\infty = \sqrt{2\langle v_x^2 \rangle} \quad (6.8)$$

normiert. Abbildung 6.8 zeigt den Vergleich zwischen den einfach und zweifach bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten für $r_1 = L/2 + 2/3\lambda, r_2 = L/2 + 1/3\lambda, r_3 = L/2$ und $r_1 = L/2 + 2\lambda, r_2 = L/2 + \lambda, r_3 = L/2$ jeweils für den Schnitt $u_3 = 0$. Während für den ersten Fall eine deutliche Abweichung zwischen den Höhenlinien der

³Die Markoveigenschaften der longitudinalen Eulerschen Inkremente wurde schon im Rahmen der Diplomarbeit [Vos09] behandelt. Da dort jedoch die Daten der Simulation `sim2d1024delta` noch nicht vorlagen, wird die Analyse der Vollständigkeit halber an dieser Stelle nochmal durchgeführt, um zu testen, ob der veränderte Antriebsterm und die veränderte großskalige Dissipation einen signifikanten Einfluss auf die Markoveigenschaft haben.

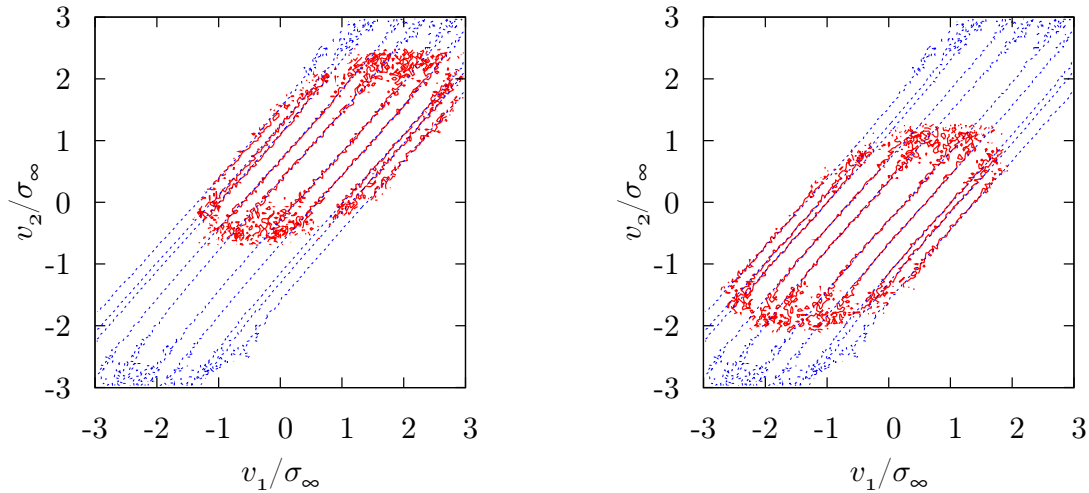


Abbildung 6.9 Vergleich der einfach bedingten Verteilung $p(v_1|v_2)$ (blaue Linien) mit den zweifach bedingten Verteilungen $p(v_1|v_2, v_3 = \sigma_\infty)$ (links, rote Linien) und $p(v_1|v_2, v_3 = -0.5\sigma_\infty)$ (rechts, schwarze Linien) für $r_1 = L/2 + 2\lambda, r_2 = L/2 + \lambda, r_3 = L/2$.

beiden Verteilungen beobachtet werden kann, ist die Übereinstimmung für den zweiten Fall recht gut. Dies stellt ein erstes Indiz für eine endliche Markovlänge dar. Die Markoveigenschaft ist natürlich nur dann erfüllt, wenn die Höhenlinien für alle u_3 übereinanderliegen. Um dies zu testen, wurde der Vergleich der beiden bedingten Verteilungsfunktionen bei $r_1 = L/2 + 2\lambda, r_2 = L/2 + \lambda, r_3 = L/2$ auch für $u_3 = -0.5\sigma_\infty$ und $u_3 = \sigma_\infty$ durchgeführt (siehe Abbildung 6.9).

In beiden Fällen findet man wiederum eine gute Übereinstimmung der Höhenliniendiagramme. Die zweifach bedingte Verteilung erscheint für verschiedene u_3 gegeneinander verschoben. Dies liegt daran, dass die Geschwindigkeiten und damit auch die Geschwindigkeitsinkremente korreliert sind. Je nachdem, welches u_3 man wählt, ändert sich die Wahrscheinlichkeit, bestimmte u_2 bzw. u_1 zu finden. Darauf wird in Anhang D noch genauer eingegangen. Um die anhand der Höhenliniendiagramme gewonnenen Erkenntnisse zu quantifizieren, wird der Abstand zwischen den einfach und zweifach bedingten Verteilungen mittels (4.21) vermessen. Das Abstandsmaß hängt hier, zusätzlich zur zweiten Bedingung u_3 und dem Abstand Δr , noch von der Länge r_1 parametrisch ab, wir haben also $d_C = d_C(v_3, \Delta r, r_1)$. In Abbildung 6.10 ist der Verlauf von d_k in Abhängigkeit von Δr bei festem r_1 und v_3 zu sehen. Es ist zu beobachten, dass für alle Parametereinstellungen das Abstandsmaß oberhalb von $\Delta r \approx 0.5\lambda$ in die Sättigung geht und leicht um $d_C \approx 0.994$ fluktuiert. Dies ist ein sehr starkes Indiz dafür, dass für die aus der Simulation `sim2d1024gaussA` stammenden Inkrementdaten die Markoveigenschaft oberhalb der halben Taylorlänge erfüllt ist. Idealerweise würde das Maß oberhalb der Markovlänge genau $d_C = 1$ betragen, aber

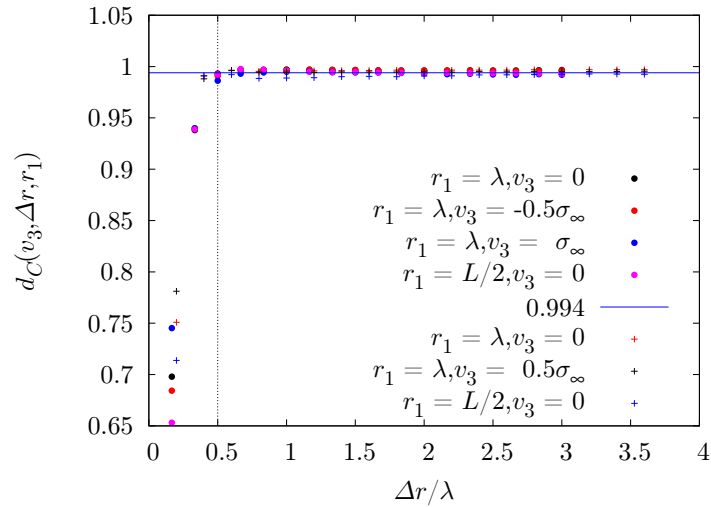


Abbildung 6.10 Verlauf des Korrelationsmaßes $d_C(u_3, \Delta r, r_1)$ in Abhängigkeit von Δr für verschiedene v_3 und r_1 . Die Daten aus `sim2d1024gaussA` sind mit Kreisen gekennzeichnet, während die aus `sim2d1024deltaA` stammenden Daten mit Kreuzen kenntlich gemacht sind. In allen Fällen sättigt das Korrelationsmaß bei $\Delta r \approx \lambda$.

aufgrund der Tatsache, dass die Verteilungsfunktionen numerisch aus einer endlichen Datenmenge geschätzt werden, war zu erwarten, dass das Maß nicht exakt bei Eins liegt. Auch für die Inkrementdaten der Simulation `sim2d1024deltaA` wurde die Untersuchung auf Markoveigenschaften mittels des Abstandsmaßes durchgeführt. Die Ergebnisse sind wiederum in Abbildung 6.10 zu sehen. Das Verhalten des Abstandsmaßes in Abhängigkeit von Δr unterscheidet sich in diesem Fall nur marginal von dem Verhalten bei `sim2d1024gaussA`. Auch für diese Simulation kommt man zu dem Ergebnis, dass oberhalb von $\Delta r \approx 0.5\lambda$ die Markoveigenschaft erfüllt ist.

Die Tatsache, dass die Ergebnisse für die beiden Simulationstypen so ähnlich sind, ist für die eingangs angesprochene Frage nach der Universalität der Markoveigenschaft sehr interessant, da sich die beiden Simulationen bezüglich der Kraft und des großskaligen Dissipationsterms stark unterscheiden. Sie unterscheiden sich aber nicht bezüglich der Parameter für die Hyperviskosität. Dies scheint darauf hinzudeuten, dass das Auftreten der Markovlänge mit der viskosen Dissipation und damit mit der Glattheit der turbulenten Felder auf kleinen Skalen zu tun hat. Wäre dies so, wäre eine Verbindung der Markovskala mit der Taylorskala nicht verwunderlich, da sich die Taylorskala wie in (4.17) nur für glatte Signale definieren läßt.

Teil III

Lagrangesche Statistik

7 Trajektorien

Nachdem im letzten Teil der Arbeit die Voraussetzungen für die numerische Simulation der inversen Kaskade geschaffen wurden, können nun die statistischen Eigenschaften von Tracern, die sich im turbulenten Feld bewegen, untersucht werden. Da schon gezeigt wurde, dass sich zweidimensionale und dreidimensionale Turbulenz bezüglich einiger Eigenschaften im Eulerbild stark unterscheiden, ist es nun interessant zu sehen, wie stark sich die Lagrangeschen Observablen in den beiden Systemen unterscheiden.

Um Untersuchungen im Lagrangebild zu machen, müssen neben der zeitlichen Entwicklung der Felder auch noch die Trajektorien $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ der zum Zeitpunkt $t = 0$ bei \mathbf{y} startenden Tracerpartikel numerisch berechnet werden. Dazu muss für jedes Teilchen die Gleichung (2.23)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t). \quad (7.1)$$

gelöst werden. Da sich die Teilchen frei bewegen können, muss das Eulersche Feld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ an den Teilchenpositionen $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ interpoliert werden. Der Interpolationsmechanismus wird in Anhang A.3 beschrieben. Bei einer mit N^2 Gitterpunkten aufgelösten Simulation werden $(N/4)^2$ Teilchen mitgeführt, was für $N = 1024$ einer Menge von 65 536 Teilchen entspricht. Bei dieser Teilchenmenge befindet sich im Mittel ein Teilchen in einem Bereich von vier mal vier Gitterpunkten. Eine solche Wahl scheint sinnvoll, da sich die Taylorlänge für die Simulationen `sim2d1024gaussA` und `sim2d1024deltaA` im Bereich von vier bis sechs Gitterpunkten bewegt. Da das Feld unterhalb dieser Länge glatt ist, würde eine dichtere Besetzung des Feldes kaum zusätzliche Informationen liefern. Die Berechnung von Größen wie Korrelationsfunktionen oder Mehrpunktverteilungen erfordert aber große Datenmengen. Daher sollten es auch nicht weniger Teilchen sein, da sonst für eine statistische Konvergenz der Größen sehr lange simuliert werden muss. Sobald die Simulation der inversen Kaskade stationär geworden ist, werden die Teilchen zufällig, aber gleichverteilt über das Simulationsgebiet verstreut und bewegen sich von da an gemäß (7.1) mit den Eulerschen Geschwindigkeitsfeldern mit.

Einen ersten Eindruck vom Lagrangebild vermitteln die Trajektorien der Tracer. In Abbildung 7.1 ist die Trajektorie eines Teilchens für die Gesamtdauer der Simulation zu sehen. Auf den ersten Blick sieht man, dass die Bahn in Teilen spiralförmig verläuft. In manchen Gebieten sind die Loopings etwas weiter und in manchen Gebieten verlaufen sie auf kleinerem Raum. Diese Bewegungen werden immer wieder

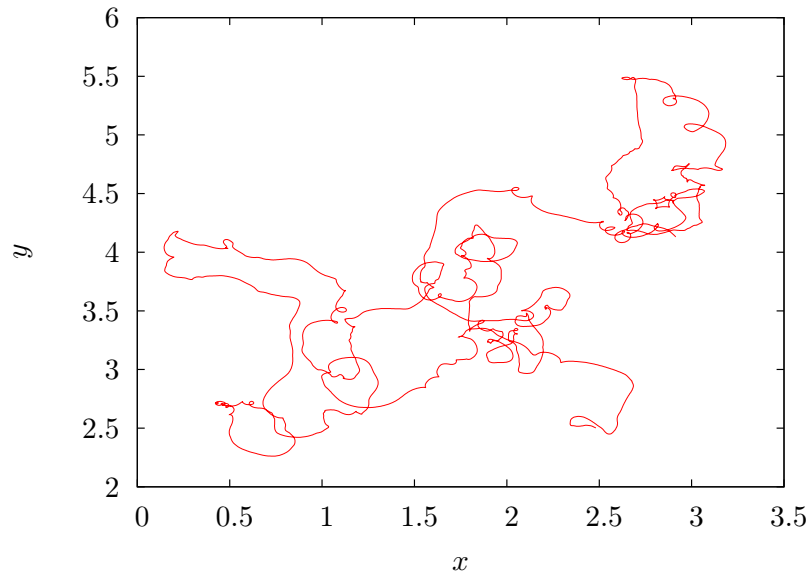


Abbildung 7.1 Bahn eines Teilchens in der Simulation `sim2d1024gaussA`. Die Bahn ist über den gesamten Simulationszeitraum dargestellt. Dies entspricht ca. $100 T_E$.

von Bereichen unterbrochen, in denen der Tracer sich entlang langgezogener Kurven bewegt. Es handelt sich dabei also nicht um eine Zufallsbewegung im Sinne eines Brownschen Teilchens. Dies war auch nicht zu erwarten. Andererseits gibt es auch keine so deutliche Trennung von Bereichen, in denen sich das Teilchen nur über relativ kleine Entfernungen bewegt, und Bereichen, in denen das Teilchen weite Flüge zurücklegt. Ein solches Verhalten würde man von Zufallsbewegungen vom Lévytyp erwarten [PB00].

In [JPT99] sind Bahnen von Teilchen zu sehen, die mit Hilfe von (7.1) aus den in einem Experiment gemessenen Geschwindigkeitsfeldern gewonnen wurden. Zumindest in ihrem qualitativen Verhalten ähneln sie der in Abbildung 7.1 gezeigten Bahn. Im Experiment wurden die Teilchen allerdings über einen relativ kleinen Zeitraum verfolgt.

Zum Vergleich lohnt sich ein Blick auf die Trajektorie eines Tracers in einer dreidimensionalen Strömung. Abbildung 7.2 zeigt eine solche Bahn für einen Zeitraum von ca. drei T_E . Zunächst einmal fällt wieder der spiralartige Charakter der Bahn auf, der eine gewisse Ähnlichkeit zum zweidimensionalen Fall zeigt. Die gezeigte Bahn ist aufgrund ihrer Kürze nicht ganz so repräsentativ wie ihr zweidimensionales Gegenstück, vermittelt aber schon einen ersten Eindruck vom Verhalten der Teilchen. Für die Statistik ist interessant, wie dominant die spiralförmigen Anteile der

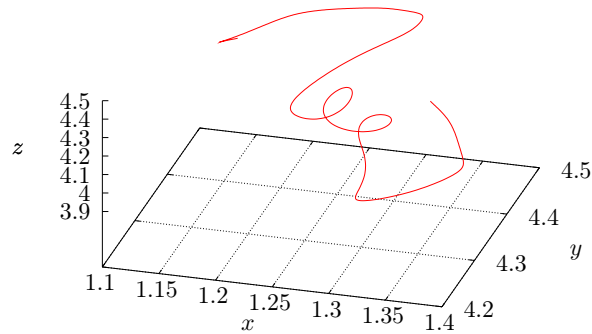


Abbildung 7.2 Räumliche Darstellung einer Teilchenbahn aus der Simulation `sim3d1024A` über einen Zeitraum von ca. drei Large-Eddy-Turnover-Zeiten.

Bahn sind und welchen Einfluss sie dadurch beispielsweise auf die Statistik von Geschwindigkeitsinkrementen oder anderen Observablen haben. Solche Fragen wurden im Zusammenhang mit dem Begriff *vortex trapping* untersucht [BBC⁺05]. Dieser Begriff beschreibt Situationen, in denen sich Teilchen sehr lange in Wirbelstrukturen aufhalten (siehe z. B. Abbildung 1 in [BBC⁺05]). Dieses Verhalten ist ansatzweise in Abbildung 7.2 zu sehen. Es ist aber nicht völlig klar, wie wichtig solche Ereignisse sind, da man immer bedenken muß, dass jeder Punkt des Volumens prinzipiell mit einem Tracer belegt ist. Wie in Abbildung 5.15 gezeigt, gibt es aber gerade im drei-

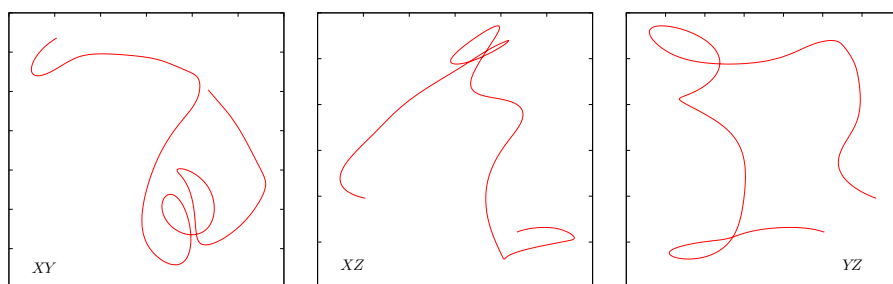


Abbildung 7.3 Projektion der dreidimensionalen Bahndarstellung auf die xy -, xz - und yz -Fläche.

dimensionalen Feld große Bereiche, die weniger von Wirbelröhren durchsetzt sind.

Für die vorliegende Arbeit ist nur die Beobachtung wichtig, dass die Bahnen sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen spiralartig verlaufen, also Anteile besitzen, die ähnlich einer Kreisbewegung sind, wobei im zweiten Fall die Teilchen in die dritte Dimension ausweichen können.

7.1 Inkompressibilität

Aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung müsste für die Tracer strenggenommen Gleichung (2.28) gelten. In einer numerischen Simulation sind natürlich nicht alle Raumpunkte mit Teilchen belegt, und es ist auch nicht ausgeschlossen, dass sich durch die numerische Integration von (7.1), die zwangsläufig nicht exakt sein kann, Teilchen an bestimmten Orten ansammeln. Eine Möglichkeit zur Überprüfung der Frage, ob die Inkompressibilität im Lagrangebild durch numerische Artefakte verletzt ist, stellt der Vergleich der räumlichen Verteilung der Tracer mit einer Poissonverteilung dar [Hom09b].

Wenn man ein Grundgebiet mit M Parzellen hat und darauf statistisch unabhängig K Teilchen, verteilt dann ist die Wahrscheinlichkeit, n Teilchen in einer Parzelle zu finden, durch die Poissonverteilung

$$p(n, \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{K}{M} \quad (7.2)$$

gegeben. Für einen Vergleich von (7.4) mit der Verteilung der Teilchen in der Simulation wird das Simulationsgebiet in M Zellen aufgeteilt und mittels eines Histogramms die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl von Tracern in einer Parzelle zu treffen, geschätzt. Da beim Beginn der Simulation die Teilchen statistisch unabhängig verteilt werden, sollte ihre Verteilung näherungsweise einer Poissonverteilung gehorchen. In dem Fall, dass während der Simulation die Inkompressibilität im Lagrangebild annähernd gewährleistet ist, müsste die Verteilung der Teilchen über das Simulationsgebiet auch nach einer beliebigen Zeit noch (7.2) gehorchen. In Abbildung 7.4 ist der Vergleich der Verteilung der Tracern zu zwei verschiedenen Zeiten mit einer Poissonverteilung gezeigt. Die Übereinstimmung ist im Rahmen der statistischen Genauigkeit sehr gut. Es ist also davon auszugehen, dass die Tracer das Grundgebiet über den Zeitraum der Simulation gut abdecken und die Inkompressibilität näherungsweise auch im Lagrangebild erfüllt ist.

7.2 Der Transport von Tracern in zwei Dimensionen

Wie in Abbildung 2.2 in Abschnitt 2.2 schon skizziert, werden die Tracerpositionen zur Zeit t_0 durch die Lagrangesche Abbildung auf andere Positionen zu einem

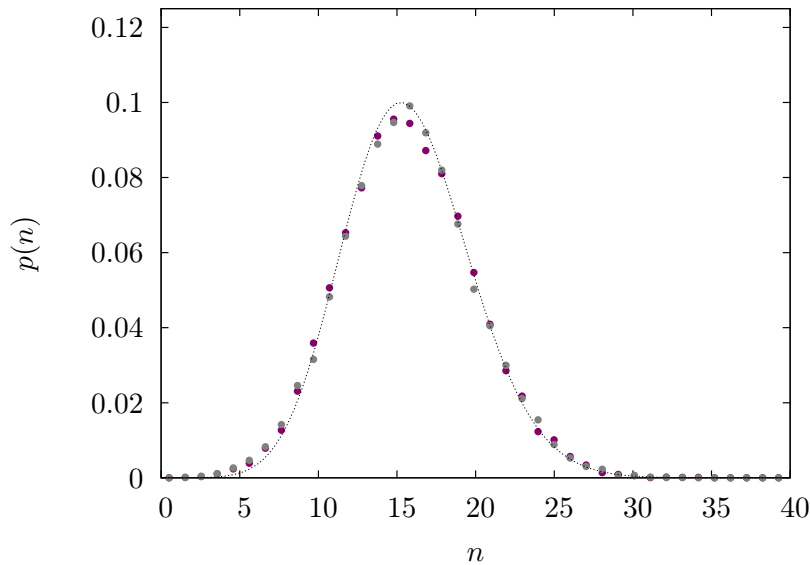


Abbildung 7.4 Vergleich der Poissonverteilung (gestrichelte Linie) mit der zu zwei verschiedenen Zeiten geschätzten Verteilung der Tracer über das Grundgebiet. Die beiden Zeitpunkte liegen 1000 Zeitschritte auseinander. Für eine bessere Statistik wurde hier die Simulation `sim2d1024gaussA` über einen kurzen Zeitraum mit einer vervierfachen Teilchenzahl $K = 512^2$ wiederholt. Für die Auswertung wurde das Grundgebiet in $M = 128^2$ Parzellen aufgeteilt. Damit folgt für den Erwartungswert der Poissonverteilung $\lambda = 16$.

späteren Zeitpunkt t_1 abgebildet. Betrachtet man nicht nur einen Tracer, sondern, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, ein zusammenhängendes mit Tracern besetztes Gebiet, führt dieser Mechanismus dazu, dass dieses Gebiet mit der Zeit deformiert und verschoben wird.

In diesem Abschnitt soll dieser Prozess und der damit einhergehende Transport von Tracern am Beispiel der Simulation `sim2d1024gaussA` anschaulich dargestellt werden. Zu diesem Zweck wurden auf einem quadratischen Gebiet mit einer Kantenlänge von einem Hundertstel der Kantenlänge des Simulationsgebiets (dies entspricht ca. zehn Gitterlängen) 10^5 Tracer in die Strömung gesetzt. Ihre Bewegung wurde dann von $t = 0$ bis $t = 0.5$, was 1000 Zeitschritten entspricht, verfolgt.

In Abbildung 7.5 sind die Positionen der Tracer für vier verschiedene Zeitpunkte zu sehen. Im ersten Schritt wird das quadratische Grundgebiet stark in die Länge gezogen und gekrümmt, als ob es sich im Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen Wirbels befinden würde. Auf dieser kurzen Zeitskala ist der Transport der Partikel eher deterministisch als diffusiv. Nach der Verdoppelung der Beobachtungszeit ist

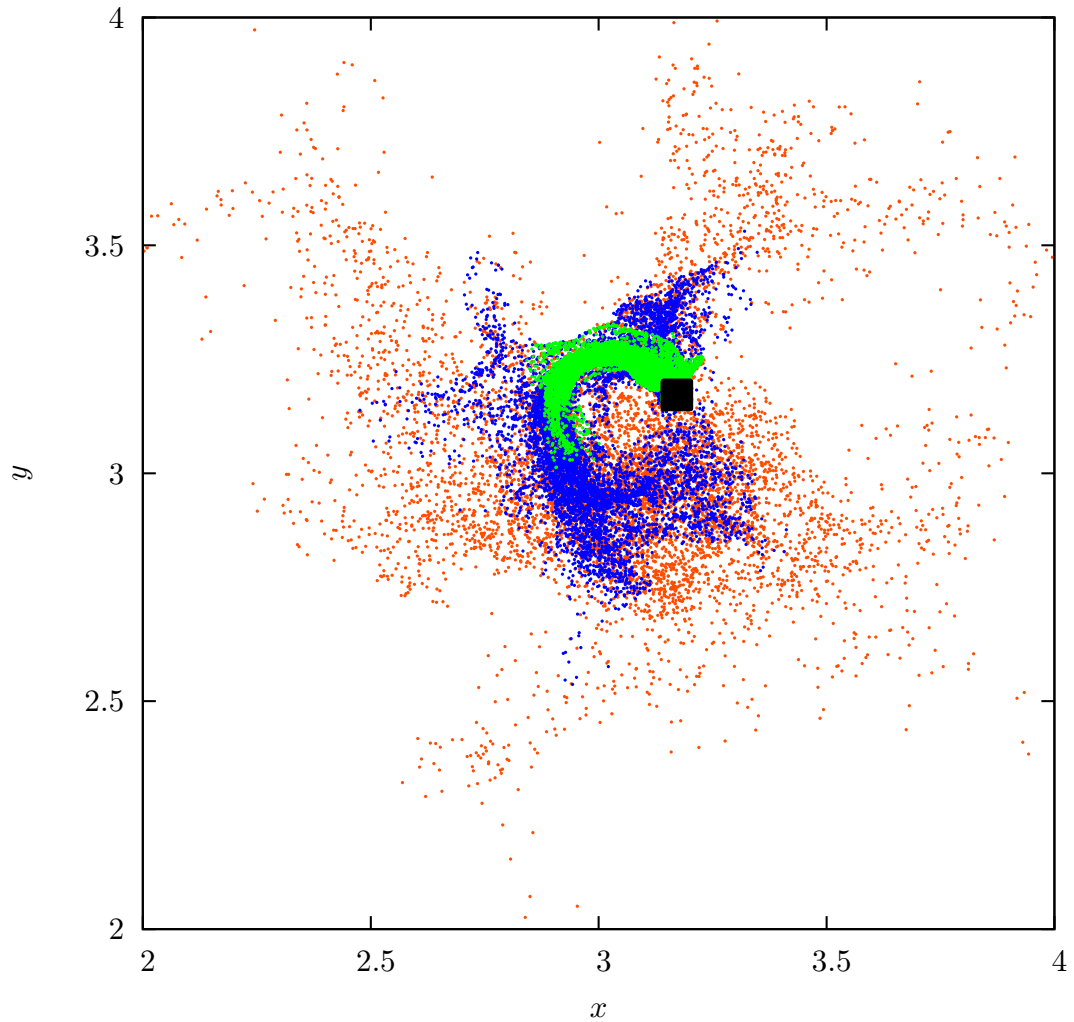


Abbildung 7.5 Darstellung der Verteilung von Tracern, die zum Zeitpunkt $t = 0$ von einem quadratischen Gebiet aus startend im Geschwindigkeitsfeld von Simulation `sim2d1024gaussA` transportiert werden. Jeder Punkt in der Abbildung entspricht einem Tracer. Die Farben geben an, zu welchem Zeitpunkt sich der Tracer an dem markierten Ort befindet. Die Zeitpunkte sind $t = 0$ (schwarz), $t = 0.1$ (grün), $t = 0.25$ (blau) und $t = 0.5$ (rot).

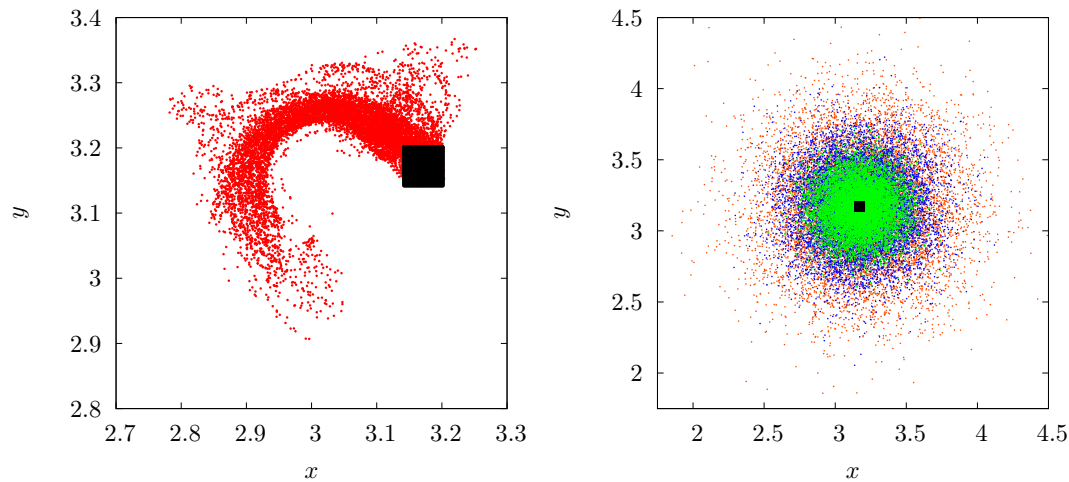


Abbildung 7.6 Links: Vergrößerte Darstellung der Tracerverteilung zum Zeitpunkt $t = 0.1$. Zu diesem Zeitpunkt sind die Tracer noch nicht sehr verstreut und liegen im Mittel entlang einer gekrümmten Bahn. Rechts: Darstellung der Tracerverteilung des zweidimensionalen Diffusionsprozesses $\dot{x} = \sigma_v \Gamma$, $\dot{y} = \sigma_v \Gamma$ mit $\sigma_v = 0.26$, was dem Wert für σ_a aus `sim2d1024gaussA` entspricht. Die Anfangsbedingung entspricht genau der für Abbildung 7.5 gewählten Anfangsbedingung. Der Zeitschritt zur numerischen Simulation der beiden Langevingleichungen wurde wie in `sim2d1024gaussA` auf $\Delta t = 0.0005$ gesetzt. Die dargestellten Zeitschritte $t = 0$ (schwarz), $t = 0.1$ (grün), $t = 0.25$ (blau) und $t = 0.5$ (rot) entsprechen damit den Zeitschritten in Abbildung 7.5. Der Vergleich der beiden Abbildung zeigt deutlich den Unterschied zwischen einem reinen Diffusionsprozess und dem Transport der Tracer in einer zweidimensionalen Strömung.

das Gebiet, auf dem sich die Tracer befinden, stärker zerfasert. Ansatzweise kann man die Bildung fingerartiger Strukturen erkennen. Bei nochmaliger Verdoppelung der Zeitspanne sind die Tracer schon stark verteilt, das Grundgebiet aber, auf dem sich die Tracer befinden, zeigt immer noch fingerartige Strukturen. Bei einem rein diffusiven Prozess würden diese Strukturen nach kurzer Zeit verschwinden und das Gebiet, auf dem sich die Tracer befinden, wäre, zumindest im statistischen Sinne, rotationssymmetrisch (siehe rechter Teil von Abb. 7.6). Der letzte dargestellte Zeitpunkt entspricht ungefähr der doppelten Lagrangeschen integralen Zeitskala T , die analog zur integralen Längenskala definiert ist (siehe nächstes Kapitel).

Diese Darstellung zeigt somit deutlich, dass der Transport von Tracern in zweidimensionaler Turbulenz erst auf Zeitskalen, die wesentlich größer sind als die typischen Zeitskalen des Systems, als Diffusionsprozess beschrieben werden kann.

Um dies genauer zu quantifizieren, kann man zunächst einen reinen Diffusionsprozess betrachten. In einer Dimension wird er durch die Langevingleichung $\dot{x} = D\Gamma$ oder

die korrespondierende Fokker-Planck-Gleichung beschrieben. Die Verteilung $p(x, t)$ der Teilchen verhält sich unter der Anfangsbedingung $p(x, 0) = \delta(x)$ [Ris96] wie

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2(t) \rangle}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\langle x^2(t) \rangle} \right]. \quad (7.3)$$

Die komplette Information über die Verteilung der Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt wird durch das mittlere Verschiebungsquadrat

$$\langle x^2(t) \rangle \quad (7.4)$$

beschrieben. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass die Verteilung einer Gaußverteilung entspricht, die komplett durch ihre Varianz parametrisiert ist. Dies bedeutet aber auch, dass die räumliche Verteilung der Tracer statistisch isotrop ist. An dieser Stelle besteht zwischen dem Diffusionskoeffizienten D und dem mittleren Verschiebungsquadrat der Zusammenhang $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$.

Abbildung 7.5 zeigt deutlich, dass die Verteilung der Tracer in einer zweidimensionalen Strömung starke Strukturen aufweist. Das mittlere Verschiebungsquadrat scheint also im Fall einer turbulenten Strömung nicht die vollständige Information über den Teilchentransport zu enthalten. Dennoch ist es interessant, diese Größe zu betrachten, da sie einige Informationen über die Zeitskalen des turbulenten Transportes enthält und generell für die Untersuchung von Mischungs- und Transportvorgängen in turbulenten Strömungen von großem Interesse ist [Bak08].

Im Folgenden wird das eindimensionale mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2(t) \rangle$ eines Tracers betrachtet. Zunächst kann man sich zwei Spezialfälle für die Zeitabhängigkeit dieser Größe anschauen [Tay22, McC92]. Dazu betrachtet man Gleichung (3.79). Für diesen Fall lautet sie

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle v_x^2 \rangle \int_0^t d\tau (t - \tau) C_v(\tau), \quad (7.5)$$

wobei $C_v(\tau)$ die Lagrangesche Geschwindigkeitsautokorrelation ist (für die Definition dieser Observable siehe 8.1). Der erste Spezialfall ist der Fall, in dem t so klein ist, dass die Näherung $C_v(\tau) \approx C_v(0) = 1$ gemacht werden kann. Das mittlere Verschiebungsquadrat gehorcht in diesem Fall dem Zusammenhang

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \langle v_x^2 \rangle t^2, \quad (7.6)$$

was im Grunde der Weg-Zeit-Beziehung $x = vt$ entspricht. Im zweiten Fall wird t als so groß angenommen, dass das erste Integral in

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle v_x^2 \rangle \left[t \int_0^t d\tau C_v(\tau) - \int_0^t d\tau \tau C_v(\tau) \right] \approx \langle v_x^2 \rangle \left[Tt - \int_0^t d\tau \tau C_v(\tau) \right] \quad (7.7)$$

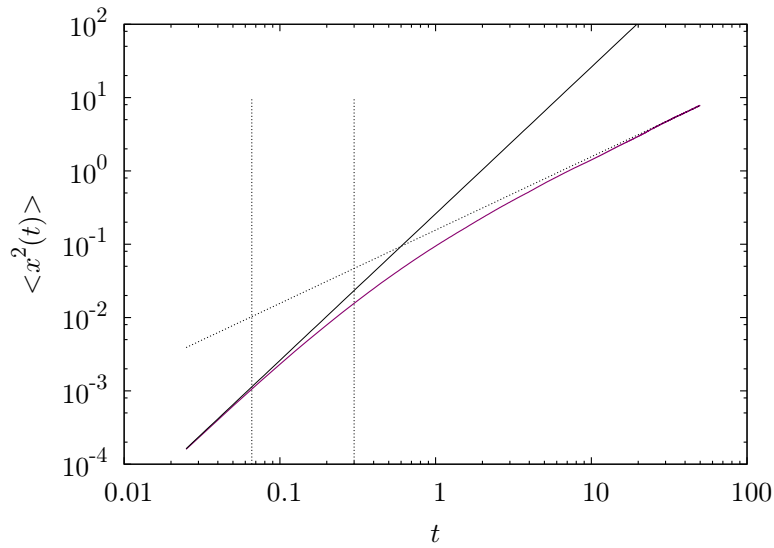


Abbildung 7.7 Darstellung der Zeitabhängigkeit des mittleren Verschiebungsquadrates (7.4). Für sehr kleine bzw. sehr große Zeiten t sind die beiden Grenzfälle (7.6) (schwarze durchgezogene Linie) und (7.8) (schwarze gestrichelte Linie) von Gleichung (7.5) gut erfüllt. Die beiden senkrechten Linien markieren die Taylorzeit τ_λ (8.3) und die integrale Zeit T (8.2) (von links nach rechts).

näherungsweise durch die Lagrangesche integrale Zeit¹ T ersetzt werden kann, d. h. $t \gg T$. In diesem Fall wird das zweite Integral gegenüber dem Term Tt vernachlässigbar², und es gilt:

$$\langle x^2(t) \rangle \approx 2T \langle v_x^2(t) \rangle t. \quad (7.8)$$

Die Simulationsdaten sollten diese beiden Grenzfälle erfüllen.

In Abbildung 7.7 sieht man $\langle x^2(t) \rangle$ für `sim2d1024gaussA`. Gut zu erkennen ist, dass die beiden eben abgeleiteten Grenzfälle erfüllt sind. Für $t < 0.1$ wächst das mittlere Verschiebungsquadrat proportional zu t^2 , wie von (7.6) vorausgesagt. Für Zeiten $t > 20$ ist der Verlauf des mittleren Verschiebungsquadrates kaum noch von dem in (7.8) angegebenen Verlauf zu unterscheiden. In Einklang mit den Erkenntnissen aus Abbildung 7.5 beginnt die Phase, in der der Transport als rein diffusiv beschrieben werden kann, sehr spät.

¹Hier wurde auf die Definition in 8.2 vorgegriffen.

²Voraussetzung dafür ist, dass $C(\tau)$ für große Zeiten schneller als $\sim \tau^{-1}$ abfällt (dies ist auch Voraussetzung für die Definition von T), da das Integral dann langsamer als der Term Tt wächst und somit für sehr große t immer unwichtiger wird. Wenn $C(\tau)$ schneller als $\sim \tau^{-2}$ abfällt, ist der Term sogar beschränkt.

Das Verhalten des mittleren Verschiebungsquadrates in dem Bereich zwischen den Grenzfällen ist von der konkreten Form von $C_v(t)$ abhängig. Dies ist genau der Bereich, in dem sich der turbulente Transport von einem Diffusionsprozess unterscheidet, was sich im zeitlichen Verlauf von $\langle x^2(t) \rangle$ bemerkbar macht. An dieser Stelle kann nur festgestellt werden, dass die Zeitabhängigkeit von $\langle x^2(t) \rangle$ nicht durch ein einfaches Potenzgesetz der Form $\sim t^\alpha$ mit einem α zwischen eins und zwei beschrieben werden kann, wie es aus einer Dimensionsanalyse folgen würde.

Selbst wenn man in der Lage wäre, das Verhalten von $\langle x^2(t) \rangle$ genau vorherzusagen, würde dennoch wieder die in Abschnitt 4.1 gestellte Frage aufgeworfen, welche Art von Statistik zur Beschreibung der Turbulenz bzw. an dieser Stelle des Transportes von Tracern ausreichend wäre. Die genaue Kenntnis des mittleren Verschiebungsquadrates würde keine Informationen über die geometrischen Strukturen, die in Abbildung 7.5 zu sehen sind, liefern. Erste Schritte in dieser Richtung wären die Untersuchung des Transportes von zwei oder drei Teilchen. Dies ist jedoch nicht Teil der vorliegenden Arbeit.

Der Transport von Tracern in drei Dimensionen ist qualitativ mit dem in zwei Dimensionen vergleichbar (siehe [MB07] und darin enthaltene Referenzen). Da die Untersuchung des Transportes nicht im Mittelpunkt dieser Arbeit steht, wurde auf die Darstellung der entsprechenden Ergebnisse in drei Dimensionen verzichtet.

8 Geschwindigkeitsstatistik

Im vorliegenden Kapitel wird kurz auf die Lagrangesche Geschwindigkeitsstatistik eingegangen. Der Vollständigkeit halber wird zunächst noch die Einpunkt-Verteilung der Geschwindigkeit für den Fall dreidimensionaler Turbulenz behandelt. Die anschließende Darstellung der Lagrangeschen Geschwindigkeitskorrelationen dient der Bestimmung der Zeitskalen für das Lagrangebild.

8.1 Die Verteilungsfunktion in drei Dimensionen

In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ für zweidimensionale Turbulenz im Rahmen der vorliegenden Daten nicht von einer Gaußverteilung unterschieden werden kann. Die Bestimmung der Verteilungsfunktion aus den Tracerdaten führt auf das gleiche Ergebnis. Da dies nach Gleichung (4.9) für den Fall homogener Turbulenz gelten muss, stellt dies einen weiteren Test für die numerische Implementation der Tracer dar.

Welche Form die Geschwindigkeitsstatistik in dreidimensionaler Turbulenz hat, ist nicht völlig geklärt. In der Literatur [VM91, GFN02, Jim98] gibt es Indizien dafür, dass sie subgaußisch ist, ihre Flügel also etwas schneller als bei einer Normalverteilung abfallen.

Abbildung 8.1 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für die Simulationen `sim3d1024` und `sim3d1024ita`. Während die erste Simulation eine subgaußische Geschwindigkeitsverteilung ähnlich zu den in [VM91, GFN02] vorgestellten Ergebnissen zeigt, ist die zur zweiten Simulation gehörige Verteilung im unteren Bereich etwas breiter als eine Gaußverteilung und leicht asymmetrisch. Der Unterschied läßt sich auf die unterschiedlichen Treiber zurückführen. Im ersten Fall werden zum Antrieb der Turbulenz die Amplituden der niedrigsten Moden festgehalten, während bei der zweiten Simulation sowohl die Amplituden als auch die Phasen festgehalten werden. Das heißt, dass im zweiten Fall die Struktur des großskaligen Geschwindigkeitsfeldes eingefroren ist. Dies trägt zur Anisotropie und damit zur Asymmetrie der Verteilung bei. In der zweiten Simulation können sich die Phasen gemäß der Wirbeltransportgleichung entwickeln. Während die erste Simulation für große Geschwindigkeiten leichte Flügel zeigt¹, ist die Verteilungsfunktion der zweiten Simulation subgaußisch.

¹In der Diplomarbeit [Dai09] wurden verschiedene Antriebe getestet. Dabei zeigt sich, dass bei Treibern die zu einem isotroperen Feld führen, die Verteilungsfunktion leicht subgaussisch wird.

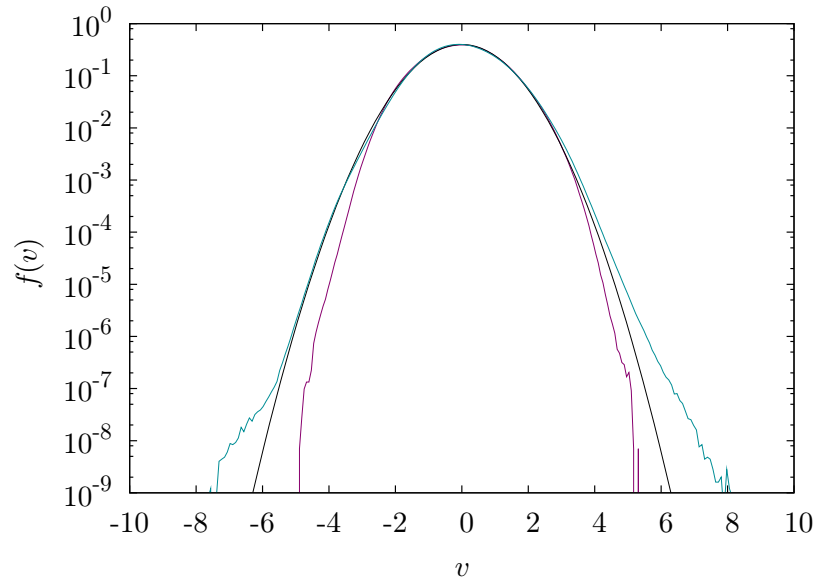


Abbildung 8.1 Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit der Tracerteilchen in drei Dimensionen für die Simulationen `sim3d1024ita` (violett) und `sim3d1024` (grau). Das Inset zeigt eine halblogarithmische Darstellung der Verteilungsfunktionen zusammen mit einer Gauß-Verteilung (schwarz).

8.2 Korrelationsfunktionen in zwei und drei Dimensionen

Wie im Eulerbild, so können auch im Lagrangebild die relevanten Skalen mit Hilfe der Geschwindigkeitsautokorrelation festgelegt werden. Dazu benutzt man hier die zeitabhängige Autokorrelation der Geschwindigkeitskomponente v_i

$$C_v(\tau) = \frac{\langle v_i(t)v_i(t+\tau) \rangle - \langle v_i(t) \rangle^2}{\sqrt{\langle v_i^2(t) \rangle}}. \quad (8.1)$$

Die Mittelung erfolgt dabei über alle Zeiten t des Simulationszeitraums, alle Tracer und über die Raumrichtungen $i = x, y, z$ bzw. $i = x, y$ in zwei Dimensionen. Die Lagrangesche integrale Zeit wird über

$$T = \int_0^{\tau_{max}} d\tau C_v(\tau) \quad (8.2)$$

Zur Zeit der Anfertigung der vorliegenden Arbeit lagen diese Datensätze jedoch noch nicht zur Auswertung vor, so dass hier auf den Datensatz, bei dem die Geschwindigkeitsverteilung leichte Flügel besitzt, zurückgegriffen wurde.

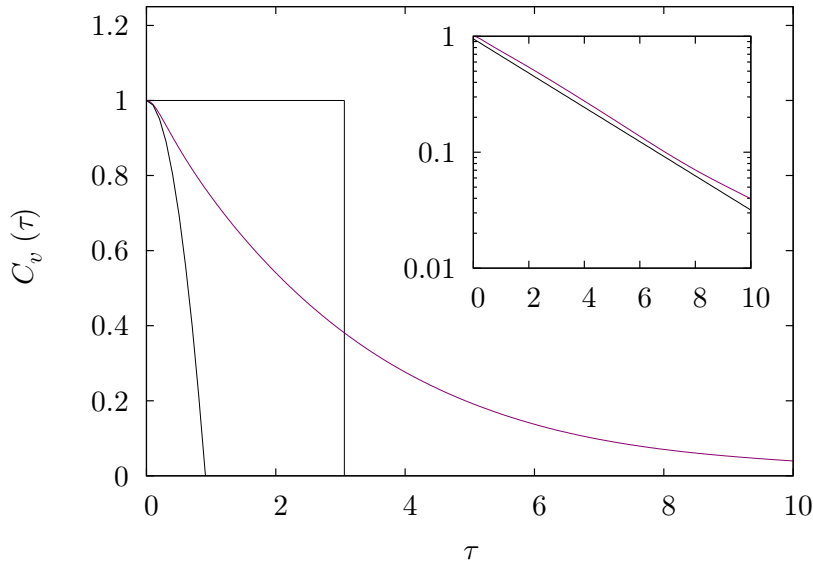


Abbildung 8.2 Darstellung der Geschwindigkeitsautokorrelation $C_v(\tau)$ für die Simulation `sim3d1024`. Die schwarzen Linien markieren den durch die Taylorskala definierten parabolischen Fit und die integrale Skala (senkrechte Linie). Das Inset zeigt die halblogarithmische Darstellung von $C_v(\tau)$ zusammen mit $0.95 \exp(-0.34\tau)$.

berechnet, wobei τ_{max} die bei der jeweils vorliegenden Simulation maximal verfügbare Zeitspanne darstellt. Die Taylorzeit wird mittels

$$\tau_\lambda = \sqrt{\frac{\langle v_i^2(t) \rangle}{\langle a_i^2(t) \rangle}} \quad (8.3)$$

berechnet. Dabei ist $a_i(t)$ eine Komponente der Beschleunigung. Die Mittelung erfolgt hier über die gleichen Größen wie bei der Korrelationsfunktion.

In Abbildung 8.2 ist $C_v(\tau)$ für die Simulation `sim3d1024` zu sehen. Die Funktion geht mit verschwindender Ableitung in die y -Achse und fällt exponentiell ab. Sie verhält sich damit so wie im Experiment (siehe z. B. [MLP04]). Die Zeitskalen liegen ungefähr bei $T \approx 3.1$ und $\tau_\lambda \approx 0.65$. Das Verhältnis zwischen den Skalen beträgt damit $T/\tau_\lambda \approx 4.6$. Die Lagrangesche integrale Zeitskala T ist damit kürzer als die Eulersche integrale Zeitskala. Im Falle dreidimensionaler Turbulenz benutzt man häufig noch die in Abschnitt 4.2.2 eingeführte Kolmogorovsche Zeitskala τ_η . Für `sim3d1024` gilt $\tau_\eta \approx 0.16$. Sie ist damit wesentlich kleiner als die Taylorzeit.

In Abbildung 8.3 ist $C_v(\tau)$ für die Simulation `sim2d1024gaussA` zu sehen. Wie im dreidimensionalen Fall geht sie mit verschwindender Steigung in die y -Achse,

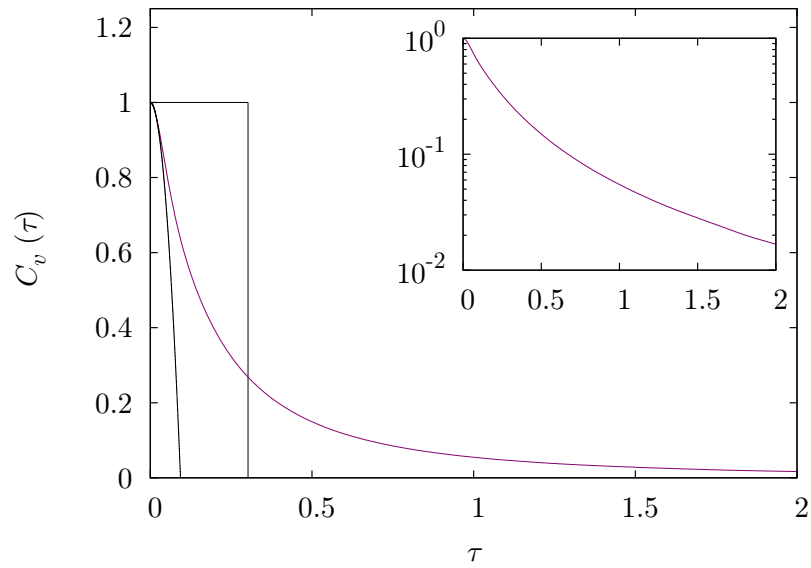


Abbildung 8.3 $C_v(\tau)$ für die Simulation `sim1024gaussA`. Die schwarzen Linien markieren wiederum den parabolischen Fit um den Ursprung und die integrale Skala (senkrechte Linie). Das Inset zeigt die halblogarithmische Darstellung von $C_v(\tau)$. Hier ist kein exponentieller Abfall zu beobachten.

fällt aber nicht exponentiell ab. Die Taylorzeitskala liegt bei $\tau_\lambda \approx 0.066$ während die integrale Zeitskala bei $T \approx 0.3$ liegt. Das Verhältnis aus integraler Skala und Taylorskala liegt bei $T/\tau_\lambda \approx 4.55$. Wie auch schon im dreidimensionalen Fall ist hier T kleiner als T_E .

Für die Simulation `sim2d1024deltaA` ergibt sich qualitativ das gleiche Bild. Für die Zeitskalen erhält man $\tau_\lambda \approx 0.025$ bzw. $T \approx 0.11$ mit einem Verhältnis $T/\tau_\lambda \approx 4.4$.

9 Die Beschleunigungsstatistik

Wie schon im ersten Kapitel erwähnt, spielt die Beschleunigung in der Lagrange-schen Beschreibung der Turbulenz eine zentrale Rolle. Sie charakterisiert die Kräfte, die auf ein Tracerteilchen entlang seiner Trajektorie einwirken. Aus diesem Grund wird im vorliegenden Kapitel die Einteilchen-Statistik der Lagrangeschen Beschleunigung genauer untersucht. Eine möglichst vollständige Beschreibung der Beschleunigung eines Tracers entlang seiner Trajektorie ist durch die Einpunkt- M -Zeiten-Verteilung $f^{1 \times M}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^M)$ gegeben. Da diese Verteilung eine schwer handhabbare, hochdimensionale Größe darstellt, begnügt man sich zumeist damit, die grundlegenden Eigenschaften der Beschleunigung durch die Einzeit-Verteilung oder durch Korrelationsfunktionen zu beschreiben. Dabei steht natürlich wieder die Frage im Raum, ob es, wie im Fall für die Eulerschen Geschwindigkeitsinkremente, eine Möglichkeit gibt, die M -Zeiten-Verteilung in ein Produkt aus niederdimensionalen Verteilungen zu zerlegen. Wäre dies der Fall, so wäre eine vollständige Beschreibung der Einteilchen-Statistik auf Basis dieser Verteilungsfunktionen möglich.

Das Ziel dieses Kapitels ist, genau dieser Frage ein Stück weit auf den Grund zu gehen. Dazu werden neben der Verteilung $f(a_i)$ und der Korrelationsfunktion $C_{a_i}(\tau)$ auch die Zwei- und Dreizeit-Verteilungen $f(a_i^1, a_i^2)$ und $f(a_i^1, a_i^2, a_i^3)$ für eine Beschleunigungskomponente a_i genauer untersucht. Im ersten Abschnitt liegt das Augenmerk auf der Einpunkt-Verteilung $f(a_i)$. Sie wird in Abschnitt 9.1 gesondert behandelt, da sie, wie in Abschnitt 4.1.2 erwähnt, sowohl im Lagrangebild als auch im Eulerbild gleich ist. Neben der Charakterisierung der Korrelationsfunktionen steht im zweiten Abschnitt die Untersuchung der Markoveigenschaften der Beschleunigung im Mittelpunkt. Da bis zu diesem Punkt die Beschleunigung als eindimensionale Größe betrachtet wird, widmet sich der dritte Abschnitt einigen Aspekten, die mit der Tatsache verknüpft sind, dass die Beschleunigung vektoriellen Charakter besitzt. In allen Fällen werden die Größen sowohl für drei als auch für zwei Dimensionen betrachtet.

9.1 Die Verteilungsfunktion

Die einfachste Verteilungsfunktion, mit der die turbulente Beschleunigung charakterisiert werden kann, ist die Einpunkt-Einzeit-Verteilung $f(a_i)$ für eine Komponente des Beschleunigungsvektors \mathbf{a} mit $i = x, y$ im zweidimensionalen und $i = x, y, z$ im

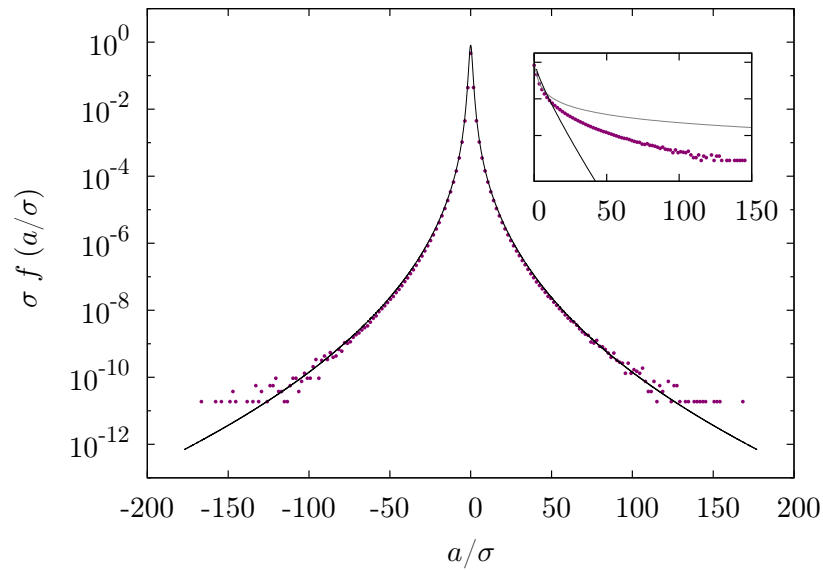


Abbildung 9.1 Normierte Verteilungsfunktion der Beschleunigung (Punkte) in dreidimensionaler Turbulenz (Simulation `sim3d1024`). Zum Vergleich ist die Funktion $f(a) = c \exp[-a^2/((1 + |(b/c) \cdot a|^d)c^2)]$ [LVC⁺01] mit $c=0.5$, $b=0.4425$, $d=1.63$ und $c=0.85$ (Linie) eingezeichnet. Das Inset zeigt den rechten Flügel der Verteilung zusammen mit $g(a) = 0.24/(x^3+0.5)$ (graue Linie) und der K41-Voraussage (schwarze Linie, siehe Gleichung (9.3)). Deutlich zu sehen ist, dass der Flügel wesentlich schneller als $\sim 1/x^3$ und wesentlich langsamer als die Vorhersage der K41-Theorie Gleichung (9.3) abfällt.

dreidimensionalen Fall. Aufgrund der Isotropie sind die Verteilungsfunktionen für alle Komponenten gleich. Daher werden zur Bestimmung der Verteilungsfunktion alle Komponenten benutzt, und die Beschleunigungsverteilung wird im Folgenden mit $f(a)$ bezeichnet.

9.1.1 Dreidimensionale Turbulenz

Für den Fall dreidimensionaler Turbulenz war die Beschleunigungsverteilung $f(a)$ in den letzten Jahren Gegenstand umfangreicher experimenteller [VSB98, LVC⁺01] und numerischer [BBC⁺04b] Untersuchungen. Während die Bestimmung der Beschleunigungsverteilung in der Numerik prinzipiell kein Problem darstellt, ist die experimentelle Bestimmung eine große Herausforderung. Experimentelle Ergebnisse zur Beschleunigungsverteilung wurden erstmals in [VSB98] vorgestellt.

Abbildung 9.1 zeigt eine halblogarithmische Darstellung der auf Standardabweichung Eins normierten Beschleunigungsverteilung. Die Daten stammen aus der Si-

mulation `sim3d1024`. Auffällig sind die breiten Flügel der Verteilung, die sich bei diesem Datensatz bis zu Ereignissen, die 80mal der Standardabweichung entsprechen, erstrecken. Dies steht im starken Gegensatz zum nahe gaußischen Charakter der Geschwindigkeitsverteilung. Bei einer Gaußverteilung würde einem Ereignis, das 10mal der Standardabweichung entspricht, eine Wahrscheinlichkeit von ca. $7.7 \cdot 10^{-23}$ zugeordnet. Bei der Beschleunigungsverteilung hat ein solches Ereignis einen Wert von ca. $8 \cdot 10^{-5}$.

Wie im vorherigen Kapitel erwähnt, hängt die Form der Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeiten stark von der Art und Weise ab, wie die Turbulenz auf großen Skalen getrieben wird. Im Gegensatz dazu gilt dies für die Form der Beschleunigungsverteilung nicht. Unabhängig vom Antrieb zeigt sie immer im Rahmen der Genauigkeit der Schätzung die gleiche Form. Dies deutet darauf hin, dass zumindest für die Beschleunigung die Annahme, dass die Turbulenz zu kleinen Skalen hin unabhängig von den Strukturen auf den Antriebsskalen und damit universell wird, sinnvoll ist. Desweiteren scheint die funktionale Form der normierten Verteilungsfunktion nicht wesentlich von der Reynoldszahl abzuhängen [LVC⁺01].

Neben der Frage nach der Universalität interessiert auch, zu welcher Klasse von Verteilungen $f(a)$ gehört, d. h. ob sie unter vielfacher Faltung mit sich selbst gegen eine Gaußverteilung oder eine andere stabile Verteilung konvergiert. Damit Ersteres der Fall ist, muss nach dem zentralen Grenzwertsatz die Varianz der Verteilung existieren. Da die Verteilungsfunktion aus einer endlichen Datenmenge geschätzt wurde, ist die Varianz auf jeden Fall endlich und damit existent. Dies ist natürlich auch die Voraussetzung für die Normierung auf die Standardabweichung. Die Frage bezieht sich daher eher auf den funktionalen Verlauf der Flügel und ob diese schneller als $\sim 1/x^3$ abfallen, da dies Voraussetzung für die Existenz der Varianz ist (siehe Gleichung (3.28) und nachfolgenden Text). Abbildung 9.1 zeigt deutlich, dass die Flügel schnell genug abfallen und die Verteilungsfunktion damit prinzipiell in die Klasse der Verteilungen gehört, die im Sinne des zentralen Grenzwertsatz gegen eine Gaußverteilung konvergieren.

9.1.2 Zweidimensionale Turbulenz

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall gibt es für die Beschleunigungsverteilung in der inversen Energiekaskade in getriebener zweidimensionaler Turbulenz bisher weder experimentelle noch numerische Ergebnisse. Bevor die Beschleunigungsverteilungen der beiden Simulationen der inversen Kaskade vorgestellt werden, wird noch auf die Frage eingegangen, was man im Rahmen der K41-Theorie für die Beschleunigungsverteilung erwarten kann.

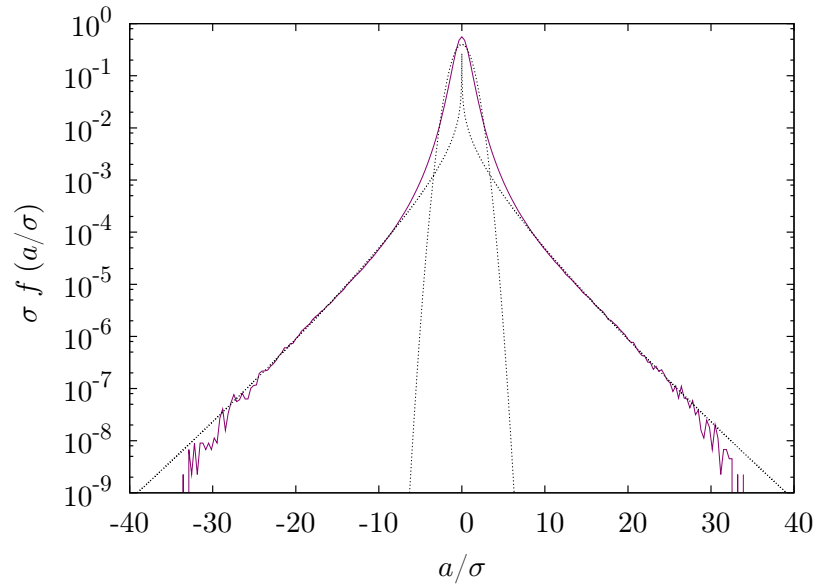


Abbildung 9.2 Darstellung der aus `sim2d1024gaussA` bestimmten Beschleunigungsverteilung. Zusätzlich sind noch die K41-Vorhersage und eine Gaußverteilung eingezeichnet (jeweils schwarze gestrichelte Linien).

K41-Abschätzung

In Kapitel 5 und 6 wurde gezeigt, dass die Eulersche Geschwindigkeitsstatistik in der inversen Kaskade im Gegensatz zur dreidimensionalen Turbulenz näherungsweise mit den Voraussagen der K41-Theorie in Einklang ist. Da die Beschleunigungsverteilung nach Gleichung (4.9) keinen Unterschied zwischen Eulerscher und Lagrangescher Darstellung macht, gibt es somit die begründete Vermutung, dass, wenn die K41-Theorie das Eulersche Geschwindigkeitsfeld relativ gut beschreibt, sie auch in der Lage ist, die Beschleunigungsverteilung vorherzusagen. An dieser Stelle soll daher kurz untersucht werden, welche Voraussagen die Dimensionsanalyse für die Beschleunigung macht.

Der einfachste Weg ist die von Heisenberg und Yaglom (siehe [MY75]), aufbauend auf der K41-Theorie, hergeleitete Beziehung zwischen der Varianz der Beschleunigung $\langle a^2 \rangle$ und der Standardabweichung der Geschwindigkeit $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ des turbulenten Feldes,

$$\langle a^2 \rangle \sim \left[\sqrt{\langle v^2 \rangle} \right]^{9/2} \quad (9.1)$$

zu benutzen. Diese Beziehung liefert aus Sicht der Dimensionsanalyse den Zusammen-

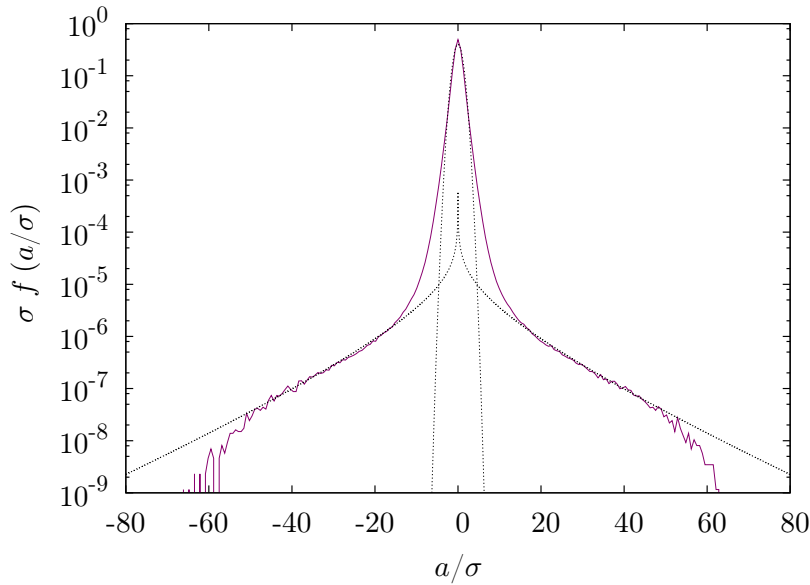


Abbildung 9.3 Darstellung der aus `sim2d1024deltaA` bestimmten Beschleunigungsverteilung. Zusätzlich sind noch die K41-Vorhersage und eine Gaußverteilung eingezeichnet (jeweils schwarze gestrichelte Linien).

hang

$$a \sim v^{9/4} \quad (9.2)$$

zwischen der Beschleunigung a und der Geschwindigkeit v . Da wir für zweidimensionale Turbulenz die Geschwindigkeitsverteilung in sehr guter Näherung als Gaußverteilung $f(v) \sim \exp(-cv^2)$ annehmen können, ergibt sich mittels Variablentransformation (3.6) der Zusammenhang

$$f(a) \sim a^{-5/9} \exp(-ca^{8/9}). \quad (9.3)$$

Eine weitere Herleitung dieses Zusammenhanges findet man in [BBC⁺04a]. Diese Vorhersage kann nur für die Flügel der Verteilung gelten, da sie für $a \rightarrow 0$ divergiert. Dennoch kann die Verteilungsfunktion (9.3) normiert werden. Als Normierungskonstante erhält man $N = 8\sqrt{c}/(18\sqrt{\pi})$.

Die Verteilungsfunktionen

Die zur Simulation `sim2d1024gaussA` gehörende Beschleunigungsverteilung ist in Abbildung 9.2 zu sehen. Sie ist wiederum auf Standardabweichung Eins normiert. Die wichtigste Beobachtung ist, dass sie keine Gaußverteilung ist. Die Verteilungsfunktion

kann grob in drei Bereiche eingeteilt werden. Das Zentrum mit $|a| < 5\sigma$ ist annähernd gaußisch. Daran schließt sich ein Bereich an, in dem die Verteilungsfunktion breite Flügel besitzt. Der funktionale Verlauf ist hier im Bereich $10\sigma < |a| < 25\sigma$ mit der Voraussage der K41-Theorie (Gleichung (9.3)) kompatibel. Noch weiter außen besitzt die Verteilungsfunktion die Tendenz, schneller abzufallen als durch Gleichung (9.3) vorgegeben.

Auch für die Simulation `sim2d1024deltaA` (siehe Abb. 9.3) erhält man eine Verteilungsfunktion, die grob in drei Bereiche eingeteilt werden kann. Im Gegensatz zum vorherigen Fall setzen die mit K41 kompatiblen Flügel ($20\sigma < |a| < 50\sigma$) etwas später an, wodurch der zentrale eher gaußische Teil stärkeres Gewicht bekommt. Im äußeren Bereich fällt die Verteilung wieder wesentlich schneller ab als die K41-Vorhersage. Insgesamt ist die zu `sim2d1024deltaA` gehörige Verteilungsfunktion breiter, sie erstreckt sich bis zu Ereignissen, die dem 60fachen der Standardabweichung entsprechen. Dies liegt an der wesentlich höheren Gesamtenergie bei dieser Simulation.

Die zentralen Erkenntnisse bei der Betrachtung von $f(a)$ sind zum einen, dass die Verteilungsfunktionen beide keine Gaußverteilungen sind. Diese Beobachtung stellt jedoch keinerlei Widerspruch zum gaußischen Charakter der Geschwindigkeitsstatistik und zur K41-Theorie dar. Zum anderen ist der qualitative Verlauf der Verteilungsfunktion für die beiden sehr unterschiedlichen Simulationstypen ähnlich. Diese beiden Fakten zusammen sprechen dafür, dass das nichtgaußische Verhalten kein Artefakt des Treibers ist, sondern durch die Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung bestimmt wird. Dies wird noch klarer, wenn man zur Kenntnis nimmt, dass in [HS93] gezeigt wurde, dass schon Felder mit gaußverteilter Geschwindigkeitsstatistik, bei denen nur das Spektrum proportional zu $k^{-5/3}$ vorgegeben wurde, zu Verteilungsfunktionen des Druckgradienten führen, die exponentielle Flügel besitzen. Die Tatsache, dass bei den hier gemachten Simulationen die Struktur des Feldes nicht nur durch das Spektrum und damit die zweite Strukturfunktion, sondern auch durch alle höheren Strukturfunktionen festgelegt ist, ist vermutlich der Grund, warum die Beschleunigungsverteilungen hier noch stärkere Flügel haben. Es wird sich zeigen, dass dieser Umstand wichtig für die Interpretation der Ergebnisse von Kapitel 10 ist.

Es stellt sich die Frage, woher die Unterteilung der Verteilungsfunktion in drei Bereiche kommt. An dieser Stelle kann dazu nur gesagt werden, dass die Änderung des Treibers, hauptsächlich zu einer Veränderung des Zentrums der Verteilung führt, während eine Veränderung des auf großen Skalen wirkenden Dissipationsterms hauptsächlich zu einem veränderten Abknicken der Flügel bei großen Beschleunigungen führt. Insgesamt legt dies die Vermutung nahe, dass das Abweichen der Beschleunigungsverteilung von der K41-Voraussage (9.3) und damit ihre Aufteilung in drei Bereiche durch die Bergrenzung des Inertialbereiches durch die integrale Länge und den Antrieb verursacht wird.

9.2 Eindimensionale Analyse

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Beschleunigungsverteilung $f(a)$ im Mittelpunkt stand, widmet sich dieser Abschnitt der Untersuchung der Zwei- bzw. Dreizeit-Verteilung¹ $f(a_1, a_2)$ bzw. $f(a_1, a_2, a_3)$. Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird wiederum nur eine Komponente des Beschleunigungsvektors betrachtet. Zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte sind dabei immer durch das Zeitintervall τ getrennt, es gilt also $a_3 = a(t)$, $a_2 = a(t + \tau)$ und $a_1 = a(t + 2\tau)$.

9.2.1 Korrelationsfunktionen

Wie in Kapitel 3 beschrieben, sind Korrelationsfunktionen ein Maß für die statistische Abhängigkeit der in die Korrelationsfunktion eingehenden Variablen. An dieser Stelle werden die Korrelationsfunktionen

$$C_a^n(\tau) = \frac{\langle a^n(t)a^n(t + \tau) \rangle - \langle a^n(t) \rangle \langle a^n(t + \tau) \rangle}{\langle a^{2n}(t) \rangle - \langle a^n(t) \rangle^2} \quad (9.4)$$

der Ordnung $n = 1, 2$ betrachtet. Wie bei der Bestimmung der Geschwindigkeitsautokorrelation kann auch hier aufgrund der Isotropie zur Schätzung der Erwartungswerte über alle Beschleunigungskomponenten und aufgrund der Stationarität über alle Zeiten gemittelt werden.

Dreidimensionale Turbulenz

Wie die Beschleunigungsverteilung, so war auch die Korrelationsfunktion der Beschleunigung in der Vergangenheit Gegenstand intensiver numerischer [Yeu97, YP89, MLP04] und experimenteller Untersuchungen [MLP04, MCB04]. Abbildung 9.4 zeigt die Korrelationsfunktionen $C_a^1(\tau)$ und $C_a^2(\tau)$ für `sim3d1024`. Wie erwartet, besitzt die einfache Korrelationsfunktion einen Unterschwinger. Die Fläche unter der Kurve ist im Rahmen der numerischen Genauigkeit gleich Null. Aufgrund der Stationarität der Simulation war dieses Verhalten nach Gleichung (3.82) zu erwarten². Die Funktion $C_a^2(\tau)$ fällt anfangs schneller als $C_a^1(\tau)$ ab, schneidet sie aber dann bei $\tau \sim 0.05T$ und konvergiert dann langsam gegen Null. Diese Beobachtungen stehen alle im Einklang mit den Ergebnissen der Literatur.

Um das Langzeitverhalten der Korrelationen genauer zu studieren, sind in Abbildung 9.5 die Funktionen $C_a^1(\tau)$ und $C_a^2(\tau)$ in einer doppelt- bzw. halblogarithmischen

¹Da in den nachfolgenden Kapiteln nur Einpunkt-Statistiken untersucht werden, wird der Index für die Zeit ab jetzt unten an die Buchstaben geschrieben, um eine Verwechslung mit Potenzen zu vermeiden.

²Differenziert man die in Abbildung 8.2 zu sehende Geschwindigkeitsautokorrelation numerisch zweimal und versieht diese Funktion mit einem negativen Vorzeichen, so liegt sie genau auf der in Abbildung 9.4 zu sehenden Korrelationsfunktion $C_a^1(\tau)$.

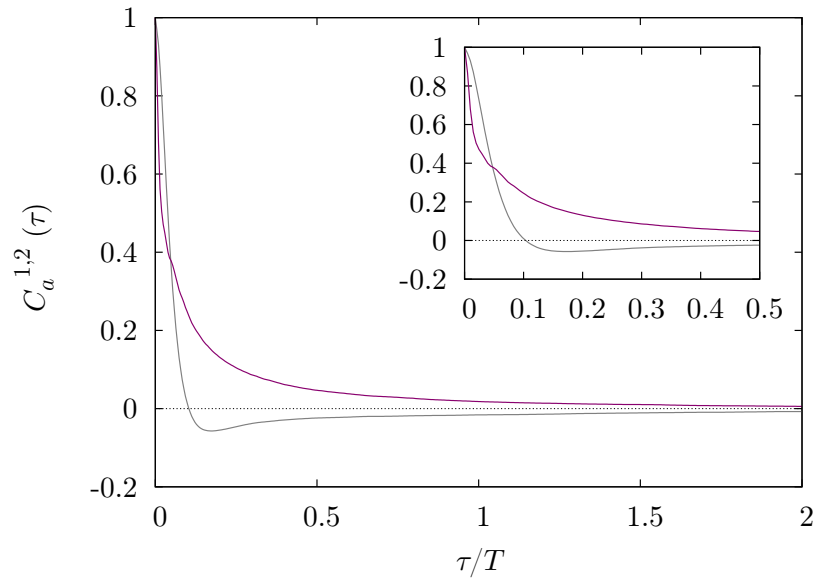


Abbildung 9.4 Darstellung der Korrelationsfunktionen $C_a(\tau)$ (graue Linie) und $C_a^2(\tau)$ (violette Linie). Die Daten sind der Simulation `sim3d1024` entnommen. Das Inset zeigt eine vergrößerte Darstellung des vorderen Bereiches der Korrelationsfunktionen.

Darstellung zu sehen. Bei $C_a^1(\tau)$ gibt es einen kurzen Bereich, der nicht exponentiell zerfällt. Ob dies auf einen Bereich hinweist, in dem die Korrelationsfunktion einem Potenzgesetz folgt, oder ob dieser Bereich nur zwischen dem Minimum und dem Zerfall für $\tau > 3T$ interpoliert, können wahrscheinlich nur Simulationen mit einer wesentlich höheren Reynoldszahl und damit einem wesentlich größeren Verhältnis zwischen der Kolmogorovzeit τ_η bzw. der Taylorzeit τ_λ und der integralen Zeit T zeigen. Dies wäre eine interessante Information für die Modellierung des Beschleunigungsprozesses. Zumindest wird an diesem Ergebnis deutlich, dass die Korrelationsfunktion nach dem Durchschreiten des Minimums nicht einfach exponentiell zerfällt.

Die Korrelation der Quadrate zeigt deutlich zwei verschiedene Bereiche. Zunächst zerfällt sie sehr schnell, bevor sie dann ab etwa $\tau > T$ wesentlich langsamer kleiner wird und in recht guter Näherung exponentiell verläuft.

Auf den ersten Blick scheint das Verhalten der beiden betrachteten Korrelationsfunktionen dem zu ähneln, was man besonders in der Literatur über Finanzdaten als *Volatility Clustering* bezeichnet [PB00]. Dieser Begriff steht für das Phänomen, dass für bestimmte Zeitreihen die normale Korrelationsfunktion sehr schnell verschwindet, während die Korrelation des Quadrates oder des Betrages der Größe sehr langlebig ist. Anschaulich wird dieses Phänomen dadurch erklärt, dass es Zeitrei-

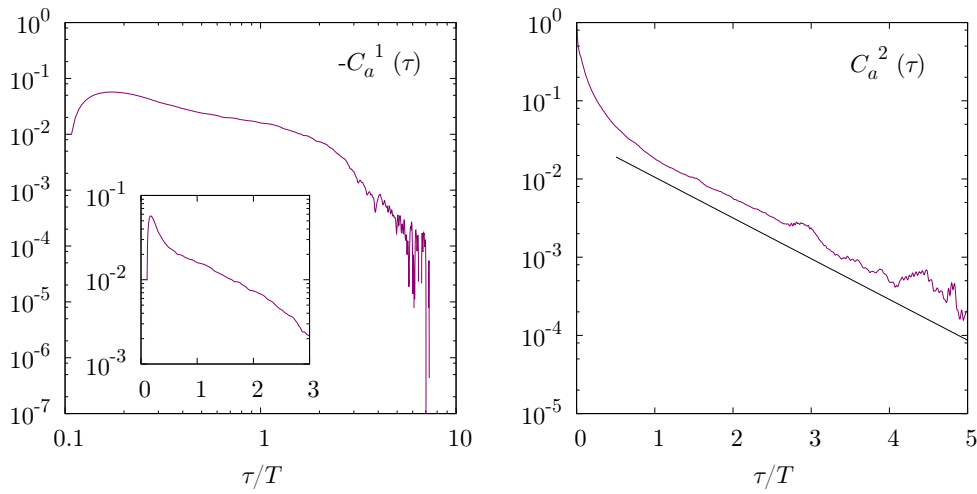


Abbildung 9.5 Links: Doppeltlogarithmische Darstellung von $-C_a^1(\tau)$. Das Minimum (in dieser Darstellung das Maximum) befindet sich bei $\tau \approx 0.17T$. Nach dem Verlassen des Minimums wird die Amplitude der Korrelation schnell kleiner, biegt jedoch dann bei $\tau \approx 0.4T$ in einen Bereich mit geringerer Steigung ab. Danach zerfällt die Amplitude wieder schneller. Im Inset ist ein Ausschnitt der Korrelationsfunktion in halblogarithmischer Darstellung zu sehen. Rechts: Der Zerfall von $C_a^2(\tau)$ zeigt zwei deutlich verschiedene Bereiche. Ab ca. $\tau = 3T$ fällt die Korrelation exponentiell ab. Die gerade Linie entspricht der Funktion $0.045 \exp(-0.06\tau)$.

hen gibt, in denen das Vorzeichen der Observable schnell fluktuiert, während ihre Amplitude wesentlich langsamer fluktuiert. Ersteres führt zum schnellen Zerfall der Korrelation, während sich der zweite Effekt in der Korrelation der Quadrate oder Beträge niederschlägt. Die Amplitude von $C_a^1(\tau)$ zerfällt zwar schnell, doch nach dem Unterschwinger liegen beide Korrelationsfunktionen in der gleichen Größenordnung. Es kann also an dieser Stelle nicht eindeutig entschieden werden, ob das Volatility Clustering hier auftritt oder nicht.

Zweidimensionale Turbulenz

In Abbildung 9.6 sind die Korrelationsfunktionen $C_a^1(\tau)$ und $C_a^2(\tau)$ für die Simulation `sim2d1024gaussA` zu sehen. Erstere verhält sich qualitativ sehr ähnlich zu ihrem dreidimensionalen Gegenstück in Abbildung 9.4. Die Korrelationsfunktion fällt zunächst wieder sehr schnell ab und kreuzt bei $\tau \approx 0.15T$ die Nulllinie. Darauf folgt der typische Unterschwinger und eine Relaxation der Korrelationsfunktion zu Null innerhalb von zwei bis drei integralen Zeitskalen. Auffällig ist, dass der Unterschwinger von $C_a^1(\tau)$ in zwei Dimensionen stärker ist. Die Korrelationsfunktion der Quadrate

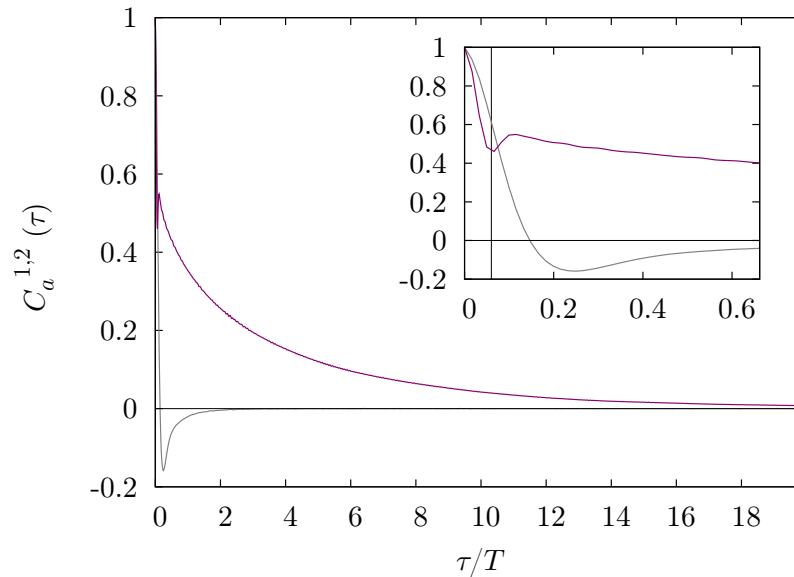


Abbildung 9.6 Darstellung der Korrelationsfunktionen $C_a^1(\tau)$ (graue Linie) und $C_a^2(\tau)$ (violette Linie). Die Daten sind der Simulation `sim2d1024gaussA` entnommen.

fällt, ähnlich wie im dreidimensionalen Fall, zunächst schneller und dann wieder wesentlich langsamer als $C_a^1(\tau)$ ab. Hier fallen zwei Besonderheiten auf. Während im dreidimensionalen Fall die Korrelationsfunktion der Quadrate auf der gleichen Zeitskala wie $C_a^1(\tau)$ zu Null relaxierte, so braucht sie dafür im zweidimensionalen Fall ungefähr zwanzig integrale Zeitskalen. Dies ist schon eher mit dem im vorherigen Abschnitt angesprochenen Volatility Clustering zu vergleichen. Die zweite Besonderheit ist im Inset von Abbildung 9.6 zu sehen. Die Funktion $C_a^2(\tau)$ besitzt bei $\tau \approx 0.07T$ ein lokales Minimum. Aufgrund der großen Datenmenge, die zur Schätzung der Korrelationsfunktionen verwendet wurde, und der damit einhergehenden Glattheit der Funktionen scheint dieses lokale Minimum kein durch eine zu geringe Konvergenz hervorgerufenens Artefakt zu sein. Sowohl für die extrem lange Korrelation der Quadrate der Beschleunigung als auch für das lokale Minimum in der Korrelationsfunktion konnte bis zum jetzigen Zeitpunkt noch keine zufriedenstellende Erklärung gefunden werden.

In Abbildung 9.7 sind die Korrelationsfunktionen analog zu Abbildung 9.5 noch einmal etwas anders dargestellt, um ihr Langzeitverhalten zu studieren. Bei der Funktion $C_a^1(\tau)$ stellt sich wieder die Frage, ob der Zerfall der Korrelation einem Potenzgesetz folgt. Auch hier kann keine eindeutige Antwort gegeben werden.

Hingegen fällt bei der Korrelation der Quadrate auf, dass der Zerfall diesmal nicht

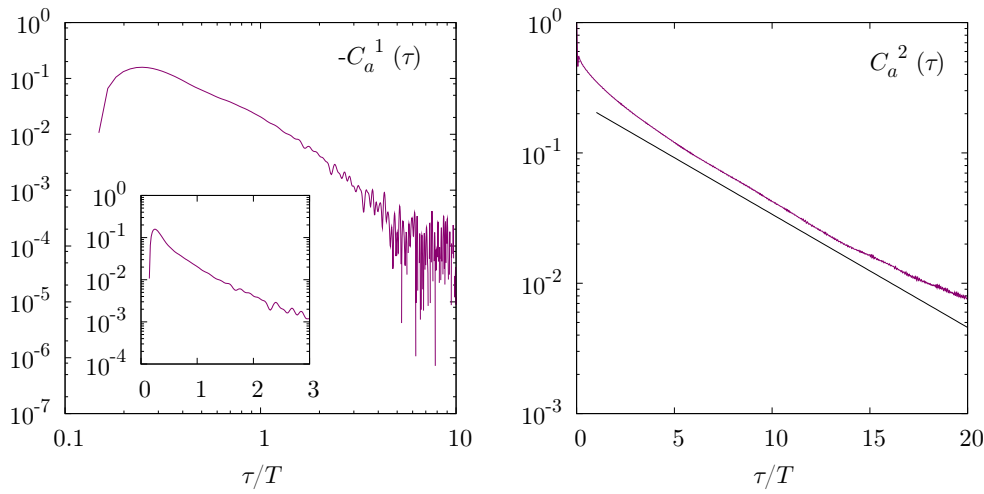


Abbildung 9.7 Links: Doppeltlogarithmische Darstellung von $-C_a^1(\tau)$. Das Minimum (in dieser Darstellung das Maximum) befindet sich bei $\tau \approx 0.25$. Rechts: Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall kann nicht gesagt werden, ob die hier dargestellte Korrelationsfunktion $C_a^2(\tau)$ für große Zeiten exponentiell zerfällt. Die gerade Linie entspricht der Funktion $0.25 \exp(-0.2\tau)$.

exponentiell ist. Die Abweichungen für $\tau > 15T$ gegenüber der zum Vergleich eingezeichneten Exponentialfunktion sind keine Artefakte aufgrund einer zu geringen Datenmenge. Eine Frage für zukünftige Untersuchungen wäre, ob sich der Abfall der Korrelationsfunktionen bei einem größeren Verhältnis von T zu τ_λ eher in Richtung eines Potenzgesetzes entwickelt.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das grobe Verhalten der Beschleunigungskorrelation in drei- und zweidimensionaler Turbulenz recht ähnlich ist. In beiden Fällen findet man eine Korrelationsfunktion mit einem Unterschwinger und die Korrelationsfunktion der Quadrate besteht aus einem schnell und einem langsam abfallenden Teil. Die beiden markantesten Unterschiede sind das Auftreten des lokalen Minimums und die extrem lange Korrelation bei $C_a^2(\tau)$ im Falle der zweidimensionalen Turbulenz. Was genau die Ursache für dieses Verhalten ist, bleibt zu klären.

9.2.2 Test auf Markoveigenschaften

In den letzten Abschnitten wurden die statistischen Eigenschaften der Beschleunigung entlang einer Trajektorie durch die Verteilungsfunktion $f(a)$ und die Zweizeit-Korrelationsfunktionen charakterisiert. Der nächste Schritt besteht nun darin zu testen, ob die M -Zeit-Verteilung in Zweizeit-Verteilungen zerfällt, also die Markovei-

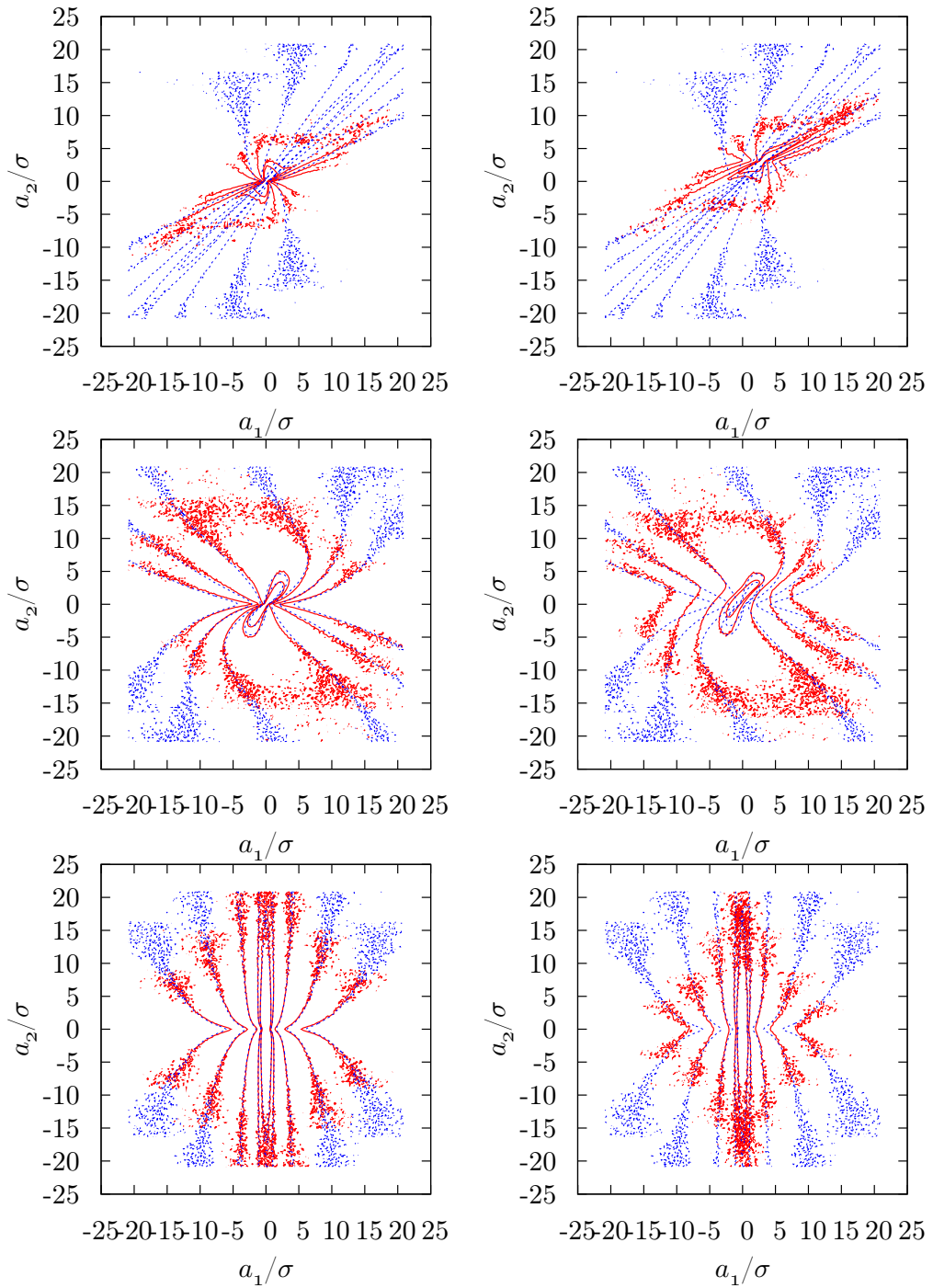


Abbildung 9.8 Vergleich der Konturliniendiagramme von $p(a_1|a_2)$ (blau) mit $p(a_1|a_2, a_3 = 0)$ (rot, linke Spalte) und $p(a_1|a_2, a_3 = 3\sigma)$ (rot, rechte Spalte) mit $\tau \approx 0.1\tau_\eta, \tau_\eta, 10\tau_\eta$ (von oben nach unten) für `sim3d1024`.

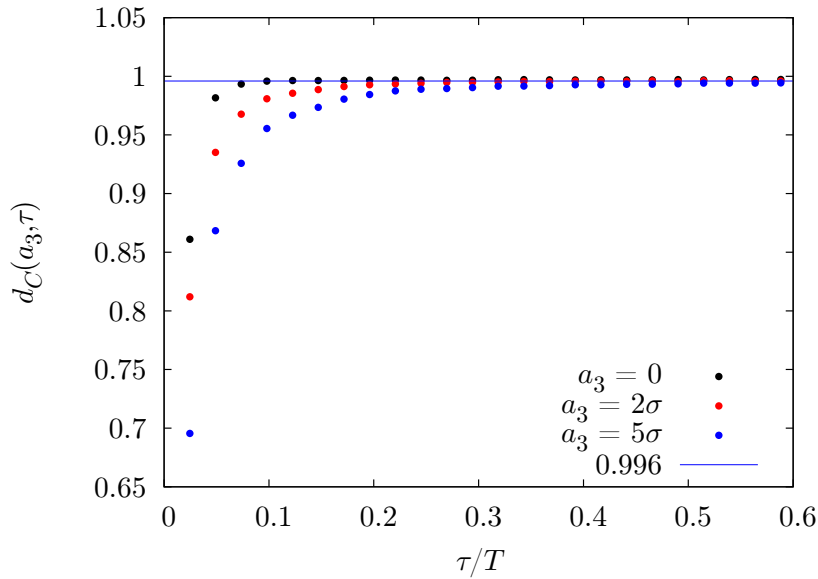


Abbildung 9.9 Verlauf des Korrelationsmaßes $d_C(a_3, \tau)$ für verschiedene a_3 für `sim3d1024`.

genschaft besitzt. Die Überprüfung der Markoveigenschaft funktioniert völlig analog zum Vorgehen in Abschnitt 6.3. Damit sie erfüllt ist, muss hier die Bedingung

$$p(a_1|a_2, a_3) = p(a_1|a_2) \quad (9.5)$$

auf ihre Gültigkeit überprüft werden. Dies geschieht wieder durch den Vergleich der Kontur- bzw. Höhenliniendiagramme der zweifach und der einfach bedingten Verteilungen für verschiedene Zeitdifferenzen τ . Anschließend werden die Beobachtungen mit Hilfe des in Gleichung (4.21) definierten Maßes quantifiziert. Die Untersuchungen werden nacheinander für drei- und zweidimensionale Turbulenz durchgeführt.

Dreidimensionale Turbulenz

Abbildung 9.8 zeigt die Diagramme für drei verschiedene Zeitdifferenzen und zwei verschiedene Bedingungen a_3 . Für $\tau = 0.1\tau_\eta$ und $a_3 = 0$ ist keinerlei Übereinstimmung zwischen den Höhenlinien der einfach und der zweifach bedingten Verteilung zu sehen. Bei $\tau = \tau_\eta$ und $a_3 = 0$ sind noch feine Unterschiede zu erkennen, die jedoch bis $\tau = 10\tau_\eta$ völlig verschwunden sind. Es deutet sich also an, dass die Relation (9.5) für die Bedingung $a_3 = 0$ ab einem $\tau > \tau_\eta$ erfüllt ist. Für $a_3 = 3\sigma_a$ sieht die Situation anders aus. In diesem Fall sind für $\tau = \tau_\eta$ die Unterschiede noch recht groß. Selbst bei $\tau = 10\tau_\eta$ ist Gleichung (9.5) noch nicht voll erfüllt. Die Überprüfung der

Markoveigenschaft für verschiedene a_3 zeigt, je weiter a_3 von Null entfernt ist, desto später ist Relation (9.5) erfüllt.

Abbildung 9.9 zeigt den Verlauf des Korrelationsmaßes für verschiedene Schnitte durch die zweifach bedingte Verteilung $p(a_1|a_2, a_3)$. Abhängig von a_3 sättigt das Maß zu verschiedenen Zeiten bei einem Wert von $d_C \approx 0.995$ und bleibt danach bis auf Fluktuationen konstant. Je weiter entfernt a_3 von Null ist, desto später sättigt das Maß.

Für viel größere Werte als $a_3 = 5\sigma_a$ ist die Überprüfung von (9.5) aufgrund der geringen Datenmenge in den Flügeln der Beschleunigungsverteilung nur noch schwer möglich. Die quantitativen Betrachtungen mittels des Korrelationsmaßes bestätigen aber die beim Vergleich der Höhenliniendiagramme gemachten Beobachtungen. Anschaulich gesprochen scheint es so, dass große Beschleunigungen ein längeres Gedächtnis haben als kleine. Aufgrund der Tatsache, dass in den Flügeln der Verteilung nicht genug Daten vorliegen, kann auch nicht überprüft werden, wie sich dieses Verhalten bei sehr großen Beschleunigungen fortsetzt.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass die Beschleunigung eines Tracers kein Markovprozess ist. Da der Test auf die Markoveigenschaft nicht für beliebig große a_3 durchgeführt werden kann, kann an dieser Stelle auch keine Aussage darüber gemacht werden, ab wann die Markoveigenschaft voll erfüllt ist. Es ist aber davon auszugehen, dass die Beschleunigung eine endliche Markovzeit besitzt³.

Zweidimensionale Turbulenz

Auch für die Beschleunigungsdaten der Simulation `sim2d1024gaussA` wurde der Test auf Markoveigenschaften durchgeführt. In Abbildung 9.10 ist wie in Abbildung 9.8 der Vergleich von zwei verschiedene Schnitten durch $p(a_1|a_2, a_3)$ mit $p(a_1|a_2)$ zu drei verschiedenen Zeiten zu sehen. Für $\tau = 0.05T$ liegen die Höhenliniendiagramme in beiden Fällen nicht übereinander, während bei $\tau = 0.2T$ der Schnitt durch die zweifach bedingte Verteilung bei $a_3 = 0$ zumindest im Zentrum schon gut mit der einfach bedingten Verteilung übereinstimmt. Bei $t = T$ ist für $a_3 = 0$ und $a_3 = 2\sigma$ eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den Höhenliniendiagrammen der einfach und zweifach bedingten Verteilungen gegeben.

Ähnlich wie im dreidimensionalen Fall, so ist auch in zwei Dimensionen die Komponente der Beschleunigung entlang der Bahn kein Markovprozess. Wiederum kann die Eigenschaft beobachtet werden, dass je weiter man von $a_3 = 0$ entfernt ist, desto länger dauert es, bis (9.5) erfüllt ist. Diese Eigenschaft kann wiederum durch das Korrelationsmaß $d_C(a_3, \tau)$ verdeutlicht werden. Abbildung 9.11 zeigt den Verlauf von $d_C(a_3, \tau)$ für verschiedene a_3 . Während das Maß für $a_3 = 0$ schon um $\tau \approx 0.1T$ bei 0.996 sättigt, so ist dies bei $a_3 = 2\sigma$ erst für $\tau > 0.5T$ zu beobachten. Auch in zwei

³Dies könnte mittels der Überprüfung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (3.59) geschehen, war aber im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr möglich.

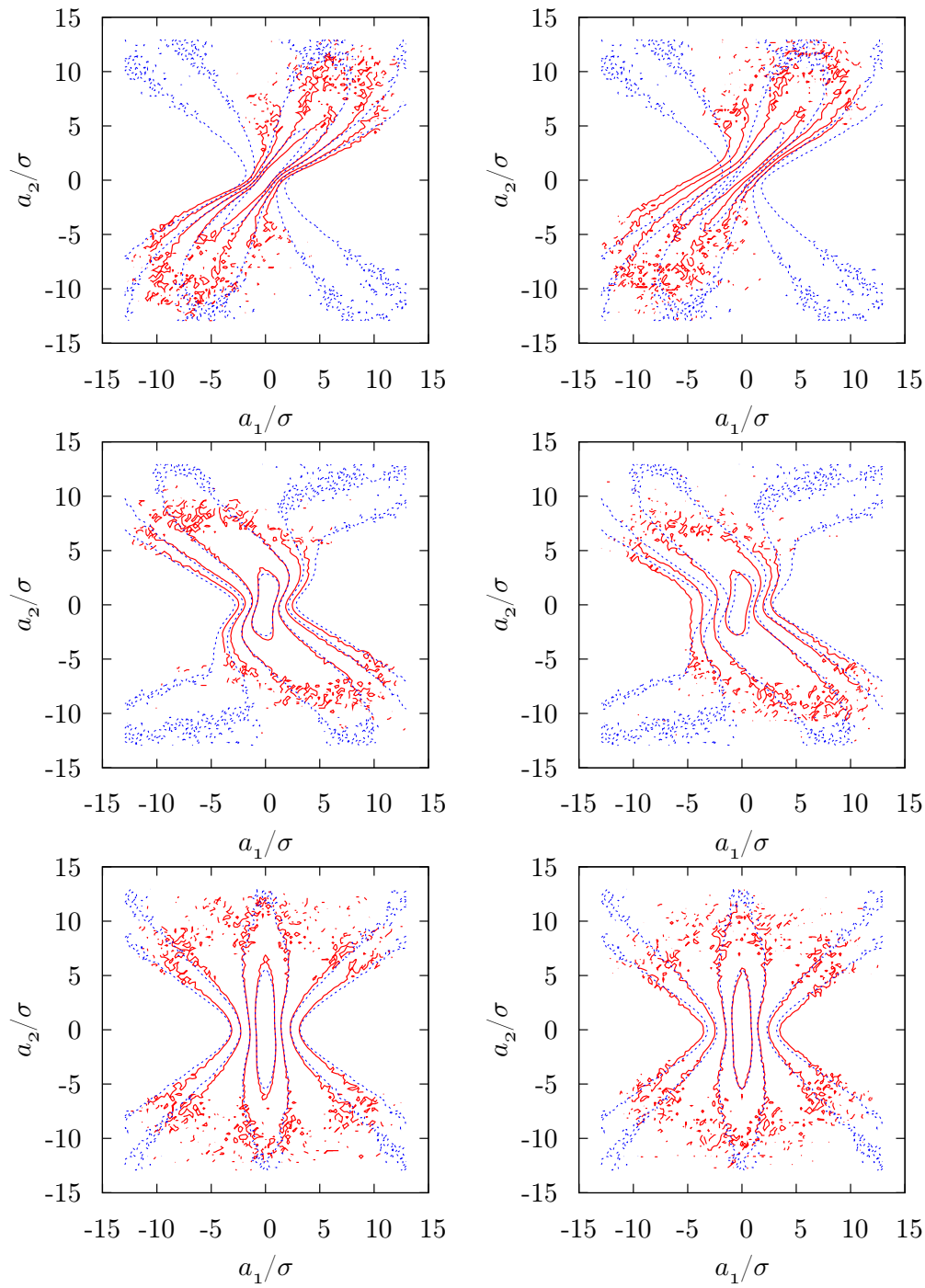


Abbildung 9.10 Vergleich der Konturliniendiagramme von $p(a_1|a_2)$ (blau) mit $p(a_1|a_2, a_3 = 0)$ (rot, linke Spalte) und $p(a_1|a_2, a_3 = 2\sigma)$ (rot, rechte Spalte) mit $\tau \approx 0.05T, 0.2T, T$ (von oben nach unten) für `sim2d1024gaussA`.

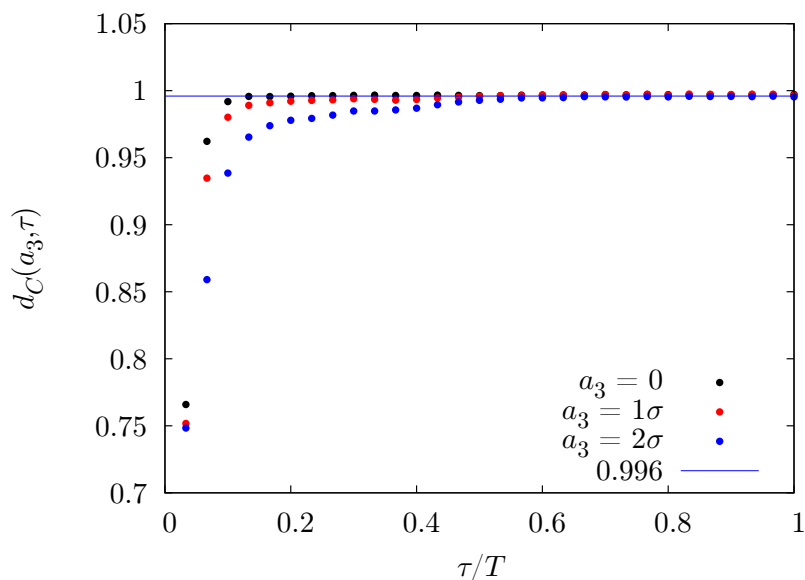


Abbildung 9.11 Verlauf des Korrelationsmaßes $d_C(a_3, \tau)$ für verschiedene a_3 für die Simulation `sim2d1024gaussA`

Dimensionen scheinen große Beschleunigungen ein längeres Gedächtnis zu haben, als kleine.

Da die Auswertung der Daten der Simulation `sim2d1024deltaA` im Sinne des Markovtests prinzipiell die gleichen Ergebnisse liefert, wurde an dieser Stelle auf eine Darstellung dieser Auswertung verzichtet.

Die zentrale Aussage der vorangehenden Untersuchungen ist, dass die Markoveigenschaft der Komponenten der Beschleunigung sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen erst für relativ große τ erfüllt ist. Das bedeutet, dass die Markovzeit, gegenüber der integralen Zeit nicht als klein angenommen werden kann und die Beschleunigung daher als Markovprozess approximiert werden kann. Diese Feststellung ist auch insofern interessant, als dass beispielsweise in [Saw91] behauptet wird, dass jede Beschleunigungskomponente prinzipiell, also für beliebig kleine Zeiten, einem Markovprozess genügt und darauf aufbauend ein Modell für die Einteilchenstatistik entwickelt wird.

9.3 Mehrdimensionale Analyse

In den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels wurden immer die Komponenten der Beschleunigung betrachtet. In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften der Be-

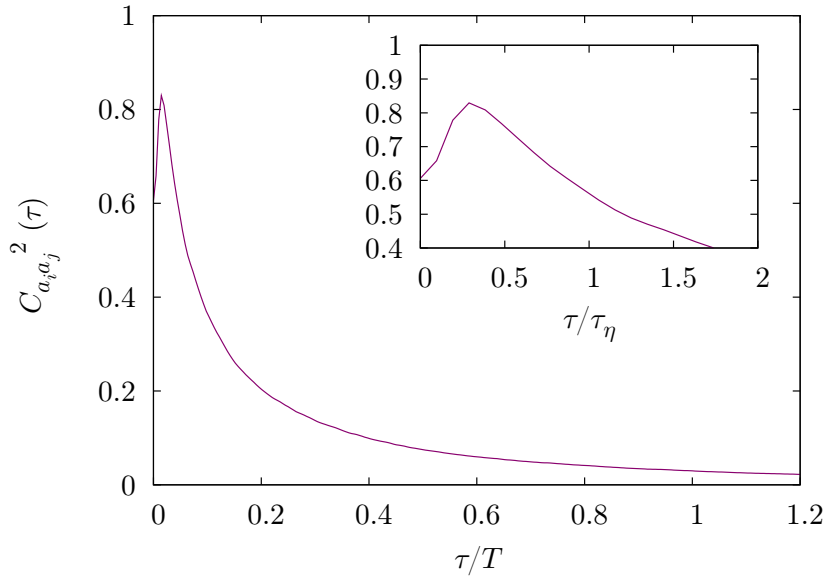


Abbildung 9.12 Darstellung der Kreuzkorrelation (9.6) zwischen den Quadraten der Beschleunigungskomponenten für die Simulation `sim3d1024`. Das Inset zeigt eine Vergrößerung des vorderen Bereiches, um den Anstieg der Korrelation zum Maximum bei $\tau \approx 0.25\tau_\lambda$ deutlich sichtbar zu machen.

schleunigung untersucht werden, die damit zusammenhängen, dass sie eine vektorwertige Größe ist.

9.3.1 Kreuzkorrelationen in zwei und drei Dimensionen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde deutlich, dass weder in zwei- noch in dreidimensionaler Turbulenz die Beschleunigungskomponenten Markoveigenschaften besitzen. Wie im nächsten Kapitel noch gezeigt wird, kann die Kopplung der Komponenten eines vektorwertigen Markovprozesses dazu führen, dass die einzelnen Komponenten keine Markoveigenschaften mehr besitzen. Im Folgenden soll daher untersucht werden, ob es Kreuzkorrelationen zwischen den Komponenten der Beschleunigung gibt und wie sie sich verhalten.

Die Kreuzkorrelation zwischen zwei Beschleunigungskomponenten wird nach (3.47) über

$$C_{a_i a_j}^n(\tau) = \frac{\langle a_i^n(t) a_j^n(t + \tau) \rangle - \langle a_i^n(t) \rangle \langle a_j^n(t + \tau) \rangle}{\sqrt{(\langle a_i^{2n}(t) \rangle - \langle a_i^n(t) \rangle^2)(\langle a_j^{2n}(t) \rangle - \langle a_j^n(t) \rangle^2)}} \quad (9.6)$$

definiert. Die Korrelationsfunktion $C_{a_i a_j}^1(\tau)$ fluktuiert in zwei und drei Dimensionen

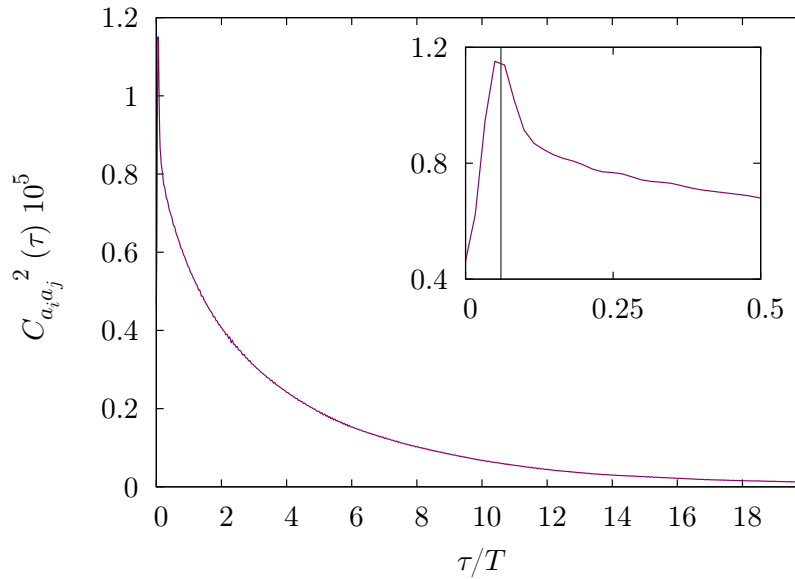


Abbildung 9.13 Darstellung der Kreuzkorrelation (9.6) zwischen den Quadraten der Beschleunigungskomponenten für die Simulation `sim2d1024gaussA`. Das Inset zeigt wiederum eine Vergrößerung des vorderen Bereiches. Zu beachten ist, dass die y -Achse mit 10^5 skaliert wurde.

um Null (hier nicht gezeigt) und wird daher als verschwindend angenommen⁴. Die Komponenten der Beschleunigung können daher als unkorreliert angenommen werden. Für die Quadrate der Komponenten sieht man ein völlig anderes Verhalten. In Abbildung 9.12 ist $C_{a_i a_j}^2(\tau)$ für den dreidimensionalen Fall zu sehen. Zunächst steigt die Kreuzkorrelation bis auf ungefähr den 1.4fachen Wert an, bevor sie dann auf einer ähnlichen Zeitskala wie die Korrelationen in Abbildung 9.4 zerfällt. Das Maximum tritt bei einer Zeitskala unterhalb von τ_η auf. Das hier beschriebene Verhalten wurde ansatzweise schon in [MLP04] für experimentelle Daten beobachtet.

In Abbildung 9.13 ist $C_{a_i a_j}^2(\tau)$ für die Simulation `sim2d1024gaussA` zu sehen. Das qualitative Verhalten ist genau wie im dreidimensionalen Fall. Die Korrelation steigt zunächst an und fällt nach dem Erreichen des Maximum auf der gleichen Zeitskala ab, wie die Autokorrelationsfunktion der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten $C_a^2(\tau)$. Diesmal liegt das Maximum aber mehr als doppelt so hoch über dem Ausgangspunkt. Eine sehr interessante Beobachtung ist, dass im zweidimensionalen Fall das Maximum genau beim lokalen Minimum von $C_a^2(\tau)$ liegt (siehe Abb. 9.6). Der große Unterschied bei den Absolutwerten der Kreuzkorrelationen zwischen zwei

⁴Dies muss so sein, da der Korrelationstensor $C_{ij}(\tau)$ diagonal ist.

und drei Dimensionen kommt daher, dass $\langle a_i^{2n} \rangle$ in zwei Dimensionen zwei Größenordnungen größer ist als in drei Dimensionen.

Insgesamt kann man feststellen, dass die Beschleunigungskomponenten untereinander genauso lange korreliert sind wie mit sich selbst. Dies gilt sowohl für zwei als auch für drei Dimensionen. Die Kreuzkorrelationen spielen damit eine wichtige Rolle für das Verhalten der Teilchen in der Strömung. Über den Grund für das Auftauchen des Maximums kann hier nur spekuliert werden.

10 Geschwindigkeitsinkremente und Intermittenz

Dieses Kapitel widmet sich der Untersuchung der statistischen Eigenschaften der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente. Nach einigen Vorbemerkungen zur Bedeutung der Inkremente und ihrer Verbindung zu den Untersuchungen der letzten zwei Kapitel werden die Inkremente, wie auch schon im Eulerbild geschehen, mittels ihrer Verteilungsfunktionen und den zugehörigen Strukturfunktionen charakterisiert. Im dritten Abschnitt wird der Übergang der Inkrementverteilungen von kleinen zu großen Zeitdifferenzen mit Hilfe der kompensierten Kumulanten betrachtet. Diese Art der Analyse wurde bisher auch für dreidimensionale Turbulenz noch nicht durchgeführt.

10.1 Vorbemerkungen

Die Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente sind als Differenz der Geschwindigkeit eines Tracers zu zwei verschiedenen Zeiten

$$U_i(\mathbf{y}, t, \tau) = v_i(\mathbf{y}, t + \tau) - v_i(\mathbf{y}, t) \quad (10.1)$$

definiert. Man benutzt dabei die auf die Achsen des Koordinatensystems projizierten Geschwindigkeiten v_i mit $i = x, y$ bzw. $i = x, y, z$. Aufgrund der Isotropie wird im Folgenden der Index wieder weggelassen. Während die physikalische Bedeutung der Eulerschen longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente (4.26) durch ihre Verknüpfung zum Energiefluss über die dritte Strukturfunktion gegeben ist, liegt die Bedeutung der Lagrangeschen Inkremente darin begründet, dass sie zwischen der Beschleunigungsverteilung $f(a)$ und der Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ interpolieren. Dies kann man sich schnell anhand der Betrachtung zweier Grenzfälle klar machen.

Vorausgesetzt die Differenzierbarkeit der Geschwindigkeit entlang einer Trajektorie ist gegeben, gehen im Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ die Lagrangeschen Inkremente in die Beschleunigung über, d. h.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{U_i(\mathbf{y}, t, \tau)}{\tau} = A_i(\mathbf{y}, t). \quad (10.2)$$

Für sehr kleine τ sollte die Form der Verteilungsfunktion der Inkremente näherungsweise der der Beschleunigung entsprechen. Im entgegengesetzten Fall, für sehr große

τ , kann man davon ausgehen, dass die Geschwindigkeiten, aus denen das Inkrement gebildet wird, statistisch unabhängig sind. Nach (3.17) entspricht dann die Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeitsdifferenz U_i der Faltung der Verteilungen für $v(\mathbf{y}, t + \tau)$ und $v(\mathbf{y}, t)$. Aufgrund der angenommenen statistischen Symmetrien entsprechen beide Verteilungen der Geschwindigkeitsverteilung aus Kapitel 6 und man erhält als Ergebnis die Faltung von $f(v)$ mit sich selbst:

$$f(u; \tau \gg T_L) = \int dv f(v)f(v - u). \quad (10.3)$$

Geht man davon aus, dass $f(v)$ eine Gaußverteilung ist, dann ergibt Gleichung (10.3) wiederum eine Gaußverteilung.

Bevor die Ergebnisse zur Inkrementstatistik vorgestellt werden, soll noch eine kurze Vorüberlegung eingeschoben werden. Die Geschwindigkeitsinkremente können auch aus der Integration über die Beschleunigung eines Teilchens entlang seines Pfades gewonnen werden. Das Inkrement lässt sich also als

$$U_i(\mathbf{y}, t, \tau) = v_i(\mathbf{y}, t + \tau) - v_i(\mathbf{y}, t) = \int_t^{t+\tau} dt' A_i(\mathbf{y}, t') \quad (10.4)$$

schreiben. Das diskrete Äquivalent zu dieser Gleichung lautet:

$$v_i(\mathbf{y}, t + \tau) - v_i(\mathbf{y}, t) = \sum_{n=1}^{\tau/\Delta t} A_i(\mathbf{y}, t + n\Delta t)\Delta t. \quad (10.5)$$

Dieser Ausdruck führt unweigerlich zu der Frage, ob nicht der zentrale Grenzwertsatz an dieser Stelle eine entscheidende Rolle spielt. Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass die Beschleunigungsverteilung zwar stark von einer Gaußverteilung abweicht, aber im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes klar in ihrem Einzugsbereich liegt. Die Summation in (10.5) sollte somit für große n die Inkrementverteilung und damit auch $f(v)$ in eine Gaußverteilung übergehen lassen. Diese Argumentation wäre auch deshalb sehr interessant, da damit die Frage nach der theoretischen Form von $f(v)$ für den dreidimensionalen Fall eindeutig beantwortet wäre. Das Problem ist aber, dass im vorherigen Kapitel auch gezeigt wurde, dass die Beschleunigung sehr stark korreliert ist. Die Konvergenz im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes kann zwar noch in Anwesenheit exponentiell abklingender Korrelationen gewährleistet sein [Sor04], die Korrelationen der Beschleunigung sind aber komplizierter und ziehen sich bis zur integralen Zeitskala. Auch die Tatsache, dass die Geschwindigkeitsverteilung in drei Dimensionen schwach, aber signifikant, von einer Gaußverteilung abweicht, lässt weiter an der Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes in dieser Situation zweifeln, d. h. an dieser Stelle kann man die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes nicht voraussetzen.

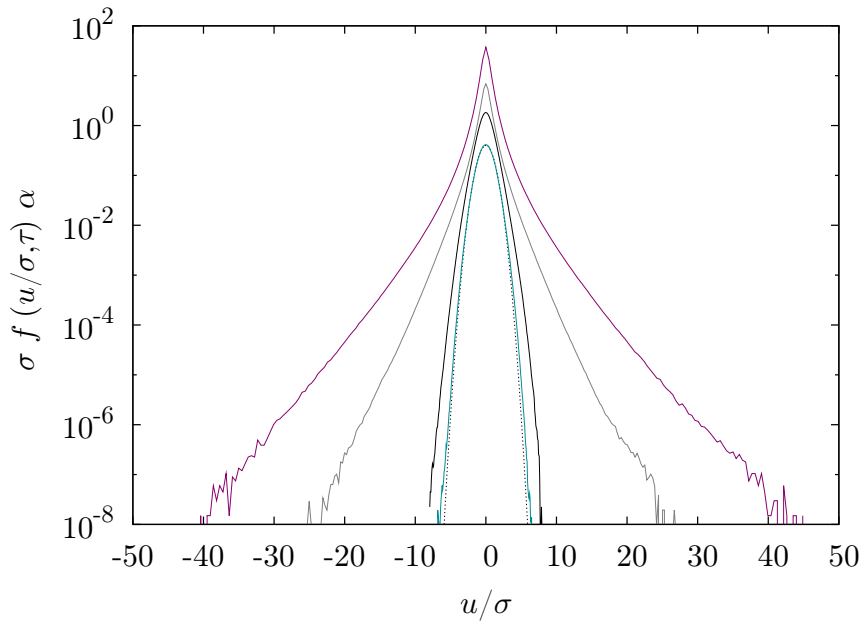


Abbildung 10.1 Verteilungsfunktionen der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente aus Simulation `sim3d1024` für verschiedene Zeitdifferenzen τ . Zur besseren Sichtbarkeit sind die Verteilungsfunktionen durch Multiplikation mit einem Faktor α vertikal verschoben. Von außen nach innen: $\tau = \tau_\eta(\alpha = 50)$, $\tau = \tau_\lambda(\alpha = 10)$, $\tau = T(\alpha = 4)$, $\tau = 3T(\alpha = 1)$. Die gestrichelte schwarze Linie entspricht einer Gaußverteilung.

Für die folgenden Ergebnisse ist die umgekehrte Argumentation interessanter. Die Tatsache, dass die Beschleunigungen lange korreliert sind, verletzt die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes. Daher ist eine schnelle Konvergenz der breitflügeligen Beschleunigungsverteilung hin zu einer Gaußverteilung nicht zu erwarten. Vielmehr ist ein langsamer Übergang zwischen den Verteilungen wahrscheinlich, der bei $\tau \gg T_l$ zum Abschluss kommt. Dies würde aber auch dazu führen, dass in diesem Bereich die Verteilungsfunktionen nicht selbständig wären, das heißt, es müsste Intermittenz im Lagrangebild geben. Diese Argumentationsrichtung wurde schon angewandt, um Lagrangesche Intermittenz in dreidimensionaler Turbulenz zu erklären [MDL⁺02]. Nach dieser Argumentation ist es also wahrscheinlich, auch in zweidimensionaler Turbulenz Intermittenz im Lagrangebild zu finden.

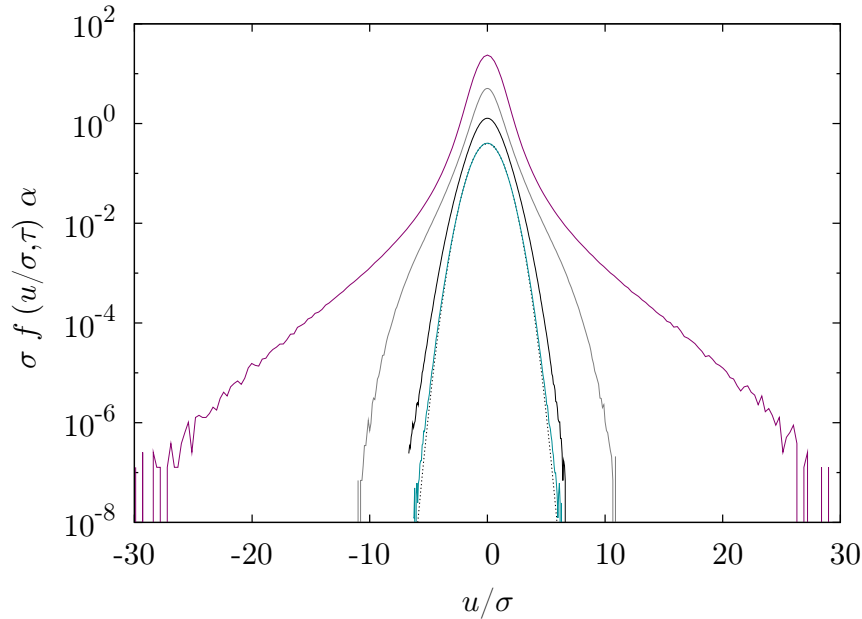


Abbildung 10.2 Verteilungsfunktionen der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente aus `sim2d1024gaussA` für verschiedenen Zeitdifferenzen τ . Zur besseren Sichtbarkeit sind die Verteilungsfunktionen durch Multiplikation mit einem Faktor α vertikal verschoben. Von außen nach innen: $\tau \approx 0.1\tau_\lambda$ ($\alpha = 50$), $\tau = \tau_\lambda$ ($\alpha = 10$), $\tau = T$ ($\alpha = 3$), $\tau = 3T$ ($\alpha = 1$). Die gestrichelte schwarze Linie entspricht einer Gaußverteilung.

10.2 Verteilungsfunktionen

Sowohl die Verteilungsfunktionen als auch die Momente der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente wurden in numerischen Simulationen [BBC⁺05, HGBM07] und Experimenten [MMMP01, MLP04] gut untersucht. Wie im Eulerbild, so sind auch die Verteilungsfunktionen im Lagrangebild nicht selbstständig. Dies ist völlig konsistent mit der oben genannten Tatsache, dass die Inkrementverteilungen den Übergang von einer extrem nichtgaußschen Beschleunigungsverteilung zu einer relativ gaußschen Geschwindigkeitverteilung charakterisieren.

Der Vollständigkeit halber werden in Abbildung 10.1 die auf Standardabweichung Eins normierten Inkrementverteilungen für die Simulation `sim3d1024` gezeigt. Zu sehen ist, wie mit größer werdender Zeitdifferenz die Flügel der Verteilung verschwinden. Mit zunehmender Zeit wird der Konvergenzprozess immer langsamer, auch bei $\tau = T$ ist die Verteilungsfunktion deutlich breiter als eine Gaußverteilung.

Wie bei den Beschleunigungen, so gibt es, im Gegensatz zu drei Dimensionen, im zweidimensionalen Fall keinerlei Ergebnisse zur Statistik der Lagrangeschen Ge-

schwindigkeitsinkremente in der inversen Energiekaskade. Nach den bisherigen Ergebnissen würde man auch hier bezüglich der funktionalen Form der Verteilungsfunktionen einen langsamen Übergang zwischen der Beschleunigungsverteilung und der gaußischen Geschwindigkeitsverteilung erwarten.

Abbildung 10.2 zeigt die Inkrementverteilungen für `sim2d1024gaussA` für vier verschiedene Zeitdifferenzen im Vergleich mit einer Gaußverteilung. Im Prinzip zeigt sich dasselbe Bild wie im dreidimensionalen Fall. Für größer werdende Zeitdifferenzen verliert die Verteilungsfunktion ihre Flügel und konvergiert für $\tau > T$ gegen eine Gaußverteilung. Bei diesem Übergang macht sich die gegenüber dem dreidimensionalen Fall veränderte funktionale Form der Beschleunigungsverteilung bemerkbar. Dies ist auch für die Inkrementverteilungen aus `sim2d1024deltaA` zutreffend (siehe Abb. 10.3).

Zusammenfassend kann man sagen, dass in allen drei Fällen die Inkrementverteilungen bis über die integrale Zeitskala hinaus nicht selbstähnlich sind. Dies steht im Widerspruch zu den in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten Ergebnissen der K41-Theorie für das Lagrangebild. Nach den Ergebnissen bezüglich der Beschleunigungsverteilungen bzw. der Beschleunigungskorrelationen ist dies aber nicht mehr überraschend.

Strukturfunktionen

Um das Verhalten der Verteilungsfunktionen besser zu beschreiben, kann man wie im Eulerbild die Momente der Inkrementverteilungen in Abhängigkeit von der Zeitdifferenz darstellen. Die Strukturfunktionen werden im Lagrangebild durch

$$S_n(\tau) = \langle U_i(\mathbf{y}, t, \tau)^n \rangle = \int du u^n f(u; \tau) \quad (10.6)$$

definiert. Sie werden an dieser Stelle nicht aus den geschätzten Verteilungsfunktionen berechnet, sondern direkt über die Schätzung der Momente nach

$$S_n = \langle [v_i(\mathbf{y}, t + \tau) - v_i(\mathbf{y}, t)]^n \rangle \quad (10.7)$$

gewonnen, wobei über alle Koordinaten und alle Teilchen gemittelt wird. Der Vollständigkeit halber wird zuerst wieder das Ergebnis für dreidimensionale Turbulenz gezeigt. Abbildung 10.4 zeigt die aus `sim3d1024` gewonnenen Lagrangeschen Strukturfunktionen für die Ordnungen $n = 2, 4, 6$. Es ist kein Bereich zu erkennen, in dem die Strukturfunktionen einem Potenzgesetz folgen. Auch für die beiden Simulationen zur zweidimensionalen Turbulenz ist kein Skalierungsverhalten vorhanden, wie in Abbildung 10.5 zu sehen ist. Während dieses Verhalten für dreidimensionale Turbulenz bekannt ist (siehe z. B. [BBC⁺05, HGBM07]), ist es für den zweidimensionalen Fall völlig neu. Es stellt sich nun die folgende Frage: Wenn die Inkrementstatistik nicht selbstähnlich ist, können dann die Strukturfunktionen nicht doch einen Skalenbereich aufweisen?

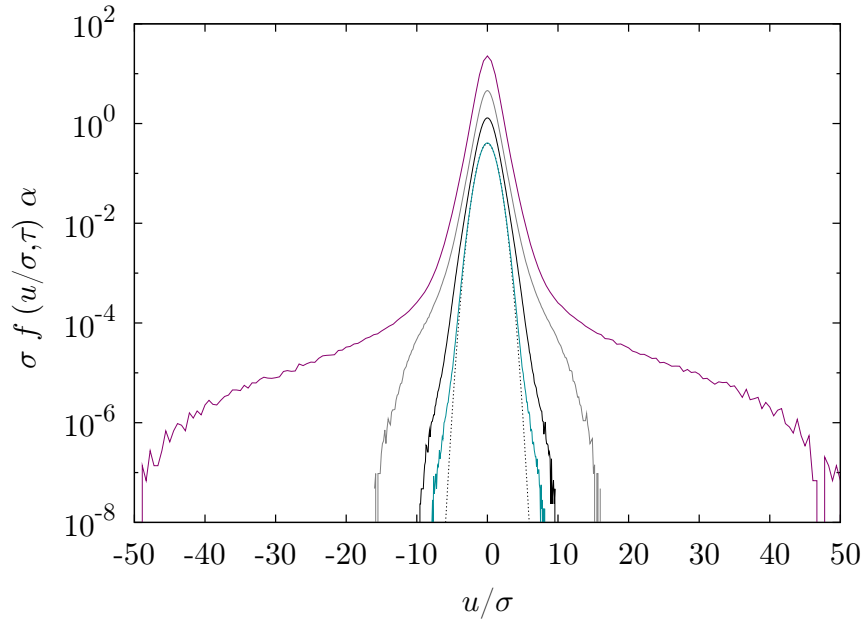


Abbildung 10.3 Verteilungsfunktionen der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente aus `sim2d1024deltaA` für verschiedenen Zeitdifferenzen τ . Zur besseren Sichtbarkeit sind die Verteilungsfunktionen durch Multiplikation mit einem Faktor α vertikal verschoben. Von außen nach innen: $\tau = 0.1\tau_\lambda$ ($\alpha = 50$), $\tau = \tau_\lambda$ ($\alpha = 10$), $\tau = T$ ($\alpha = 3$), $\tau = 3T$ ($\alpha = 1$). Die gestrichelte schwarze Linie entspricht einer Gaußverteilung.

Um dies etwas genauer zu untersuchen und festzustellen, in welcher Größenordnung die Steigung der Strukturfunktionen im Inertialbereich liegt, kann man die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen berechnen. Wenn man annimmt, dass die Strukturfunktionen im Inertialbereich durch $y = ax^n$ bzw. $\ln(y) = \ln a + n \ln(x)$ beschrieben werden können, erhält man durch die logarithmische Ableitung

$$\frac{d \ln(y)}{d \ln(x)} = n \quad (10.8)$$

direkt den Exponenten der Strukturfunktionen. In den Insets von Abbildung 10.4 bzw. 10.5 werden die logarithmischen Ableitungen für alle drei Simulationen gezeigt. Wie in drei Dimensionen, so zeigen auch die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen niedriger Ordnung in zwei Dimensionen kein Plateau. Bei der Ableitung der Strukturfunktionen der Ordnung $n = 6$ ergibt sich für `sim3d1024` und `sim2d1024deltaA` zwischen $\tau \approx 0.1T$ und $\tau \approx T$, also genau im Inertialbereich, näherungsweise ein Plateau. Im Fall von `sim2d1024deltaA` gibt es vor diesem Bereich einen kleinen Unterschwinger. Sowohl die Plateaubildung als auch das Vorkommen

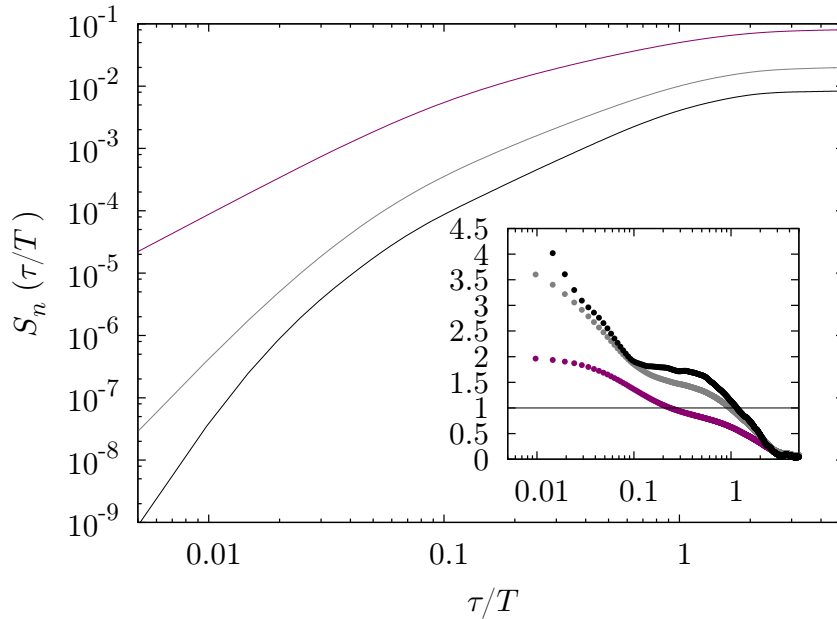


Abbildung 10.4 Darstellung der Lagrangeschen Strukturfunktionen der Ordnung $n = 2, 4, 6$ (von oben nach unten) für die Simulation `sim3d1024`. Das Inset zeigt die nach (10.8) berechneten logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen. Die logarithmischen Ableitungen haben die selben Farben wie die dazugehörige Strukturfunktionen.

von kleinen Unterschwingern bei den Ableitungen höherer Strukturfunktionen wird auch bei anderen Simulationen beobachtet [Hom09b]. Diese Effekte scheinen damit zusammenzuhängen, dass man für die Konvergenz höherer Strukturfunktionen mehr Daten braucht als für Strukturfunktionen niedriger Ordnung. Zumindest für die logarithmische Ableitung von S_6 bei `sim2d1024deltaA` konnte beobachtet werden, dass der Unterschwinger mit zunehmender Datenmenge kleiner wurde. Beide angesprochenen Effekte sollten daher in Zukunft mit größeren Datenmengen noch einmal genauer untersucht werden. Doch selbst wenn sich Plateaus im Inertialbereich entwickeln sollten, stimmen die Werte für die Exponenten der Strukturfunktionen aller Voraussicht nach nicht mit den Werten der K41-Theorie im Lagrangebild überein.

An dieser Stelle soll noch kurz auf ein Phänomen eingegangen werden, welches die zweidimensionalen Simulationen betrifft. Schaut man sich das Verhalten der Struk-

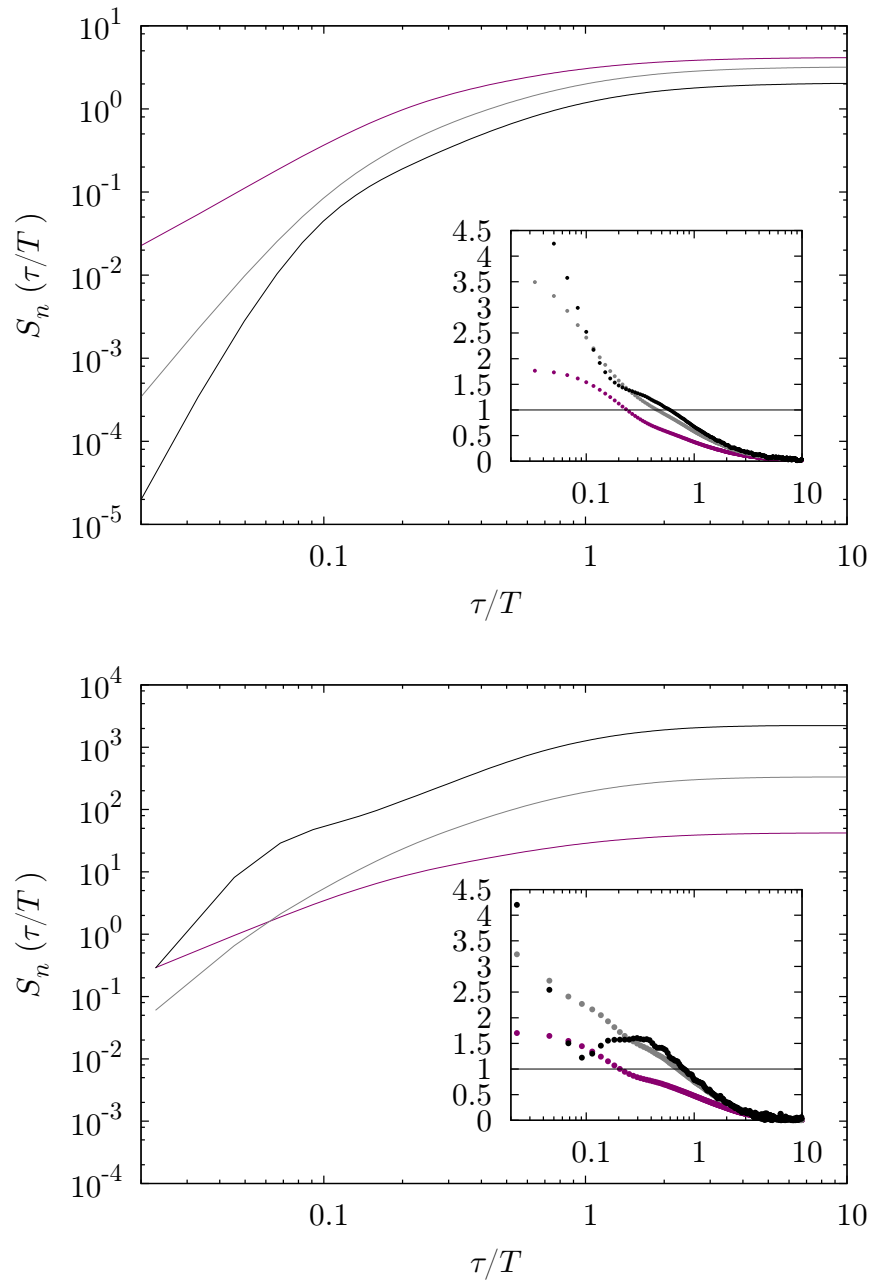


Abbildung 10.5 Darstellung der Lagrangeschen Strukturfunktionen der Ordnung $n = 2, 4, 6$ (obere Abbildung: von oben nach unten / untere Abbildung: von unten nach oben) für die Simulationen `sim2d1024gaussA` (oben) und `sim2d1024deltaA` (unten). Die Insets zeigen die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen. Die logarithmischen Ableitungen haben dieselben Farben wie die dazugehörige Strukturfunktionen.

turfunktionen für sehr kleine τ an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \langle [v_i(t + \tau) - v_i(t)]^n \rangle \\
 &\approx \left\langle \left[v_i(t) + \frac{d}{d\tau} v_i(t + \tau) \Big|_{\tau=0} \tau - v_i(t) \right]^n \right\rangle \\
 &= \tau^n \left\langle \left[\frac{d}{d\tau} v_i(t + \tau) \Big|_{\tau=0} \right]^n \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

In logarithmischer Darstellung sollte die Steigung der Strukturfunktion der Ordnung n unter der Annahme der Differenzierbarkeit der Geschwindigkeit für $\tau \rightarrow 0$ gegen n gehen. Ein genauerer Blick auf die beiden Insets in Abbildung 10.5 zeigt, dass es leichte Abweichungen von diesem Verhalten gibt. Vermutlich ist dies ein Artefakt der in der Zeit deltakorrelierten Antriebskraft bei den Simulationen in zwei Dimensionen. Es wäre zu überlegen, ob man die Kraft so abändern kann, dass diese leichten Abweichungen verschwinden. Dies konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr getestet werden.

10.3 Kumulantenanalyse

Die Beobachtung, dass sich die Inkrementverteilungen in zwei- und dreidimensionaler Turbulenz von einer stark nichtgaußischen Form bei kleinen Zeitdifferenzen zu einer relativ gaußischen Form bei großen Zeitdifferenzen entwickelt, legt eine andere Charakterisierung der Inkrementstatistik als durch die Strukturfunktionen nahe. In Abschnitt 3.1.3 wurde gezeigt, dass die Kumulanten c_n mit einer höheren Ordnung als $n = 3$ die Abweichung einer Wahrscheinlichkeitsdichte von der Gaußverteilung quantifizieren. Da sich beim Übergang von kleinen zu großen Zeiten die Breite der Inkrementverteilung ständig ändert, die funktionale Form jedoch zu verschiedenen Zeiten verglichen werden soll, werden hier die kompensierten Kumulanten λ_n (siehe Gleichung (3.38)) der Ordnung $n = 4, 6$ betrachtet.

In Abbildung 10.6 sind die kompensierten Kumulanten λ_4 und λ_6 für die Simulationen `sim3d1024ita` und `sim3d1024` dargestellt. Generell fällt auf, dass es bei allen Kurven drei unterschiedliche Bereiche gibt. Für sehr kleine Zeiten verlaufen die Kurven flach. Dies entspricht dem Bereich, in dem die Form der Inkrementverteilung gegen die Form der Beschleunigungsverteilung konvergiert ist. Hier könnte man nach Gleichung (10.2) die Beschleunigung und damit auch die Beschleunigungsverteilung aus den Inkrementen berechnen. Dieser Bereich ist der Dissipationsbereich. Daran schließt sich eine Region an, in der die kompensierten Kumulanten nicht exponentiell, sondern eher wie ein Potenzgesetz kleiner werden, wobei die Kurven für `sim3d1024ita` noch deutlicher an einem Potenzgesetz liegen als die kompensierten Kumulanten aus `sim3d1024`. Beachtet man die Zeitskala, auf der dieser Prozess abläuft, entspricht dieser Bereich ungefähr dem Inertialbereich. Danach fallen die Ku-

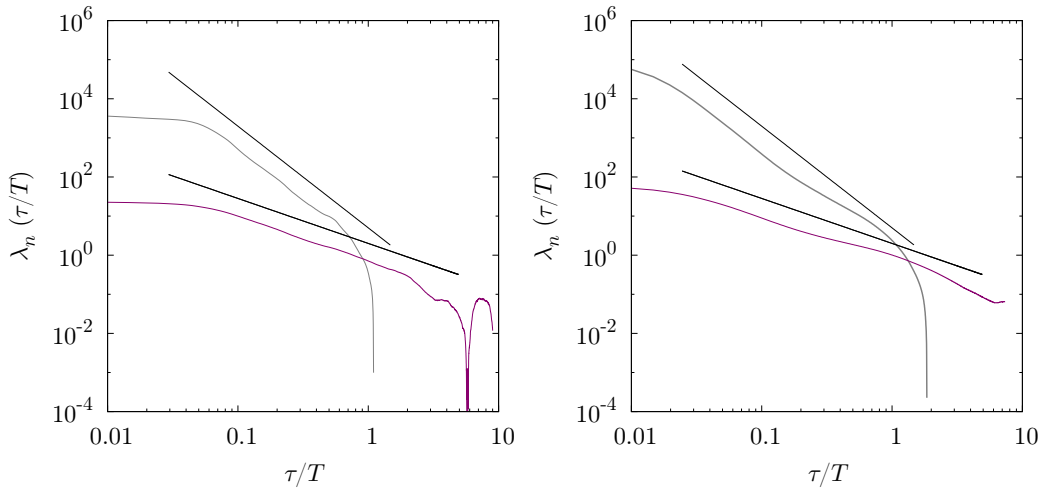


Abbildung 10.6 Darstellung der kompensierten Kumulanten λ_4 (violett) und λ_6 (grau) für die Simulationen `sim3d1024ita` (links) und `sim3d1024` (rechts). Als Vergleich sind die Potenzgesetze $\tau^{-1.15}$ und $\tau^{-2.6}$ eingezeichnet (schwarz).

mulanten sechster Ordnung sehr schnell gegen Null ab. Die Kummulanten vierter Ordnung fallen nicht ganz auf Null ab bzw. fluktuieren sehr stark. Dies liegt daran, dass insbesondere für `sim3d1024` die Inkrementverteilung für $\tau \gg T$ bzw. die Geschwindigkeitsverteilung leicht von einer Gaußverteilung abweichen.

Das Verhalten der Kumulanten ist in zweierlei Hinsicht sehr interessant. Während man im Fall der Lagrangeschen Strukturfunktion auf der Suche nach Skalierungsverhalten ist, es aber zumindest in den bisher vorliegenden Daten nur vermuten kann, verhalten sich die kompensierten Kumulanten im Inertialbereich wesentlich eher wie Potenzgesetze. Noch wichtiger ist, dass die kompensierten Kumulanten deutlich zeigen, dass in dreidimensionaler Turbulenz die Konvergenz der Inkrementverteilung gegen eine Gaußverteilung im Inertialbereich nicht ein einfacher Relaxationsprozess mit exponentiellem Zerfall ist, sondern ein komplizierteres Verhalten zeigt.

Zum Vergleich sind in Abbildung 10.7 die kompensierten Kumulanten λ_4 und λ_6 der beiden zweidimensionalen Simulationen dargestellt. Sie zeigen qualitativ das gleiche Verhalten wie im dreidimensionalen Fall. Auch hier zerfallen die Kumulanten im Inertialbereich nicht exponentiell, sondern eher wie Potenzgesetze. Diese Beobachtung zeigt, dass das Verhalten der Lagrangeschen Inkremente auch in zwei Dimensionen nichttrivial ist und bestätigt noch einmal das Vorhandensein von Intermittenz. Wären die Verteilungsfunktionen im Inertialbereich selbstähnlich, so dürften sich die kompensierten Kumulanten in diesem Bereich nicht ändern.

In Abbildung 10.6 und 10.7 sind jeweils zum Vergleich Potenzgesetze eingezeichnet.

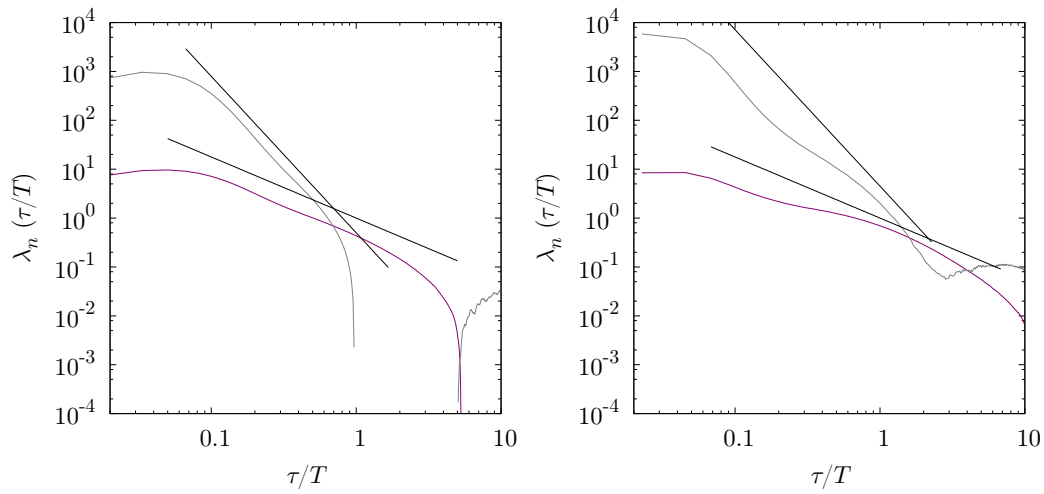


Abbildung 10.7 Darstellung der kompensierten Kumulanten λ_4 (violett) und λ_6 (blau) für die Simulationen `sim2d1024gaussA` (links) und `sim3d1024deltaA` (grau). Als Vergleich sind wie in Abbildung 10.6 die Potenzgesetze $\tau^{-1.25}$ und $\tau^{-3.2}$ eingezeichnet (schwarz).

Sie dienen dem qualitativen Vergleich der Kumulanten mit einem Potenzgesetz. Da die logarithmischen Ableitungen der kompensierten Kumulanten besonders für große τ stark fluktuieren, wurden sie nur zur ungefähren Schätzung der Exponenten herangezogen. Um zu bestimmen, ob die Kumulanten im Inertialbereich exakt einem Potenzgesetz folgen und welchen Exponenten sie besitzen, sind Simulationen mit besserer Statistik und längeren Inertialbereichen nötig. Auch müsste vorher geklärt werden, welchen Einfluss die Form der Geschwindigkeitsverteilung auf den Verlauf der Kumulanten bei großen Zeiten hat. An dieser Stelle kann nur vermutet werden, dass die teilweise stark ausgeprägten Buckel bei $\tau \geq T$ durch Abweichungen der Geschwindigkeitsverteilungen von einer Gaußverteilung zustandekommen.

11 Die Verknüpfung von Eulerscher und Lagrangescher Inkrementstatistik

Rückblickend auf die bisherigen Ergebnisse sieht man, dass sich die Eulersche Zweipunkt-Einzeit- und die Lagrangesche Einpunkt-Zweizeit-Statistik stark unterscheiden. Dies ist aufgrund der in Abschnitt 4.1.2 herausgearbeiteten Tatsache, dass diese beiden Statistiken völlig unterschiedliche Informationen über das turbulente Feld enthalten, nicht sehr verwunderlich. Besonders der Unterschied zwischen den Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsinkremente in den beiden verschiedenen Bildern wirft die Frage auf, wie das Eulerbild und das Lagrangebild zusammenhängen bzw. welche zusätzlichen Informationen notwendig sind, um die Eulersche Zweipunkt-Einzeit-Statistik in die Lagrangesche Einpunkt-Zweizeit-Statistik umzurechnen.

Die Frage nach der Verbindung zwischen Observablen in den beiden Bildern ist aus zwei Gründen interessant. Zum einen ist es für das Verständnis der Turbulenz von grundsätzlichem Interesse zu verstehen, wie die Strukturen des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes die Teilchenstatistiken beeinflussen. Daneben spielen bei dieser Frage auch anwendungsorientierte Aspekte eine große Rolle. In vielen Fällen ist die Messung Lagrangescher Observablen mit großen Schwierigkeiten verbunden oder teilweise sogar unmöglich. Für den Transport von Teilchen und den damit verbundenen Fragestellungen wie Mischung und Verbrennung in turbulenten Strömungen sind aber die Lagrangeschen Observablen von großer Bedeutung. Es wäre daher sehr interessant, die gesuchten Lagrangeschen Größen aus den im Experiment oft leichter zugänglichen Eulerschen Größen zu berechnen. Ein tieferes Verständnis des Zusammenhangs der beiden Bilder könnte dazu beitragen, Modelle für eine solche Extrapolation zu liefern.

In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen Zweipunktgrößen in den beiden Bezugssystemen anhand der Inkrementstatistiken näher untersucht werden. Dabei steht die Frage im Mittelpunkt, wie durch die Übersetzung zwischen den beiden Bildern in zweidimensionaler Turbulenz aus quasigaußischen Verteilungsfunktionen stark nichtgaußische Verteilungen werden können. Dazu wird zunächst eine formale Übersetzungsformel für die Inkrementstatistik abgeleitet. Die darin vorkommenden Größen werden anschließend für zwei- und dreidimensionale Turbulenz aus den Daten der numerischen Simulationen geschätzt und charakterisiert. Außerdem wird kurz auf die Übersetzung der Inkrementstatistiken im kompressiblen Fall eingegangen und die Übersetzungsformel auf allgemeine Zweipunktstatistiken erweitert.

11.1 Der Übergang für Inkremente

Wie in Abschnitt 4.2.2 dargestellt, gab es in der Vergangenheit mehrfach Bestrebungen, Modelle für die Eulerschen Inkrementverteilungen mit Hilfe einfacher Übersetzungsregeln in das Lagrangebild zu übertragen. In diesen Fällen wurden die Übersetzungsregeln aus anschaulichen Überlegungen abgeleitet und ihre Gültigkeit nicht näher untersucht. Im Gegensatz dazu soll in diesem Abschnitt zunächst eine exakte formale Verbindung zwischen der Verteilungsfunktion $f_l(u_l)$ für die Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente und der Verteilungsfunktion $f_e(u_e)$ für die Eulerschen Geschwindigkeitsinkremente hergestellt werden. Die anschließende numerische Bestimmung der dabei auftretenden Größen ermöglicht eine genaue Aussage darüber, wie exakt die eben erwähnten einfachen Übersetzungsregeln sind.

Bei der Übersetzung muss darauf geachtet werden, dass in beiden Bildern die gleiche Observable betrachtet wird. Für die Inkremente bedeutet dies konkret, dass, wenn im Lagrangebild die Geschwindigkeitsdifferenzen auf die Koordinatenachsen projiziert werden, dann im Eulerbild auch die auf die Koordinatenachsen projizierten Größen betrachtet werden müssen. Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle noch einmal kurz die Definitionen der benötigten Größen betrachtet. Die Übersetzung startet mit dem Eulerschen Geschwindigkeitsinkrement¹

$$u_e = v(\mathbf{y} + \mathbf{x}, t) - v(\mathbf{y}, t). \quad (11.1)$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz wird zum Zeitpunkt t zwischen zwei Punkten bestimmt, die durch die Distanz \mathbf{x} getrennt sind. Das Lagrangesche Inkrement

$$u_l = v(\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t), t) - v(\mathbf{y}, t - \tau). \quad (11.2)$$

misst die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei Punkten, die durch die Distanz $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t)$, die ein Tracer während der Zeit τ zurücklegt, verbunden sind. In beiden Fällen wird v als Projektion $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ des Geschwindigkeitsvektors auf die Koordinatenachsen ($i = x, y, z$ in drei Dimensionen und $i = x, y$ in zwei Dimensionen) definiert. Im Fall einer isotropen Strömung hängen die Ergebnisse nicht von der gewählten Achse ab. Diese Annahme spielt jedoch zum jetzigen Zeitpunkt noch keine Rolle und wird erst später explizit eingeführt. Zusätzlich wird noch das Inkrement

$$u_{el} = v(\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t), t) - v(\mathbf{y}, t) \quad (11.3)$$

definiert. Es stellt eine Art Mischung aus Eulerscher und Lagrangescher Observable dar, da die beiden Messpunkte schon wie beim rein Lagrangeschen Inkrement durch

¹Es sei hier explizit darauf hingewiesen, dass es sich hierbei nicht um die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente handelt.

die Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}$ verbunden sind, die Messung der Geschwindigkeit aber immer noch zur gleichen Zeit erfolgt. Zum Schluss wird noch die Größe

$$u_p = v(\mathbf{y}, t) - v(\mathbf{y}, t - \tau) \quad (11.4)$$

eingeführt. Sie misst die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Zeitpunkten t und $t - \tau$ am Startpunkt des Tracers. Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, kann für u_e die feinkörnige Verteilung jetzt als

$$\hat{f}_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta(u_e - v_e) \quad (11.5)$$

geschrieben werden. Hier ist u_e die Zufallsvariable und v_e ist die unabhängige Ereignisraumvariable. Die feinkörnige Verteilung beschreibt das elementare Ereignis, bei einer Messung $u_e = v(\mathbf{y} + \mathbf{x}, t) - v(\mathbf{y}, t)$ den Wert v_e zu finden. Die normale Verteilungsfunktion

$$f_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \langle \hat{f}_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \quad (11.6)$$

erhält man wieder durch Ensemblemittelung. Mit Hilfe dieser Definitionen können wir eine exakte Relation zwischen der feinkörnigen Verteilung \hat{f}_e für die Inkremente im Eulerbild und der feinkörnigen Verteilung \hat{f}_l für die Inkremente im Lagrangebild ableiten. Diese Aufgabe kann in zwei Schritte unterteilt werden. Im ersten Schritt wird das Inkrement u_e mit der Ersetzung des Abstandes \mathbf{x} durch die Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t)$ in das Inkrement u_{el} überführt. Dies geschieht formal durch

$$\hat{f}_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t) = \int d\mathbf{x} \delta(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t) - \mathbf{x}) \hat{f}_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (11.7)$$

An dieser Stelle sieht man, dass durch diese Operation die Ereignisraumvariable nicht beeinflusst wird. Der Index in \hat{f}_{el} zeigt an, dass jetzt $v_e = u_{el}$ anstatt $v_e = u_e$ gilt. Im zweiten Schritt muss die feinkörnige Verteilung \hat{f}_l mit der feinkörnigen Verteilung \hat{f}_{el} verbunden werden. Nach der Definition der Inkremente (11.2) und (11.4) gilt $u_l = u_{el} + u_p$. Aufgrund dieser Tatsache ist die feinkörnige Verteilung für u_l durch die feinkörnige Verteilung der Summe von u_{el} und u_p gegeben. Die Verteilung für die Summe zweier Zufallsvariablen kann nach (3.16) aus ihrer Verbundverteilung berechnet werden. Die feinkörnige Verbundverteilung ist (siehe Gleichung (3.24)) einfach das Produkt aus \hat{f}_{el} und $\hat{f}_p(v_p; \mathbf{y}, \tau, t) = \delta(u_p - v_p)$. Über

$$\hat{f}_l(v_l; \mathbf{y}, \tau, t) = \int dv_e \int dv_p \delta(v_l - (v_e + v_p)) \hat{f}_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \quad (11.8)$$

erhält man die gesuchte Beziehung zwischen den feinkörnigen Verteilungen

$$\hat{f}_l(v_l; \mathbf{y}, \tau, t) = \int dv_e \hat{f}_p(v_l - v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \hat{f}_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t). \quad (11.9)$$

Um nun zu den entsprechenden Verteilungsfunktionen zu kommen, muss wieder gemittelt werden. Im Fall von Gleichung (11.9) erhält man:

$$\begin{aligned} f_l(v_l; \mathbf{y}, \tau, t) &= \left\langle \int dv_e \hat{f}_p(v_l - v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \hat{f}_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \right\rangle \\ &= \int dv_e \left\langle \hat{f}_p(v_l - v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \hat{f}_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Der Erwartungswert $\langle \hat{f}_p \hat{f}_{el} \rangle$ ist nichts anderes als eine Verbundverteilung und kann daher mittels einer bedingten Verteilung aufgebrochen werden. Dies führt auf

$$f_l(v_l; \mathbf{y}, \tau, t) = \int dv_e f_p(v_l - v_e | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) f_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t). \quad (11.11)$$

In dieser Gleichung tritt nun die Verteilungsfunktion f_{el} als einzelner Term auf. Gleichung (11.40) kann in der gleichen Weise behandelt werden, was zu

$$\begin{aligned} f_{el}(v_e; \mathbf{y}, \tau, t) &= \left\langle \int d\mathbf{x} \delta(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t) - \mathbf{x}) \hat{f}_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \langle \delta(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t) - \mathbf{x}) | v_e \rangle f_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \end{aligned} \quad (11.12)$$

führt. Das Einsetzen von (11.11) in (11.12) ergibt die gesuchte Beziehung zwischen den Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente:

$$f_l(v_l; \tau) = \int dv_e p_b(v_l - v_e | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \int d\mathbf{x} p_a(\mathbf{x} | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) f_e(v_e; \mathbf{x}). \quad (11.13)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Verbindung zwischen den Observablen im Lagrange- und im Eulerbild von den beiden Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_a(\mathbf{x} | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) = \langle \delta(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t) - \mathbf{x}) | v_e \rangle \quad (11.14)$$

$$p_b(v_l - v_e | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) = f_p(v_l - v_e | v_e; \mathbf{y}, \tau, t) \quad (11.15)$$

abhängt. Bis zu diesem Punkt wurden keinerlei Näherungen oder Annahmen über die Eigenschaften der turbulenten Strömung gemacht. Im Folgenden wird angenommen, dass die Strömung statistisch stationär und homogen ist. Das heißt, die Observablen sind unabhängig von der absoluten Zeit t (Stationarität) und vom Startpunkt der Tracer \mathbf{y} (Homogenität). Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Strömung statistisch isotrop ist, können p_a und f_e nur von $r = |\mathbf{x}|$ abhängen. Mit Hilfe dieser Annahmen vereinfacht sich (11.13) zu:

$$f_l(v_l; \tau) = \int dv_e p_b(v_l - v_e | v_e; \tau) \underbrace{\int_0^\infty dr p_a(r | v_e; \tau) f_e(v_e; r)}_{f_{el}(v_e; \tau)}. \quad (11.16)$$

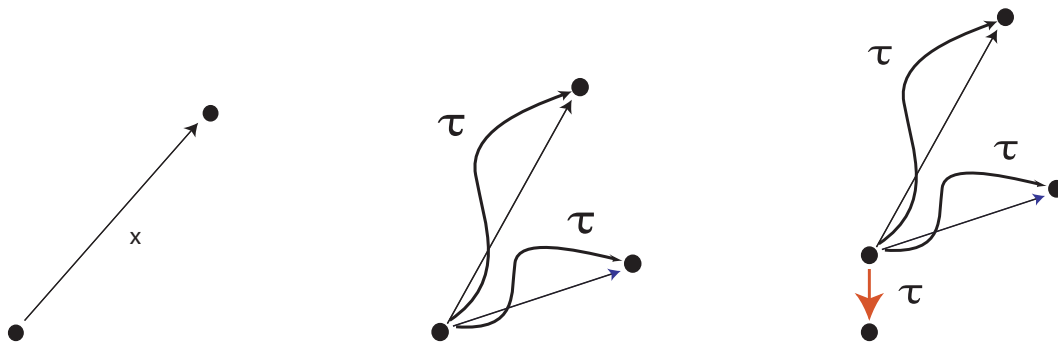


Abbildung 11.1 Schematische Darstellung des Übergangs von Eulerschen zu Lagrange-schen Geschwindigkeitsinkrementen. Im Eulerbild betrachtet man die Geschwindigkeit an zwei verschiedenen Punkten, die durch einen festen Abstand verbunden sind (linkes Bild). Dies entspricht der Definition (11.1). Im ersten Übersetzungsschritt ersetzt man den zweiten Punkt durch den Endpunkt einer Teilchentrajektorie, die beim ersten Punkt startet und bei der das Teilchen für die Zeitspanne τ läuft (mittleres Bild). Die Geschwindigkeiten an den beiden Punkten werden aber weiterhin zur gleichen Zeit gemessen, was der Definition (11.3) entspricht. Die zweite eingezeichnete Trajektorie soll andeuten, dass man beim Übergang von der Parametrisierung durch x zur Parametrisierung durch τ berücksichtigen muss, dass zu einem festen τ verschiedene Teilchen verschieden weit laufen. Im letzten Schritt muss noch berücksichtigt werden, dass sich die Geschwindigkeit am Startpunkt ändert, während sich das Teilchen von einem Punkt zum anderen bewegt (rechtes Bild). Dies wird durch den roten Pfeil symbolisiert. Werden die Geschwindigkeiten an den beiden Punkten jetzt zu der Zeit bestimmt, zu der das Teilchen am jeweiligen Punkt ist, entspricht dies dem Lagrange-schen Geschwindigkeitsinkrement (11.2).

Dabei wurde die beim Umschreiben auf Kugelkoordinaten auftauchende Funktionaldeterminante ($2\pi r$ in zwei und $4\pi r^2$ in drei Dimensionen) in die Definition von $p_a(r|v_e; \tau)$ aufgenommen. Der Übergang vom Euler- in das Lagrangebild ist in Abbildung 11.1 schematisch dargestellt.

An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass sowohl (11.16) als auch (11.13) formale Verknüpfungen zwischen den beiden Bildern darstellen und somit unabhängig von dem konkreten physikalischen System sind, das betrachtet wird. Solche Relationen gelten sowohl für zweidimensionale und dreidimensionale Turbulenz als auch für magnetohydrodynamische und, mit einer entsprechenden Interpretation, kompressible Strömungen. Der Unterschied zwischen den einzelnen Systemen zeigt sich in der genauen Form der Übergangswahrscheinlichkeiten p_a und p_b .

Bevor die Übergangswahrscheinlichkeiten sowohl für zweidimensionale als auch für dreidimensionale Turbulenz aus den numerischen Daten geschätzt werden, soll an dieser Stelle noch auf die Bedeutung der Übergangswahrscheinlichkeiten eingegangen werden. Die in Gleichung (11.16) vorkommende Übergangswahrscheinlich-

keit $p_a(r|v_e; \tau)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen in der Zeit τ die Entfernung r von seinem Startpunkt aus zurücklegt. Somit ist diese Übergangswahrscheinlichkeit ein Maß für den Transport von Tracern in der turbulenten Strömung. Zu beachten ist natürlich noch, dass diese Wahrscheinlichkeit auf die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Start- und Endpunkt der Trajektorie bedingt ist. Die Multiplikation von $f_e(v_e; r)$ mit p_a in Verbindung mit der anschließenden Integration über r führt dazu, dass die Geschwindigkeitsinkremente nicht mehr nach festen Abständen, sondern nach Zeiten geordnet sind. Zur Statistik bei einem bestimmten τ tragen durch die Integration alle Längen r , gewichtet mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, bei. Diese Operation sorgt dafür, dass beim Übergang in das Lagrangebild Eulersche Inkrementstatistiken verschiedenener Längenskalen gemischt werden.

Die zweite Übergangswahrscheinlichkeit berücksichtigt die Tatsache, dass sich die Geschwindigkeit am Startpunkt der Tracertrajektorie in der Zeit, die das Teilchen braucht, um die Strecke r zurückzulegen, ändert. Die Verteilung p_b gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, eine bestimmte Geschwindigkeitsänderung u_p am Startpunkt des Tracers unter der Bedingung zu finden, dass zwischen den Endpunkten der Trajektorie die Geschwindigkeitsdifferenz u_{el} gemessen wird. Durch die Multiplikation von f_{el} mit p_a und der anschließenden Integration über v_e werden alle Ereignisse, bei denen $u_{el} + u_p = u_l$ gilt, in das entsprechende Bin v_l einsortiert.

In beiden Fällen hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten noch von Bedingungen ab. Wäre das der Teilchenbewegung unterliegende Geschwindigkeitsfeld rein zufällig, so wäre die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes r zu finden, unabhängig von v_e . In diesem Fall würde sich p_a zu $p_a(r; \tau)$ vereinfachen. Für kleine τ ist eine solche Vereinfachung nicht zu erwarten, da sich turbulente Felder wesentlich von reinen Zufallsfeldern unterscheiden. Für sehr große Zeiten sollten die Übergangswahrscheinlichkeit aber unabhängig von der Bedingung werden. Später wird noch gezeigt, dass dies aufgrund der Definitionen von u_{el} und u_p für p_b nicht der Fall ist.

11.1.1 Die Übergangswahrscheinlichkeiten für zweidimensionale Turbulenz

Nachdem nun geklärt ist, welche statistischen Größen in die Übersetzung zwischen dem Eulerbild und dem Lagrangebild eingehen, sollen diese aus den Simulationsdaten geschätzt werden. Dazu muss noch eine technische Anmerkung gemacht werden. Mit der Übergangswahrscheinlichkeit p_a wird die feste Ortsdifferenz durch den Weg eines Teilchens ersetzt, das zur Zeit $t - \tau$ startet und zur Zeit t ankommt. Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Orten wird aber zur Zeit t gemessen. Dies bedeutet, dass zusätzlich an jedem Zeitpunkt nicht nur die Geschwindigkeit des Teilchens an seinem jeweiligen Ort sondern auch die momentane Geschwindigkeit an seinem Startpunkt mitprotokolliert werden muss. Dies geschieht in der Numerik einfach dadurch, dass man zu jedem Teilchen eine Kopie macht, die nicht mit der Strömung mitbewegt

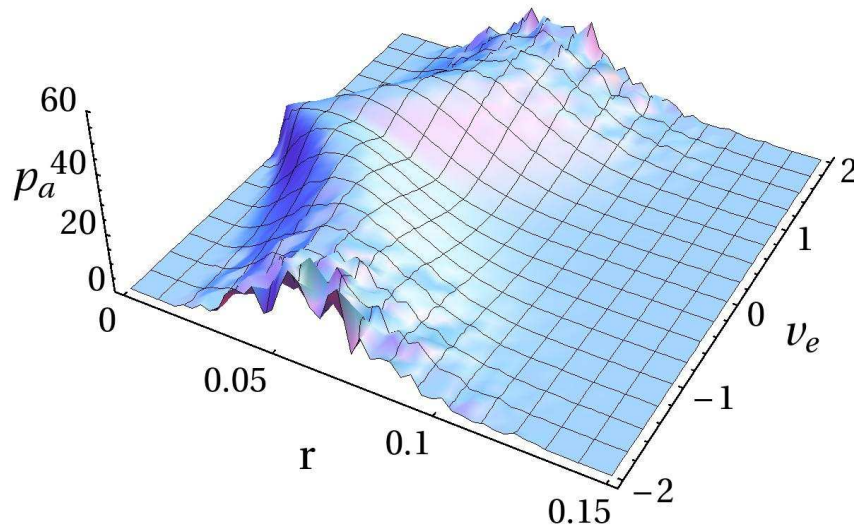


Abbildung 11.2 Dreidimensionale Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeit $p_a(r|v_e; \tau)$ mit $\tau = \tau_\lambda$ für `sim2d1024gaussA`. Die statistische Abhängigkeit des Teilchenweges von den Inkrementen v_e ist deutlich zu sehen.

wird, sondern am Startpunkt liegen bleibt. Bestimmt man zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit am Punkt der Kopie, so erhält man die gewünschte Information.

Bei diesem Vorgehen stößt man allerdings auf das Problem, dass man pro Trajektorie nur noch einen Meßwert hat, der in die Statistik eingeht. Insbesondere aufgrund der wesentlich geringeren Anzahl an Teilchen gegenüber den dreidimensionalen Simulationen erhält man in diesem Fall bei den zweidimensionalen Simulation keine ausreichende Datenbasis zur Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Aus diesem Grund wurde hier von den 100 vorliegenden Eulerschen Geschwindigkeitsfeldern der Simulation `sim2d1024gaussA` jedes zweite Feld als Anfangsbedingung für eine kurze Simulation mit 2000 Zeitschritten gewählt². Zur Schätzung der Verteilungsfunktionen stand somit ein Ensemble von 50 Simulationen zur Verfügung. Für den dreidimensionalen Fall war dieses Vorgehen nicht nötig.

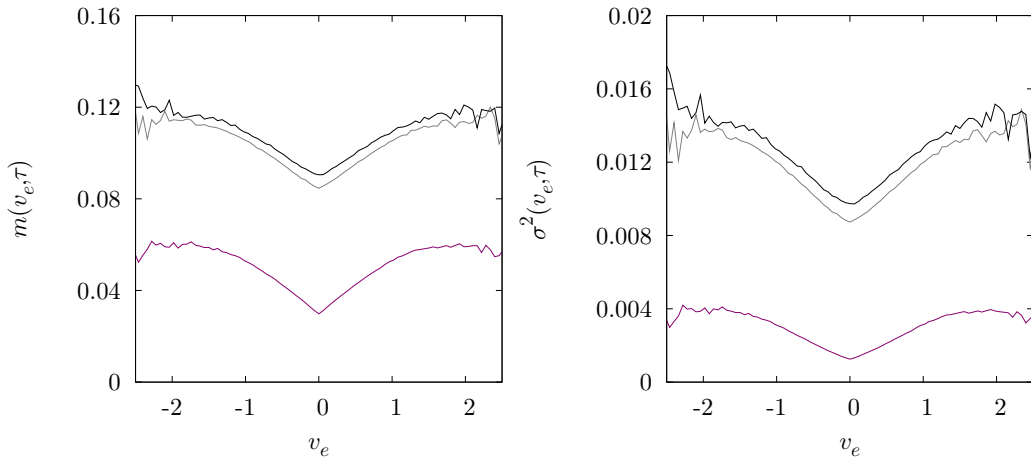


Abbildung 11.3 Darstellung des Mittelwertes (links) und der Varianz (rechts) der Übergangverteilung $p_a(r|v_e; \tau)$ für die Zeiten $\tau = \tau_\lambda, T, 3T$ (von unten nach oben).

Die Übergangswahrscheinlichkeit p_a

In Abbildung 11.2 ist die Übergangswahrscheinlichkeit p_a zum Zeitpunkt $\tau = \tau_\lambda$ für die Simulation `sim2d1024gaussA` dargestellt. Bezüglich der Struktur der Verteilung gibt es zwei wesentliche Merkmale. Zum einen zeigt die Verteilung, dass sich die Teilchen bei einem festen v_e innerhalb derselben Zeitspanne verschieden weit bewegen, was besonders nach den Betrachtungen in Kapitel 7 zu erwarten war. Zum anderen sieht man deutlich, dass die Verteilung für dieses τ stark von der Bedingung v_e abhängt. Je größer die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den beiden Punkten ist, desto weiter ist das Maximum der Verteilung hin zu größeren Abständen r verschoben, d. h. desto weiter kommen die Teilchen im Mittel. Die Form der Verteilung kann man so interpretieren, dass die Breite der Verteilung den stochastischen Anteil des turbulenten Feldes beinhaltet, während die starke statistische Abhängigkeit den deterministischen Anteil charakterisiert. Die Funktion der Übergangverteilung p_a innerhalb der Übersetzungsformel zeigt, dass die stochastischen Anteile für die Mischung Eulerscher Statistiken verschiedener Längenskalen bei festem v_e verantwortlich sind.

Um die zeitliche Entwicklung der Abhängigkeit der Übergangverteilung von der Bedingung v_e zu charakterisieren, werden der bedingte Erwartungswert

$$m(v_e; \tau) = \langle r|v_e; \tau \rangle \quad (11.17)$$

²Der Abstand zwischen zwei Eulerschen Feldern beträgt 1000 Zeitschritte

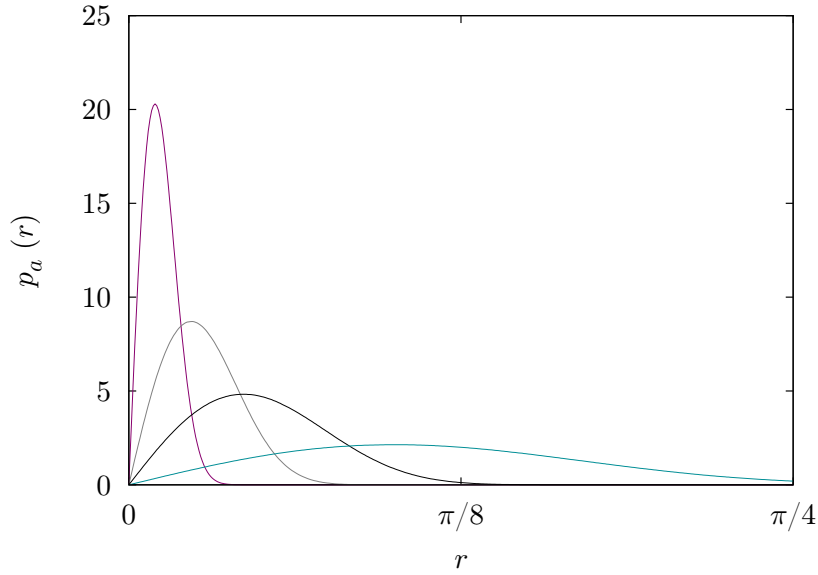


Abbildung 11.4 Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_a(r; \tau)$ für $\tau = \tau_\lambda, 0.5T, T, 3T$ (wobei sich die Maxima der Verteilungen mit der Zeit von links nach rechts verschieben).

und die bedingte Varianz

$$\sigma^2(v_e; \tau) = \langle r^2 | v_e; \tau \rangle - \langle r | v_e; \tau \rangle^2 \quad (11.18)$$

für verschiedene τ bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 11.3 zu sehen. Hier sieht man die starke Abhängigkeit des Mittelwertes von v_e , die auch für $\tau > T$ noch nicht ganz verschwunden ist, für $\tau \rightarrow \infty$ aber verschwinden sollte. Insgesamt verschiebt sich die Kurve für größere Zeiten nach oben, da die Teilchen mit fortschreitender Zeit immer weiter kommen.

Im rechten Teil der Abbildung ist die bedingte Varianz für verschiedene Zeiten zu sehen. Wie der bedingte Erwartungswert, so hängt auch die bedingte Varianz stark von v_e ab. Im Zentrum ist die Varianz immer wesentlich kleiner als am Rand. Insgesamt nimmt die Varianz im Laufe der Zeit stark zu, so dass ihre Schwankung in Abhängigkeit von v_e immer kleiner gegenüber ihrem Absolutwert wird. Im Grenzfall sehr großer Zeiten sollte auch die Abhängigkeit der Varianz von v_e verschwinden.

Eine weitere Möglichkeit, die Zeitabhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit p_a zu charakterisieren, ist die Verteilung $p_a(r; \tau) = \int dv_e p_a(r | v_e; \tau) p(v_e)$ anzuschauen. Sie charakterisiert den Teilchentransport unabhängig von der Geschwindigkeitsdifferenz v_e . Man sieht, dass sich die Verteilung der Abstände r mit zunehmender Zeit

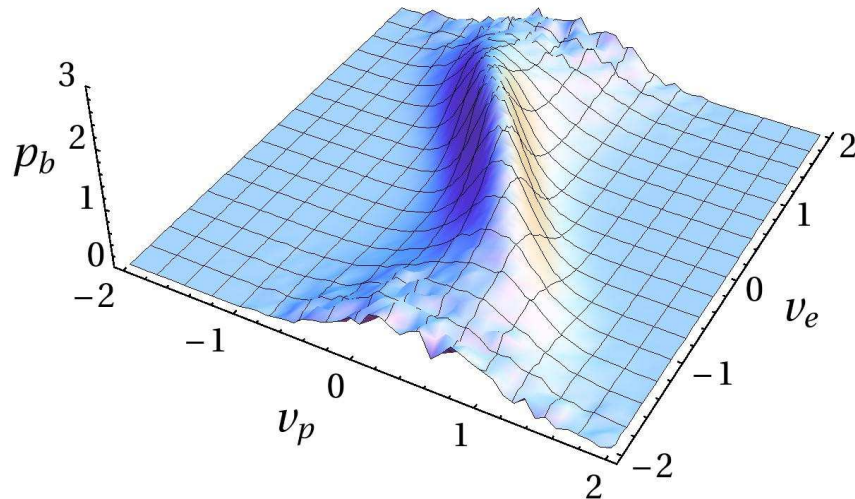


Abbildung 11.5 Dreidimensionale Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeit $p_b(v_p|v_e;\tau)$ mit $\tau = \tau_\lambda$ für `sim2d1024gaussA`. Auch hier ist wie bei $p_a(r|v_e;\tau)$ eine starke Abhängigkeit von der Bedingung v_e sichtbar.

zu größeren Werten hin verschiebt und immer breiter wird. An dem Verhalten dieser Größe sieht man sehr gut, wie durch die Übergangsverteilung p_a verschiedene $f(v_e; r)$ gemischt werden. Für kleine τ tragen hauptsächlich Eulersche Inkrementverteilungen für sehr kleine Abstände r zur Berechnung von $f_{el}(v_e; r)$ bei. Da sich gerade in diesem Bereich die Varianz der Eulerschen Inkrementverteilungen stark ändert, werden demzufolge auch Verteilungen mit sehr verschiedenen Varianzen gemischt. Für große Zeitdifferenzen τ ist die Verteilung sehr breit geworden und zu größeren r hin verschoben. Das bedeutet, dass bei großen Zeiten sehr viele verschiedene Verteilungen $f_e(v_e; r)$ gemischt werden, wobei hauptsächlich Verteilungen miteinbezogen werden, die eine ähnliche Varianz haben, da sich die Inkrementstatistik auf großen Skalen nicht mehr ändert. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass schon die unterschiedliche Mischung der Eulerschen Inkrementverteilungen für verschiedene Abstände r die funktionale Form der Ausgangsverteilung ändert. Ein Blick zurück auf Abbildung 11.2 zeigt aber auch, dass durch die Abhängigkeit von v_e im Mischungsprozess bei den Verteilungen zu größerem r die Flügel stärker gewichtet werden, während bei kleineren r das Zentrum stärker berücksichtigt wird.

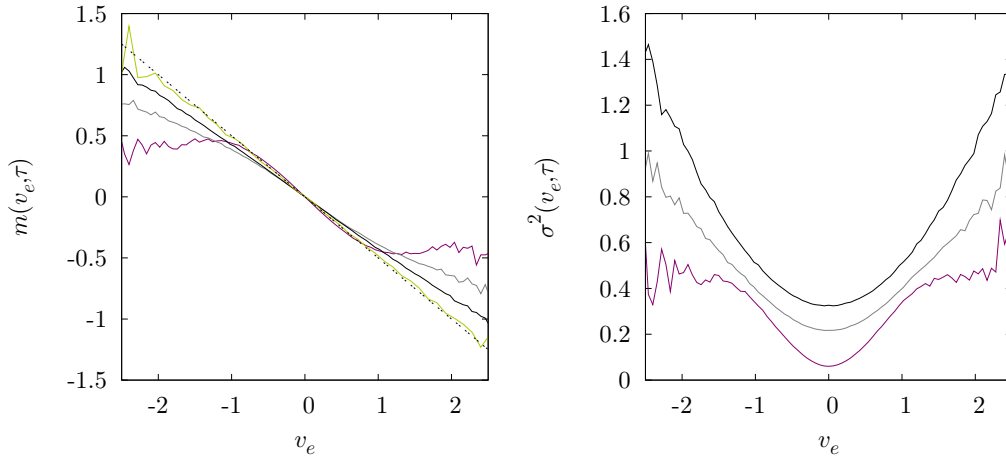


Abbildung 11.6 Darstellung des Erwartungswertes (links) und der Varianz (rechts) der Übergangsverteilung $p_a(r|v_e; \tau)$ für die Zeiten $\tau = \tau_\lambda, T, 3T$ (violett, grau, schwarz). Für den Erwartungswert wurde zusätzlich noch $\tau = 30T$ (grün) aufgenommen, um zu zeigen, dass der bedingte Erwartungswert für sehr große Zeiten gegen $-0.5v_e$ strebt (gestrichelt).

Die Übergangswahrscheinlichkeit p_b

Die Übergangswahrscheinlichkeit p_b ist in Abbildung 11.5 wieder für den Datensatz `sim2d1024gaussA` zu sehen. Auch hier wurde $\tau = \tau_\lambda$ gewählt. Die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes v_p zu finden hängt stark von v_e ab. Es fällt auf, dass im Zentrum der Verteilung eine starke negative Korrelation zwischen v_p und v_e existiert, während diese Korrelation zu betragsmäßig großen Werten von v_e hin abnimmt. Diese Eigenschaft wird bei der Charakterisierung der zeitlichen Entwicklung der Übergangsverteilung mittels des bedingten Erwartungswertes

$$m(v_e; \tau) = \langle v_p | v_e; \tau \rangle \quad (11.19)$$

und der bedingten Varianz

$$\sigma^2(v_e; \tau) = \langle v_p^2 | v_e; \tau \rangle - \langle v_p | v_e; \tau \rangle^2 \quad (11.20)$$

sehr deutlich. In Abbildung 11.6 sind der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz zu sehen. Besonders für kleine τ verhält sich der bedingte Erwartungswert bzw. die bedingte Varianz im Zentrum anders als in den Außenbereichen. Während der Erwartungswert im Zentrum für $\tau = \tau_\lambda$ eine starke negative Korrelation zeigt,

verschwindet diese für $|v_e| > 1$. Für größer werdende τ wird dieser Effekt allmählich schwächer. Bei $\tau = 3T$ verschwinden die Unterschiede zwischen dem Zentrum und den Rändern fast völlig und der Erwartungswert konvergiert langsam gegen $m(v_e; \tau) = -0.5v_e$. Interessant ist dabei, dass die Abhängigkeit von v_e nicht verschwindet, sondern v_p und v_e stark korreliert bleiben. Der Grund dafür liegt in der Definition der beiden Inkremente und wird in Abschnitt 11.1.4 näher erläutert. Bei $\tau = \tau_\lambda$ wächst die Varianz nach außen hin an und sättigt für $v_e > 1$. Auch dieser Effekt wird für große τ kleiner, während die Varianz insgesamt zunimmt.

11.1.2 Rekonstruktion

In diesem Abschnitt soll die Lagrangesche Inkrementverteilung $f_l(v_l; \tau)$ für $\tau = \tau_\lambda$ mit Hilfe der numerisch geschätzten Übergangverteilungen aus der Eulerschen Statistik rekonstruiert werden. Dadurch wird der Einfluss der einzelnen Übergangverteilungen beim Übergang vom Euler- zum Lagrangebild deutlich. Da die Übergangsrelation (11.16) exakt ist, dient dies auch als Selbstkonsistenztest für die numerischen Daten. In Abbildung 11.7 ist der Übergang von $f_e(v_e; r)$ zu $f_l(v_l; \tau = \tau_\lambda)$ zu sehen. Die oberste Grafik zeigt die Verteilung $f_e(v_e; r)$ für drei r ($r \approx 0.1, 0.073, 0.049$ von außen nach innen) aus dem Bereich, in dem $p_a(r|v_e; \tau = \tau_\lambda)$ (siehe Abb. 11.2) signifikant von Null verschieden ist. Für $r \approx 0.1$ ist die Verteilungsfunktion nicht von einer Gaußverteilung (schwarz gestrichelt) zu unterscheiden. Für kleinere r wird die Inkrementverteilung leicht nichtgaußisch. Dies liegt daran, dass sich bei so kleinen Längen die endliche Größe der Wirbel bemerkbar macht und die Statistik beeinflusst. Hier unterscheiden sich die Eulerschen Inkremente (11.1) leicht von den longitudinalen Inkrementen, die bei kleinen Skalen fast überhaupt nicht durch die kleinen Wirbel beeinflusst werden.

Die zweite Grafik von oben zeigt $f_{el}(v_e; \tau = \tau_\lambda)$. Hier sieht man, wie die Übergangverteilung p_a dafür sorgt, dass die Eulerschen Inkrementverteilungen zu verschiedenen r gemischt werden. Als Ergebnis erhält man eine Verteilung, die etwas zeltförmiger als die Ausgangsverteilungen ist. Wie bereits erwähnt, trägt aufgrund der geometrischen Struktur von p_a die Verteilung zu $r = 0.049$ hier mehr zum Zentrum der Verteilung f_{el} bei, während die Verteilungen zu größeren r mehr zu den Flügeln beitragen.

Die unterste Graphik zeigt $f_l(v_l; \tau = \tau_\lambda)$ (durchgezogene Linie). Man sieht deutlich, dass durch die Übergangswahrscheinlichkeit $p_b(v_p|v_e; \tau = \tau_\lambda)$ bei der Übersetzung von f_{el} zu f_l das Zentrum der Verteilung eingeschnürt wird. Warum dies so ist, wird klar, wenn man sich die Struktur von p_b vor Augen führt. Für kleine τ gibt es im zentralen inneren Bereich von p_b eine negative Korrelation von v_p und v_e , die zu den Rändern hin verschwindet. Hier bedeutet dies, dass zu einem gegebenen v_p aus dem Zentrum der Verteilung bevorzugt ein v_e mit entgegengesetzten Vorzeichen zu finden ist, so dass die Summe der beiden Größen, die den Lagrangeschen Inkrementen v_l

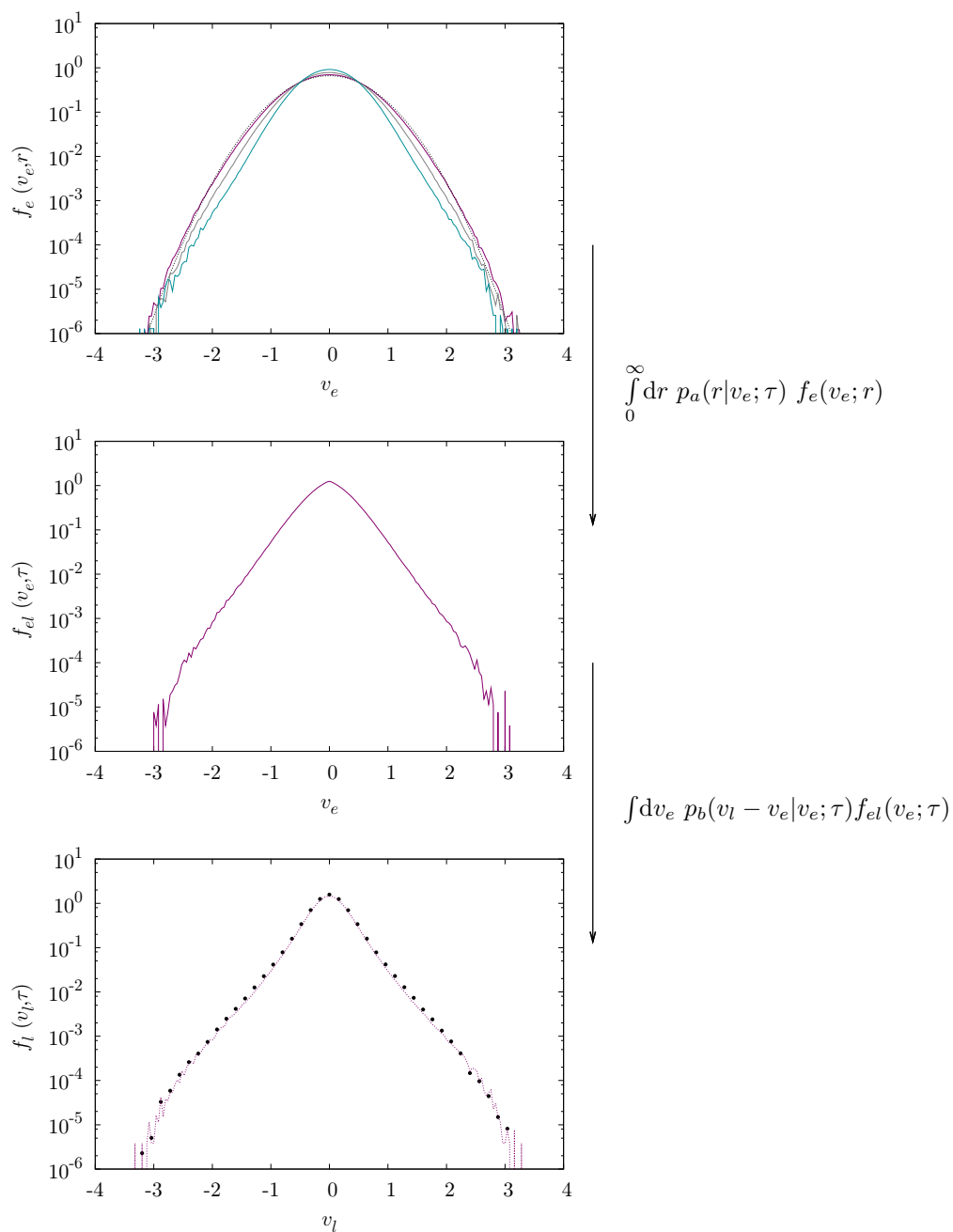


Abbildung 11.7 Übergang von $f_e(v_e; r)$ über $f_{el}(v_e; \tau)$ nach $f_l(v_l; \tau)$ mit $\tau = \tau_\lambda$. Die Daten stammen aus der Simulation `sim2d1024gaussA`.

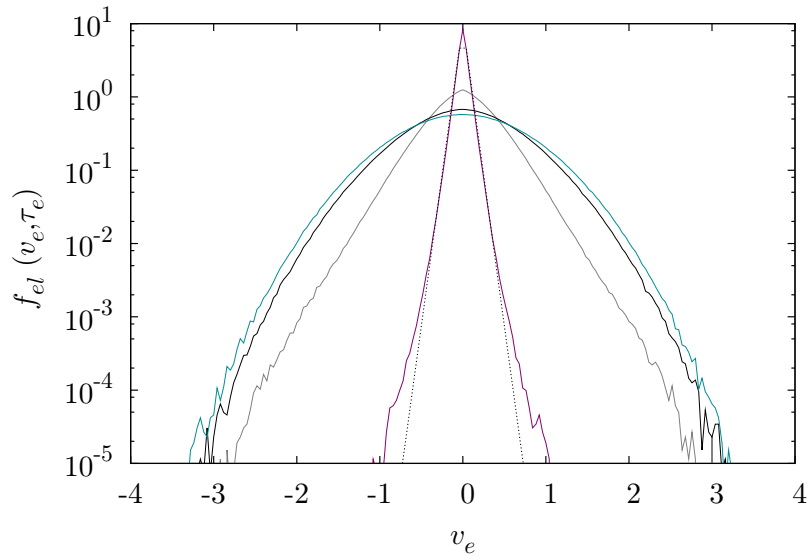


Abbildung 11.8 Darstellung der Verteilungsfunktion $f_{el}(v_e; \tau)$ `sim2d1024gaussA` für $\tau \approx 0.1\tau_\lambda$, $\tau = \tau_\lambda$, $\tau = T$ und $\tau = 3T$ (von außen nach innen). Die gestrichelte schwarze Linie entspricht der Verteilung $h(v_e) = c \exp(-d|v_e|)$ mit $c = 10$ und $d = 19$.

entspricht, tendenziell sehr kleine Werte annimmt. Das heißt, dass beim Übergang von f_{el} zu f_e die Werte im Zentrum stärker gewichtet werden.

Zusätzlich zur direkt aus den Daten gewonnenen Verteilung ist die rekonstruierte Verteilung (durch Punkte dargestellt) zu sehen. Die rekonstruierte Verteilung wurde mittels der Übersetzungsformel aus den numerisch bestimmten Verteilungen p_a , p_b und f_e errechnet. Die Übereinstimmung mit der direkt bestimmten Verteilung ist sehr gut. Für Zeitdifferenzen, die wesentlich kleiner sind als τ_λ , weicht die rekonstruierte Verteilung in den Flügeln leicht von der direkt berechneten Verteilungsfunktion ab. Je kleiner τ , desto größer ist diese Abweichung. Dies liegt vermutlich daran, dass zur Rekonstruktion bei kleinen Zeiten die Verteilung $f_e(v_e; r)$ für sehr kleine r benutzt wird. Für diese Abstände können die Flügel der Verteilungen nur bis zu relativ kleinen v_e geschätzt werden. Dies könnte bei der Multiplikation von f_e mit p_a innerhalb der Übersetzungsrelation zu einer fehlerhaften Schätzung der Flügel führen. Die Frage, ob eine sinnvolle Extrapolation der Flügel der Verteilung mittels *kernel density estimation* [Sil86] zu einer Verbesserung der Ergebnisse führen würde, konnte innerhalb dieser Arbeit nicht mehr untersucht werden.

Bei der Übersetzung von Eulerschen zu Lagrangeschen Inkrementen taucht die Verteilung $f_{el}(v_e; \tau)$ für die Inkremente auf, bei denen Anfangs- und Endpunkt zwar

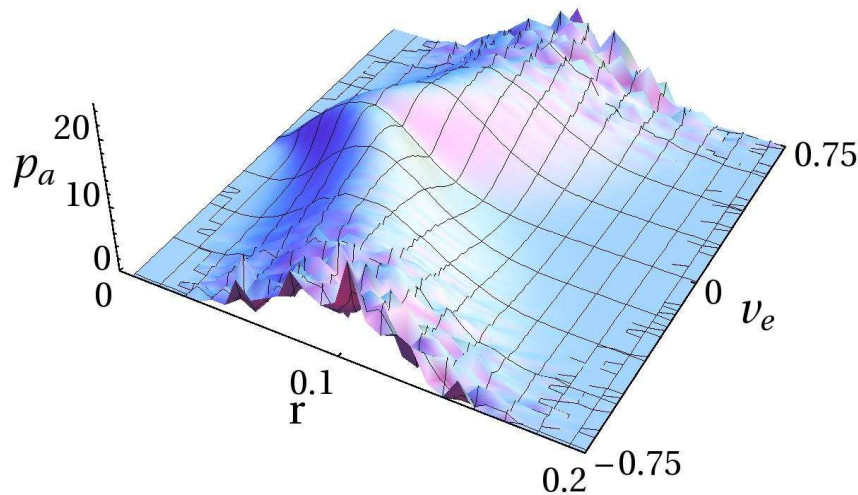


Abbildung 11.9 Die Übergangswahrscheinlichkeit $p_a(r|u_e; \tau)$ für den Datensatz `sim3d1024bochum` mit $\tau \approx \tau_\lambda$. Auffällig ist die strukturelle Ähnlichkeit zum zweidimensionalen Fall (Abb. 11.2).

auf einer Teilcentrajektorie liegen, die Geschwindigkeiten aber zur gleichen Zeit gemessen werden. In Abbildung 11.8 ist diese Verteilung für verschiedene τ dargestellt. Man sieht deutlich den Übergang von einer gaußischen zu einer nichtgaußischen Form. Für sehr kleine Zeiten konvergiert sie im Zentrum gegen eine Exponentialverteilung. Die Verteilung f_{el} ist insofern interessant, als dass sie im Fall gefrorener Turbulenz der Lagrangeschen Inkrementverteilung entspricht, da in gefrorener Turbulenz per Definition $v_p = 0$ gilt. Das bedeutet, dass in gefrorener Turbulenz die Inkrementverteilung für kleine Zeiten und damit auch die Beschleunigungsverteilung zumindest im Kern einer Exponentialverteilung entspricht.

11.1.3 Die Übergangswahrscheinlichkeiten für dreidimensionale Turbulenz

Die Übergangswahrscheinlichkeiten p_a und p_b zeigen im zweidimensionalen Fall jeweils eine bestimmte Struktur, die die statistischen Abhängigkeiten der Observablen untereinander widerspiegelt. Da der Zusammenhang (11.16) auch für drei Dimensionen gilt, ist es interessant zu sehen, ob die Übergangswahrscheinlichkeiten in diesem

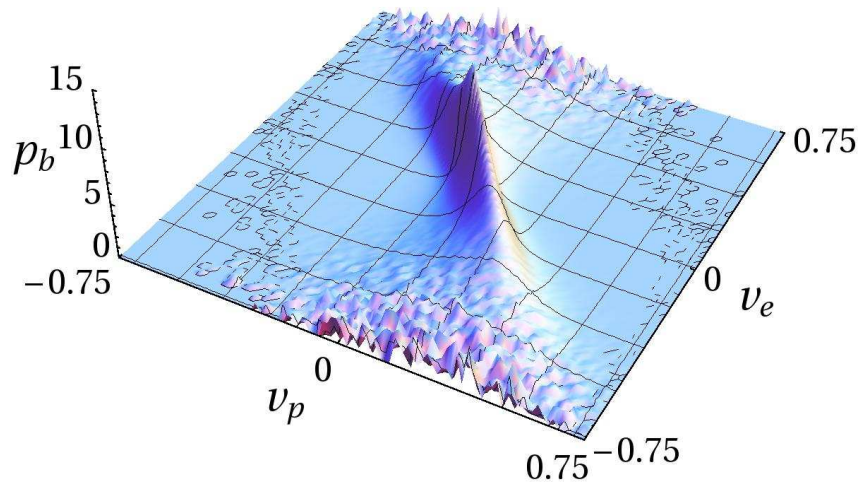


Abbildung 11.10 Darstellung von $p_b(v_p|v_e, \tau)$ für den Datensatz `sim3d1024bochum` mit $\tau \approx \tau_\lambda$. Auch hier ist die strukturelle Ähnlichkeit zum zweidimensionalen Fall (Abb. 11.5) sehr ähnlich.

Fall eine ähnliche Struktur haben wie in zwei Dimensionen. Zur Bestimmung von p_a und p_b wird der Datensatz der Simulation `sim3d1024bochum` [Hom09a] verwendet, da nur in diesem Datensatz die Geschwindigkeiten an den Startpunkten der Tracer mitgeschrieben wurden.

In Abbildung 11.9 ist p_a für die dreidimensionale Simulation `sim3d1024bochum` mit $\tau \approx \tau_\lambda$ zu sehen. Die Struktur der bedingten Verteilung hat starke Ähnlichkeit zum zweidimensionalen Fall. Wie dort, so verschieben sich auch hier die Verteilungen bei betragsmäßig größerem v_e hin zu größeren r , d. h. der Transport der Teilchen ist bei größeren Geschwindigkeitsdifferenzen stärker. Auch hier sorgt die Breite der Verteilung für die Mischung verschiedener Längenskalen.

In Abbildung 11.10 ist $p_b(v_p|v_e; \tau)$ mit $\tau \approx \tau_\lambda$ zu sehen. Die Verteilung wurde wiederum aus den Daten der Simulation `sim3d1024bochum` geschätzt. Auch hier ist die strukturelle Ähnlichkeit, d. h. das Auftauchen der negativen Korrelation im Zentrum der Verteilung, zum zweidimensionalen Fall auffällig.

Auch im dreidimensionalen Fall sorgen die Übergangsverteilungen dafür, dass die Lagrangeschen Inkrementverteilungen breitflügeliger sind als die Eulerschen Inkrementverteilungen. Der Einfluss ist in drei Dimensionen nicht ganz so augenfällig, da

die Inkrementverteilungen im Eulerbild schon intermittent sind.

11.1.4 Verhalten von p_b in Grenzfällen

Wie am Anfang des vorherigen Kapitels erwähnt, geht für $\tau \rightarrow 0$ das durch τ dividierte Lagrangesche Inkrement gegen die Beschleunigung und die funktionale Form der Inkrementverteilung geht in die funktionale Form der Beschleunigungsverteilung über. Betrachtet man die Definitionen der einzelnen in der Übersetzung vorkommenden Inkremente, so sieht man, dass für $u_{el} = 0$ die Relation $u_p = u_l$ gilt. Das bedeutet, dass die funktionale Form von $p_b(v_p|0; \tau)$ für $\tau \rightarrow 0$ gegen die funktionale Form von $f(a)$ strebt.

Es wurde schon angedeutet, dass die statistische Abhängigkeit zwischen v_p und v_e in p_b für große Zeiten nicht verschwindet. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies an der Definition der Inkremente u_p und u_{el} liegt. Eine ganz ähnliche Überlegung gibt es auch im Zusammenhang mit der Überprüfung der Markoveigenschaft der Eulerschen Inkremente [WKP04, Kle08].

Bezeichnet man die drei beteiligten Geschwindigkeiten abkürzend als

$$u_1 = v(\mathbf{y}, t), \quad u_2 = v(\mathbf{y}, t - \tau), \quad u_3 = v(\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tau, t), t) \quad (11.21)$$

mit den entsprechenden Ereignisraumvariablen v_1, v_2 und v_3 , dann gilt:

$$v_{el} = v_3 - v_1, \quad v_p = v_1 - v_2. \quad (11.22)$$

Da innerhalb der Übersetzungsrelation die Bezeichnung von v_{el} nach v_e wechselt, und somit in p_b nicht v_{el} sondern v_e vorkommt, wird im Folgenden die Bezeichnung $v_e = v_3 - v_1$ gewählt. Das Ziel ist eine Aussage über p_b bei großen τ zu machen. Startpunkt ist die Verbundverteilung $p(v_1, v_2, v_3)$, die für $\tau \gg T$ faktorisiert, da angenommen werden kann, dass die drei Geschwindigkeiten für sehr große Zeiten statistisch unabhängig sind. Die Verbundverteilung für die Inkremente v_p und v_e kann nach Gleichung 3.17 durch

$$\begin{aligned} p(v_p, v_e; \tau) &= \int dv_1 \int dv_2 \int dv_3 \delta(v_p - (v_1 - v_2)) \delta(v_e - (v_3 - v_1)) p(v_1) p(v_2) p(v_3) \\ &= \int dv_1 p(v_1) p(v_1 - v_p) p(v_1 + v_e) \end{aligned} \quad (11.23)$$

ausgedrückt werden. In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, dass die Einpunktverteilung der Geschwindigkeit in zweidimensionaler Turbulenz als Gaußverteilung mit Standardabweichung σ_v angenommen werden kann. In Gleichung (11.23) eingesetzt, führt dies auf:

$$p(v_p, v_{el}; \tau) = \frac{1}{\sqrt{12}\pi\sigma_v^2} \exp \left[-\frac{v_p^2 + v_e^2 + v_p v_e}{3\sigma_v^2} \right]. \quad (11.24)$$

Der bedingte Erwartungswert für eine bivariate Gaußverteilung und demnach für die Verteilung (11.24) ist gleich

$$\langle v_p | v_e; \tau \rangle = -0.5v_e. \quad (11.25)$$

Der Grund dafür, dass, wie in Abbildung zu sehen, der bedingte Erwartungswert für sehr große τ nicht unabhängig von v_e wird, liegt demnach in der Definition der Inkremente begründet.

11.1.5 Verbindung zur Übersetzung des Multifraktalen Modells

In Abschnitt 4.2.2 wurde schon erwähnt, dass versucht wurde das Multifraktale Modell zur Beschreibung der Eulerschen Inkrementstatistik dreidimensionaler Turbulenz in das Lagrangebild zu übersetzen. Die in diesem Zusammenhang verwendete Übersetzungsregel (11.16) wird mit der hier verwendeten Notation als $|\tilde{\mathbf{x}}| \sim v_e \tau$ geschrieben. Die Grundannahme ist hier, dass der von einem Teilchen während der Zeitdifferenz τ zurückgelegte Weg proportional zu dieser Zeitdifferenz ist. Diese Annahme korrespondiert zu der Wahl

$$p_a = \delta(r - v_e \tau). \quad (11.26)$$

in (11.16). Die zusätzliche Annahme, dass die Eulerschen Geschwindigkeitsdifferenzen auf der Skala r proportional zu den Lagrangeschen Geschwindigkeitsdifferenzen auf der Zeitskala τ sind, führt auf

$$p_b = \delta(v_l - v_e). \quad (11.27)$$

Setzt man die so gewählten Übergangswahrscheinlichkeiten in Gleichung (11.16) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} f_l(v_l; \tau) &= \int dv_e \delta(v_l - v_e) \int_0^\infty dr \delta(r - v_e \tau) f_e(v_e; r) \\ &= f_e(v_l; v_e r). \end{aligned} \quad (11.28)$$

Dies bedeutet, dass mit den gemachten Annahmen für die Übergangswahrscheinlichkeit die funktionale Form der Lagrangeschen Inkrementverteilung im wesentlichen der der Eulerschen Inkrementverteilung entspricht. Ein Blick auf die numerisch geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten für zweidimensionale und dreidimensionale Turbulenz zeigt klar, dass die Annahmen, die bei der Übersetzung des Multifraktalen Modells gemacht wurden, nicht sinnvoll sind. Dies gilt insbesondere für große Zeitdifferenzen. Für den Grenzfall sehr kleiner Zeiten kann die Annahme, dass der zurückgelegte Weg proportional zur Zeit ist, sinnvoll sein, wie aus Abbildung 7.7 klar wird. Dafür spricht auch, dass in [BBC⁺04a] die funktionale Form der Beschleunigungsverteilung gut approximiert werden konnte.

Unter der Annahme, dass die Eulerschen Strukturfunctionsexponenten $\zeta_e(n)$ bekannt sind, können mittels Gleichung (11.28) die Exponenten $\zeta_l(n)$ der Lagrangeschen Strukturfunctionen berechnet werden. Dazu kann man die Mellintransformation

$$f_e(v_e, r) = \frac{1}{v_e} \int_{-i\infty}^{i\infty} dn S_e(n) v_e^{-n} \quad (11.29)$$

mit $S_e(n) = A_e(n) r^{\zeta_e(n)}$ verwenden [Yak06]. Zur Bestimmung der Lagrangeschen Exponenten ist es nicht nötig, die Amplituden $A_e(n)$ zu kennen. Benutzt man Gleichung (11.28) und die Mellintransformation, erhält man:

$$f_l(v_l; \tau) = \frac{1}{v_l} \int_{-i\infty}^{i\infty} dn A_e(n) \tau^{\zeta_e(n)} v_l^{\zeta_e(n)-n}. \quad (11.30)$$

Um die Lagrangeschen Strukturfunctionen zu berechnen, wird nun die so berechnete Lagrangesche Verteilungsfunktion in die inverse Mellintransformation eingesetzt:

$$\begin{aligned} S_l(n) &= \int_0^\infty dv_l v_l^n \overline{f_l(v_l; \tau)} \\ &= \int_0^\infty dv_l \frac{1}{v_l} v_l^n \int_{-i\infty}^{i\infty} dj A_e(j) \tau^{\zeta_e(j)} v_l^{\zeta_e(j)-j}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Jetzt führt man die Ersetzung $j'(j) = j - \zeta_e(j)$ und $dj' = (1 - \partial_j \zeta_e(j)) dj$ durch und bezeichnet die inverse Funktion mit $j = j(j')$. Dadurch erhält man:

$$S_l(n) = \int_0^\infty dv_l \frac{1}{\delta v_l} v_l^n \int_{-i\infty}^{i\infty} dj' S_l(j') (\delta v_l)^{-j'} \quad (11.32)$$

mit $S_l(j') = \frac{A_e(j)}{1 - \partial_j \zeta_e(j)} \tau^{\zeta_e(j)}$ und $j' = j - \zeta_e(j)$. Für die Exponenten erhält man die Übersetzungsformel

$$\zeta_l(n - \zeta_e(n)) = \zeta_e(n). \quad (11.33)$$

Anschaulich ist diese Relation so zu verstehen, dass man sich bei bekannten $\zeta_e(n)$ eine Tabelle macht, in der man in der x -Spalte $n - \zeta_e(n)$ notiert, während man in derselben Zeile $\zeta_e(n)$ in die y -Spalte einträgt. Die so erhaltene Funktion $y(x)$ gibt die Lagrangeschen Strukturfunctionsexponenten wieder.

Es kann nun gezeigt werden, dass Gleichung (11.33) äquivalent zu Gleichung (4.43) ist. Dazu betrachtet man noch einmal die Eulerschen Strukturfunctionsexponenten

$$\zeta_e(n) = \inf_h [nh + 3 - D_e(h)]. \quad (11.34)$$

Das Infimum erhält man durch Nullsetzen der Ableitung des Ausdrucks in Klammern nach h :

$$n = D'_e(h_e^*). \quad (11.35)$$

Setzt man h_e^* in den Ausdruck für die Eulerschen Strukturfunctionsexponenten ein, ergibt sich:

$$\zeta_e(n) = nh_e^* + 3 - D_e(h_e^*). \quad (11.36)$$

Ersetzt man nun im Ausdruck für die Lagrangeschen Strukturfunctionsexponenten (4.43) n durch $n - \zeta_e(n)$, wobei $\zeta_e(n)$ durch (11.36) gegeben ist, so erhält man:

$$\zeta_l(n - \zeta_e(n)) = \inf_h \left[\frac{(n - nh_e^* - 3 + D_e(h_e^*))h + 3 - D_e(h)}{1 - h} \right]. \quad (11.37)$$

Um das Infimum zu finden, kann man den Term in Klammern wieder nach h ableiten und Null setzen. Dies führt auf:

$$D'_e(h_e^*) - D'_e(h) + D_e(h_e^*) - D_e(h) - D'_e(h_e^*)h_e^* + D'_e(h)h = 0, \quad (11.38)$$

Das h , bei dem diese Gleichung erfüllt ist, wird hier analog zum Eulerschen Fall mit h_l^* bezeichnet. Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $h_l^* = h_e^*$ gilt, woraus

$$\zeta_l(n - \zeta_e(n)) = nh_e^* + 3 - D_e(h_e^*) = \zeta_e(n) \quad (11.39)$$

folgt. Man erhält wieder (11.33). Dies zeigt noch einmal, dass das Multifraktale Modell im Lagrangebild nach [BBC⁺04a] als Spezialfall in der hier abgeleiteten Übersetzungsrelation enthalten ist. Wie weiter oben schon erwähnt, ist dieser Spezialfall, also die Annahme von deltaförmigen Übergangsverteilungen, unrealistisch. Dies zeigt sich auch an der Übersetzung der Strukturfunctionsexponenten. Setzt man nämlich für ζ_n die K41-Exponenten ein, so ergeben sich auch im Lagrangebild die entsprechenden K41-Exponenten. Das heißt, dass eine selbstähnlichen Statistik im Eulerbild zu einer selbstähnliche Statistik im Lagrangebild führt, was den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit klar widerspricht.

11.1.6 Kompressible Turbulenz

In Abschnitt 11.1 wurde erwähnt, dass die Übersetzungsregel für die Inkremente auch auf den Fall kompressibler Turbulenz angewandt werden kann. Die Untersuchung kompressibler turbulenter Strömungen ist zwar nicht Gegenstand dieser Arbeit, dennoch soll an dieser Stelle auf einige prinzipielle Punkte bei der Beziehung zwischen der Eulerschen und der Lagrangeschen Beschreibung eingegangen werden.

Zur Beschreibung kompressibler Strömungen muss neben der Zeitentwicklung des Geschwindigkeitsfeldes auch die Änderung der Dichte an jedem Punkt in der Strömung berücksichtigt werden. Daher müssen die Gleichungen (2.4) und (2.6) im Fall kompressibler Fluide abgeändert werden [Sch07]. An dieser Stelle ist nur wichtig, dass die Dichte des Fluids, und damit einhergehend die Dichte der Tracer, räumlich und zeitlich nicht mehr konstant sind (siehe z. B. [Sch07] und Abb. 11.11).

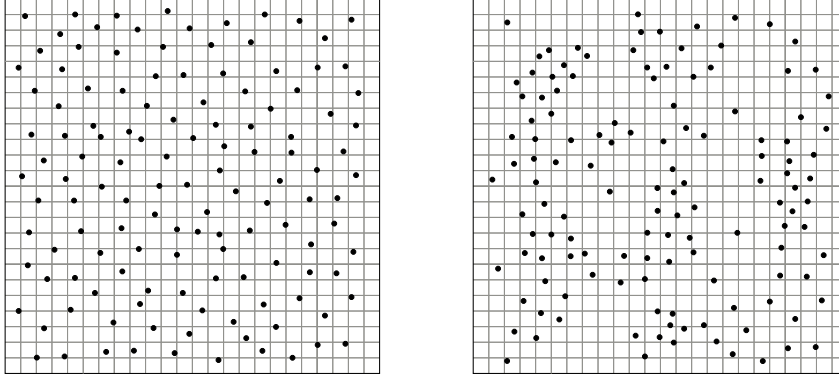


Abbildung 11.11 Schematische Darstellung der Verteilung der Teilchen in inkompressibler (links) und kompressibler (rechts) Turbulenz.

Der wichtige Aspekt beim Übergang vom Euler- zum Lagrangebild ist die Tatsache, dass die Orte von Parametern zu Zufallsvariablen werden, da sich die Teilchen frei bewegen können. In inkompressibler Turbulenz ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden, konstant und unabhängig vom Geschwindigkeitsfeld. Wie eingangs festgestellt, gilt dies für kompressible Strömungen aufgrund der Dichteschwankungen nicht mehr. Hier können die Teilchenpositionen statistisch vom Geschwindigkeitsfeld abhängen.

In inkompressibler Turbulenz ist es egal, ob man zur Bestimmung der Inkrementverteilung $f_e(v_e; r)$ die Punkte auf dem Gitter oder die Orte der Teilchen benutzt. In beiden Fällen führt dies auf die gleiche Verteilung und damit in der Übersetzungsrelation zum gleichen Ergebnis. In kompressibler Turbulenz macht es einen Unterschied, ob man die Gitterpunkte oder die Teilchenorte als Ausgangspunkt zur Bestimmung von f_e macht, da aufgrund der ungleichen Verteilung der Teilchen ein Abstand r mit einer anderen Wahrscheinlichkeit vorkommt, als wenn man das Gitter als Grundlage benutzt. Damit man die Übersetzungsrelation im kompressiblen Fall weiterhin so benutzen kann, muss man die Verteilung f_e^+ als Ausgangspunkt benutzen, bei deren Bestimmung die Teilchenorte als Grundlage dienen. Wenn man aber von der vom Gitter geschätzten Verteilung f_e ausgehen will, muss man noch die formale Ersetzung der festen Orte x und y durch die Teilchenpositionen x^+ bzw. y^+ vornehmen. Dies geschieht auf Basis der feinkörnigen Verteilungen durch

$$\hat{f}_e^+(v_e; \mathbf{x}^+, \mathbf{y}^+, t) = \int d\mathbf{y}^+ \int d\mathbf{x}^+ \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}^+) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^+) \hat{f}_e(v_e; \mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (11.40)$$

Hier sieht man schon, dass beim Übergang zwischen den Verteilungen f_e^+ und f_e eine weitere Übergangswahrscheinlichkeit auftaucht. Dieser Zusammenhang sollte

11 Die Verknüpfung von Eulerscher und Lagrangescher Inkrementstatistik

in Zukunft anhand von Teilchendaten aus der Simulation kompressibler Turbulenz näher untersucht werden.

12 Modellierung der Lagrangeschen Beschleunigung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Lagrangesche Einteilchen-N-Zeit-Statistik ausführlich für zwei- und dreidimensionale Turbulenz untersucht. In diesem Kapitel soll nun der Grundstein für ein Modell gelegt werden, dass die wesentlichen Eigenschaften der Lagrangeschen Statistik für ein Teilchen in zweidimensionaler Turbulenz wiedergibt.

Auf Modellierung wird immer dann zurückgegriffen, wenn es für das betrachtete System entweder keine Grundgleichung gibt oder wenn, wie in der Turbulenz, zwischen physikalischem Phänomen und der Grundgleichung nur schwer eine Verbindung herzustellen ist.

Ziel von Modellierung ist es, die wesentlichen Eigenschaften eines Systems durch Gleichungen wiederzugeben, die numerisch oder analytisch wesentlich einfacher behandelbar sind als die ursprünglichen Gleichungen. Dies ist sehr nützlich für Anwendungen, besonders wenn die entsprechenden Größen für weiterführende Rechnungen benötigt werden. Für die Grundlagenforschung sind vereinfachende Modelle interessant, um z. B. festzustellen, was die wesentlichen Einflüsse auf eine bestimmte Observable sind. Ein Modell kann unter diesen Umständen immer nur eine Näherung sein.

Bei einem so komplexen Problem wie der Turbulenz hängt es natürlich stark von der Fragestellung ab, welches die wesentlichen Eigenschaften des Systems sind und wie demzufolge die Modellierung zu erfolgen hat. Wie eingangs erwähnt, steht hier die Einteilchen-N-Zeit-Statistik im Zentrum der Betrachtungen. Ausgangspunkt der Modellierung sind daher die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) \\ \frac{d}{dt}\mathbf{U}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{A}(t, \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{12.1}$$

Die Kopplung der Bewegung eines Teilchens und damit die Komplexität des Problems liegt in dem Beschleunigungsterm $\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$. Genau für diesen Term muss ein Modellansatz gefunden werden.

Ein Ansatz zur Modellierung des Beschleunigungsterms geht auf Obukhov [Obo59] zurück. Für die eindimensionale Version des Gleichungssystems (12.1) wurde die An-

nahme gemacht, dass die Beschleunigung einem stochastischen Prozess mit

$$\begin{aligned}\langle A(t, y) \rangle &= 0 \\ \langle A(t, y)A(t', y) \rangle &= 2Q\delta(t - t')\end{aligned}\tag{12.2}$$

genügt, wobei die Beschleunigung selbst gaußverteilt ist. Ausgehend von dieser Annahme kann eine zu den Langevingleichungen (12.1) äquivalente Fokker-Planck-Gleichung abgeleitet werden. Die Lösung dieser Gleichung führt für die Lagrange-schen Strukturfunktionen auf das von der K41-Theorie vorhergesagte Skalierungs-verhalten (siehe Gleichung (4.40)).

Darüber hinaus gibt es viele Modellierungsansätze für die Beschleunigung wie die superstatistischen Modelle [Bec03, Bec07] oder Modelle auf Basis eindimensionaler Langevingleichungen wie z. B. in [AM04]. Diese versuchen, die Beschleunigungs-verteilung zu modellieren. Auch Erweiterungen des Oboukhovmodells basierend auf *continuous time random walks* [BF05] wurden diskutiert. In [Saw91] wurde ein Modell der Lagrangeschen Einteilchenstatistik vorgestellt, bei dem sowohl für die Beschleu-nigung, als auch für die Geschwindigkeit eine Langevingleichung aufgestellt wurde.

An dieser Stelle soll ein Modellansatz vorgestellt werden, der auf den Erfahrungen der letzten Kapitel aufbaut. Sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Turbulenz erhält man eine Liste mit Eigenschaften, die ein solches Modell zumindest qualitativ erfüllen sollte:

- Die Komponenten der Beschleunigung besitzen eine endliche Markovzeit.
- Die Beschleunigungsverteilung ist nichtgaußisch.
- Die Form der Beschleunigungsautokorrelation muss die Stationarität der Ge-schwindigkeitsverteilung gewährleisten.
- Die Korrelation der Beschleunigungsquadrate und die Kreuzkorrelationen soll-ten qualitativ richtig wiedergegeben werden.
- Das Modell sollte die Intermittenz der Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkre-mente enthalten.

Bevor das Modell entwickelt wird, soll noch auf die Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizienten für die Beschleunigung eingegangen werden.

12.1 Exkurs: Schätzung von Drift und Diffusion

In Abschnitt 3.2.2 wurde angedeutet, dass man die Entwicklungsgleichung für einen Markovprozess parameterfrei aus der für den Prozess vorliegenden Zeitreihe bestim-men kann, indem man die in (3.66) definierten Drift- und Diffusionskoeffizienten

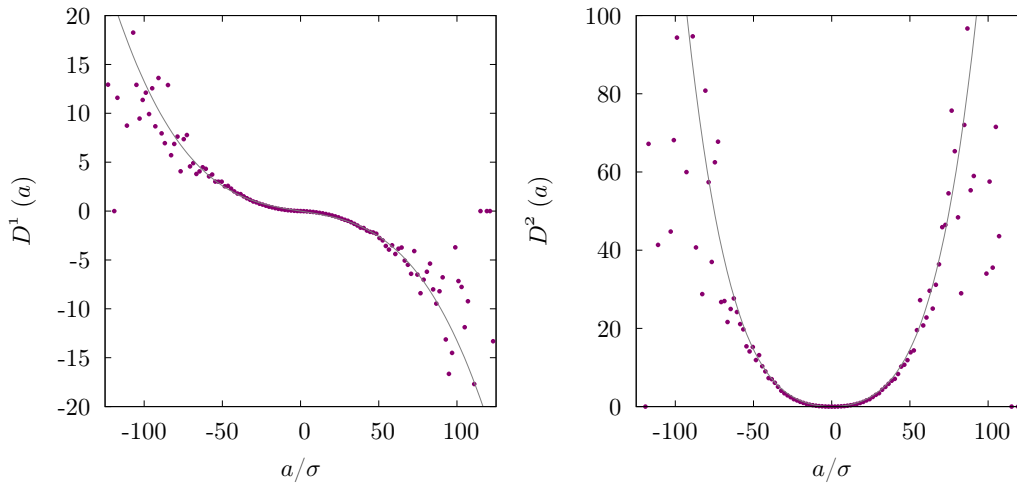


Abbildung 12.1 Darstellung der nach Gleichung (12.3) bzw. (12.4) aus den Daten der Simulation `sim3d1024` geschätzten Drift- und Diffusionskoeffizienten (jeweils violette Punkte). Zum Vergleich sind die Polynome $-0.00035x^3 - 0.08a$ (grau, linke Abbildung) und $0.0012 + 0.035a^2 + 0.0001a^4$ (grau, rechte Abbildung) eingezeichnet.

berechnet. Die vollständige Beschreibung eines stochastischen Prozesses auf Basis der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung bzw. Langevingleichung ist strenggenommen nur bei Prozessen mit einer verschwindenden Markovlänge möglich. Nur in diesem Fall ist die volle Information über den stochastischen Prozess in $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ enthalten. Die Untersuchungen zur Beschleunigung haben aber gezeigt, dass diese Voraussetzung für die Beschleunigung nicht erfüllt ist. Dennoch ist es interessant, diese Größen zu schätzen, und zu überprüfen, welche Eigenschaften des stochastischen Prozesses dadurch reproduziert werden können.

Im Fall der Lagrangeschen Beschleunigung müssen die beiden Erwartungswerte

$$D^{(1)}(a) \approx \frac{1}{n!} \frac{1}{\tau} \langle [A_i(\mathbf{y}, t + \tau) - A_i(\mathbf{y}, t)] | A_i(\mathbf{y}, t) = a \rangle \quad (12.3)$$

$$D^{(2)}(a) \approx \frac{1}{n!} \frac{1}{\tau} \langle [A_i(\mathbf{y}, t + \tau) - A_i(\mathbf{y}, t)]^2 | A_i(\mathbf{y}, t) = a \rangle \quad (12.4)$$

für das kleinste zur Verfügung stehende Zeitintervall τ aus den Teilchendaten bestimmt werden. Bei der Schätzung der Erwartungswerte wird über alle Raumrichtungen, alle Teilchen und über die Zeit gemittelt.

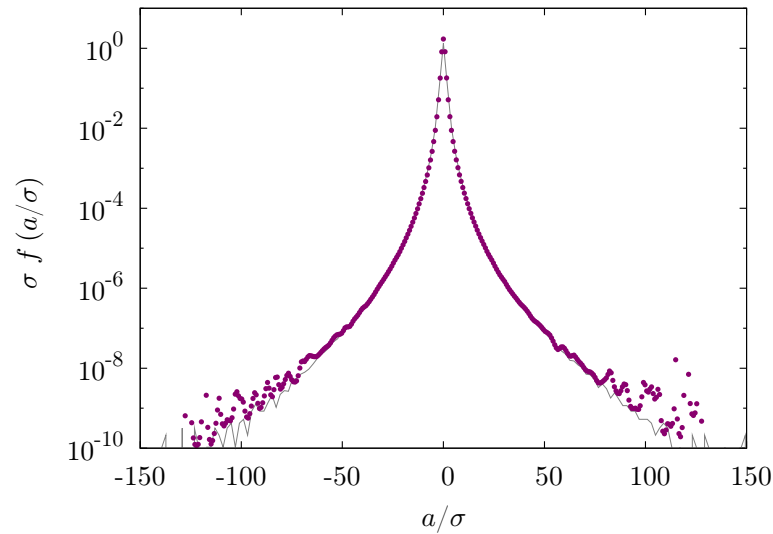


Abbildung 12.2 Darstellung der nach Gleichung (12.5) aus den in Abbildung 12.1 gezeigten Drift- und Diffusionskoeffizienten rekonstruierten Beschleunigungsverteilung (Punkte) zusammen mit der direkt aus den Daten geschätzten Verteilung (siehe Abb. 9.1.)

12.1.1 Dreidimensionale Turbulenz

In Abbildung 12.1 ist das Ergebnis der Schätzung der Erwartungswerte für die Daten aus `sim3d1024` zu sehen. Der Driftkoeffizient ist gut durch ein ungerades Polynom dritter Ordnung approximierbar. Der Diffusionskoeffizient ist nicht konstant, sondern näherungsweise proportional zu einem geraden Polynom vierter Ordnung. Das bedeutet, dass hier die Schätzung einen stochastischen Prozess mit multiplikativen Rauschen nahelegt. In beiden Fällen beginnen die Koeffizienten aufgrund der begrenzten Datenmenge bei Beschleunigungswerten größer als ca. 75σ stärker zu fluktuieren. Der Offset des Diffusionskoeffizienten ist in der Darstellung nicht sichtbar, da er mit $D^{(2)}(0) \approx 0.0012$ extrem klein ist.

Bei Kenntnis der Koeffizienten $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ läßt sich die Verteilung $f(a)$ als stationäre Lösung

$$f(a) = \frac{\mathcal{N}}{D^{(2)}(a)} \exp \left[\int_{-\infty}^a da' \frac{D^{(1)}(a')}{D^{(2)}(a')} \right] \quad (12.5)$$

der Fokker-Planck-Gleichung (3.72) berechnen. Dabei ist \mathcal{N} die Normierungskonstante. Das Ergebnis ist zusammen mit der direkt geschätzten Verteilung in Abbildung 12.2 zu sehen. Die Übereinstimmung ist bis auf den Bereich, in dem die geschätzten Drift- und Diffusionskoeffizienten stark fluktuieren, sehr gut.

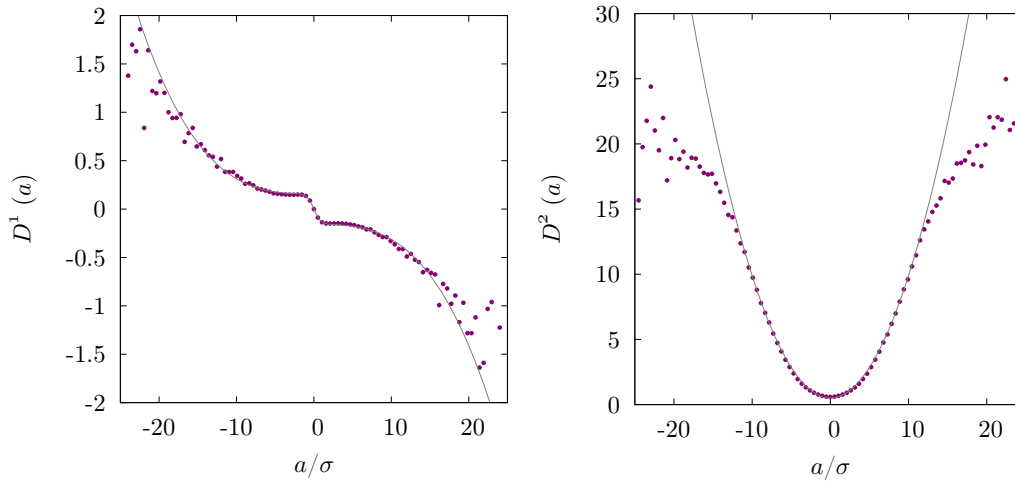


Abbildung 12.3 Darstellung der nach Gleichung (12.3) bzw. (12.4) aus den Daten der Simulation `sim2d1024GaussA` geschätzten Drift- und Diffusionskoeffizienten (jeweils violette Punkte). Zum Vergleich sind die Funktionen $-0.16 \tanh(0.15a) + 0.00051a - 0.00000035a^3$ (grau, linke Abbildung) und $0.5 + 0.0016a^2$ (grau, rechte Abbildung) eingezeichnet.

Wäre der Driftkoeffizient linear und die Diffusion konstant, so wäre die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung eine Gaußverteilung. Besonders der nichtlineare Diffusionsterm führt dazu, dass die Verteilung der Beschleunigung wesentlich breitere Flügel als eine Gaußverteilung hat.

12.1.2 Zweidimensionale Turbulenz

In Abbildung 12.1 sind die geschätzten Koeffizienten (12.3) bzw. (12.4) für die Daten der zweidimensionalen Simulation `sim2d1024gaussA` zu sehen. Im Vergleich zum dreidimensionalen Fall sind zwei signifikante Unterschiede zu sehen. Zum einen tritt beim Driftkoeffizienten im Bereich um Null herum ein starker Knick auf, zum anderen scheint die Steigung des Diffusionskoeffizienten für Beschleunigungswerte größer als ca. 15σ wieder kleiner zu werden. Der Knick ist dafür verantwortlich, dass sich der funktionale Verlauf der Beschleunigungsverteilung in zwei Dimensionen (siehe Abb. 9.2) im Zentrum stark von den Flügeln unterscheidet. Das Abknicken des Diffusionskoeffizienten dagegen scheint für das Einbrechen der Beschleunigungsverteilung bei großen Beschleunigungswerten verantwortlich zu sein.

Auf die Darstellung der Rekonstruktion wurde hier verzichtet. Wie im dreidimensionalen Fall, so stimmt auch in zwei Dimensionen die über die Koeffizienten (12.4) und Gleichung (12.5) rekonstruierte Verteilung mit der direkt geschätzten Verteilung

sehr gut überein.

Sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Turbulenz kann man feststellen, dass mittels der Drift- und Diffusionskoeffizienten die stationären Beschleunigungsverteilungen reproduziert werden können. Dies funktioniert, obwohl die Markovlänge nicht verschwindend ist.

Ein weiteres Problem mit der Interpretation der Schätzung ist, dass zumindest für die Simulationen der dreidimensionalen Turbulenz die Beschleunigungszeitreihen differenzierbar sind, da in diesen Simulationen kein stochastischer Antrieb vorhanden ist. Daraus folgt, dass die Koeffizienten für $\tau \rightarrow 0$ verschwinden. Für einen stochastischen Prozess ist dies jedoch nicht der Fall. In [Chi96] wurde gezeigt, dass sich Verteilungsfunktionen wie die hier untersuchte Beschleunigungsverteilung exakt durch zwei bedingte Erwartungswerte festlegen lassen. Dass die Rekonstruktion trotz der eben aufgeführten Einwände so gut funktioniert, scheint daran zu liegen, dass (12.3) und (12.4) gute Näherungen für die in [Chi96] abgeleiteten bedingten Erwartungswerte sind.

Im Lichte der Ergebnisse dieses Abschnittes dürfte eine genauere Untersuchung dieses Zusammenhangs lohnend sein.

12.2 Das Langevinmodell

Nach dem Einschub zu Drift und Diffusion soll nun auf Basis von Langevingleichungen das Modell für die Einteilchenstatistik entwickelt werden. Ein Hauptaspekt dabei ist die endliche Markovlänge der Beschleunigung. Eine endliche Markovlänge kann im Rahmen einer Langevingleichung relativ einfach realisiert werden. Dies gelingt dadurch, dass man kein deltakorreliertes Rauschen verwendet, sondern ein Rauschen mit einer endlichen Korrelationslänge. Dies kann man einfach dadurch erreichen, dass man zwei Langevingleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\gamma_y y + \Gamma \\ \dot{x} &= -\gamma_x x + y\end{aligned}\tag{12.6}$$

koppelt [Ris96], wobei Γ ein deltakorreliertes und gaußverteiltes Rauschen darstellt. Die erste Gleichung erzeugt ein stochastisches Signal mit der endlichen Korrelationszeit $1/\gamma_y$. Wenn man wie in (12.6) diesen Prozess als Rauschen in die zweite Langevingleichung einkoppelt, so hat dieser Prozess eine endliche Markovlänge. Die Markovlänge des x -Prozesses richtet sich dann nach der Korrelationszeit des y -Prozesses.

Aus den Untersuchungen zu den Kreuzkorrelationen in Abschnitt 9.3.1 ist bekannt, dass zumindest die Quadrate der Beschleunigungskomponenten miteinander korreliert sind und somit die Annahme sinnvoll ist, dass die Komponenten der Beschleunigung miteinander gekoppelt sind. Unter Berücksichtigung der oben angestellten Überlegungen zur Realisation endlicher Markovlängen mittels Langevingleichungen

Parameter	γ_1	γ_2	k_1	k_3	k_{xy}	q	Δt
Wert	-0.175	-0.005	0.0	-0.125	-4.0	0.4	0.005

Tabelle 12.1 Auflistung der für die Simulation des Gleichungssystems (12.9) benutzten Parameter. Die Langevingleichungen wurden dabei mit dem Zeitschritt Δt integriert.

ist es demnach sinnvoll, für jede Beschleunigungskomponente eine Langevingleichung zu formulieren und beide untereinander zu koppeln:

$$\begin{aligned}\dot{a}_x &= f_x(a_x, a_y) + q\Gamma_x \\ \dot{a}_y &= f_y(a_x, a_y) + q\Gamma_y.\end{aligned}\tag{12.7}$$

Die Frage ist jetzt, wie die Terme f_x und f_y auszusehen haben, um die weiteren Anforderungen zu erfüllen. Eine Idee besteht darin, die Funktionen als von x und y abhängige Polynome zu konstruieren, wobei die einzelnen Terme nur ungerade Potenzen darstellen dürfen. Die Betrachtung der im vorherigen Abschnitt geschätzten Drifkoeffizienten legt auch nahe, dass nichtlineare Terme miteinfließen sollten. An dieser Stelle wird für die Gleichungen die Form

$$\dot{a}_x = -\gamma_1 a_x - \gamma_3 a_x^3 - k_1 a_y - k_3 a_y^3 - k_{xy} a_y a_x^2 + q\Gamma_x\tag{12.8}$$

$$\dot{a}_y = -\gamma_1 a_x - \gamma_3 a_x^3 + k_1 a_x + k_3 a_x^3 + k_{xy} a_x a_y^2 + q\Gamma_y\tag{12.9}$$

gewählt, d. h. es wird jeweils nur der nichtlineare Term niedrigster Ordnung mitgenommen. Die Wahl für die Vorzeichen der Kopplungsterme und die Einführung des Mischterms $k_{ij} a_j a_i^2$ liegt darin begründet, dass die Fläche unter der Autokorrelationsfunktion gleich Null sein muss, damit die Geschwindigkeitsstatistik stationär wird. Die damit verbundene zeitweise Antikorrelation der Beschleunigung kann man anschaulich mit den kreisförmigen Bewegungen der Teilchen im turbulenten Feld in Verbindung bringen. Bewegt sich ein Teilchen auf einer Kreisbahn, so kehrt sich das Vorzeichen der Beschleunigung nach einer gewissen Zeit um, was zu einer Antikorrelation führt. Mit Bezug auf die Bewegungsgleichungen eines Teilchens auf einer Kreisbahn oder die eines harmonischen Oszillators wurden die Kopplungsterme daher in der einen Gleichung mit einem negativen Vorzeichen ausgestattet. Da man auf diese Weise aber nur gedämpft schwingende Korrelationsfunktionen oder Korrelationsfunktionen ohne negativen Bereich konstruieren kann, wurde der oben erwähnte Mischterm eingeführt. Dieser Term sorgt dafür, dass die Kopplung bei kleinen Amplituden immer schwächer wird. So ist es möglich eine Korrelationsfunktion zu konstruieren, die nur einen Unterschwinger besitzt. Damit der Term diese Aufgabe erfüllen kann, muss sein Vorfaktor groß gegenüber den Vorfaktoren der anderen Terme sein. Auf die Wahl eines multiplikativen Rauschterms wird hier verzichtet.

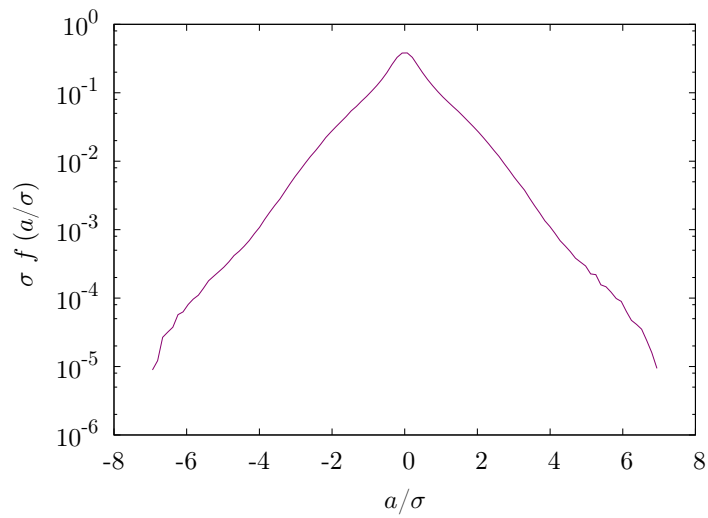


Abbildung 12.4 Darstellung der aus der numerischen Lösung des Gleichungssystems (12.9) gewonnenen Verteilungsfunktion $f(a)$.

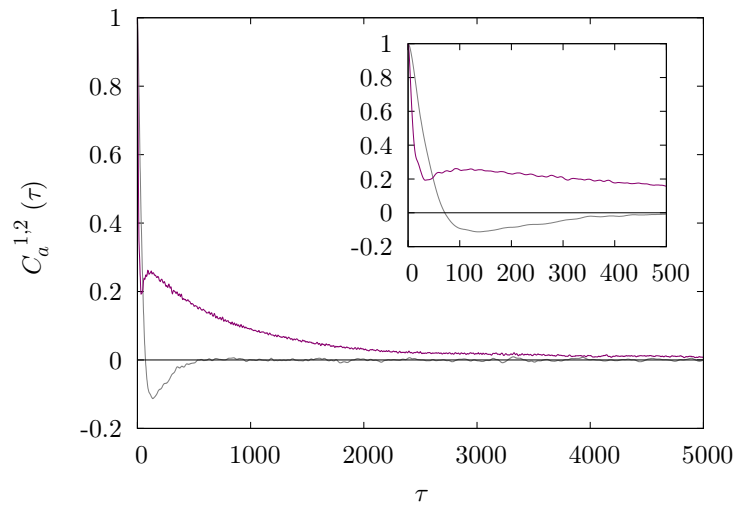


Abbildung 12.5 Darstellung der Korrelationsfunktionen $C_a^1(\tau)$ (grau) und $C_a^2(\tau)$ (violett). Das Inset zeigt eine Vergrößerung des vorderen Teils der Korrelationsfunktionen.

Die gekoppelten Langevingleichungen wurden mit den in Tabelle 12.1 aufgeführten Parametern numerisch simuliert. Die Diskretisierung geschah dabei nach Gleichung (3.71)).

In Abbildung 12.4 ist die Verteilungsfunktion $f(a)$ zu sehen. Sie zeigt zwar große Unterschiede zur den aus Daten von `sim2d1024gaussA` und `sim2d1024deltaA` geschätzten Verteilungen, sie weicht aber auch stark von einer Gaußverteilung ab. Wichtiger ist jedoch das Verhalten der Korrelationsfunktionen $C_a^1(\tau)$ und $C_a^2(\tau)$, die entsprechend Gleichung (9.4) definiert sind. Die Korrelationsfunktion $C_a^1(\tau)$ zeigt wie in Abbildung 9.6 einen Unterschwinger und die Quadrate der Beschleunigung sind auch, wie für die Simulation `sim2d1024gaussA`, extrem lange korreliert. Interessant ist auch, dass auch das Minimum in $C_a^2(\tau)$ reproduziert wird. Angemerkt sei noch, dass der Unterschwinger hauptsächlich von k_{xy} beeinflusst wird, während sich Veränderungen an k_3 auf die Langzeitkorrelation der Quadrate auswirken.

Um die Markoveigenschaften des simulierten Prozesses zu testen werden auch hier, wie in Gleichung (9.5), die einfach- und zweifach bedingte Beschleunigungsverteilung miteinander verglichen. In Abbildung 12.6 sieht man den Vergleich der Höhenliniendiagramme von $p(a_1|a_2, a_3)$ und $p(a_1|a_2)$ für zwei verschiedene Zeitdifferenzen τ . Deutlich zu sehen ist, dass die Markoveigenschaft für kleine Zeiten nicht erfüllt ist, während sie für große Zeiten, zumindest für den Schnitt bei $a_3 = 0$, erfüllt zu sein scheint. Zum Schluss werden noch der Drift- und der Diffusionskoeffizient für die mit den Langevingleichungen simulierten Daten bestimmt (siehe Abb. 12.7). Der Driftkoeffizient zeigt besonders wegen des auftauchenden Knicks bei kleinen Beschleunigungen eine gewisse Ähnlichkeit zu dem in Abbildung 12.3 gezeigten Driftkoeffizienten. Besonders interessant ist, dass der Diffusionsterm nicht konstant ist, obwohl kein multiplikatives Rauschen in das Modell hineingesteckt wurde. Dies liegt vermutlich an der multiplikativen Kopplung der Gleichungen über den Mischterm.

Das hier vorgestellte Modell ist in der Lage, einige wichtige Eigenschaften der Lagrangeschen Einteilchenstatistik qualitativ richtig wiederzugeben. Allerdings besitzt das Modell noch einige Mängel, wie z. B. die Asymmetrie in den Kopplungstermen. Dieser Mangel könnte beispielsweise durch die Wahl eines symmetrischen Terms, wie $k_{ij}a_i(a_i^2 + a_j^2)$, für den Mischterm behoben werden. Die Untersuchung der Geschwindigkeitsstatistik und damit der Frage, ob dieses Modell Intermittenz reproduzieren kann, fehlt bis jetzt vollständig.

Das Modell kann trotzdem als vielversprechender Ausgangspunkt für die Beschreibung der Lagrangeschen Einteilchenstatistik gesehen werden.

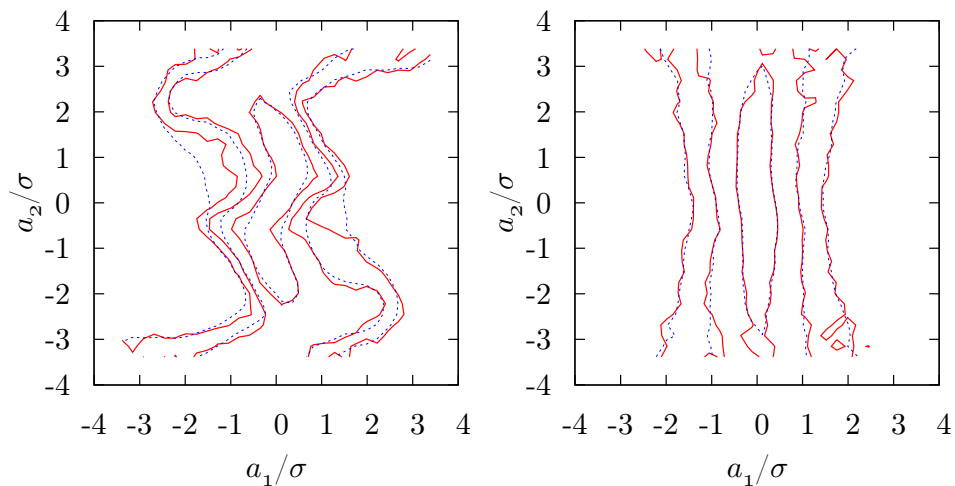


Abbildung 12.6 Darstellung von $p(a_1|a_2, a_3 = 0)$ (blau) und $p(a_1|a_2)$ (rot) für $\tau = 125\Delta t$ (links) und $\tau = 500\Delta t$ (rechts).

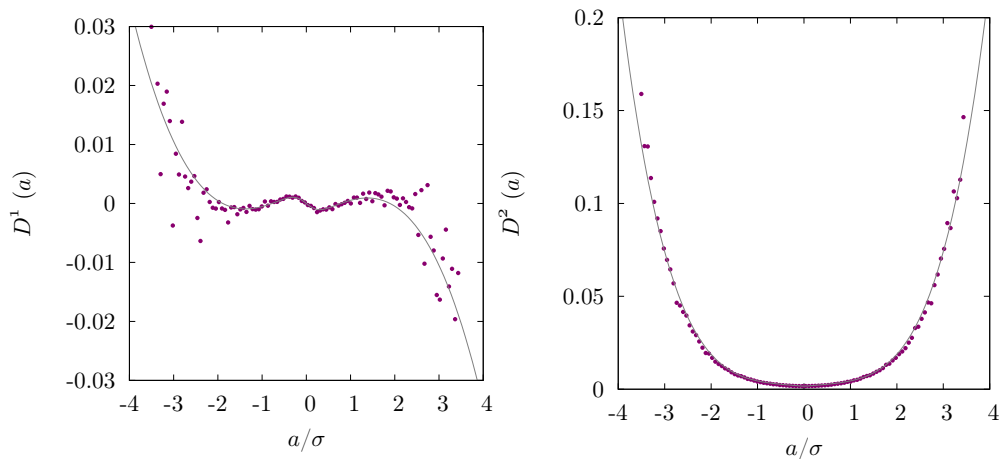


Abbildung 12.7 Darstellung der nach Gleichung (12.3) bzw. (12.4) aus den Daten der Langevinsimulation geschätzten Drift- und Diffusionskoeffizienten (violette Punkte). Zum Vergleich sind die Funktionen $0.0025a - 0.003 \cdot \tanh(2a) - 0.00015a^2$ (grau, linke Abbildung) und $0.0016 + 0.0012 \cdot |a| + 0.000095a^4$ (grau, rechte Abbildung).

13 Zusammenfassung und Ausblick

Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifels.

(Richard Feynman [FLS01])

Das Hauptziel dieser Arbeit ist eine systematische Untersuchung der Lagrange-schen Statistik in der inversen Energiekaskade. Dies geschieht nicht nur vor dem Hintergrund, etwas über das Verhalten von Teilchen in zweidimensionaler Turbulenz zu lernen, sondern um die Basis für den Vergleich der Lagrangeschen Statistik in zwei und drei Dimensionen zu liefern. Dieser Vergleich dient dazu, zu untersuchen, wie universell die statistischen Eigenschaften der Lagrangeschen Observablen sind.

Der erste Schritt, der dafür im Rahmen dieser Arbeit gemacht wird, ist die Entwicklung eines Programms zur numerischen Lösung der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung in der Wirbelformulierung und die Implementierung von Programm-routinen zur Mitführung von Tracern. Bevor die numerischen Daten zur Untersu-chung der zweidimensionalen Turbulenz herangezogen werden konnten, wurde das Programm umfangreichen Tests unterzogen.

Der erste Teil dieser Arbeit dient dazu, neben den Grundgleichungen auch die nöti-gen Grundbegriffe der Statistik einzuführen, die im Verlauf der Arbeit immer wieder benötigt werden. Außerdem wird in diesem Teil auf die statistische Beschreibung der Turbulenz im Allgemeinen eingegangen.

Im zweiten Teil wurde zunächst anhand der bekannten Herleitung des $-4/5$ - bzw. $2/3$ -Gesetzes untersucht, welche Eigenschaften die Antriebskraft und die Dissipati-onsterme haben müssen, damit es in der Simulation zu einer stationären inversen Energiekaskade kommt. Entsprechend werden konkrete Formelausdrücke für diese Terme angegeben, die in das Programm integriert werden können.

Für die Arbeit werden zwei Simulationsszenarien ausgewählt, die auch in der Li-teratur die zentrale Rolle bei der Untersuchung der inversen Kaskade spielen. Zum einen eine Simulation mit einer linearen Reibung und einem Antrieb, der im Orts-raum kurzreichweitig korreliert ist. Zum anderen eine Simulation mit Hyporeibung und einem Treiber, der nur auf ein schmales Wellenzahlband im Fourierraum wirkt. Der erste Simulationstyp ist an die Situation angelehnt, die man im Experiment vor-

findet, während der zweite Fall einer idealisierten Situation entspricht. Der Grund für die Wahl zweier unterschiedlicher Simulationstypen besteht wiederum darin herauszufinden, wie universell die Eigenschaften der Observablen im Lagrangebild sind. Die Parameter für die Simulation werden so gewählt, dass die jeweiligen Geschwindigkeitsfelder ungefähr dieselbe integrale Länge besitzen.

Zunächst werden anhand der Simulationsdaten der spektrale Energiefluss und die Energiespektren für die beiden Simulationstypen berechnet. Dabei zeigt sich, wie erwartet, dass nur im Fall der Simulation mit Hyporeibung der spektrale Energiefluss im Inertialbereich konstant ist. Im Gegensatz dazu zeigen die Energiespektren beider Simulationen einen Bereich, in dem sie dem $-5/3$ -Spektrum recht nahe kommen.

Die Wirbelfelder beider Simulationstypen zeigen eine sehr ähnliche Struktur. Sie bestehen aus kleinen Wirbelflecken, die in der Größenordnung der Taylorlänge liegen. Dies bedeutet, dass die inverse Energiekaskade nicht durch die Entstehung großer kohärenter Wirbel begleitet wird. Ein Vergleich der beiden Wirbelfelder mit einem Wirbelfeld aus einer dreidimensionalen Simulation zeigt sehr deutlich die Unterschiede bezüglich der Strukturen, aus denen das Feld aufgebaut ist. In drei Dimensionen ist die Vortizität in langgezogenen Filamenten organisiert und nicht in kleinen Flecken. Dies dürfte eine der Hauptursachen für die Unterschiede zwischen zwei und drei Dimensionen im Eulerbild sein.

Die Untersuchung der Statistik der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente in Kapitel 6 zeigt, dass die reskalierten Inkrementverteilungen für beide Simulationstypen selbstähnlich sind. Dies bestätigt die Ansicht, dass es in der inversen Kaskade keine Eulersche Intermittenz gibt. Ein Vergleich mit den Inkrementverteilungen dreidimensionaler Turbulenz zeigt darüber hinaus, dass die mit dem Energiefluss verknüpfte Asymmetrie der Inkrementverteilungen in zwei Dimensionen wesentlich kleiner ist als in drei Dimensionen.

Bei dem Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen zeigen sich jedoch deutliche Unterschiede zwischen den Simulationstypen. Während man für die ungeraden Strukturfunktionen im Fall der Simulation mit linearer Reibung kaum von einem Skalierungsbereich sprechen kann, ist dieser für die Simulation mit Hyporeibung sehr viel deutlicher ausgeprägt. Das Skalierungsverhalten stimmt dabei mit der K41-Vorhersage überein. Dieser Unterschied ist nicht verwunderlich, da ein konstanter Energiefluss die Voraussetzung für das Skalieren der dritten Strukturfunktion ist. Dies ist aber nur für die Simulation mit der Hyporeibung gegeben. Bei den geraden Strukturfunktionen sieht man für beide Simulationen kein klares Skalierungsverhalten. Es scheint also einen grundlegenden Unterschied zwischen geraden und ungeraden Strukturfunktionen zu geben.

Am Ende des zweiten Teils wird die Inkrementstatistik auf Markoveigenschaften untersucht. Bei beiden Simulationstypen gibt es eine endliche Länge, ab der die Markoveigenschaft erfüllt ist. Diese Länge entspricht in beiden Fällen ungefähr der Hälfte der Taylorlänge. Zusammen mit der Tatsache, dass es auch für dreidimensio-

nale Turbulenz eine endliche Markovskala im Bereich der Taylorlänge gibt, ist dies ein Indiz dafür, dass die Markoveigenschaft im Eulerbild universeller Bestandteil der Navier-Stokes-Gleichung ist.

Das Hauptanliegen, die Untersuchung der Lagrangeschen Statistik, wird im dritten Teil der Arbeit angegangen. Zunächst werden die Trajektorien einzelner Teilchen und der Transport von Tracern betrachtet. Dabei zeigt sich deutlich, wie stark der Transport der Teilchen in der zweidimensionalen Strömung von einem Diffusionsprozess abweicht. Dies sieht man daran, dass das mittlere Verschiebungsquadrat erst für sehr große Zeiten proportional zur Zeit wird, wie es von einem Diffusionsprozess zu erwarten wäre. Noch auffälliger zeigt sich die Komplexität des Teilchentransportes an der geometrischen Verteilung der von einem kleinen Gebiet aus startenden Teilchen. Weiterhin kann gezeigt werden, dass auch bei der numerischen Integration der Teilchenbahnen die Inkompressibilität erhalten bleibt, was Grundvoraussetzung für die Analyse der Simulationsdaten ist.

In Kapitel 8 wurde die Geschwindigkeitsstatistik untersucht. Es stellt sich heraus, dass bei den Simulationen dreidimensionaler Turbulenz die Geschwindigkeitsverteilung stark vom jeweiligen Treiber abhängt, es aber Indizien dafür gibt, dass sie leicht subgaußisch ist. Anhand der Lagrangeschen Autokorrelationsfunktionen werden die Lagrangeschen Zeitskalen festgelegt.

Das nachfolgende Kapitel widmet sich der Lagrangeschen Beschleunigungsstatistik. Es stellt sich heraus, dass auch die Beschleunigungsverteilung in zwei Dimensionen stark von einer Gaußverteilung abweicht. Obwohl sich die Verteilungen beider zweidimensionaler Simulationstypen quantitativ unterscheiden, zeigt sie jedoch dieselbe Struktur. Bei beiden Verteilungen gibt es Bereiche in den Flügeln, in denen die Verteilungen mit der durch die K41-Abschätzung vorhergesagten Form übereinstimmen. Neben den breitflügeligen Beschleunigungsverteilungen kann man sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen Langzeitkorrelationen für die Quadrate der Beschleunigungen beobachten. Auch der Test auf Markoveigenschaften liefert in beiden Systemen sehr ähnliche Ergebnisse. Die zentrale Erkenntnis dabei ist, dass die zeitliche Entwicklung der Komponenten der Beschleunigung einem Markovprozess gehorcht. Diese Feststellung ist zum einen von prinzipiellem Interesse. Zum anderen ist sie aber auch von praktischem Interesse, da die Markovannahme in viele Ansätze zur Modellierung der Einteilchenstatistik eingeht. Sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen ergibt die Überprüfung der Markoveigenschaft mit Hilfe des Vergleiches von einfach und zweifach bedingten Verteilungen, dass es eine endliche Markovzeit gibt. Diese hängt allerdings stark von dem Schnitt ab, in dem man die zweifach bedingte Verteilung betrachtet. Die Untersuchung der Kreuzkorrelationen zwischen den einzelnen Komponenten des Beschleunigungsvektors zeigt, dass die Quadrate verschiedener Komponenten genauso lange untereinander korreliert sind, wie die Quadrate der Komponenten mit sich selbst.

Nach der Beschleunigung steht in Kapitel 11 die Statistik der Lagrangeschen

Geschwindigkeitsinkremente im Mittelpunkt. Das zentrale Ergebnis in diesem Zusammenhang ist, dass auch in zwei Dimensionen die Inkrementverteilungen nicht selbstähnlich sind und die Geschwindigkeitsstatistik damit intermittent ist. Wie in drei Dimensionen, so ist auch in zwei Dimensionen für die Lagrangeschen Strukturfunktionen kein Skalierungsverhalten erkennbar. Die anschließende Betrachtung der kompensierten Kumulanten ergibt, dass der Konvergenzprozess von der stark nichtgaußischen Beschleunigungsverteilung zur Geschwindigkeitsverteilung hin kein einfacher exponentieller Zerfall ist, sondern im Inertialbereich eher einem Potentsgesetz folgt. Auch hier ist die Ähnlichkeit von zwei- und dreidimensionaler Turbulenz sehr auffällig.

Die Tatsache, dass es sowohl in zwei als auch in drei Dimensionen im Lagrangebild Intermittenz gibt, während im Eulerbild nur die dreidimensionale Turbulenz intermittent ist, wirft die Frage auf, wie die mathematische Beziehung zwischen den Inkrementstatistiken in den beiden Bezugssystemen aussieht. Dazu wird mit Hilfe der Definition feinkörniger Verteilungsfunktionen systematisch eine Übersetzungsrelation abgeleitet, die die Inkrementstatistik mittels zweier Übergangsverteilungen vom Eulerbild in das Lagrangebild übersetzt. Die Übergangsverteilungen werden sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Turbulenz numerisch geschätzt und zeigen in beiden Fällen eine ähnliche Struktur. Die Mischung der Eulerschen Statistik verschiedener Längenskalen und die Berücksichtigung der Zeitkorrelationen des Geschwindigkeitsfeldes durch die beiden Übergangsverteilungen sind für die starke Änderung der funktionalen Form der Inkrementstatistik beim Übergang vom Euler- in das Lagrangebild verantwortlich.

Im letzten Kapitel wird aufbauend auf den Erfahrungen der vorangegangenen Kapitel ein Ansatz zur Modellierung der Lagrangeschen Einteilchen-Statistik auf Basis der Beschleunigung vorgestellt. Das Modell kann den qualitativen Verlauf der Autokorrelation der Beschleunigung für zweidimensionale Turbulenz wiedergeben. Die Schätzung der Zweipunktverteilung für dieses Modell zeigt auch, dass die Markovzeit in diesem Modell endlich ist. Ein interessanter Aspekt des vorgestellten Modells ist, dass das Rauschen nur additiv eingeht, die Schätzung der Diffusion aber wie im Fall der Daten aus der numerischen Simulation einen multiplikativen Rauschterm ergibt.

Insgesamt ermöglicht die Arbeit einen umfangreichen Einblick in die Lagrangesche Statistik turbulenter Strömungen in zwei und drei Dimensionen und dem Verhältnis von Eulerscher zu Lagrangescher Statistik. Besonders der Vergleich Lagrangescher Statistik in zwei- und dreidimensionaler Turbulenz macht deutlich, dass bestimmte Observablen wie die Beschleunigung oder die Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkremente universelle, systemunabhängige Eigenschaften besitzen.

Selbstverständlich kann innerhalb der vorliegenden Arbeit das Thema Lagrangesche Statistik in turbulenten Strömungen nicht erschöpfend behandelt werden. Daher soll hier noch kurz auf einige Fragestellungen eingegangen werden, die, aufbauend

auf dieser Arbeit, tiefergehend untersucht werden könnten.

Eine Möglichkeit wäre, mit dem hier erarbeiteten Wissen über die numerische Simulation zweidimensionaler Turbulenz, Simulationen mit höheren Auflösungen und längeren Inertialbereichen durchzuführen. Auf diese Weise könnte man systematisch untersuchen, ob sich die qualitativen Eigenschaften gewisser Größen, wie z. B. der in Kapitel 10 untersuchten kompensierten Kummulanten, in Simulationen mit länger werdendem Inertialbereich noch ändern oder nicht.

Lohnend wäre auch eine Fortentwicklung des in Kapitel 12 vorgestellten Ansatzes zur Modellierung der Einteilchen-Statistik und die Erweiterung dieses Ansatzes auf dreidimensionale Turbulenz. Dies wäre von großem Interesse für angewandte Bereiche der Turbulenzforschung, wie z. B. die Modellierung von Mischungs- und Verbrennungsprozessen.

Da in dieser Arbeit die Lagrangesche Einteilchen-Statistik im Vordergrund steht, wäre es im nächsten Schritt wichtig die Mehrteilchenstatistik z. B. in Bezug auf den Teilchentransport oder die Beschleunigungsverteilung tiefergehend zu untersuchen.

A Numerik

Die Grundlage dieser Arbeit bildet die numerische Integration der Navier-Stokes-Gleichung in zwei Dimensionen in der Wirbelformulierung und die numerische Auswertung der so gewonnenen Daten. In diesem Abschnitt wird kurz auf alle wichtigen technischen Details, die in diesem Zusammenhang wichtig sind, eingegangen.

A.1 Das Pseudospektralverfahren

Zur numerischen Integration der Navier-Stokes-Gleichung wird das sogenannte *Pseudospektralverfahren* [CHQZ93, Boy01] verwendet. Das Pseudospektralverfahren ist eine Methode, um partielle Differentialgleichungen, vorzugsweise unter periodischen Randbedingungen, numerisch zu lösen. Dabei wird eine partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(f(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{N}(f(\mathbf{x}, t)), \quad (\text{A.1})$$

die lineare und nichtlineare Differentialoperatoren \mathcal{L} und \mathcal{N} enthält, räumlich fouriertransformiert. Dadurch gelangt man zu einer Gleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathcal{L}}(\hat{f}(\mathbf{k}, t)) + \mathcal{F}[\mathcal{N}(f(\mathbf{x}, t))]. \quad (\text{A.2})$$

Die Fouriertransformation der linearen Operatoren stellt ist unproblematisch. Aus den nichtlinearen Termen aber werden im Fourierraum Faltungen. Bei einer Diskretisierung des Grundgebietes mit $N \times N = M$ Punkten ist der Rechenaufwand dann proportional zu M^2 . Aus diesem Grund berechnet man die Nichtlinearität $\mathcal{N}(f(\mathbf{x}, t))$ im Ortsraum, transformiert das Ergebnis in den Fourierraum und löst dort das Gleichungssystem (A.2) für einen Zeitschritt, mittels eines Verfahrens zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Im nächsten Schritt transformiert man die zur Berechnung der Nichtlinearität benötigten Terme wieder in den Ortsraum und beginnt von vorne. Jetzt werden zwar pro Zeitschritt, je nach der konkreten Form des nichtlinearen Terms, mehrere Fouriertransformationen gebraucht, jedoch ist für jede einzelne Transformation der Rechenaufwand proportional zu $M \log M$. Schon bei relativ kleinen M lohnt es sich, ständig zwischen Ortsraum und Fourierraum zu wechseln.

Das Gegenstück zu Gleichung (A.2) in dieser Arbeit Gleichung ist (5.28) bzw. (5.50). Beide haben die generelle Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathcal{L}}(\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)) + \mathcal{F}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)]. \quad (\text{A.3})$$

Die Nichtlinearität ist in diesem Fall das Kreuzprodukt aus dem Geschwindigkeitsfeld und dem Vortizitätsfeld. Nach jedem Zeitschritt muss aus dem Vortizitätsfeld $\hat{\omega}$ das Geschwindigkeitsfeld $\hat{\mathbf{u}}$ berechnet werden. Dazu wird Gleichung (2.10) unter der Annahme eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes im Fourierraum invertiert. Man erhält

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = i \frac{\mathbf{k} \times \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2}. \quad (\text{A.4})$$

Sowohl $\hat{\omega}$ als auch $\hat{\mathbf{u}}$ müssen jetzt in den Ortsraum transformiert werden. Dort wird der Term $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ berechnet und dieser wieder in den Fourierraum transformiert, wodurch man den Term $\mathcal{F}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)]$ erhält. Jetzt kann Gleichung (A.3) wieder einen Zeitschritt vorwärts integriert werden.

Zur Durchführung des Pseudospektralverfahrens sind demnach zwei Dinge notwendig. Zum einen muss ein Algorithmus für die numerische Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystem gewählt werden, und zum anderen wird ein effizienter Algorithmus zur Fouriertransformation benötigt.

Die Zeitintegration wird hier mit einem Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung durchgeführt [PTVF07], wobei der Zeitschritt über das CFL-Kriterium (siehe [Boy01]) festgelegt wird.

Zur numerischen Durchführung der Fouriertransformation wird die `fftw3`-Bibliothek [FJ05] eingesetzt. Da die bei der Simulation vorkommenden Felder im Ortsraum reell sind, wird die sogenannte `real-to-complex`-Transformation benutzt. Diese berücksichtigt, dass ein im Ortsraum reelles Feld im Fourierraum bezüglich einer der Dimensionen Spiegelsymmetrie besitzt.

Zu beachten ist noch, dass bei der Behandlung nichtlinearer Terme das Phänomen des *Aliasing* auftritt. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass durch die nichtlinearen Terme Wellenzahlen erzeugt werden, die größer als die maximale, in der Simulation zur Verfügung stehende, Wellenzahl $|k_{max}| = N/2$ (siehe Abschnitt 5.2.1) sind. Dieser Effekt kann zu numerischen Instabilitäten führen. Zur Vermeidung dieser Instabilitäten wird hier die 2/3-Regel von Orzag (siehe [Boy01]) benutzt. D. h. dass alle Moden mit $|k| > 2/3 k_{max}$ zu Null gesetzt werden, was dazu führt, dass die maximale Wellenzahl, die für die Simulation genutzt werden kann, zu $k_{max} = N/3$ wird.

A.2 Bestimmung der Beschleunigung

Bei der numerischen Simulation der Wirbeltransportgleichung werden neben dem Vortizitätsfeld $\omega(\mathbf{x}, t)$ nur noch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ und das Kraftfeld $\mathbf{f}_\perp(\mathbf{x}, t)$ berechnet. Zur Bestimmung der Beschleunigung

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta^n \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (-1)^{m+1} \gamma \Delta^{-m} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}_\perp(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.5})$$

fehlt noch der Druck $p(\mathbf{x}, t)$. Wie in Abschnitt 2.1.1 erwähnt, kann der Druck über

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden. Diese Gleichung lässt sich im Fourierraum leicht invertieren, so dass man für den Druck den Term

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{k^2} \left(i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2} k^2 \mathcal{F}[\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)] \right) \quad (\text{A.7})$$

erhält. Da die Fouriertransformierte des nichtlinearen Terms bei der Lösung der Wirbeltransportgleichung berechnet wird, kann diese nun wiederverwendet werden. Die restlichen Terme in (A.5) können ebenfalls im Fourierraum sehr leicht bestimmt werden. Die Beschleunigung ist somit komplett im Fourierraum berechenbar.

A.3 Interpolation der Tracer

Zur Bestimmung der Lagrangeschen Observablen müssen die entsprechenden auf dem Gitter vorliegenden Daten an den Positionen der Tracer interpoliert werden. Die wichtigste Observable in diesem Zusammenhang ist die Geschwindigkeit. Zur Bestimmung der Bahn des Teilchens durch (2.23) muss die Geschwindigkeit am Teilchenort mit hinreichender Genauigkeit bekannt sein, damit sich bei der Integration von (2.23) keine zu großen Fehler aufsummieren. Eine Übersicht über verschiedene Interpolationsschemata findet sich in [PTVF07] und [YP88]. In [HDG07] wird der Einfluss verschiedener Interpolationen auf die Lagrangesche Statistik untersucht.

In dieser Arbeit werden die Observablen an den Teilchenorten mittels bikubischer Interpolation bestimmt [PTVF07], d. h. der gesuchte Funktionswert f an der Position des Teilchens (x, y) ist durch das kubische Polynom

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^4 c_{ij} t^{i-1} u^{j-1} \quad (\text{A.8})$$

gegeben, wobei die Abkürzungen

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{A.9})$$

$$u = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (\text{A.10})$$

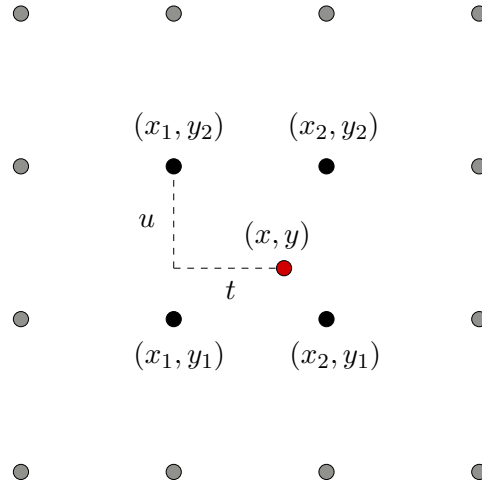


Abbildung A.1 Darstellung der zur Bestimmung des Funktionswertes an der rot markierten Teilchenposition benötigten Gitterpunkte. Die zwölf grau markierten Gitterpunkte werden zur Bestimmung der Ableitungen an den vier schwarz markierten Punkten benötigt.

eingeführt wurden. Die Punkte (x_1, y_1) , (x_1, y_1) , (x_1, y_1) und (x_1, y_1) markieren dabei die vier benachbarten Gitterpunkte um (x, y) (siehe Abb. A.3). Zur Festlegung der Funktion sind noch die sechzehn Koeffizienten c_{ij} zu bestimmen. Dazu müssen an jedem der vier benachbarten Gitterpunkte neben dem Funktionswert f auch die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ bekannt sein, um sechzehn Gleichungen für die sechzehn Koeffizienten zu erhalten. Da an den Gitterpunkten meist nur die Funktionswerte bekannt sind, müssen die Ableitungen durch die Bildung finiter Differenzen bestimmt werden. Dies führt dazu, dass man anstatt der vier direkt umgebenden Gitterpunkte, sechzehn Gitterpunkte einbeziehen muss.

A.4 Berechnung von Strukturfunktionen

Die Berechnung von Korrelationsfunktionen und Strukturfunktionen gehört zu den Standardaufgaben bei der Auswertung numerischer Simulationen. Die direkte numerische Bestimmung dieser Größen erfordert bei N Punkten einen Rechenaufwand $\sim N^2$. Durch die Tatsache, dass der Rechenaufwand beim Pseudospektralverfahren proportional zu $N \log N$ ist, kann es zu der Situation kommen, dass die direkte Berechnung von Struktur- und Korrelationsfunktionen länger dauert als die Simulation selbst. Daher greift man bei der Berechnung der Korrelationsfunktionen auf den Zusammenhang

$$\langle v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})v_i(\mathbf{x}) \rangle \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{v}_i(\mathbf{k})\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \quad (\text{A.11})$$

zurück, d. h. im Fourierraum wird die Berechnung der Korrelation auf die Berechnung eines Produktes zurückgeführt. Damit geht die Reduzierung des Rechenaufwandes von $\sim N^2$ auf $N \log N$ einher. Diese Überlegung kann auch auf Strukturfunktionen übertragen werden. Die longitudinalen Strukturfunktionen

$$S_n(r) = \langle [v_i(\mathbf{x} + r \cdot \mathbf{e}_i) - v_i(\mathbf{x})]^n \rangle \quad (\text{A.12})$$

können über die Binominalreihe in eine Summe über Korrelationsfunktionen verschiedener Ordnung

$$S_n(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle [v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})]^{n-k} [-v_i(\mathbf{x})]^k \rangle \quad (\text{A.13})$$

zerlegt werden. Fouriertransformiert man nun diese Reihe, erhält man

$$\tilde{S}_n(\mathbf{k}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{F}[v_i(\mathbf{x})^{n-k}] \mathcal{F}[(-v_i(\mathbf{x}))^k], \quad (\text{A.14})$$

Im Fourierraum hat man es nun nur noch mit einer Summe über Produkte zu tun. Dabei ist zu beachten, dass sich Terme der Form $\langle v_i(\mathbf{x})^m \mathbf{1} \rangle$ wie

$$\langle v_i(\mathbf{x})^m \mathbf{1} \rangle \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{v}_i(\mathbf{k})^m \delta(\mathbf{k}) = \tilde{v}_i(\mathbf{0})^m \quad (\text{A.15})$$

behandeln lassen. Dies bedeutet nichts anderes, als dass der Mittelwert des Signals in der Nullmode der Fouriertransformierten enthalten ist. Bei der numerischen Umsetzung ist zu beachten, dass die Normierung der einzelnen Terme von der Art und Weise abhängt, wie man die Normierung im Zusammenhang mit der Fouriertransformation wählt, d. h. ob man die Normierung auf Hin- und Rücktransformation aufteilt, oder komplett einer Operation zuordnet.

Zu beachten ist noch, dass bei diesem Vorgehen die Korrelationsfunktion vom Vektor \mathbf{r} abhängt. Sie ist somit ein zwei- bzw. dreidimensionales Feld. Die longitudinale Strukturfunktion entspricht dem Schnitt $S_n(r) = S_n(\mathbf{r} = r\mathbf{e}_x)$.

In dieser Arbeit wurden die eben gemachten Überlegungen nur auf die Eulerschen Größen angewandt. Es spricht jedoch nichts dagegen, auch die Lagrangeschen Korrelations- und Strukturfunktionen auf diese Weise zu berechnen.

B Simulationen

In diesem Teil des Anhangs werden die wichtigsten Parameter der verwendeten Simulationen aufgeführt. Dabei wird zwischen den Eingabeparametern, die von außen vorgegeben werden, und den Simulationsparametern, die aus den Simulationsdaten berechnet werden, unterschieden.

Parameter	Bedeutung
N	Anzahl der Stützpunkte in eine Raumrichtung
L_{Box}	Länge des Grundgebietes entlang einer Achse
Δx	Gitterabstand
m	Ordnung der Hyporeibung
γ	Vorfaktor der Hyporeibung
n	Ordnung der Hyperviskosität
ν	Viskosität
f	Art der Kraft
l_f	Korrelationslänge des Gaußtreibers
k_0	zentrale Wellenzahl des Deltatreibers
k_b	Bandbreite des Deltatreibers
F_0	Amplitude der Kraft
Δt	Zeitschritt
$N_{\Delta t}$	Anzahl der Zeitschritte in der Simulation
P	Anzahl der Teilchen in der Simulation
Δt_F	Abstand in dem die Eulerschen Felder herausgeschrieben werden
Δt_P	Abstand in dem die Teilchendaten herausgeschrieben werden

Parameter	Bedeutung
L	Integrale Länge
λ	Taylorlänge
T_E	large-eddy-turnover Zeit
T	Lagrangesche integrale Zeit
τ_λ	Taylor
σ_v	Standardabweichung der Geschwindigkeit

Eingabeparameter für sim2d1024gaussA und sim2d1024deltaA

Name	N	L_{Box}	Δx	Δt	$N_{\Delta T}$	P	Δt_F	Δt_P
sim2d1024gaussA	1024^2	2π	0.006	0.0005	10^5	65 536	1000	10
sim2d1024deltaA	1024^2	2π	0.006	0.00025	10^5	65 536	500	10

Name	m	γ	n	ν	f	l_f	k_0	k_b	F_0
sim2d1024gaussA	0	0.1	8	450	gauss	0.0075	–	–	1.5
sim2d1024deltaA	1	5.0	8	450	delta	–	246	2	0.03

Parameter der Simulationen sim2d1024gaussA und sim2d1024deltaA

Name	L	λ	T_E	T	τ_λ	σ_v
sim2d1024gaussA	0.188	0.035	0.36	0.3	0.066	0.51
sim2d1024deltaA	0.210	0.030	0.13	0.11	0.025	1.63

Eingabeparameter für sim3d1024

Name	N	L_{Box}	Δx	Δt	$N_{\Delta T}$	P	Δt_P	ν
sim2d1024	1024^3	2π	0.006	0.003	3000	$5 \cdot 10^6$	5	0.0001

Parameter der Simulation sim3d1024

Name	L	λ	T_E	T	τ_λ	σ_v	τ_η
sim3d1024	0.188	0.035	9.97	3.1	0.65	0.2	0.16

Die Parameter der Simulation `sim3d1024ita` finden sich in [BBC⁺05] und die Parameter von `sim3d1024bochum` sind in [HKFG09] nachzulesen.

C Dimensionsabschätzung der integralen Skala

Der Dissipationsterm führt dazu, dass der Energiefluss im Bereich der Längenskala L_0 , die nicht gleich der Korrelationslänge L_d des zusätzlichen Dissipationsterms sein muss, zum Erliegen kommt. Für die Durchführung der Simulationen ist es natürlich interessant zu wissen, wie L_0 von den Simulationsparametern abhängt. Gleichung (5.23) besagt, dass auf großen Skalen nur noch der zusätzliche Dissipationsterm und der Energiefluss für das Verhalten des Energietransportes entscheidend sind. Die Längenskala L_0 sollte demnach nur vom Energietransport ϵ und dem Parameter γ abhängen, der im zusätzlichen Dissipationsterm (5.45) vorkommt. Nach (4.5) kann man jetzt den Ansatz

$$L_0 \sim \epsilon^\alpha \gamma^\beta \quad (\text{C.1})$$

machen. Für die Dimensionen der beteiligten Größen gilt:

$$[L_0] = L, \quad [\epsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [\gamma] = T^{-1} L^{-2m}, \quad (\text{C.2})$$

wobei L für die Einheit der Länge und T für die Einheit der Zeit steht. Die Dimension von γ wird durch die Tatsache festgelegt, dass aufgrund von Gleichung (5.45) und (5.27) die Beziehung

$$[\gamma \Delta^{-m} \omega] = [\partial_t \omega] = T^{-2} \quad (\text{C.3})$$

gelten muss. Es folgt

$$[L_0] \sim [\epsilon]^\alpha [\gamma]^\beta \quad \Rightarrow \quad L^1 = L^{2\alpha} T^{-3\alpha} T^{-\beta} L^{2m\beta}. \quad (\text{C.4})$$

Der Vergleich der Einheiten liefert

$$2\alpha - 2m\beta = 1, \quad -3\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2+6m}, \quad \beta = -\frac{3}{2+6m}. \quad (\text{C.5})$$

Die Abhängigkeit zwischen L_0 und γ wird somit durch

$$L_0 = C \epsilon^{\frac{1}{2+6m}} \gamma^{-\frac{3}{2+6m}} \quad (\text{C.6})$$

festgelegt. Die Herleitung zeigt, dass die Länge L_0 nichtlinear von den Parametern ϵ und γ abhängt, wobei die Proportionalitätskonstante C in (C.6) durch die Dimensionsanalyse nicht vorhergesagt werden kann.

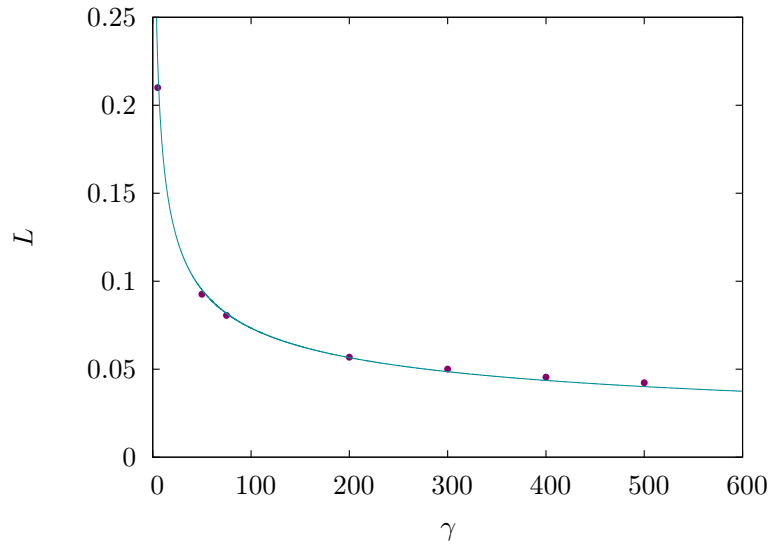


Abbildung C.1 Vergleich der integralen Länge L für verschiedene γ mit der Relation (C.6).

Zur Überprüfung der Relation wurden mehrere Simulationsläufe mit verschiedenen Werten von γ durchgeführt. Alle anderen Parameter, besonders die Ordnung der Hypoviskosität ($m = 1$), wurden so wie in `sim2d1024deltaA` gewählt. Die Frage ist, an welcher Observable die Relation (C.6) getestet werden soll. An dieser Stelle bietet sich die in (6.3) definierte integrale Länge L an. Abbildung C.1 zeigt die aus den Simulationsdaten gewonnenen L in Abhängigkeit von γ zusammen mit (C.6). Es zeigt sich, dass die Vorhersage der Dimensionsanalyse sehr gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt. Die fehlende Proportionalitätskonstante hat den Wert $C \approx 0.45$.

Es stellt sich die Frage, ob diese Relation, wenn man sie per $k_L = 2\pi/L$ direkt auf den Fourierraum überträgt, weiterhin gültig bleibt. Die zur integralen Länge gehörende Wellenzahl k_L wird über

$$k_L = 2\pi / (C \epsilon^{\frac{1}{2+6m}} \gamma^{-\frac{3}{2+6m}}) \quad (\text{C.7})$$

definiert. Bei Betrachtung des Energieflusses in Abbildung 5.11 sieht man, dass es einen Wellenzahlenbereich gibt, bei dem der der konstante Energiefluss aufhört. Außerdem gibt es einen Bereich, ab dem der Fluss näherungsweise verschwindet. Da beide Punkte nicht sehr genau bestimmt werden können, wird zur Überprüfung von Gleichung (C.7) der Schnittpunkt von $\Pi(k)$ mit -0.5ϵ gewählt. In Abbildung C.2 ist die Funktion $\Pi(k)$ für drei verschiedene Werte von γ zu sehen, wobei die eben angesprochenen Schnittpunkte durch violette Punkte markiert sind. Die Darstellung

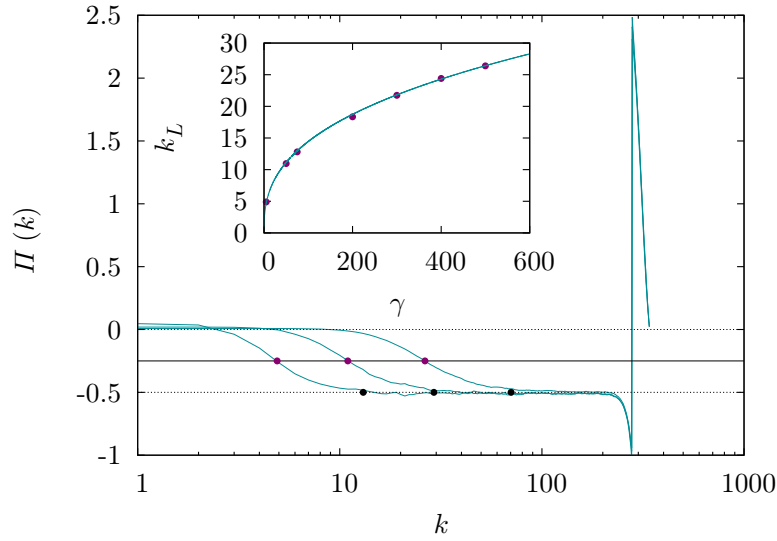


Abbildung C.2 Der Energiefluss $\Pi(k)$ für $\gamma = 500, 50, 5$. Der Pfeil zeigt an, in welche Richtung sich die Kurve bei kleiner werdendem γ verschiebt. Die gestrichelten schwarzen Linien markieren $\Pi(k) = 0$ bzw. $\Pi(k) = -\epsilon$. Die durchgezogene schwarze Linie gehört zu $\Pi(k) = -0.5\epsilon$.

von $k_L(\gamma)$ zusammen mit (C.7) im Inset von Abbildung C.2 zeigt, dass die Dimensionsanalyse direkt auf den Fourierraum übertragen werden kann. Andererseits hätte man auch direkt fragen können, welche Wellenzahl von (C.7) vorhergesagt wird, insbesondere wenn man die empirisch bestimmte Konstante C weglässt. In Abbildung C.2 sind die durch

$$k_L = 2\pi / \left(\epsilon^{\frac{1}{2+6m}} \gamma^{-\frac{3}{2+6m}} \right) \quad (\text{C.8})$$

vorhergesagten Wellenzahlen als schwarze Punkte eingezeichnet. Die von der Dimensionsanalyse vorausgesagten Wellenzahlen liegen in dem Bereich, in dem der konstante Energiefluss abbricht.

D Schätzung der Markovlänge bei endlicher Datenmenge

In Abschnitt 6.3 wurden die Markoveigenschaften der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente anhand des Vergleichs von $p(v_1|v_2)$ mit $p(v_1|v_2, v_3)$ untersucht. Oberhalb der Markovlänge, sollte die zweifach bedingte Verteilung $p(v_1|v_2, v_3)$ unabhängig von v_3 sein. In Abbildung 6.9 ist jedoch deutlich zu sehen, dass die zweifach bedingten Verteilungen für verschiedene v_3 gegeneinander verschoben sind. An dieser Stelle soll kurz gezeigt werden, dass dieses Verhalten nicht im Widerspruch zur Markoveigenschaft steht. Zu diesem Zweck wird an dieser Stelle der Langevinprozess

$$\dot{x} = -x + \Gamma \tag{D.1}$$

mit gaußverteiletem und deltakorreliertem Rauschen Γ simuliert. Dieser Prozess ist per Konstruktion ein Markovprozess mit der Korrelationsfunktion $C(\tau) = \exp(-\tau)$, der der Bedingung $p(x_1|x_2) = p(x_1|x_2, x_3)$ für alle x_3 genügen muss. In Abbildung D.1 ist die einfach bedingte Verteilung (blau) zusammen mit der zweifach bedingten Verteilung $p(x_1|x_2, x_3 = -\sigma)$ für zwei verschiedenen Datenmengen zu sehen. Zunächst einmal fällt auf, dass die zweifach bedingte Verteilung verschoben ist, ihr Zentrum liegt bei $x_2 = -\sigma$. Würde man zusätzlich die Verteilung $p(x_1|x_2, x_3 = \sigma)$ einzeichnen, würde ihr Zentrum bei $x_2 = \sigma$ liegen. Erhöht man die Datenmenge, auf deren Basis die Verteilung geschätzt wird, so dehnt sich ihr Definitionsbereich aus. Würde man unendlich viele Daten zur Verfügung haben, so würde sich auch der Definitionsbereich der zweifach bedingten Verteilung unendlich weit erstrecken. Das heißt, dass bei einer unendlich großen Datenmenge auch die zu verschiedenen v_3 gehörenden Verteilungen nicht mehr zu unterscheiden wären.

Um zu klären, warum die Verteilungen überhaupt verschoben sind, muss man sich kurz klar machen, wie sie geschätzt werden. Zur Schätzung der zweifach bedingten Verteilung muss man die aufeinanderfolgenden Werte x_1, x_2, x_3 betrachten, wobei zwei direkt aufeinander folgende Werte durch das Zeitintervall τ getrennt sind. Wenn τ_1 kleiner als die Korrelationszeit ist, sind die drei Werte miteinander korreliert. Wenn also x_3 vorgegeben ist, so wird x_2 im Mittel einen Wert annehmen, der aus einem Intervall um den Wert von x_3 kommt. Je kürzer der Zeitabstand, desto stärker die Korrelation, desto kleiner das Intervall. Die gleiche Überlegung können wir auch für x_2 machen. Im Endeffekt bedeutet dies, dass der Bereich auf dem zur Schätzung von $p(x_1|x_2, x_3)$ Daten vorliegen von x_3 abhängt. Wenn man berücksichtigt, dass

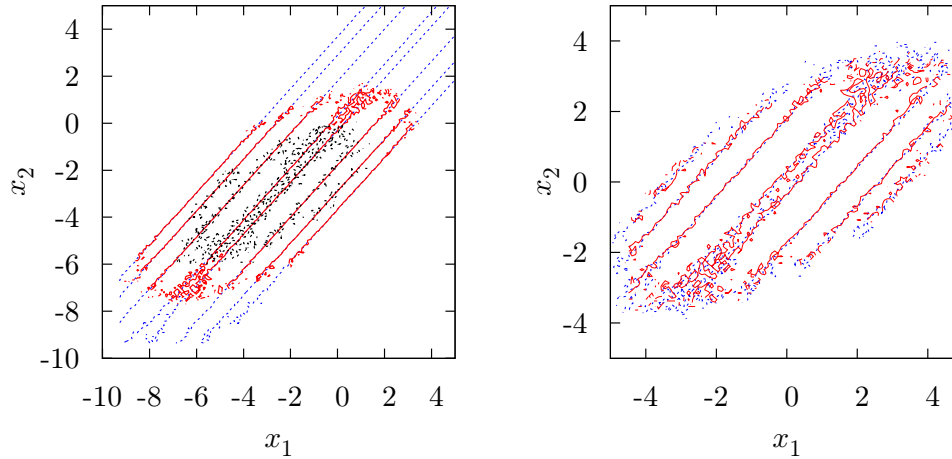


Abbildung D.1 Links: Darstellung der Verteilung $p(x_1|x_2)$ (blau) und $p(x_1|x_2, x_3 = -1.5\sigma)$ für $N = 10^7$ (schwarz) und $N = 10^{10}$ (rot). Rechts: Darstellung von $p(x_1|x_2, x_3 = 0\sigma)$ (blau) und $p(x_1 + 1.5\sigma c^2|x_2 + 1.5\sigma c, x_3 = -1.5\sigma)$ (rot). Mit der Verschiebung nach Gleichung (D.2) liegen die beiden bedingten Verteilungen übereinander. Die Anzahl der Datenpunkte beträgt für beide Verteilungen $N = 10^7$.

$c = C(\tau_1)$ und x_3 und x_1 durch zwei mal τ_1 getrennt sind, so kann man durch die Variablentransformation

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_2 - x_3 c \\ x_1 &\rightarrow x_1 - x_3 c^2 \end{aligned} \tag{D.2}$$

jede zweifach bedingte Verteilung in den Ursprung verschieben (siehe Abb. D.1 rechts), und sie somit alle übereinander legen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Beobachtung, dass die zweifach bedingten Verteilungen zu verschiedenen x_3 gegeneinander verschoben sind, mit der Tatsache zusammenhängt, dass die Werte der Datenreihe korreliert sind. Bei verschwindender Korrelation verschwindet auch dieser Effekt. Dies läßt sich z. B. gut in Abbildung 9.8 beobachten. Dort sind die zweifach bedingten Verteilungen kaum verschoben, da die Korrelation in diesem Fall sehr klein ist. Dass der Effekt überhaupt sichtbar wird, liegt an der endlichen Datenmenge, die bei solchen Untersuchungen zur Verfügung steht.

Literaturverzeichnis

- [AM04] A. K. Aringazin and M. I. Mazhitov. One-dimensional Langevin models of fluid particle acceleration in developed turbulence. *Phys. Rev. E*, 69(2):026305, Feb 2004.
- [Bak08] O. G. Bakunin. *Turbulence and Diffusion: Scaling Versus Equations (Springer Series in Synergetics)*. Springer, 1 edition, 10 2008.
- [Bar03] G. I. Barenblatt. *Scaling*. Cambridge University Press, 12 2003.
- [BBC⁺04a] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B. J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi. Multifractal statistics of lagrangian velocity and acceleration in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 93(6):064502, Aug 2004.
- [BBC⁺04b] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, and F. Toschi. Lagrangian statistics in fully developed turbulence. *arxiv*, 2004.
- [BBC⁺05] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, and F. Toschi. Particle trapping in three-dimensional fully developed turbulence. *Physics of Fluids*, 17(2):021701, 2005.
- [BBC⁺09] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B. J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi. Datensatz mit Lagrangeschen Teilchendenaten aus der iCFD-database, 2009.
- [BCT⁺93] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicciono, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48(1):R29–R32, Jul 1993.
- [BCV00] G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola. Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from gaussian behavior. *Phys. Rev. E*, 61(1):R29–R32, Jan 2000.
- [Bec03] C. Beck. Lagrangian acceleration statistics in turbulent flows. *EPL (Europhysics Letters)*, 64(2):151–157, 2003.
- [Bec07] Christian Beck. Statistics of three-dimensional lagrangian turbulence. *Physical Review Letters*, 98(6):064502, 2007.

- [Ber99] D. Bernard. Three-point velocity correlation functions in two-dimensional forced turbulence. *Phys. Rev. E*, 60(5):6184–6187, Nov 1999.
- [Ber00] D. Bernard. Turbulence for (and by) amateurs. *arxiv*, 2000.
- [BF05] A. Baule and R. Friedrich. Investigation of a generalized obukhov model for turbulence. *Physics Letters A*, 350(3-4):167 – 173, 2005.
- [Bor93] M. S. Borgas. The Multifractal Lagrangian Nature of Turbulence. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, 342(1665):379–411, 1993.
- [Bor94] V. Borue. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72(10):1475–1478, Mar 1994.
- [Boy01] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*. Dover Publications, 2 revised edition, 12 2001.
- [BSSB94] M. Briscolini, P. Santangelo, S. Succi, and R. Benzi. Extended self-similarity in the numerical simulation of three-dimensional homogeneous flows. *Phys. Rev. E*, 50(3):R1745–R1747, Sep 1994.
- [Buc14] E. Buckingham. On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations. *Phys. Rev.*, 4(4):345–376, Oct 1914.
- [CH93] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3):851, Jul 1993.
- [Chi96] Emily S. C. Ching. General formula for stationary or statistically homogeneous probability density functions. *Phys. Rev. E*, 53(6):5899–5903, Jun 1996.
- [CHQZ93] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Jr. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics (Scientific Computation)*. Springer, 7 1993.
- [Cor59] S. Corrsin. Progress Report on Some Turbulent Diffusion Research. *Advances in Geophysics*, 6:161–4, 1959.
- [CP01] P. Castiglione and A. Pumir. Evolution of triangles in a two-dimensional turbulent flow. *Phys. Rev. E*, 64(5):056303, Oct 2001.
- [CPS99] M. Chertkov, A. Pumir, and B. I. Shraiman. Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence. *Physics of Fluids*, 11(8):2394–2410, 1999.

- [Dai09] A. Daitche. Statistische und Geometrische Eigenschaften Turbulenter Strömungen. Diplomarbeit, 2009.
- [Dav04] P. A. Davidson. *Turbulence: An introduction for scientists and engineers*. 2004.
- [DG95] C. R. Doering and J. D. Gibbon. *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations*. April 1995.
- [DG01] S. Danilov and D. Gurarie. Forced two-dimensional turbulence in spectral and physical space. *Phys. Rev. E*, 63(6):061208, May 2001.
- [Doe09] C. R. Doering. The 3d Navier-Stokes Problem. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1):109–128, 2009.
- [Dyk82] M. Van Dyke. *Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, Inc., 10th edition, 6 1982.
- [Ein05] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [Fal94] G. Falkovich. Bottleneck phenomenon in developed turbulence. *Physics of Fluids*, 6(4):1411–1414, 1994.
- [Fel59] W. Feller. Non-Markovian Processes with the Semigroup Property. *Ann. Math. Statist.*, 30(4):1252–1253, 1959.
- [FJ05] M. Frigo and S. G. Johnson. The design and implementation of fftw3. *Proc. IEEE*, 93(2):216–231, 2005.
- [FjØ53] R. Fjørtoft. On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non divergent flow. *Tellus*, 5:225–230, 1953. Original lag Autor nicht vor; zitiert nach [Les97].
- [FLS01] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *Feynman Vorlesungen über Physik, 3 Bde., Bd.2, Elektromagnetismus und Struktur der Materie*. Oldenbourg, 1 2001. Die Vorlesungen wurden zwischen 1961 und 1963 am California Institute of Technology gehalten.
- [FP97a] R. Friedrich and J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a fokker-planck equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78(5):863–866, Feb 1997.
- [FP97b] R. Friedrich and J. Peinke. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 102(1-2):147 – 155, 1997.

- [FP09] R. Friedrich and J. Peinke. Fluctuations, Importance of: Complexity in the View of Stochastic Processes. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, chapter Part 6, pages 3574–3597. Springer New York, 2009.
- [Fri95] U. Frisch. *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov*. 1995.
- [Fri03] R. Friedrich. Statistics of Lagrangian Velocities in Turbulent Flows. *Phys. Rev. Lett.*, 90(8):084501, Feb 2003.
- [FS84] U. Frisch and P.-L. Sulem. Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 27(8):1921–1923, 1984.
- [Gar04] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences (Springer Series in Synergetics)*. Springer, 3rd edition, 4 2004.
- [Gaw99] K. Gawedzki. Easy turbulence. *arxiv*, 1999.
- [GFN02] T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano. Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation. *Physics of Fluids*, 14(3):1065–1081, 2002.
- [GV04] S. Goto and J C Vassilicos. Particle pair diffusion and persistent streamline topology in two-dimensional turbulence. *New Journal of Physics*, 6:65, 2004.
- [Hak83] H. Haken. *Synergetics. an introduction*. 1983.
- [HDG07] H. Homann, J. Dreher, and R. Grauer. Impact of the floating-point precision and interpolation scheme on the results of dns of turbulence by pseudo-spectral codes. *Computer Physics Communications*, 177(7):560 – 565, 2007.
- [HGBM07] H. Homann, R. Grauer, A. Busse, and W. C. Müller. Lagrangian statistics of navier-stokes and mhd turbulence. *Journal of Plasma Physics*, 73(06):821–830, 2007.
- [HKFG09] H Homann, O Kamps, R Friedrich, and R Grauer. Bridging from eulerian to lagrangian statistics in 3d hydro- and magnetohydrodynamic turbulent flows. *New Journal of Physics*, 11(7):073020 (15pp), 2009.
- [Hom09a] H. Homann. Datensatz mit Lagrangeschen Teilchendaten, 2009. Die Parameter zu diesem Datensatz finden sich in [HKFG09].

-
- [Hom09b] H. Homann. *Lagrangian Statistics of Turbulent Flows in Fluids and Plasmas*. Doktorarbeit, Ruhr Universität Bochum, 2009.
- [HS93] M. Holzer and E. Siggia. Skewed, exponential pressure distributions from gaussian velocities. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(10):2525–2532, 1993.
- [Jim98] J. Jiminez. Turbulent velocity fluctuations need not be gaussian. *Journal of Fluid Mechanics*, 376(-1):139–147, 1998.
- [JPT99] M.-C. Jullien, J. Paret, and P. Tabeling. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 82(14):2872–2875, Apr 1999.
- [KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.
- [Kle08] D. Kleinhans. *Stochastische Modellierung komplexer Systeme*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms Universität Münster, 2008.
- [Kol41a] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 30(4):299–303, 1941.
- [Kol41b] A. N. Kolmogorov. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 32(1):16–18, 1941.
- [Kol62] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 13(01):82–85, 1962.
- [Kol91a] A. N. Kolmogorov. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)*, 434(1890):15–17, July 1991.
- [Kol91b] A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)*, 434(1890):9–13, July 1991.
- [Kra67] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 10(7):1417–1423, 1967.

- [KT09] M. Kholmyansky and A. Tsinober. On an alternative explanation of anomalous scaling and how well-defined is the concept of inertial range. 2009.
- [Lan08] P. Langevin. Sur la theorie de mouvement Brownien. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 36:823–841, 1908.
- [Lan77] U. Landman. *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Applications*. Springer, 1 edition, 9 1977.
- [Les97] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, 3ed edition, 1997.
- [Lév49] P. Lévy. Exemples de processus pseudo-Markoviens. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 228(26):2004–2006, 1949.
- [LMG95] D. Lohse and A. Müller-Groeling. Bottleneck Effects in Turbulence: Scaling Phenomena in r versus p Space. *Phys. Rev. Lett.*, 74(10):1747–1750, Mar 1995.
- [LRPF06] St. Lück, Ch. Renner, J. Peinke, and R. Friedrich. The Markov-Einstein coherence length—a new meaning for the Taylor length in turbulence. *Physics Letters A*, 359(5):335 – 338, 2006.
- [Lül09] J. Lülff. Datensatz einer numerischen Simulation der Swift-Hohenberg-Gleichung, 2009.
- [Lun67] T. S. Lundgren. Distribution Functions in the Statistical Theory of Turbulence. *Physics of Fluids*, 10(5):969–975, 1967.
- [LVC⁺01] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz. Fluid particle acceleration in fully developed turbulence. *nature*, 409, 2001.
- [MB07] W.-C. Muller and A. Busse. Diffusion and dispersion of passive tracers: Navier-Stokes vs. MHD turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, 78(1):14003 (5pp), 2007.
- [MCB04] Nicolas Mordant, Alice M. Crawford, and Eberhard Bodenschatz. Three-Dimensional Structure of the Lagrangian Acceleration in Turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 93(21):214501, Nov 2004.
- [McC92] W. D. McComb. *The Physics of Fluid Turbulence (Oxford Engineering Science Series, 25)*. Oxford University Press, USA, 3 1992.

-
- [MDL⁺02] N. Mordant, J. Delour, E. L eveque, A. Arn eodo, and J.-F. Pinton. Long Time Correlations in Lagrangian Dynamics: A Key to Intermittency in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 89(25):254502, Dec 2002.
- [MLP04] N. Mordant, E. Leveque, and J.-F. Pinton. Experimental and numerical study of the Lagrangian dynamics of high Reynolds turbulence. *New Journal of Physics*, 6:116, 2004.
- [MMMP01] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, and J.-F. Pinton. Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 87(21):214501, Nov 2001.
- [MY75] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence. Volume 2 /revised and enlarged edition/*. 1975.
- [Nav23] Claude Louis Marie Henri Navier. M emoire sur les lois du mouvement des fluides. *M emoires de l'Acad emie des sciences de l'Institut de France*, 6:389–440, 1823.
- [Nov67] E. A. Novikov. Kinetic equations for a vortex field. *Soviet Physics-Doklady*, 12(11):1006–1008, 1967.
- [Nov93] E. Novikov. A new approach to the problem of turbulence, based on the conditionally averaged navier-stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 12(2):107–126, 1993.
- [NP06] A.P. Nawroth and J. Peinke. Small scale behavior of financial data. *The European Physical Journal B*, 50(1-2):147–151, mar 2006.
- [Obo59] A. M. Oboukhov. Description of Turbulence in Terms of Lagrangian Variables. *Advances in Geophysics*, 6:113, 1959.
- [Obo62] A. M. Oboukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 13(01):77–81, 1962.
- [Ons49] L. Onsager. Statistical Hydrodynamics. *Nuovo Cimento Supplement*, 6(2):279–287, March 1949.
- [Paw67] R. F. Pawula. Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation. *Phys. Rev.*, 162(1):186–188, Oct 1967.
- [PB00] W. Paul and J. Baschnagel. *Stochastic Processes*. Springer, 1 edition, 3 2000.

- [PF85] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, Proceedings of the International School of Physics E. Fermi. North Holland, Amsterdam, 1985.
- [Pop00] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. September 2000.
- [PS98] D. I. Pullin and P. G. Saffman. Vortex Dynamics in Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1):31–51, 1998.
- [PT97] J. Paret and P. Tabeling. Experimental Observation of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 79(21):4162–4165, Nov 1997.
- [PT98] J. Paret and P. Tabeling. Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations. *Physics of Fluids*, 10(12):3126–3136, 1998.
- [PTVF07] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3 edition, 9 2007.
- [Ric22] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1922.
- [Ris96] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications (Springer Series in Synergetics)*. Springer, 2 edition, 9 1996.
- [RPF01] C. Renner, J. Peinke, and R. Friedrich. Experimental indications for Markov properties of small-scale turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 433(-1):383–409, 2001.
- [SA81] E. D. Siggia and H. Aref. Point-vortex simulation of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 24(1):171–173, 1981.
- [Saw91] B. L. Sawford. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(6):1577–1586, 1991.
- [Saw01] B. Sawford. Turbulent relative dispersion. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33(1):289–317, 2001.
- [Sch04] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner B.G. GmbH, 8 2004.

-
- [Sch07] C. Schwarz. Lagrangesche Statistik in kompressibler Turbulenz. Master's thesis, Ruhr Universität Bochum, 2007.
- [SH77] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15(1):319–328, Jan 1977.
- [Sil86] B. W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC, 1 edition, 4 1986.
- [SL94] Z.-S. She and E. Leveque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72(3):336–339, Jan 1994.
- [Sor04] D. Sornette. *Critical phenomena in natural sciences : chaos, fractals selforganization and disorder : concepts and tools*. 2004.
- [Sto43] G. G. Stokes. On some cases of Fluid Motion. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:105, 1843. siehe auch [Sto80, S. 17–68].
- [Sto80] G. G. Stokes. *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*, volume I. Cambridge Univ. Press, 1880.
- [SY93] L. M. Smith and V. Yakhot. Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2d turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 71(3):352–355, Jul 1993.
- [Tab02] P. Tabeling. Two-dimensional turbulence: a physicist approach. *Physics Reports*, 362(1):1 – 62, 2002.
- [Tay22] G. I. Taylor. Diffusion by Continuous Movements. *Proc. London Math. Soc.*, s2-20(1):196–212, 1922.
- [Tay35] G. I. Taylor. Statistical Theory of Turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 151(873):421–444, 1935.
- [TB09] F. Toschi and E. Bodenschatz. Lagrangian Properties of Particles in Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1):375–404, 2009.
- [TL72] H. Tennekes and J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, 3 1972.
- [Tsi09] A. Tsinober. *An Informal Conceptual Introduction to Turbulence: Second Edition of An Informal Introduction to Turbulence (Fluid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 2nd ed. edition, 8 2009.

- [VM91] A. Vincent and M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech*, 225:1–20, 1991.
- [Vos09] M. Vosskuhle. Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz. Diplomarbeit, 2009.
- [VSB98] G. A. Voth, K. Satyanarayan, and E. Bodenschatz. Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 10(9):2268–2280, 1998.
- [WF09] M. Wilczek and R. Friedrich. Dynamical origins for non-Gaussian vorticity distributions in turbulent flows. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 80(1):016316, 2009.
- [Wil09a] M. Wilczek. Datensatz mit Lagrangeschen Teilchendaten, 2009.
- [Wil09b] M. Wilczek. Visualisierung des Vortizitätsfeldes einer numerischen Simulation der Navier-Stokes-Gleichung in drei Dimensionen mit einer Auflösung von 512^3 Gitterpunkten, 2009.
- [WKP04] M. Waechter, A. Kouzmitchev, and J. Peinke. Increment definitions for scale-dependent analysis of stochastic data. *Phys. Rev. E*, 70(5):055103, Nov 2004.
- [Yak06] V. Yakhot. Probability densities in strong turbulence. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 215(2):166 – 174, 2006.
- [Yeu97] P. K. Yeung. One- and two-particle Lagrangian acceleration correlations in numerically simulated homogeneous turbulence. *Physics of Fluids*, 9(10):2981–2990, 1997.
- [Yeu02] P. K. Yeung. Lagrangian Investigations of Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1):115–142, 2002.
- [YP88] P. K. Yeung and S. B. Pope. An algorithm for tracking fluid particles in numerical simulations of homogeneous turbulence. *Journal of Computational Physics*, 79(2):373 – 416, 1988.
- [YP89] P. K. Yeung and S. B. Pope. Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 207(-1):531–586, 1989.

Lebenslauf

Der Lebenslauf ist in der digital publizierten Version dieser Arbeit nicht enthalten.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe, die interessante Themenstellung und seine Bereitschaft, jederzeit über meine Arbeit zu diskutieren bedanken. Durch die Zusammenarbeit mit ihm habe ich sehr viel über Turbulenz und die Physik komplexer Systeme im Allgemeinen gelernt. Seine Bereitschaft mir Raum für die Verfolgung eigener Ideen zu geben ermöglichte es mir, das eigenständige wissenschaftliche Arbeiten zu erlernen.

Bei Herrn Prof. Dr. Rainer Grauer bedanke ich mich besonders für sein stetes Interesse an meiner Arbeit und seine immerwährende Bereitschaft zu offenen fachlichen Gesprächen. Beides hat mich während meiner Promotion immer wieder motiviert.

Michael Wilczek möchte ich für die unzähligen, manchmal auch kontrovers geführten, fachlichen Diskussionen danken, aus denen ich persönlich sehr viel gelernt habe und von denen auch die vorliegende Arbeit stark profitiert hat. Seine Ideen, die freundschaftliche Bereitschaft, Wissen zu teilen, offen zu diskutieren und seine Kollegen nach Kräften zu unterstützen, haben mich während der letzten Jahre immer wieder motiviert.

Bei Holger Homann möchte ich mich für die vielen Diskussionen zur Lagrangeschen Statistik, seine Hilfsbereitschaft und die Möglichkeit einige Daten seiner Simulationen zu verwenden, bedanken.

Susanne Zeglin schulde ich Dank für ihre stete moralische Unterstützung, die mir besonders in den Zeiten, in denen ich mich von der Turbulenz habe ärgern lassen, geholfen hat.

Tobias Maletzky möchte ich für die vielen fachlichen und nicht fachlichen Diskussionen danken, die mich schon mein ganzes Studium lang begleitet haben.

Ich möchte mich auch bei Michel Voßkuhle, David Kleinhans, Guido Krüger, Hans Behringer, Diana Nordhaus, Rafaela Hillerbrand und Carolin Schnedelbach sowie allen Personen im Umfeld des Instituts für Theoretische Physik und des CeNoS danken, die mir durch ihre Hilfsbereitschaft bei fachlichen und nichtfachlichen Dingen das Leben manchmal enorm vereinfacht haben.

Bei unserem Systemadministrator Holger Angenent möchte ich mich für seine Geduld bedanken, ohne die unsere Arbeit am Institut kaum durchführbar wäre.

Hans Behringer, Susanne Zeglin, Michael Wilczek, Michel Voßkuhle und Ivonne Niederbracht danke ich für das Korrekturlesen und für die vielen konstruktiven Vorschläge bei der Anfertigung dieser Arbeit. Diesbezüglich geht mein ganz besonderer

Dank an Max Theodor Kuchel, der durch seine unermüdliche Hilfsbereitschaft und seinen unnachgiebigen Einsatz für die deutsche Sprache stark zur Lesbarkeit dieser Arbeit beigetragen hat.

Ich möchte mich bei den vielen Diplomandinnen und Diplomanden bedanken, die mich während meiner Promotionszeit um fachliche Auskunft gebeten haben, da ich bei der Beantwortung ihrer Fragen meist mehr gelernt habe als sie.

Der Physik Fußballtruppe danke ich dafür, dass ich bis heute unverletzt geblieben bin.

Außerdem danke ich allen Kollegen und Freunden, die hier nicht explizit erwähnt werden, obwohl sie alle auf ihre Weise zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie danken, die mich während der Zeit meiner Promotion fortwährend unterstützte, obwohl sie, wie schon bei der Diplomarbeit, nicht immer ganz so genau wußten, was ihr Sohn. bzw. Bruder da so erforscht.

Stichwortregister

A

Abstandsmaß 28
 Korrelation 28, 45, 93
 Kullback-Leibler 28

D

Dimensionsanalyse ... 40, 48, 114, 189
 Dissipationsbereich 47
 Drehimpuls 15
 Druck 11 f
 Berechnung 14
 Poissongleichung 12

E

Energiefluss 75 f
 Enstrophie 15
 Ereignisraumvariable 19
 Eulerbild 16

G

Gesamtenergie 14, 73 f

H

Hyporeibung 71, 80

I

Inertialbereich .. 47 – 50, 61 f, 70 – 73,
 77, 82, 86, 89, 136
 Inkompressibilität 17
 integrale Skala

Definition 42
 Euler 81, 84 f
 Lagrange 105, 108, 110
 Richardsonkaskade 47

Intermittenz 50
 inverse Energiekaskade 55 – 59, 62, 64,
 72 ff
 Aufbau 73
 Modell 62

K

K41-Theorie 48, 113 f, 166

Kolmogorov

4/5-Gesetz 50, 59, 61
 Konstante 49, 77 f
 Skalen 48

Kolmogorovzeitskala 109

Korrelationsfunktion

Beschleunigung 117 ff
 Definition 27
 Eulersche Geschwindigkeit ... 84 f
 Lagrangesche Geschwindigkeit 108
 von Ableitungen 34

Kumulanen

Kompensierte 139

Kumulanten 25, 139

kompensierte 26, 139 f

Kurtosis 26

Schiefe 26

L

Lagrangebild 16

Wirbelstreckungsterm 14
 anschauliche Bedeutung 15
Wirbeltransportgleichung . 13, 61, 63 ff
 in zwei Dimensionen.....14

Z

zentraler Grenzwertsatz.....27
Zufallsvariable.....19