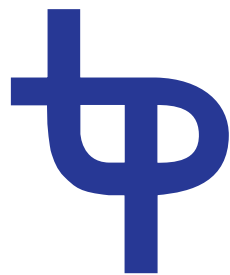


# Statistische Eigenschaften zweidimensionaler Turbulenz in der direkten Enstrophiekaskade

als Diplomarbeit vorgelegt von

Max Haardt

August 2010



institut für  
theoretische physik

Westfälische Wilhelms-Universität  
Münster



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Navier-Stokes-Gleichung . . . . .	3
2.1.1. Wirbeltransportgleichung . . . . .	4
2.1.2. Erhaltungsgrößen . . . . .	5
2.2. Statistische Beschreibung der Turbulenz . . . . .	5
2.2.1. Statistische Beschreibungsgrößen . . . . .	5
2.2.2. Phänomenologische Ansätze . . . . .	7
2.3. Zweidimensionale Turbulenz . . . . .	11
2.3.1. Der Mechanismus der Doppelkaskade in zwei Dimensionen . . . . .	11
2.3.2. Energie- und Enstrophietransport . . . . .	13
2.3.3. Energiespektrum . . . . .	15
<b>3. Direkte Enstrophiekaskade</b>	<b>17</b>
3.1. Numerische Implementierung . . . . .	17
3.2. Aufbau der direkten Enstrophiekaskade . . . . .	20
3.3. Stationärer Zustand . . . . .	21
3.3.1. Energie und Enstrophiefluss . . . . .	21
3.3.2. Energiespektrum . . . . .	24
3.3.3. Die Struktur der Strömung . . . . .	25
3.4. Zusammenfassung . . . . .	26
<b>4. Vortizitätsstatistik</b>	<b>29</b>
4.1. Einpunktverteilung . . . . .	29
4.2. Inkrementverteilung . . . . .	30
4.3. Strukturfunktionen . . . . .	32
4.4. Zusammenfassung . . . . .	37
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>39</b>
<b>A. Numerik</b>	<b>41</b>
A.1. Numerische Berechnung der Wirbeltransportgleichung . . . . .	41
A.2. Berechnung des Enstrophie- und Energieflusses . . . . .	42
A.3. Simulationsparameter . . . . .	43

<b>B. Beigelegte CD</b>	<b>45</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>
<b>Danksagung</b>	<b>53</b>

# 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit turbulenten Strömungen. Turbulenz ist keine seltene Erscheinung, sondern vielmehr ein allgegenwärtiges Phänomen. Sie lässt sich zum Beispiel beobachten bei einem reißenden Fluss mit all seinen großen und kleinen Verwirbelungen oder auch beim Rauch, der von einer Zigarette aufsteigt. Turbulenz spielt eine maßgebliche Rolle bei der Entstehung des Wetters, den Strömungen in Ozeanen und sogar in der Astrophysik. Darüberhinaus ist sie bei einer Vielzahl von technischen Anwendungen von Bedeutung. Beispiele sind Mischungs- und Verbrennungsvorgänge und der Luftwiderstand bei Fahrzeugen, der sich durch Turbulenz erhöht.

Die Grundgleichung zur Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen, die Navier-Stokes-Gleichung, ist seit fast 200 Jahren bekannt. Trotzdem gilt das Problem der Turbulenz bis heute als ungelöst, das heißt, es gibt es bisher keine Theorie, die das Verhalten turbulenter Strömungen aufgrund dieser Gleichung vorhersagen könnte. Turbulenz zeichnet sich aus durch chaotisches Verhalten, d. h. empfindliche Abhängigkeit von Anfangs- und Randbedingungen sowie räumlich und zeitlich irreguläres Verhalten. Ein weiteres Merkmal turbulenter Strömungen ist, dass eine Vielzahl verschiedener räumlicher und zeitlicher Skalen eine Rolle spielen. Turbulente Strömungen zeigen ein derart komplexes Verhalten, dass eine Beschreibung all ihrer Einzelheiten unmöglich ist. Allerdings ist die Kenntnis aller Details der Strömung auch nicht von Interesse. Stattdessen sucht man nach einer Möglichkeit der statistischen Beschreibung. Dies wird durch den Umstand erschwert, dass sich trotz des chaotischen Verhaltens innerhalb von Turbulenz auch immer eine gewisse Ordnung, die in Form von sogenannten kohärenten Strukturen beziehungsweise Wirbeln auftritt, findet. Es ist gerade die Mischung aus Ordnung und Chaos, die die Beschreibung von Turbulenz so schwierig macht.

Neben dem Ansatz, Entwicklungsgleichungen für Observablen direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung herzuleiten, gibt es Versuche, auf Basis phänomenologischer Theorien statistische Eigenschaften der Strömung vorherzusagen. Das bekannteste Beispiel ist hier wohl die Theorie von Kolmogorov [Kol41a, Kol41b]. Die Gültigkeit dieser Theorien wird anhand von Experimenten und numerischen Simulationen überprüft.

Das Thema dieser Arbeit ist zweidimensionale Turbulenz. Dabei stellt sich die Frage, welchen Sinn es ergibt, sich mit einem Modell zu beschäftigen, das auf den ersten Blick nur wenig mit der physikalischen Realität zu tun hat. Darauf ist zu antworten, dass die Physik grundsätzlich mit vereinfachten Modellen arbeitet, um Rückschlüsse auf die wirkliche Welt zu ziehen und da sind turbulente Strömungen keine Ausnahme.

Tatsächlich gibt es Systeme, in denen sich Phänomene zweidimensionaler Turbulenz, wie etwa die Bildung großskaliger Wirbel, beobachten lassen. Ein Beispiel sind großskalige Strömungen in der Atmosphäre. Diese können näherungsweise als zweidimensional angenommen werden, da hier die Ausdehnung in die Breite die Höhe um ein Vielfaches übersteigt. Auch im Labor können Magnetfelder oder schnelle Rotation einen Freiheitsgrad der Bewegung unterdrücken.

Allerdings unterscheiden sich zwei- und dreidimensionale Turbulenz nicht nur durch vereinzelte Phänomene. Die Unterschiede sind viel grundsätzlicher. So fließen Energie und Enstrophie hier nicht wie in drei Dimensionen beide von großen zu kleinen Skalen. Stattdessen beobachtet man in zwei Dimension eine sogenannte inverse Energiekaskade, d. h., Energie wird von kleinen zu großen Skalen transportiert. Die Enstrophie fließt dagegen wie in drei Dimensionen von großen zu kleinen Skalen. Dies bezeichnet man als direkte Enstrophiekaskade. In den letzten Jahren stand die inverse Energiekaskade im Mittelpunkt vieler Veröffentlichungen zu zweidimensionaler Turbulenz. Die direkte Enstrophiekaskade wurde dagegen seltener behandelt. Deshalb soll sie im Rahmen dieser Arbeit genauer untersucht werden, mit dem Ziel einen Beitrag zum Verständnis zweidimensionaler Turbulenz zu leisten.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil (Kapitel 2) werden die Grundlagen, auf denen die Arbeit basiert, erläutert. Dabei wird besonders auf zweidimensionale Turbulenz und deren Besonderheiten eingegangen. Im zweiten Teil (Kapitel 3) wird das für diese Arbeit geschriebene Programm zur Simulation der direkten Enstrophiekaskade vorgestellt, und überprüft, ob die Simulation dem im ersten Teil erläuterten Bild von der Enstrophiekaskade entspricht, und bezüglich wichtiger charakteristischer Eigenschaften mit anderen Simulationen übereinstimmt. Der letzte Teil (Kapitel 4) beschäftigt sich mit der Statistik des Vortizitätsfeldes, die im Gegensatz zur Statistik des Geschwindigkeitsfeldes bisher kaum untersucht wurde. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Inkrementstatistik der Vortizität. Diese wird mit Hilfe der numerischen Simulation umfassend untersucht. Schließlich wird im Anhang noch kurz auf einige numerische Besonderheiten eingegangen.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen erläutert werden, die ein Verständnis der vorliegenden Arbeit ermöglichen. Das Kapitel beginnt mit der Einführung der Grundgleichungen der Fluidodynamik. Danach geht es weiter mit statistischen Grundlagen, sowie der Beschreibung von Turbulenz durch phänomenologische Theorien. Der letzte Teil widmet sich den Besonderheiten zweidimensionaler Turbulenz. Die Darstellung ist bewusst kurz gehalten. Dem interessierten Leser bieten Lehrbücher wie [Dav04, Pop00, Fri96] die Möglichkeit sich intensiver mit der Materie auseinanderzusetzen. Für einen schnellen Einstieg in die Thematik empfehlen sich z. B. [Gaw99, Ber00].

### 2.1. Navier-Stokes-Gleichung

Die fundamentale Gleichung zur Beschreibung eines Fluids ist die Navier-Stokes-Gleichung. Für eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte Eins lautet sie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  das von Ort und Zeit abhängige Geschwindigkeitsfeld und  $p(\mathbf{x}, t)$  der Druck. Bei  $\nu$  handelt es sich um die kinematische Viskosität. Eine vollständige Beschreibung erfordert zusätzlich noch die Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Bildet man die Divergenz von (2.1) erhält man unter Berücksichtigung von (2.2) die Poissongleichung für den Druck

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)].$$

Für ein unendlich ausgedehntes Volumen  $V$  ergibt sich

$$p(\mathbf{x}, t) = - \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)] d\mathbf{x}'.$$

Bei  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  handelt es sich um die Greensfunktion des Laplace-Operators. In zwei Dimensionen lautet sie

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|),$$

in drei Dimensionen

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Der Druck ist also eine nichtlokale Größe. Er hängt vom momentanen Geschwindigkeitsfeld an allen Orten ab. Das ist eine der Hauptursachen für die Schwierigkeiten bei der mathematischen Behandlung der Navier-Stokes-Gleichung. Diese wird aufgrund der Nichtlokalität des Drucks zu einer Integro-Differentialgleichung. Zum Anderen führt der nichtlineare Term  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  zu einer empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und verhindert darüber hinaus die Anwendung des Superpositionsprinzips. Daher besteht nur in den seltensten Fällen, d. h. nur für einige wenige Anfangsbedingungen, die Möglichkeit einer analytischen Lösung.

### 2.1.1. Wirbeltransportgleichung

Eine weitere wichtige Größe zur Charakterisierung der Strömung ist die Vortizität oder Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Im Falle einer zweidimensionalen Strömung gilt  $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_z$ , d. h. die Vortizität hat nur eine Komponente in z-Richtung. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  liegt dann in der x-y-Ebene, d. h. ihre z-Komponente ist gleich Null.

Bildet man die Rotation der Navier-Stokes-Gleichung (2.1), so erhält man nach einigen Umformungen die Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Bei  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  handelt es sich um den sogenannten Wirbelstreckungsterm. Dieser ist in drei Dimensionen für die Bildung feiner Wirbelfilamente verantwortlich und liefert somit einen Mechanismus für die beobachtete direkte Energiekaskade (vgl. Abschnitt 2.3). In zwei Dimensionen dagegen verschwindet er, da hier die Wirbelstärke immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht. Eine sehr anschauliche Erklärung des Mechanismus der Wirbelstreckung in drei Dimensionen findet sich in [Jim98].

Um eine Strömung zu charakterisieren, führt man als Parameter die Reynoldszahl ein:

$$Re = \frac{uL}{\nu}.$$

$L$  und  $u$  sind hier eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit der Strömung. Die Reynoldszahl liefert eine grobe Abschätzung des Verhältnisses von advektiven zu dissipativen oder diffusiven Effekten. Eine hohe Reynoldszahl bedeutet ein stark turbulentes Feld. Bei dem Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  oder  $\nu \rightarrow 0$  spricht man von voll entwickelter Turbulenz.



### 2.1.2. Erhaltungsgrößen

Bei einer idealen Flüssigkeit, d. h. verschwindende Viskosität und kein Auftreten äußerer Kräfte, bleibt sowohl in zwei Dimensionen als auch in drei Dimensionen die mittlere kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$$

erhalten. Es gilt somit

$$\frac{d}{dt} E = 0.$$

Darüber hinaus führt man als weitere Erhaltungsgröße die Enstrophie

$$Z = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

ein<sup>1</sup>. Sie ist jedoch nur in zwei Dimensionen erhalten, da in drei Dimensionen der Wirbelstreckungsterm Enstrophie erzeugen und vernichten kann. In zwei Dimensionen gilt also

$$\frac{d}{dt} Z = 0.$$

Bei der für diese Arbeit durchgeführten numerischen Simulation wird zwar keine ideale Flüssigkeit betrachtet, allerdings werden Verluste durch Dissipation, durch Energiezufuhr von außen, wieder ausgeglichen, so dass sich ein Fließgleichgewicht einstellt. Damit sind Energie und Enstrophie (bis auf Fluktuationen) erhalten.

## 2.2. Statistische Beschreibung der Turbulenz

Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung und vollkommen deterministisch. Allerdings hängen ihre Lösungen aufgrund des nichtlinearen Terms empfindlich von den Anfangsbedingungen ab und zeigen in der Regel chaotisches Verhalten. Deshalb ist es praktisch unmöglich, die genaue zeitliche Entwicklung des Systems vorherzusagen. Stattdessen beschränkt man sich auf die Betrachtung bestimmter, die Strömung charakterisierender statistischer Größen.

### 2.2.1. Statistische Beschreibungsgrößen

An dieser Stelle sollen die statistischen Grundlagen dieser Arbeit nur kurz angerissen werden. Eine detailliertere Darstellung findet sich z. B. in [Kam09].

---

<sup>1</sup>Tatsächlich lässt sich mit Hilfe der Vortizität eine unendliche Zahl an Erhaltungsgrößen konstruieren. So gilt für jedes Funktional  $f(\boldsymbol{\omega})$ :  $\frac{d}{dt} \langle f(\boldsymbol{\omega}) \rangle = 0$  (siehe [Les97]).

### Mittelungsprozesse

Alle statistischen Größen werden über einen Mittelungsprozess gewonnen. Dabei bezeichnet  $X(\mathbf{x}, t)$  die Zufallsvariable am Ort  $\mathbf{x}$ . Unterschieden wird zwischen drei Arten von Mittelwerten:

- **Zeitmittelung**

Die Mittelung erfolgt am Ort  $\mathbf{x}'$  über die Zeit  $T$ :

$$\langle X(\mathbf{x}', t) \rangle_Z = \frac{1}{T} \int_0^T X(\mathbf{x}', t) dt.$$

- **Ensemblemittelung**

Die Mittelung erfolgt über  $N$  Realisierungen des Zufallsprozesses, die die Zufallsvariablen  $X_1(\mathbf{x}', t'), \dots, X_N(\mathbf{x}', t')$  liefern:

$$\langle X(\mathbf{x}', t') \rangle_E = \frac{1}{N} \sum_N X_n(\mathbf{x}', t').$$

- **Raummittelung**

Die Mittelung erfolgt über die Zufallsvariablen  $X_1(\mathbf{x}^1, t'), \dots, X_M(\mathbf{x}^M, t')$ , die an den Orten  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^M$  bestimmt werden.

$$\langle X(\mathbf{x}, t') \rangle_R = \frac{1}{M} \sum_M X_m(\mathbf{x}^m, t').$$

In der vorliegenden Arbeit werden alle statistischen Größen durch Zeit- und Raummittelung bestimmt. Bei Gültigkeit der Ergodenhypothese gelten folgende Äquivalenzen:

Für den Fall statistischer Stationarität, d. h. Invarianz der Zufallsvariable  $X$  unter der Transformation  $t \rightarrow t + t_0$ , gilt

$$\langle X \rangle_Z = \langle X \rangle_E.$$

Unter der Voraussetzung statistischer Homogenität, d. h. Invarianz unter der Transformation  $x \rightarrow x + x_0$ , gilt

$$\langle X \rangle_R = \langle X \rangle_E.$$

### Selbstähnlichkeit

Neben Symmetrien kann auch Selbstähnlichkeit die Beschreibung eines physikalischen Systems vereinfachen. Zu einer Funktion  $F(x, y)$  lassen sich mithilfe der von  $x$  abhängigen Skalen  $F_0(x)$  und  $y_0(x)$  skalierte Variablen  $\pi = y(x)/y_0(x)$  und  $\Pi(\pi, x) = F(x, y)/F_0(x)$  definieren. Man bezeichnet  $F(x, y)$  als bezüglich der Variable  $x$  selbstähnlich, wenn die skalierte Variable nicht von  $x$  abhängt, d. h. wenn es eine Funktion  $\Phi$  gibt mit

$$\Pi(\pi, x) = \Phi(\pi).$$

## Verteilungsfunktionen

Bei der genaueren Untersuchung einer Strömung betrachtet man häufig sogenannte PDFs (Probability Density Functions), also Verteilungsfunktionen der Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Verteilungsfunktion  $f(x)$  von  $X$  ist so definiert, dass  $f(x)\Delta x$  der Wahrscheinlichkeit entspricht, das Ereignis  $X$  im Intervall  $\Delta x$  um  $x$  zu finden.

Bildet man den Erwartungswert der Potenzen von  $x$ , erhält man die Momente

$$m_n = \langle X^n \rangle = \int x^n f(x) dx.$$

Folgende, eng mit den Momenten zusammenhängenden Kenngrößen dienen dazu, Verteilungsfunktionen näher zu charakterisieren und erlauben darüber hinaus einen Vergleich mit der Gaußform (siehe Abb. 2.1a):

- Mittelwert

$$M = \langle X \rangle$$

Der Mittelwert entspricht dem ersten Moment der Verteilung.

- Varianz

$$\sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$$

- Skewness (Schiefheit)

$$S = \frac{\langle X^3 \rangle}{\langle X^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

Die Skewness beschreibt die Neigung der Kurve nach links oder rechts (siehe Abb. 2.1b). Für eine Gaußverteilung erhält man typischerweise einen Wert von  $S = 0$ .

- Kurtosis

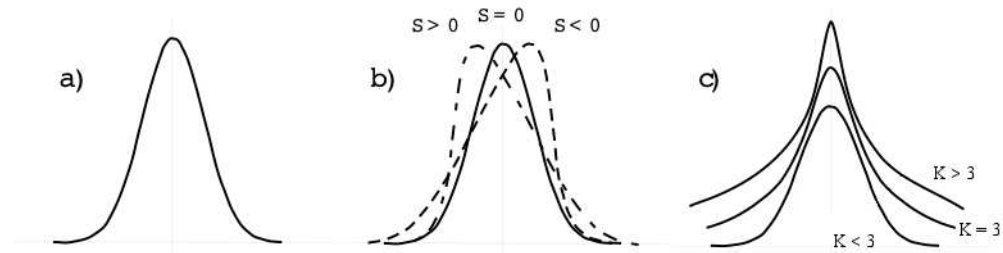
$$K = \frac{\langle X^4 \rangle}{\langle X^2 \rangle^2} - 3$$

Die Kurtosis ist ein Maß für die „Spitzigkeit“ der Verteilung (siehe Abb. 2.1c). Für eine Gaußkurve gilt  $K = 0$ .

### 2.2.2. Phänomenologische Ansätze

Neben der Möglichkeit, statistische Eigenschaften von turbulenten Strömungen direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung herzuleiten, gibt es noch die Möglichkeit eines phänomenologischen Ansatzes. Diesem liegen Modellvorstellungen zugrunde, die nicht rigoros bewiesen werden können. Basierend auf diesen Modellvorstellungen werden Theorien entwickelt, die Vorhersagen über das betrachtete System ermöglichen sollen.

Eine sehr ausführliche Darstellung der in diesem Abschnitt behandelten phänomenologischen Theorien sowie der aus ihnen ableitbaren Skalierungsgesetze findet sich in [Fri96].



**Abbildung 2.1.:** Die Gaußverteilung (a) und der Einfluss des dritten (b) und vierten Moments (c) auf die Form der Verteilung (Abbildung aus [Zeg05]).

### Richardsonkaskade

Grundlage für die meisten phänomenologischen Theorien ist Richardsons Energiekaskade von 1922 [Ric22]. Richardson ging davon aus, dass Strömungen aus Wirbeln verschiedener Größe  $r$  bestehen, denen jeweils eine typische Geschwindigkeit  $u(r)$  und eine typische Zeitskala  $t_r = \frac{r}{u(r)}$  zugeordnet werden kann. Nach Richardsons Vorstellung erzeugt die dem System auf der Skala  $L$  mit der konstanten Rate  $\epsilon$  zugeführte Energie Wirbel mit einer dieser Längenskala entsprechenden Größe. Die Reynoldszahl auf dieser Skala  $Re(L) = \frac{u(L)L}{\nu}$  ist sehr groß, und damit sind viskose Effekte zu vernachlässigen. Die großen Wirbel sind instabil und zerfallen in einem Kaskadenprozess zu immer kleineren Wirbeln, so dass die Energie zu immer kleineren Strukturen transportiert wird, bis schließlich eine Skala  $\eta$  erreicht wird, auf der die Reynoldszahl klein genug ist ( $Re(\eta) = \frac{u(\eta)\eta}{\nu}$ ), und die Wirbel nicht mehr zerfallen sondern die Energie über die Viskosität dissipiert werden kann. Die Annahme ist, dass dies für  $Re(\eta) \approx 1$  der Fall ist.

Die Vorstellung der Energiekaskade fußt auf folgenden drei Modellannahmen:

- Es gibt einen Bereich, in dem die Energie mit konstanter Rate  $\epsilon = \frac{u_r^2}{t_r} = \text{konstant}$  weitergegeben wird.
- Die Wechselwirkung erfolgt nur lokal, d. h. nur mit Wirbeln benachbarter Größenordnung.
- Die Wirbel füllen das Volumen der Strömung auf allen Skalen ganz aus. Hieraus folgt Skaleninvarianz, d. h. die Strömung hat auf allen Skalen die gleiche Struktur.

Gemäß den eben genannten Vorstellungen unterscheidet man drei Bereiche:

- $r > L$ : Auf dieser Längenskala fließt Energie in das System.
- $\eta \ll r \ll L$ : Dies ist der sogenannte Inertialbereich. Hier wird die Energie kaskadenartig von größeren zu immer kleineren Längenskalen transportiert.
- $r < \eta$ : Dies ist der Dissipationsbereich. Hier wird die Energie aus den Wirbelbewegungen dissipiert.

Dies ist in Abbildung 2.2 noch einmal veranschaulicht.

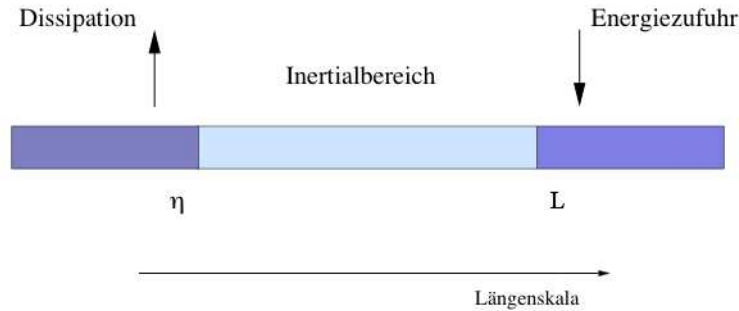


Abbildung 2.2.: Die drei Bereiche der Energiekaskade (Abbildung aus [Bau04])

### Kolmogorov 1941

Basierend auf der Idee der Energiekaskade stellte Kolmogorov in seinem 1941 veröffentlichten Arbeiten [Kol41a, Kol41b]<sup>2</sup> drei Hypothesen auf und traf mit Hilfe einer Dimensionsanalyse Aussagen über statistische Eigenschaften turbulenter Strömungen<sup>3</sup>:

- **Hypothese der lokalen Isotropie:** Bei hinreichend hoher Reynoldszahl sind die kleinskaligen ( $r \ll L$ ) turbulenten Bewegungen statistisch isotrop.
- **Erste Ähnlichkeitshypothese:** Für sehr hohe, aber nicht unendlich große Reynoldszahlen sind Statistiken der kleinskaligen Bewegungen universell und eindeutig durch  $r, \nu$  und  $\epsilon$  bestimmt.

Aus den beiden Parametern  $\epsilon$  ( $[\epsilon] = L^2 T^{-3}$ ) und  $\nu$  ( $[\nu] = L^2 T^{-1}$ ) lassen sich mit Hilfe einer Dimensionsanalyse die sogenannten Kolmogorov-Skalen bilden. Dies sind die Skalen, die der Dissipation (siehe vorheriger Abschnitt) zugeordnet werden:

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} && \text{(Länge)} \\ \tau_\eta &= \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(Zeit)} \\ u_\eta &= \frac{\eta}{\tau_\eta} = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} && \text{(Geschwindigkeit)}. \end{aligned}$$

- **Zweite Ähnlichkeitshypothese:** Im Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen sind die Statistiken der kleinskaligen Bewegungen im Inertialbereich  $\eta \ll r \ll L$  universell und eindeutig durch  $r$  und  $\epsilon$  bestimmt und unabhängig von  $\nu$ .

Die wesentliche Aussage dieser drei Hypothesen ist, dass die Information über die der Strömung auf großen Skalen aufgeprägte Struktur auf kleinen Skalen verloren geht, die Turbulenz also einen universellen Zustand einnimmt.

<sup>2</sup>Englische Übersetzung erschienen in [Kol91b, Kol91a]

<sup>3</sup>Die Hypothesen sowie die daraus gefolgerten Aussagen über statistische Eigenschaften turbulenter Strömungen werden in der Literatur häufig unter der Bezeichnung „K41“ zusammengefasst.

In seiner ersten Veröffentlichung von 1941 [Kol41a] macht Kolmogorov Vorhersagen bezüglich der longitudinalen Strukturfunktionen  $S_n(r)$ . Diese sind wie folgt definiert:

$$S_n(r) = \left\langle \left[ (\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]^n \right\rangle.$$

Kolmogorov erhielt für die longitudinale Strukturfunktion folgende Beziehung:

$$S_n(r) = C_n(\epsilon r)^{\frac{n}{3}}. \quad (2.5)$$

Dabei sind die dimensionslosen Konstanten  $C_n$  nach Kolmogorov universell.

In einer weiteren Veröffentlichung [Kol41b] stellte Kolmogorov eine Relation für die dritte Strukturfunktion auf, das sogenannte  $\frac{4}{5}$ -Gesetz<sup>4</sup>:

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (2.6)$$

Dieses ergibt sich direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung.

Ausgehend von der zweiten Strukturfunktion<sup>5</sup>  $S_2 \sim r^{\frac{2}{3}}$  erhält man für das Energiespektrum<sup>6</sup> ([Fri96])

$$E(k) = C\epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.7)$$

$C$  ist wieder eine universelle, dimensionslose Konstante.

Obwohl sich die oben abgeleiteten Relationen für die Strukturfunktionen und das Energiespektrum ursprünglich auf dreidimensionale Turbulenz beziehen, lassen sich Gleichung (2.5) und (2.7) auch auf die inverse Energiekaskade in zwei Dimensionen anwenden. Die entsprechenden Relationen für die direkte Enstrophiekaskade sehen jedoch etwas anders aus, was im Laufe dieser Arbeit noch deutlich werden wird.

## Intermittenz

Hängt die Statistik im Inertialbereich nicht nur von  $\epsilon$  und  $r$  ab, so hat das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen nicht mehr die einfache Form (2.5) und somit müssen auch die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsinkremente keine Selbstähnlichkeit mehr aufweisen. Stattdessen kann es im Inertialbereich zu einem Übergang der Verteilungsfunktionen von einer funktionalen Form zu einer anderen kommen. Das nicht selbstähnliche Verhalten der Inkrementstatistik bezeichnet man als Intermittenz<sup>7</sup>.

---

<sup>4</sup>Die entsprechende Relation für zweidimensionale Turbulenz lautet  $S_3(r) = \frac{3}{2}\epsilon r$ .

<sup>5</sup>Das Energiespektrum lässt sich auch direkt mittels Dimensionsanalyse herleiten [Les97].

<sup>6</sup>Eine Definition des Energiespektrums erfolgt in Abschnitt 2.3.2

<sup>7</sup>Die Bedeutung des Begriffs Intermittenz ist in der Literatur nicht immer klar definiert. In dieser Arbeit wird der Begriff aber immer so verwendet, wie hier beschrieben.

## 2.3. Zweidimensionale Turbulenz

Den Grundstein für die heutige Theorie zweidimensionaler Turbulenz legten Ende der 60er Jahre Kraichnan [Kra67], Batchelor [Bat69] und Leith [Lei68]<sup>8</sup>. Im Folgenden sollen die für diese Arbeit relevanten Erkenntnisse zusammengefasst werden. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Beschreibung der direkten Enstrophiekaskade. Weiteres zur Theorie zweidimensionaler Turbulenz sowie eine Zusammenfassung experimenteller und numerischer Ergebnisse bis 2002 finden sich in [Tab02].

### 2.3.1. Der Mechanismus der Doppelkaskade in zwei Dimensionen

Im Gegensatz zu dreidimensionaler Turbulenz fließen bei zweidimensionaler Turbulenz Energie und Enstrophie in verschiedene Richtungen. Als inverse Energiekaskade bezeichnet man den Energietransport von kleinen zu großen Skalen. Sie ist dafür verantwortlich, dass sich in zwei Dimensionen kleine Wirbel zu immer größeren Wirbelflecken zusammensetzen. Der Begriff „direkte Enstrophiekaskade“ beschreibt dagegen einen Transport der Enstrophie von großen zu kleinen Skalen.

Zum Phänomen der Doppelkaskade in zwei Dimensionen veröffentlichte Batchelor 1969 [Bat69] einige recht anschauliche Überlegungen. Folgende Argumentation ist an Batchelors Veröffentlichung angelehnt (siehe dazu auch [Dav04, Tab02]). Zur Vereinfachung geht man von statistisch homogener und isotroper Turbulenz ohne Einwirkung äußerer Kräfte aus.

Aus der Navier-Stokes-Gleichung (2.1) oder der Wirbeltransportgleichung (2.3) ergeben sich durch einfache Umformungen folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) &= -\nabla \cdot \{ (p\mathbf{u}) + \nu(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \} - \nu \omega^2 \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \omega^2 \right) &= -\nu ((\nabla \omega)^2 - \nabla(\omega \nabla \omega)) \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} (\nabla \omega)^2 \right) &= -S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j - \nu ((\Delta \omega)^2 - \nabla((\Delta \omega) \nabla \omega)).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Dabei handelt es sich bei  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  um die totale Ableitung. Die sogenannte Palinstrophie  $\frac{1}{2} (\nabla \times \boldsymbol{\omega})^2$  vereinfacht sich in zwei Dimensionen zu  $\frac{1}{2} (\nabla \omega)^2$  (siehe Gleichung (2.8)).

Nun wird gemittelt<sup>9</sup>, wobei aufgrund der statistischen Homogenität alle Divergenzen zu

<sup>8</sup>In der Literatur wird häufig vom KLB Bild gesprochen.

<sup>9</sup>Man geht hier davon aus, dass wegen statistischer Homogenität eine räumliche Mittelung einer Ensemblemittelung entspricht

Null werden, und man erhält:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \right) = -\nu \langle \omega^2 \rangle \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle \right) = -\nu \langle (\nabla \omega)^2 \rangle \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle (\nabla \omega)^2 \rangle \right) = -\langle S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j \rangle - \nu \langle (\Delta \omega)^2 \rangle. \quad (2.11)$$

$\langle \omega^2 \rangle$  fällt monoton (2.10) und ist somit durch seinen Anfangswert beschränkt. Damit folgt nun aus Gleichung (2.9) für  $Re \rightarrow \infty$  bzw.  $\nu \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \right) \rightarrow 0.$$

Für hohe Reynoldszahlen ergibt sich also (beinahe) Energieerhaltung. Dies bedeutet, dass zweidimensionale Turbulenz langlebig ist und stellt einen maßgeblichen Unterschied zur dreidimensionalen Turbulenz dar, wo  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \right)$  endlich und unabhängig von  $\nu$  ist.

Der physikalische Mechanismus der Enstrophiekaskade kann folgendermaßen erklärt werden: Scherkräfte, die dem Geschwindigkeitsfeld einer größeren Skala zugeordnet werden, ziehen Wirbelflecken in die Länge, so dass sie nach und nach zu immer dünneren Wirbelfäden werden. Innerhalb der Wirbelflecken ist die Vortizität erhalten und Isovortizitätslinien verhalten sich wie Materiallinien. Somit steigt durch die Filamentierung der Wirbelflecken der Vortizitätsgradient  $\nabla \omega$  und daher auch sein Quadrat  $(\nabla \omega)^2$  (vgl. Gleichung (2.11)) und die Enstrophie wird mit den zunehmend feineren Strukturen, d. h. kleineren Skalen assoziiert. Dieser Prozess setzt sich solange fort, bis die Dissipation  $\nu \langle (\nabla \omega)^2 \rangle$  die Enstrophie auf kleinsten Skalen vernichtet.

Bei genügend hoher Reynoldszahl stellt sich ein stationärer Zustand ein und  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle \right)$  wird konstant und unabhängig von  $\nu$ , ähnlich wie dies in drei Dimensionen für  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \right)$  der Fall ist. Den Unterschied zwischen zwei und drei Dimensionen macht hier der Wirbelstreckungsterm, der bei dreidimensionaler Turbulenz die kleinskalige Vortizität  $\omega$  so lange verstärkt, bis die Dissipation  $\nu \langle (\omega)^2 \rangle$  die Energie, die beim Aufbrechen großer Strukturen entsteht, vernichtet. Diesen Energietransport zu immer kleineren Skalen bezeichnet man als direkte Energiekaskade.

In zwei Dimensionen ist dies nicht möglich, da es keinen Wirbelstreckungsterm gibt, der die Vortizität verstärkt. Daraus folgt, dass in zwei Dimensionen Energie nicht auf kleinen Skalen dissipiert werden kann. Es gibt also keine direkte Energiekaskade in zwei Dimensionen. Stattdessen fließt die Energie zu großen Skalen (siehe Abschnitt 2.3.2), wo sie irgendwann an den Wänden, die die Flüssigkeit einschließen, dissipiert wird.

Enstrophie dagegen kann auf kleinen Skalen dissipiert werden, da, wie oben erwähnt,  $(\nabla \omega)^2$  mit den feiner werdenden Strukturen immer weiter anwächst, bis Dissipation



einsetzt. Somit sieht man in der gerade erwähnten Filamentierung der Wirbelflecken und dem damit verbundenen Enstrophietransport zu kleinen Skalen den Mechanismus für eine direkte<sup>10</sup> Enstrophiekaskade.

Allerdings ist zu bezweifeln, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Kaskade im Sinne der Richardsonkaskade handelt, Wechselwirkungen also nur zwischen Wirbeln ähnlicher Größenordnung stattfinden.<sup>11</sup>

### 2.3.2. Energie- und Enstrophietransport

Um den Energie- und Enstrophiefluss zu beschreiben, ist es sinnvoll, in die Fourierdarstellung zu wechseln. Das Energiespektrum ist folgendermaßen gegeben:

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int d\Omega \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t).$$

$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  bezeichnet die räumliche Fouriertransformierte des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ; integriert wird über den gesamten Raumwinkel. Aus der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die Energiebilanzgleichung herleiten [Pop00]:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + F(k, t). \quad (2.12)$$

Die Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Energie in der Mode  $k$ . Durch die Viskosität wird Energie entzogen, und durch die Kraft  $F$  hinzugefügt.  $T(k)$  bezeichnet die spektrale Energietransferfunktion.

$$T(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty T(k, p, q) dp dq.$$

Sie resultiert aus dem nichtlinearen Term der Navier-Stokes-Gleichung und sorgt für den Energietransfer zwischen verschiedenen Fouriermoden. Wechselwirkung findet dabei immer zwischen den drei Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ , den sogenannten Triaden, statt. Allerdings liefern nur solche Wellenvektoren einen Beitrag zu  $T(k, p, q)$ , die die Seiten eines Dreiecks bilden, d. h. solche, für die  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$  gilt. Insgesamt wird dem System durch nichtlineare Wechselwirkung weder Energie entzogen, noch zugeführt:

$$\int_0^\infty T(k) dk = 0. \quad (2.13)$$

$T(k)$  beschreibt den Nettoabfluss von Energie aus der Mode  $k$ . Den Energietransport von Moden kleiner  $k$  zu Moden größer  $k$  erhält man folgendermaßen<sup>12</sup>:

$$\Pi_E(k) = - \int_0^k T(k') dk' = \int_k^\infty dk' T(k'). \quad (2.14)$$

<sup>10</sup>Die Enstrophie in zwei Dimensionen fließt wie die Energie in drei Dimensionen von großen zu kleinen Skalen.

<sup>11</sup>Auf diese Problematik wird in Abschnitt 2.3.3 noch näher eingegangen.

<sup>12</sup>Konkrete Ausdrücke zur numerischen Berechnung des Energie- und Enstrophieflusses finden sich im Anhang A.2.

Die Enstrophie ergibt sich direkt aus dem Energiespektrum (Herleitung siehe [Les97]):

$$Z = \int_0^\infty k^2 E(k) dk.$$

Die zu einer Wellenzahl  $k$  gehörige Enstrophie ist also

$$Z(k) = k^2 E(k). \quad (2.15)$$

So lässt sich mit Hilfe der Energiebilanzgleichung (2.12) auch eine Bilanzgleichung für die Enstrophie aufstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t} k^2 E(k, t) = k^2 T(k, t) - 2\nu k^4 E(k, t) + k^2 F(k, t) \quad (2.16)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(k, t) = T_Z(k, t) - 2\nu k^2 Z(k, t) + k^2 F(k, t). \quad (2.17)$$

Der Enstrophiefluss durch die Mode  $k$  ist dann:

$$\Pi_Z(k) = - \int_0^k T_Z(k') dk' = \int_k^\infty T_Z(k') dk'. \quad (2.18)$$

Dem System wird durch  $T_Z$  weder Enstrophie entzogen noch zugeführt:

$$\int_0^\infty T_Z(k) dk = 0.$$

In seiner Veröffentlichung [Kra67] errechnet Kraichnan konkrete Ausdrücke für den Energie- und den Enstrophiefluss zweidimensionaler Turbulenz<sup>13</sup> und kommt zu dem Schluss, dass sich das Spektrum in zwei unterschiedliche Bereiche unterteilen lässt. In dem einen Bereich skaliert das Energiespektrum  $E(k)$  mit  $k^{-5/3}$ . Hier fließt, entsprechend den Vorstellungen der inversen Kaskade, Energie mit konstanter Rate in Richtung großer Skalen<sup>14</sup>. Der Enstrophiefluss ist nach Kraichnan hingegen gleich Null. In dem anderen Bereich skaliert das Energiespektrum mit  $k^{-3}$ . Hier wird, im Rahmen der direkten Enstrophiekaskade Enstrophie mit konstanter Rate in Richtung kleiner Skalen transportiert. Dagegen ist der Energiefluss laut Kraichnan gleich Null. Wird also in der Mode  $k_i$  Energie zugeführt, so gilt für  $k < k_i$ :

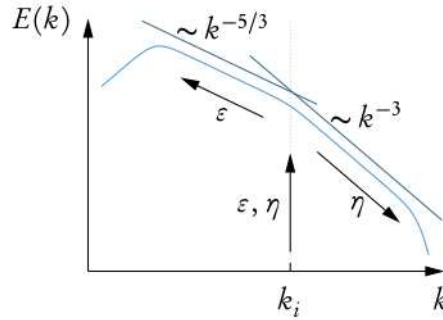
$$E(k) \propto k^{-5/3},$$

$$\Pi_E(k) = \text{const} < 0, \quad \Pi_Z(k) = 0.$$

---

<sup>13</sup>In leicht nachvollziehbarer Form werden Kraichnans Rechenschritte in [Vos09] skizziert.

<sup>14</sup>Eine Erklärung für die Richtung des Energie- bzw. Enstrophieflusses lieferte Fjørtoft schon 1953 [Fjö53]. Hierzu betrachtete er ein System, in dem bloß drei Moden,  $k_1 < k_2 < k_3$ , angeregt sind. Ausgehend von Energie- und Enstrophieerhaltung zwischen den drei Moden folgerte er, dass Energie stärker in Richtung der kleinsten Mode  $k_1$ , Enstrophie aber stärker in Richtung der größten Mode  $k_3$  fließt (siehe auch [Les97]).



**Abbildung 2.3.:** Doppelt-logarithmische Darstellung des Energiespektrums in zwei Dimensionen nach dem Modell von Kraichnan (Abbildung aus [Vos09]). In der Mode  $k_i$  wird mit konstanter Rate Energie  $\epsilon$  bzw. Enstrophie  $\eta$  injiziert. Die Energie fließt mit der Rate  $\epsilon$  weiter in Richtung kleiner Wellenzahlen und es bildet sich ein  $k^{-5/3}$ -Spektrum aus. Die Enstrophie fließt mit der Rate  $\eta$  weiter in Richtung großer Wellenzahlen und es bildet sich ein  $k^{-3}$ -Spektrum aus.

Für  $k > k_i$  gilt:

$$E(k) \propto k^{-3},$$

$$\Pi_E(k) = 0, \quad \Pi_Z(k) = \text{const} > 0.$$

Dies wird in Abbildung 2.3 noch einmal veranschaulicht.

Allerdings ist Kraichnans Modell eher als Idealbild zu betrachten, das nur im Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen und unendlich ausgedehnter Turbulenz erfüllt ist. Ein Zustand der sich weder in der Natur noch in numerischen Simulationen realisieren lässt. Im realistischen Fall endlicher Boxgröße und endlicher Viskositäten fließen sowohl Energie als auch Enstrophie in beide Richtungen.

In Richtung großer Skalen dominiert dabei der Energiefluss, in Richtung kleiner Skalen der Enstrophiefluss (vgl. z. B. [GT05b, GT05a]). Darüberhinaus sind Energie und Enstrophiefluss über folgende Relation<sup>15</sup> miteinander verknüpft:

$$\frac{\partial \Pi_Z(k)}{\partial k} = k^2 \frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k}.$$

Dies impliziert, dass ein konstanter Energiefluss immer mit einem konstanten Enstrophiefluss verbunden ist und umgekehrt [GT05b].

### 2.3.3. Energiespektrum

Im Folgenden wird mittels Dimensionsanalyse ein Ausdruck für das Energiespektrum der zweidimensionalen Enstrophiekaskade hergeleitet. Hierzu geht man davon aus, dass

<sup>15</sup>Diese Relation wurde ursprünglich von Leith [Lei68] bewiesen und folgt aus der Energiebilanzgleichung (2.12) und der Enstrophiebilanzgleichung (2.16) zusammen mit den Relationen  $T_Z(k) = \frac{\partial \Pi_Z(k)}{\partial k}$  und  $T(k) = \frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k}$ . Damit ist sie eine direkte Konsequenz aus Gleichung (2.15).

die statistische Eigenschaft kleinskaliger Größen im Inertialbereich und damit, wie von Kraichnan [Kra67] gefordert, das Energiespektrum nur von der Enstrophietransportrate durch die Moden  $\eta^{16}$  und der Skala  $l (= k^{-1})$  abhängt. Dies entspricht einer Kolmogorovschen zweiten Ähnlichkeitshypothese, bei der die Enstrophietransportrate  $\eta$  an die Stelle der Energietransportrate  $\epsilon$  tritt. Damit folgt für das Energiespektrum:

$$E(k) = \sum_{\mu, \nu} c(\mu, \nu) \eta^\mu k^\nu.$$

Mit der Längeneinheit  $[L]$  und der Zeiteinheit  $[T]$  ergeben sich folgende Dimensionen:

$$E(k) = [L]^3 [T]^{-2}, \quad k = [L]^{-1}, \quad \eta = [T]^{-3}.$$

Daraus ergibt sich für das Energiespektrum:

$$E(k) = C' \eta^{2/3} k^{-3}. \tag{2.19}$$

$C'$  bezeichnet die sogenannte Kraichnan-Batchelor-Konstante.

Wie schon in Abschnitt 2.3.1 angemerkt, gibt es Zweifel, ob es sich bei der Enstrophiekaskade wirklich um einen vielskaligen Prozess handelt, bei dem die Wechselwirkungen im Fourierraum lokalisiert sind. Davidson [Dav04] fasst die Problematik ungefähr wie folgt zusammen:

Das mittlere Quadrat der Scherkräfte, verursacht durch Wirbel, die im Wellenzahlbereich  $k_{min} \ll k \ll k_{max}$  liegen, ist von der gleichen Größenordnung wie ihre Enstrophie  $\int k^2 E(k) dk$ , und damit innerhalb des Inertialbereiches nach Gleichung (2.19) von der Ordnung  $\eta^{2/3} \ln(\frac{k_{max}}{k_{min}})$ . Betrachtet man einen Wirbel der Größe  $k_0^{-1}$  so leisten Wirbel im Wellenzahlbereich  $0,1 \cdot k_0$  bis  $k_0$  einen Beitrag von  $\eta^{2/3} \ln(10)$  zum gesamten mittleren Quadrat der Scherkräfte; Wirbel im Wellenzahlbereich  $0,01 \cdot k_0$  bis  $0,1 \cdot k_0$  leisten aber genau den gleichen Beitrag. Das heißt also, dass Wirbel verschiedener Größenordnungen den gleichen Beitrag zu den auf Wirbel der Größe  $k_0^{-1}$  wirkenden Scherkräften leisten. Dies widerspricht der Idee, dass die Enstrophiekaskade im Fourierraum lokalisiert ist. Deshalb forderte Kraichnan [Kra71] eine logarithmische Korrektur des Spektrums in folgender Form:

$$E(k) = C' \eta^{2/3} k^{-3} \left[ \ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \right]^{-\frac{1}{3}},$$

wobei  $k_0$  die Wellenzahl ist, bei der Energie in das System injiziert wird.

---

<sup>16</sup>Nicht zu verwechseln mit der Kolmogorovsche Dissipationslänge, für die der gleiche Buchstabe verwendet wird.

## 3. Direkte Enstrophiekaskade

Im folgenden Kapitel wird die für diese Arbeit durchgeführte Simulation vorgestellt. Im ersten Abschnitt geht es dabei um die genaue numerische Umsetzung der Navier-Stokes- bzw. Wirbeltransportgleichung. In den beiden folgenden Abschnitten wird die Simulation auf einige charakteristische Eigenschaften, wie z. B. den Enstrophiefluss und das Energiespektrum untersucht. Dies soll sicherstellen, dass die im vorherigen Kapitel geschilderte Situation der direkten Enstrophiekaskade zweidimensionaler Turbulenz richtig reproduziert wird, sowie Vergleichbarkeit mit anderen numerischen (siehe z. B. [Bof07, LA00, CEE<sup>+</sup>03, Bor93, BFK07, PF02]) und experimentellen (z. B. [BCEM05, PJT99]) Arbeiten gewährleisten. Die Daten für die in dieser Arbeit durchgeführte Auswertung entstammen alle dem Simulationslauf `sim1024_1`<sup>1</sup>.

### 3.1. Numerische Implementierung

Grundlage der vorliegenden Arbeit ist ein in C++ geschriebenes Programm zur Simulation zweidimensionaler Turbulenz<sup>2</sup>. Mit Hilfe dieses Programms soll die direkte Enstrophiekaskade simuliert werden. Hierzu wird das System auf großen Skalen angetrieben. Zusätzlich gewährleisten zwei dissipative Terme Stationarität. Der eine soll auf kleinen Skalen Enstrophie vernichten, der andere Energie, die im Rahmen der inversen Kaskade von der Antriebsskala zu noch größeren Skalen transportiert wird. Ziel ist es dabei, einen möglichst großen Inertialbereich zu realisieren, der von beiden Dissipationstermen möglichst unbeeinflusst bleibt, um so einen konstanten Enstrophietransport von großen zu kleinen Skalen zu erreichen. Zu diesem Zweck wird die Wirbeltransportgleichung (2.3) auf einem periodischen Gitter der Länge  $L_{box} = 2\pi$  gelöst. In einer für die numerische Implementierung günstigen Form lautet sie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)] + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

mit  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ . Bei dieser Formulierung der Gleichung wird die Nichtlinearität durch ein Kreuzprodukt  $\nabla \times [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)]$  ausgedrückt. Gegenüber (2.3) sind darüber hinaus noch ein zusätzlicher Dissipationsterm  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  und ein Antriebsterm  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  hinzugekommen. Genauere Ausdrücke hierfür werden im Folgenden noch angegeben werden.

---

<sup>1</sup>Die einzige Ausnahme sind die in Abbildung 3.8 dargestellten Energiespektren der Simulationen `sim512_1` und `sim256_1`.

<sup>2</sup>Ein vergleichbares Programm wird in [Kam09] ausführlich vorgestellt.

### 3. Direkte Enstrophiekaskade

---

Durch Fouriertransformation kann Gleichung (3.1) in ein gekoppeltes System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt werden:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{F}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + i\mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \times \mathbf{d}(\mathbf{k}). \quad (3.2)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{F}(\mathbf{h})$  die räumliche Fourier transformierte einer beliebigen Funktion  $\mathbf{h}$ . Die Vortizität kann im Falle eines diskreten Gitters und periodischer Randbedingungen durch eine endliche Fourierreihe dargestellt werden. Für eine Auflösung von  $N \times N$  Gitterpunkten erhält man:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,m=-N/2}^{N/2} \tilde{\omega}_{nm}(\mathbf{k}_{nm}, t) e^{i\mathbf{k}_{nm}\mathbf{x}}.$$

Die Wellenvektoren sind dann  $\mathbf{k}_{n,m} = (2n\pi/L_{box}, 2m\pi/L_{box})$  und für eine Boxlänge von  $L_{box} = 2\pi$  gilt  $\mathbf{k}_{n,m} = (n, m)$ .

#### Der Antrieb

Dem System wird durch die Kraft  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  Energie zugeführt. Dabei muss die Kraft folgende Anforderungen erfüllen:

- Sie muss divergenzfrei sein.
- Die Energie muss auf großen räumlichen Skalen zugeführt werden.
- Sie muss in der Zeit  $\delta$ -korreliert sein.

Ein Antrieb, der diese Bedingungen erfüllt, wird in [Kam09] hergeleitet. Dort wird er „Deltatreiber“ genannt. Diese Bezeichnung wird hier übernommen. Der konkrete Ausdruck für den Antrieb sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \sqrt{F_0} h(k, k_0) e^{i\phi_{\mathbf{k}}}.$$

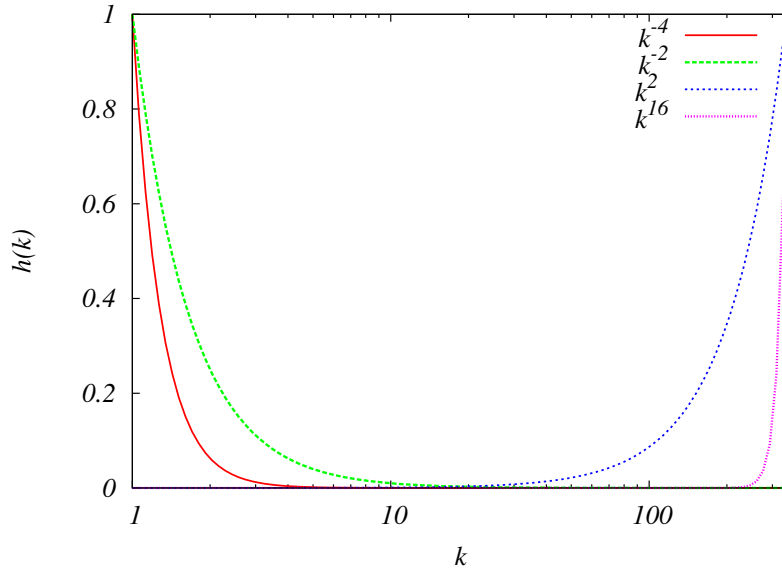
Der Antriebsterm greift direkt in den Fourierraum ein und führt Energie in einem niedrigen Wellenzahlbereich der Breite  $k_b$  um  $k_0$  zu:

$$h(k, k_0) = \Theta[k - (k_0 + k_b)] - \Theta[k - (k_0 - k_b)],$$

wobei  $\Theta$  die Heaviside Funktion bezeichnet. Der Phasenfaktor  $\phi_{\mathbf{k}}$  ist eine zwischen 0 und  $2\pi$ , unter Berücksichtigung der Symmetrie  $\phi_{\mathbf{k}} = -\phi_{-\mathbf{k}}$ , gleichverteilte Zufallszahl. Sie wird für jede Wellenzahl und jeden Zeitschritt unabhängig gewählt, und trägt somit auch der  $\delta$ -Korrelation in der Zeit Rechnung.

#### Die Dissipationsterme

Die viskose Dissipation wird durch die Navier-Stokes-Gleichung vorgegeben. Im Fourierraum lautet sie  $-\nu k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k})$  bzw.  $-\nu k^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})$ . Damit der Inertialbereich möglichst lang ist, sollte  $\nu$  möglichst klein sein, und der Wirkungsbereich der viskosen Dissipation bei



**Abbildung 3.1.:** Darstellung des funktionalen Verlaufs der Dissipationsterme im Fourierraum. Die Hyporeibung ( $k^{-4}$  bzw.  $k^{-2}$ ) wirkt vorrangig im Bereich kleiner Wellenzahlen, die Viskosität ( $k^2$ ) bzw. Hyperviskosität ( $k^{16}$ ) im Bereich großer Wellenzahlen. In der Mitte befindet sich ein von beiden Termen relativ unbeeinflusster Bereich. Dieser wird umso größer, je größer  $m$  und  $n$  gewählt werden.

möglichst großen  $k$  (siehe Abb. 3.1) liegen. Dies wird durch folgende Ersetzung gewährleistet:

$$k^2 \rightarrow \left( \frac{k}{k_{max}} \right)^{2n}$$

mit  $n > 0$  und ganzzahlig. Das Teilen durch die in der Simulation maximal zur Verfügung stehende Wellenzahl  $k_{max}$  (siehe Anhang A.1) bewirkt, dass bei festem  $\nu$  der viskose Term bei  $k = k_{max}$  immer den gleichen Wert hat, unabhängig von  $n$ . Ein so modifizierter Dissipationsterm wird in der Literatur oft als Hyperviskosität bezeichnet.

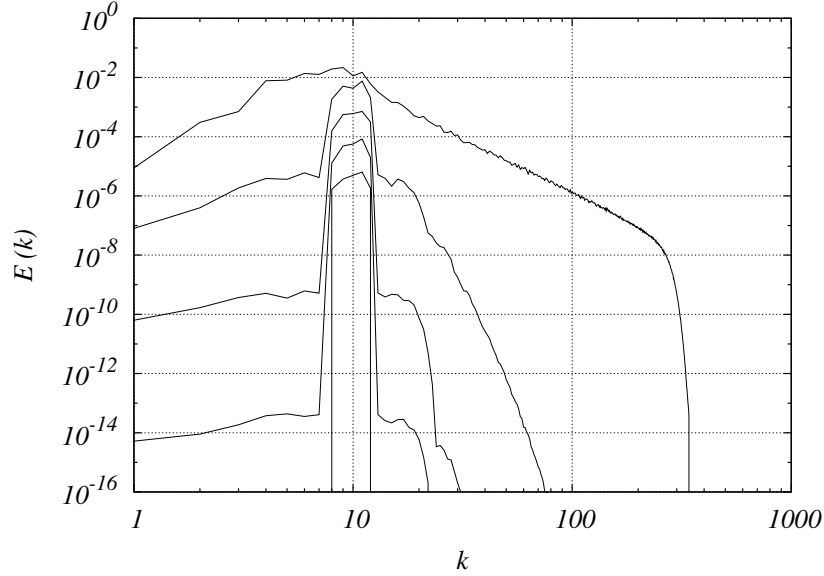
Der zusätzliche Dissipationsterm  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  entnimmt dem System auf großen Skalen Energie. Im Fourierraum hat er die Form

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = -\gamma k^{-2m} \mathbf{u}(\mathbf{k})$$

bzw.

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = -\gamma k^{-2m} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}).$$

Durch eine Wahl von  $m > 0$  wird gewährleistet, dass der Wirkungsbereich des Dissipationsterms bei kleinen Wellenzahlen bzw. großen Längenskalen liegt. Auf diese Weise soll sein Einfluss auf den Inertialbereich minimiert werden (siehe Abb. 3.1). Eine solche Art der Reibung nennt man auch Hyporeibung, bei  $m = 0$  spricht man von linearer



**Abbildung 3.2.:** Aufbau der direkten Energiekaskade für  $t = 0,0005; 0,005; 0,05; 0,5; 5$ . Die zeitliche Abfolge geht dabei von unten nach oben.

Reibung. Setzt man die Ausdrücke für die Dissipationsterme in Gleichung (3.2) ein, so ergibt sich:

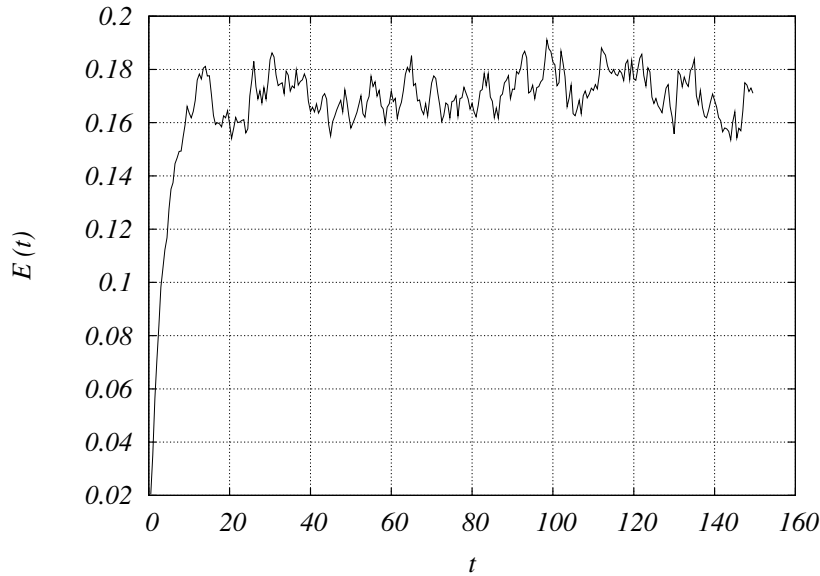
$$\partial_t \omega(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{F}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] - k^2 \mathbf{f}(\mathbf{k}) - \nu \left( \frac{k}{k_{max}} \right)^{2n} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) - \gamma k^{-2m} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}).$$

Diese Gleichung dient als Grundlage für die numerische Simulation. Näheres zur numerischen Berechnung sowie zu den in den Simulationen verwendeten Parametern findet sich im Anhang.

### 3.2. Aufbau der direkten Enstrophiekaskade

Die Simulation startet mit der Anfangsbedingung  $\omega(\mathbf{x}, t) = 0$ . Durch den Antriebs-term steigt die Energie des Systems solange an, bis sich Energiezufuhr und Dissipation ausgleichen, und ein stationärer Zustand erreicht wird. Abbildung 3.2 zeigt den Anstieg der Energie in den einzelnen Moden. Zunächst steigt die Energie hauptsächlich in dem Bereich, in dem sie zugeführt wird, sowie in benachbarten Moden, an. Daraufhin fließt sie nach und nach in Richtung immer größeren Moden, bis sich schließlich ein Energiespektrum wie in Abbildung 3.7 ausbildet.





**Abbildung 3.3.:** Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Gesamtenergie während der Einschwingphase und der anschließenden stationären Phase (ab  $t \approx 10$ ). Nach einem anfänglichen starken Anstieg bleibt sie bis auf Fluktuationen konstant.

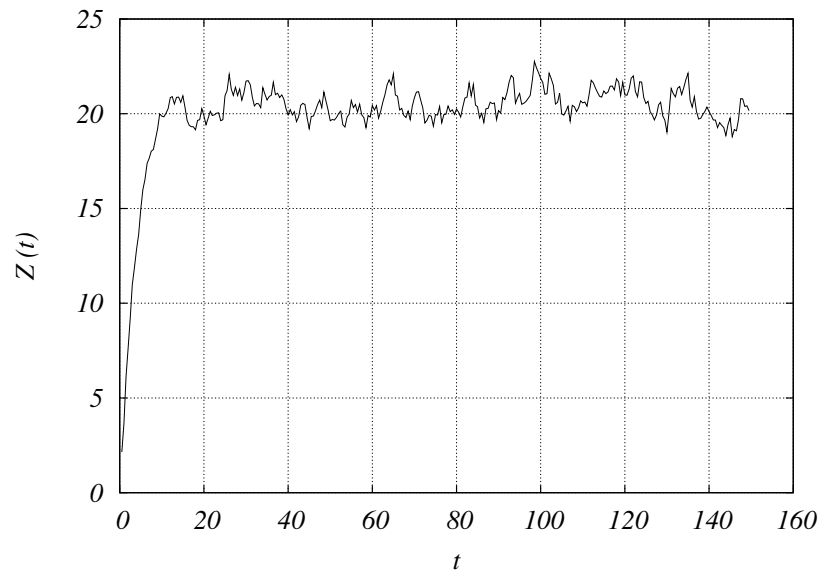
### 3.3. Stationärer Zustand

Der Verlauf der Gesamtenergie ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Sie steigt steil an, bis ein stationärer Zustand erreicht wird, und sie bis auf Fluktuationen konstant bleibt. Die Fluktuationen liegen bei ca. 10%. Die Gesamtentrophie (vergleiche Abbildung 3.4) verhält sich genauso, auch hier liegen die Fluktuationen bei ca. 10%. Während der stationären Phase wird alle 1000 Zeitschritte das Vortizitätsfeld  $\omega(\mathbf{x})$  herausgeschrieben. Hieraus werden alle statistischen Größen in dieser Arbeit berechnet. Insgesamt wird über 200 Felder gemittelt.

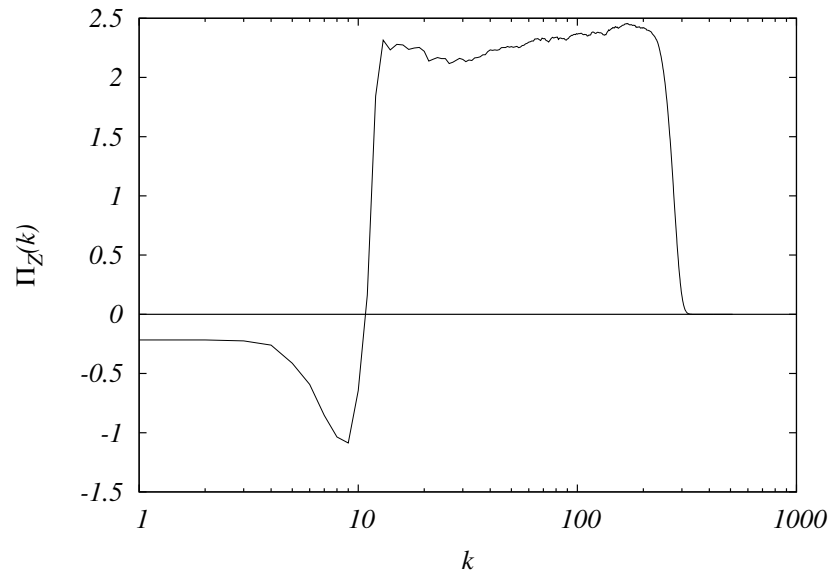
#### 3.3.1. Energie und Enstrophiefluss

Abbildung 3.5 zeigt den Enstrophiefluss für die Simulation `sim1024_1`<sup>3</sup>. Zwischen der Antriebsskala ( $k \sim 10$ ) und  $k \sim 200$  gibt es einen großen Bereich, in dem der Enstrophiefluss positiv und nahezu konstant ist. Dies ist der Inertialbereich. Hier wird Enstrophie mit (nahezu) konstanter Rate von kleinen zu großen Moden transportiert. Bei großen Wellenzahlen kommt die Viskosität zum Tragen und bringt den Enstrophiefluss zum Erliegen. Links vom Nulldurchgang nimmt der Enstrophiefluss einen negativen Wert an, d.h. ein kleiner Teil der Enstrophie wird zu großen Skalen transportiert. Bei ganz

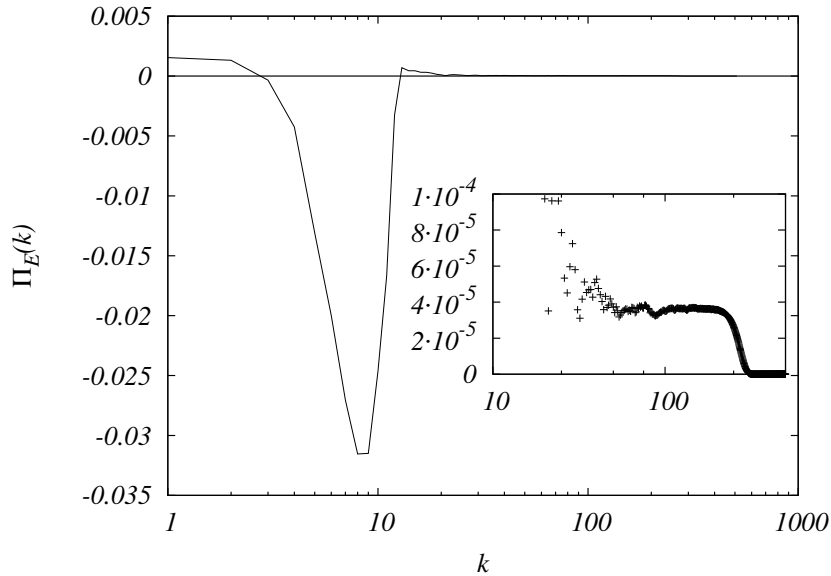
<sup>3</sup>Die verwendeten Parameter sind im Anhang aufgeführt



**Abbildung 3.4.:** Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Gesamtstrophie während der Einschwingphase und der anschließenden stationären Phase (ab  $t \approx 10$ ). Nach einem anfänglichen starken Anstieg bleibt sie bis auf Fluktuationen konstant.



**Abbildung 3.5.:** Die Abbildung zeigt den Enstrophiefluss  $\Pi_Z(k)$  durch die Moden. Im Bereich mittlerer Wellenzahlen gibt es einen Abschnitt, in dem der Enstrophiefluss positiv und nahezu konstant ist.



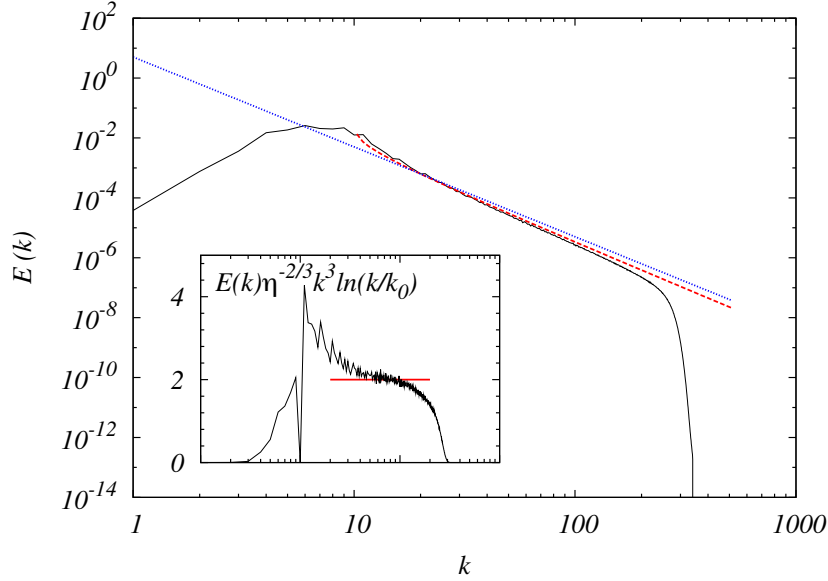
**Abbildung 3.6.:** Der Energiefluss  $\Pi_E(k)$  ist unterhalb der Antriebsmode negativ. Oberhalb der Antriebsmode ist er nahezu Null. Das Inset zeigt den Energiefluss von  $k = 10$  bis  $k = 300$  in der Vergrößerung. Man erkennt deutlich einen Bereich, in dem nahezu konstanter Energiefluss herrscht.

kleinen Wellenzahlen dämpft die Hyporeibung den Enstrophiefluss ab. Die Beobachtung eines konstanten Enstrophieflusses im Inertialbereich deckt sich mit den Ergebnissen vergleichbarer Simulationen<sup>4</sup> [LA00, CEE<sup>+</sup>03].

Abbildung 3.6 zeigt den Energiefluss für die Simulation `sim1024_1`. Links von der Antriebskala ( $k \sim 10$ ) ist der Energiefluss  $\Pi_E < 0$ , rechts von der Antriebskala scheint er dagegen praktisch Null zu sein. Das heißt also, dass der Großteil der Energie zu großen Skalen fließt. In der Vergrößerung (Inset von Abbildung 3.6) sieht man aber, dass sich im Bereich  $k \sim 20$  bis  $k \sim 200$  ein kleiner, aber auch nahezu konstanter Energiefluss zu kleinen Skalen ausbildet. Die Tatsache, dass es einen Bereich gibt in dem neben einem konstanten Enstrophiefluss auch ein konstanter Energiefluss herrscht, widerspricht zwar dem klassischen von Kraichnan in [Kra67] vorgeschlagenen Bild, kommt aber nach den Überlegungen am Ende von Abschnitt 2.3.2 nicht unerwartet.

So beobachten z. B. auch Danilov und Gurarie [DG01a, DG01b] und Borue [Bor94] in ihren numerischen Simulationen neben der inversen Energiekaskade auch einen konstanten Energiefluss in Richtung kleiner Skalen. Ebenso beobachtet Boffeta [BM10] Energie- und Enstrophieflüsse in beide Richtungen und kommt zu dem Schluss, dass sich diese Abweichung von Kraichnans Vorhersage auf eine endlich Gittergröße und die daraus re-

<sup>4</sup>Gemeint sind solche Simulationen, die auch mit einem schmalbandigen Deltatreiber sowie Hypo- und Hyperviskosität arbeiten.



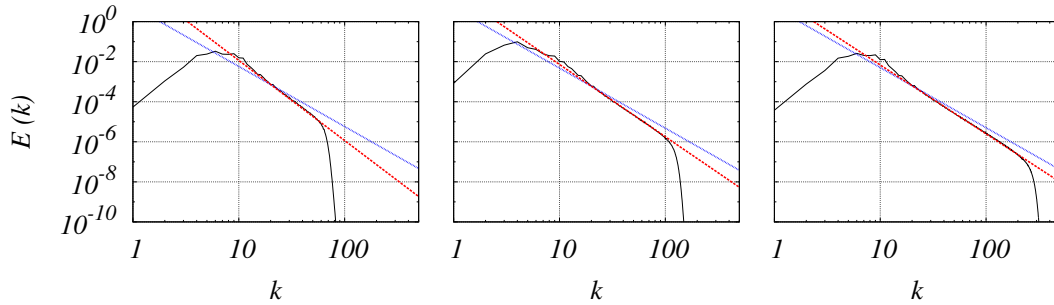
**Abbildung 3.7.:** Die Abbildungen zeigt das Energiespektrum der Simulation `sim1024_1` zusammen mit  $k^{-3}$  (blaue gepunktete Linie) und  $k^{-3}(\ln(k/k_0))^{-1/3}$  (rote gestrichelte Linie). Im Inset ist  $E(k)\eta^{-2/3}k^3(\ln(k/k_0))^{1/3}$  gegen  $k$  aufgetragen.

sultierende Notwendigkeit einer Energiesenke, die auf großen Skalen wirkt, zurückführen lässt.

### 3.3.2. Energiespektrum

Das Energiespektrum (Abbildung 3.7) weist einen langen Bereich konstanter Steigung auf. Zu den Seiten fällt es wegen der beiden Dissipationsterme ab. Der Bereich konstanter Steigung erstreckt sich von  $k \sim 20$  bis  $k \sim 200$ , und stimmt also mit dem Bereich konstanten Energie- und Enstrophieflusses überein (vgl. Abbildungen 3.6 und 3.5). Somit kann  $k = 20$  bis  $k = 200$  als sinnvolle Abschätzung für den Inertialbereich angesehen werden. Diese Abschätzung wird für die folgende Auswertung beibehalten.

Die Übereinstimmung mit einem wie von Kraichnan geforderten Spektrum mit logarithmischer Korrektur  $E(k) \propto k^{-3}(\ln(k/k_0))^{-1/3}$  ist etwas besser als mit einem unkorrigierten Spektrum  $E(k) \propto k^{-3}$ . Der für  $k$  ermittelte Exponent liegt mit einem Wert von ungefähr  $-3,44$  im Vergleich zu Ergebnissen anderer Messungen im Mittelfeld (vgl. [Bof07, LA00, Got98]). Beim Vergleich mit Energiespektren von Simulationen mit einer Gittergröße von  $256^2$  bzw.  $512^2$  Gitterpunkten (siehe Abbildung 3.8) wird deutlich, dass der Exponent mit höherer Auflösung zunimmt, der theoretischen Vorhersage also näher kommt. Bei  $256$  Gitterpunkten ergibt sich ein Exponent für  $k$  von  $-4,0$ , bei  $512$  Gitterpunkten  $-3,61$ . Dies legt nahe, dass sich Abweichungen auf eine endliche numerische Auflösung zurückführen lassen. Um aber endgültig zu klären, ob das Energiespektrum



**Abbildung 3.8.:** Die Abbildung zeigt die Energiespektren der Simulationen `sim256_1` ( $256^2$  Gitterpunkte), `sim512_1` ( $512^2$  Gitterpunkte) und `sim1024_1` (von links nach rechts) zusammen mit  $k^{-3}$  (blaue gepunktete Linie). An den Bereich konstanter Steigung wurde jeweils eine Gerade gefittet (rote gestrichelte Linie).

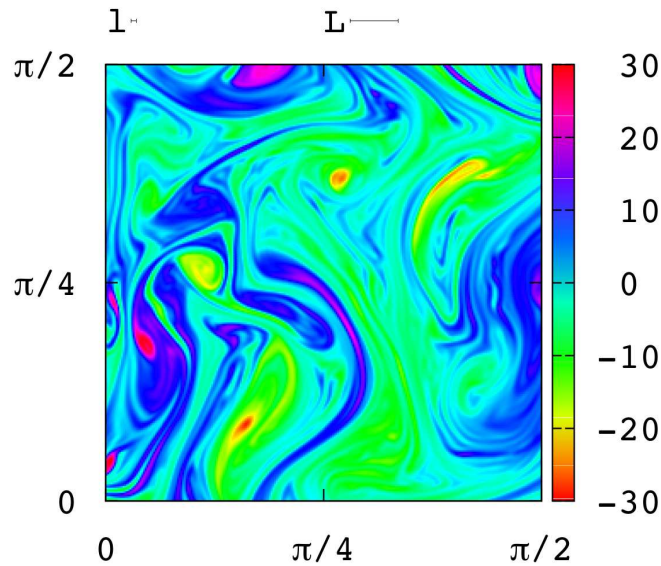
nun auf eine logarithmische Korrektur nach Kraichnan oder ein unkorrigiertes Spektrum hinausläuft, wären Simulationen mit höheren Gitterauflösungen nötig.

Eine Abschätzung der Enstrophietransportrate  $\eta$  nach  $\eta = \max(\Pi_Z)$  (vgl. Abb. 3.5) liefert  $\eta \approx 2,5$ . Da das Energiespektrum hier am besten durch eine logarithmische Korrektur angenähert wird, soll die Kraichnan-Batchelor-Konstante  $C'$  bestimmt werden, indem  $E(k)\eta^{-2/3}k^3(\ln(k/k_0))^{1/3}$  gegen  $k$  aufgetragen wird (siehe Inset von Abbildung 3.7). Da die Übereinstimmung mit der logarithmischen Korrektur aber nicht exakt ist lässt sich nur ein ungefährender Wert angeben. Schätzt man die Kraichnan-Batchelor-Konstante aus dem nahezu konstanten Bereich ab erhält man  $C' \approx 2$ . Der von Kraichnan für ein Energiespektrum mit logarithmischer Korrektur vorhergesagte Wert liegt bei  $C' = 2,626$  [Kra71]. Neuere Messungen liefern  $C' \approx 1,5 - 1,7$  [Bor93] bzw.  $C' = 1,3$  [LA00]. Der hier ermittelte Wert liegt damit in der Mitte. Um genauere Aussagen zu treffen, wäre aber auch hier eine höhere Gitterauflösung nötig.

### 3.3.3. Die Struktur der Strömung

Um eine Vorstellung von der Struktur der Strömung zu bekommen, ist in Abbildung 3.9 ein Ausschnitt des Vortizitätsfeldes dargestellt.  $l$  und  $L$  bezeichnen das untere bzw. obere Ende des Inertialbereiches. Sie ergeben sich gemäß der Abschätzung aus dem vorherigen Abschnitt nach  $\lambda = 2\pi/k$  zu  $l = 2\pi/200 = \pi/100 \approx 0,03$  und  $L = 2\pi/20 = \pi/10 \approx 0,3$ . Deutlich erkennt man die großen Wirbelflecken, deren Ausdehnung ungefähr im Bereich der oberen Grenze des Inertialbereiches  $L$  liegt. Sie werden durch das Geschwindigkeitsfeld immer weiter in die Länge gezogen, bis sich kleine Wirbelfilamente herausbilden<sup>5</sup>. Dies entspricht dem Mechanismus der Enstrophiekaskade, so wie er im Abschnitt 2.3.1 beschrieben wird. Abbildung 3.10 zeigt nochmal das ganze Vortizitätsfeld.

<sup>5</sup>Noch deutlicher ist dies bei Betrachtung des Videos `sim1024_1.avi` auf der beigelegten CD zu erkennen.

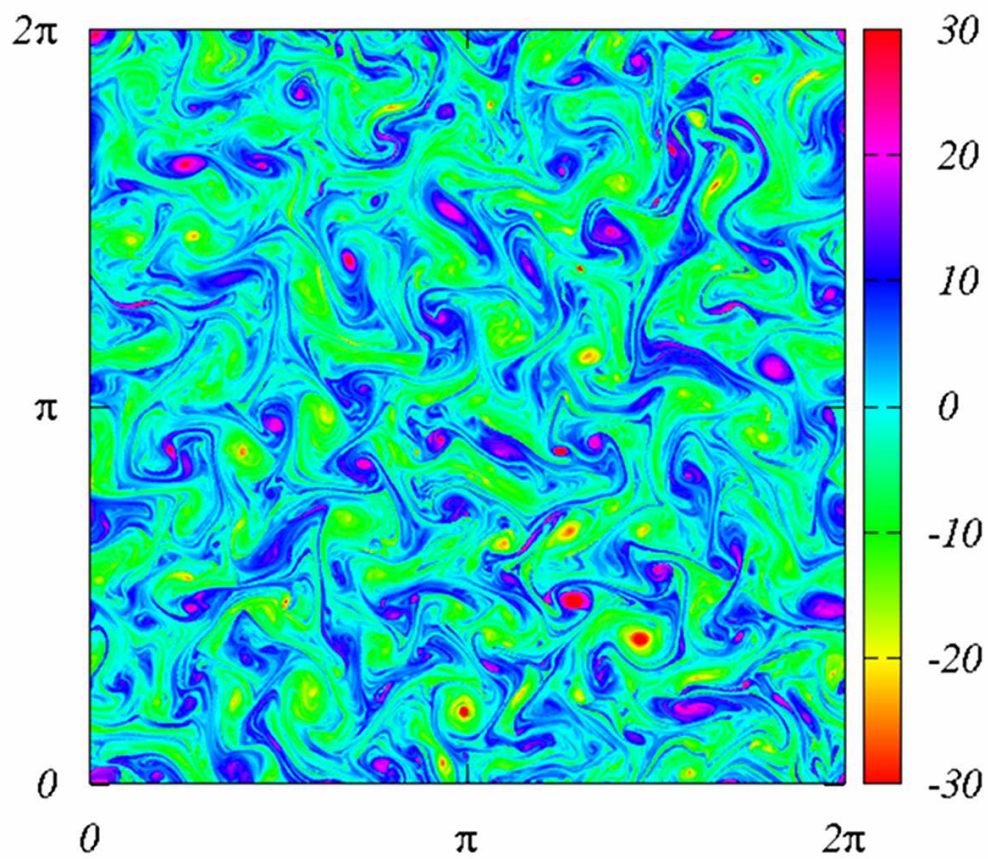


**Abbildung 3.9.:** Ausschnitt eines Vortizitätsfeldes der Simulation. Die Farbskala (siehe Balken am Rand) gibt Vorzeichen und Stärke der Vortizität an. Zusätzlich wurden noch das untere  $l$  bzw. obere Ende  $L$  des Inertialbereiches eingezeichnet.

### 3.4. Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse stimmen im Ganzen mit den Erwartungen gemäß Abschnitt 2.3 bzw. den Ergebnissen vergleichbarer Simulationen überein. Es ist also davon auszugehen, dass die durchgeführte Simulation die direkte Enstrophiekaskade in zwei Dimensionen bezüglich ihrer für diese Arbeit relevanten Eigenschaften wie gewünscht nachbildet. Allerdings würde eine höhere Gitterauflösung sicherlich noch zu einer besseren Übereinstimmung des Energiespektrums mit der Theorie führen.

Was die Wahl der Parameter betrifft, ist noch folgendes anzumerken: Es ist wichtig die Viskosität nicht zu klein zu wählen, damit Energie bzw. Enstrophie abgedämpft werden bevor das Dealiasing zum Tragen kommt, und somit ein abruptes Abschneiden des Spektrums verhindert wird. Da in der Simulation Hyperviskosität der Ordnung 8 verwendet wird, hat hier auch ein höherer Wert keinen großen Einfluss auf den Inertialbereich. Was die Hyporeibung betrifft, so ist eine niedrigere Ordnung ( $m = 1$ , vgl. auch [CEE<sup>+</sup>03, LA00]) völlig ausreichend. Darüberhinaus sollte der Antriebsterm groß genug gewählt werden, um eine möglichst hohe Reynoldszahl zu erreichen, damit sich Turbulenz ausbilden kann.



**Abbildung 3.10.:** Darstellung des Vortizitätsfeldes der Simulation. Die Farbskala (siehe Balken am Rand) gibt Vorzeichen und Stärke der Vortizität an.

### 3. *Direkte Enstrophiekaskade*

---



## 4. Vortizitätsstatistik

Zu den am meisten untersuchten statistischen Größen voll entwickelter Turbulenz zählen die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente sowie deren Strukturfunktionen. Abgesehen von dem Fall der dritten Strukturfunktion  $S_3$  stimmen in dreidimensionaler Turbulenz experimentelle Ergebnisse nicht mit den Vorhersagen der K41-Theorie überein (vgl. [Fri96]). Man stellt intermittentes Verhalten fest. Die mit der Energie am ehesten vergleichbare Größe in zweidimensionaler Turbulenz ist die Enstrophie. Neben der Statistik des Geschwindigkeitsfeldes in zwei Dimensionen (siehe z.B. [PT98, BCV00]) ist also auch die Statistik des Vortizitätsfeldes von Interesse.

Aus diesem Grunde beschäftigt sich das vorliegende Kapitel mit den Verteilungen<sup>1</sup> der Vortizitätsinkremente

$$\delta\omega(r) = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x})$$

und deren Strukturfunktionen<sup>2</sup>

$$S_n(r) = \langle (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x}))^n \rangle$$

als einfachem Zugang zur Zweipunktstatistik der Vortizität. Eine zentrale Frage ist dabei, ob sich die Inkrementstatistik im Inertialbereich selbstähnlich verhält bzw. ob sich Skalierungsverhalten feststellen lässt. Ferner sollen die Verteilungsfunktionen bezüglich ihrer Symmetrie untersucht werden. Dabei werden alle Größen im Eulerbild betrachtet. In diesem wird, im Gegensatz zum Lagrangebild, wo sich der Beobachter mit der Strömung mitbewegt, mit ortsfesten Koordinaten gearbeitet. Zunächst wird der Vollständigkeit halber noch kurz auf die Einpunktverteilung der Vortizität eingegangen.

### 4.1. Einpunktverteilung

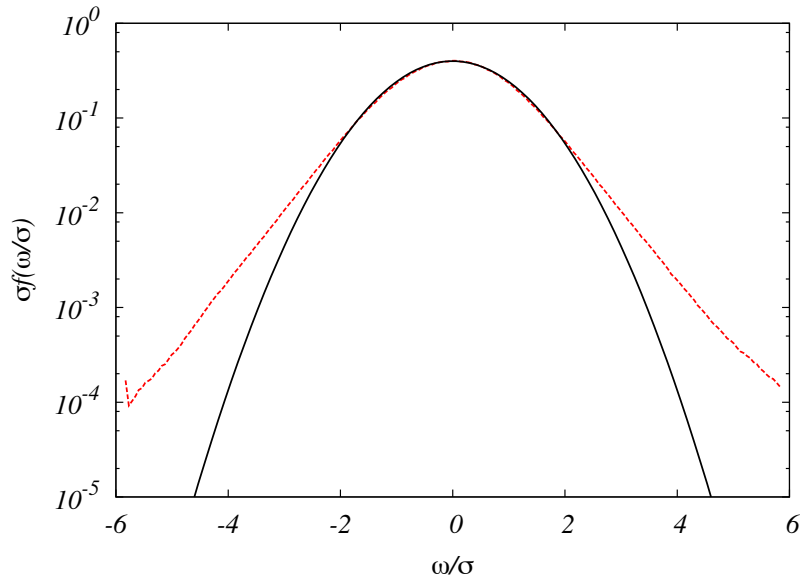
Abbildung 4.1 zeigt die Einpunktverteilung des Vortizitätsfeldes. Die Standardabweichung ist durch

$$\sigma_\omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$$

---

<sup>1</sup>Die PDFs in dieser Arbeit wurden mithilfe eines Histogramms mit 200 Bins geschätzt. Zur Auswertung standen 200 Felder zur Verfügung

<sup>2</sup>Die Vortizitätsinkrementverteilungen und die Strukturfunktionen hängen nicht mehr von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{r}$ , sondern nur noch vom Skalar  $r$  ab. Dies gilt unter der hier angenommenen Voraussetzung der statistischen Homogenität und Isotropie der Strömung.



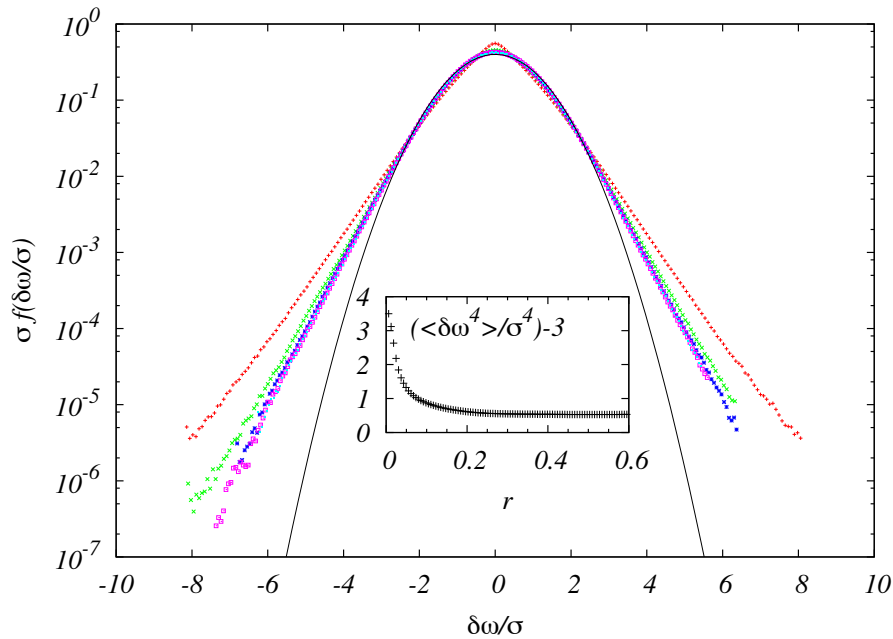
**Abbildung 4.1.:** Darstellung der Verteilungsfunktion der Vortizität  $f(\omega)$ . Die Verteilung ist auf Standardabweichung eins normiert. Zum Vergleich ist eine Gaußverteilung (schwarze Linie) eingezeichnet.

gegeben. Sie ergibt sich in der Simulation `sim1024_1` zu  $\sigma \approx 5.9$ . Die Verteilung weicht mit ihren breiten Flügeln deutlich von einer Gaußverteilung ab. Dies steht im Gegensatz zu der Geschwindigkeitsverteilung in zwei Dimensionen, die kaum von einer Gaußkurve zu unterscheiden ist (vgl z.B. [Kam09]). Die Form der Verteilung entspricht ungefähr der Form der Vortizitätsinkrementverteilung (Abbildung 4.2) für große Abstände  $r$ , da für genügend großes  $r$  statistische Unabhängigkeit der beiden in die Inkrementverteilung eingehenden Punkte erreicht wird und sie dann in eine Faltung der Einpunktverteilung übergeht.

## 4.2. Inkrementverteilung

Abbildung 4.2 zeigt die PDFs der Vortizitätsinkremente  $\delta\omega(r) = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x})$  für verschiedene Skalen innerhalb des Inertialbereichs. Um sie auf Selbstähnlichkeit hin zu überprüfen, wurden die PDFs mit der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{\langle \delta\omega^2 \rangle}$  reskaliert.

Zunächst fällt auf, dass die Kurven deutlich von der Gaußform abweichen. Sie haben breitere Flügel und sind auch spitzer. Außerdem liegen sie nicht ganz übereinander. Allerdings nähern sich die Kurven mit steigendem Abstand  $r$  immer weiter derselben Form an. Dies wird auch bei Betrachtung der Kurtosis (siehe Inset), die für kleine Abstände  $r$  einen Wert deutlich über eins annimmt und sich dann immer weiter dem Wert 0,5 annähert, bestätigt. Für einen Teilbereich des Inertialbereiches (ab  $r = 0,17$  bis



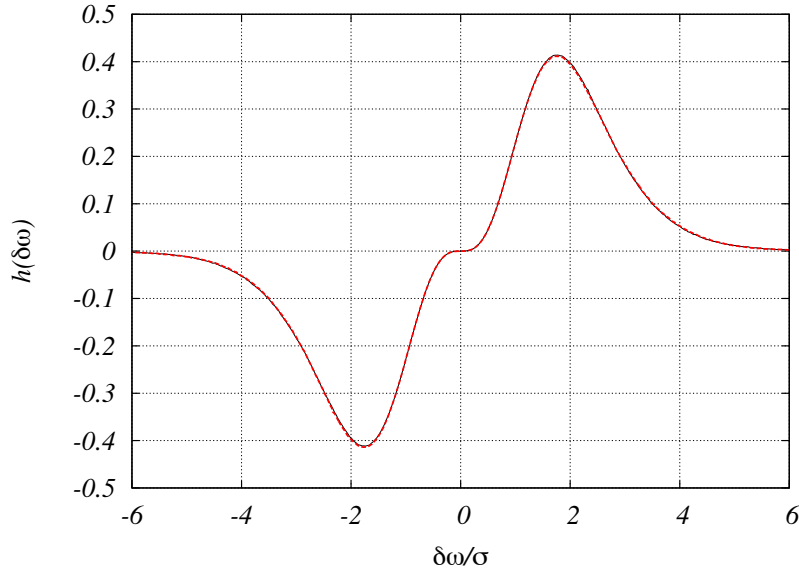
**Abbildung 4.2.:** Normierte Verteilung der Vortizitätsinkremente für verschiedene Abstände  $r$  innerhalb des Inertialbereiches:  $r = 0,03$ ;  $r = 0,1$ ;  $r = 0,17$ ;  $r = 0,24$ ;  $r = 0,3$  (von außen nach innen). Zum Vergleich ist eine Gaußkurve mit  $\sigma = 1$  (schwarze Linie) eingezeichnet. Das Inset zeigt die Kurtosis in Abhängigkeit vom Abstand  $r$ .

$r = 0,3$ ) kann man von selbstähnlichem Verhalten der Verteilungen sprechen. Allerdings ist dieser Bereich zu kurz, um zuverlässige Aussagen zuzulassen. In Übereinstimmung mit Beobachtungen anderer Autoren [BM10, PJT99] lässt sich aber sagen, dass, sofern Intermittenz auftritt, sie vergleichsweise klein ist.

### Symmetrie

Um etwaige Asymmetrien in der Verteilung der Vortizitätsinkremente etwas deutlicher sichtbar zu machen, wird nicht die Verteilung selbst, sondern die Größe  $h(\delta\omega) = (\delta\omega/\sigma)^3 f(\delta\omega)$  sowie deren Spiegelung am Ursprung betrachtet. Dies zeigt Abbildung 4.3 für einen Abstand von  $r = 0,1$ . Die beiden Kurven liegen nahezu genau aufeinander.

Die Fläche unter der Kurve  $h(u)$  entspricht dem dritten Moment. Eine numerische Integration über diese Fläche liefert den Wert 0,004. Dieser ist unter Berücksichtigung statistischer Abweichungen nicht von Null zu unterscheiden. Sofern hier eine Asymmetrie auftritt, ist sie deutlich kleiner als z.B. bei der Verteilung der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente in der inversen Kaskade (vgl. z.B. [BCV00, PT98]). Auch in der Literatur liegen keine Ergebnisse vor, die auf eine Asymmetrie der Vortizitätsinkrementverteilungen hindeuten könnten. Die bisherigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Verteilungsfunktion der Vortizitätsinkremente symmetrisch ist.



**Abbildung 4.3.:** Darstellung von  $h(u)$  (schwarze Linie) für  $r = 0,1$ . Zur Überprüfung auf Symmetrie wurde  $h(u)$  am Ursprung gespiegelt und darüber gelegt (rote gestrichelte Linie).

### 4.3. Strukturfunktionen

#### Ungerade Strukturfunktionen

Geht man von symmetrischen Verteilungsfunktionen aus (vgl. vorheriger Abschnitt), so müßten alle ungeraden Strukturfunktionen im Inertialbereich gleich Null sein. In der Literatur finden sich hierzu aber keine spezifischen Vorhersagen. Auch eine Relation entsprechend (2.6), die die dritte Strukturfunktion der Geschwindigkeitsinkremente mit dem Energiefluss verbindet, ist für die dritte Strukturfunktion der Vortizitätsinkremente nicht bekannt. Folgende Rechnung zeigt aber, dass unter der Voraussetzung von statistischer Homogenität und Isotropie der Strömung alle ungeraden Strukturfunktionen verschwinden müssen. Man betrachtet

$$S_n(r) = \langle (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x}))^n \rangle.$$

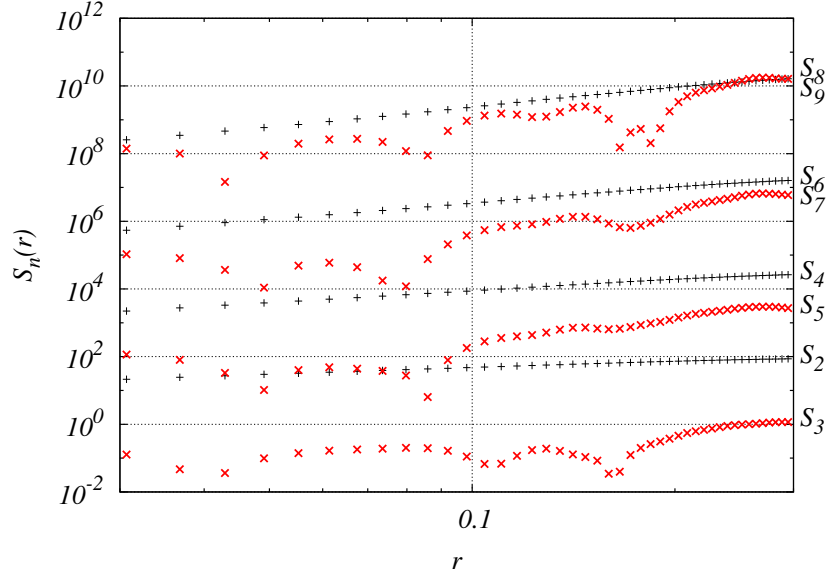
Unter der Voraussetzung von Homogenität ist dies gleich:

$$\langle (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{a}))^n \rangle$$

für alle Vektoren  $\mathbf{a}$ .

Unter der Voraussetzung von Isotropie gilt dann:

$$S_n(r) = \langle (\omega(D[\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{r}]) - \omega(D[\mathbf{x} + \mathbf{a}]))^n \rangle$$



**Abbildung 4.4.:** Die Abbildung zeigt die ungeraden Strukturfunktionen der Ordnung  $n = 3$  bis  $n = 9$  (rote Kreuze) zusammen mit den geraden Strukturfunktionen der Ordnung  $n = 2$  bis  $n = 8$  (schwarze Kreuze).

für alle Drehungen  $D$ .

Für  $\mathbf{a} = -2\mathbf{x} - \mathbf{r}$  erhält man

$$S_n(r) = \langle (\omega(D[-\mathbf{x}]) - \omega(D[-\mathbf{x} - \mathbf{r}]))^n \rangle.$$

Führt man nun eine Drehung um  $180^\circ$  durch, d. h. setzt man  $D_{ij} = -\delta_{ij}$ , ergibt sich

$$S_n(r) = \langle (\omega(\mathbf{x}) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}))^n \rangle.$$

Nun kann man einen Faktor  $(-1)^n$  herausziehen:

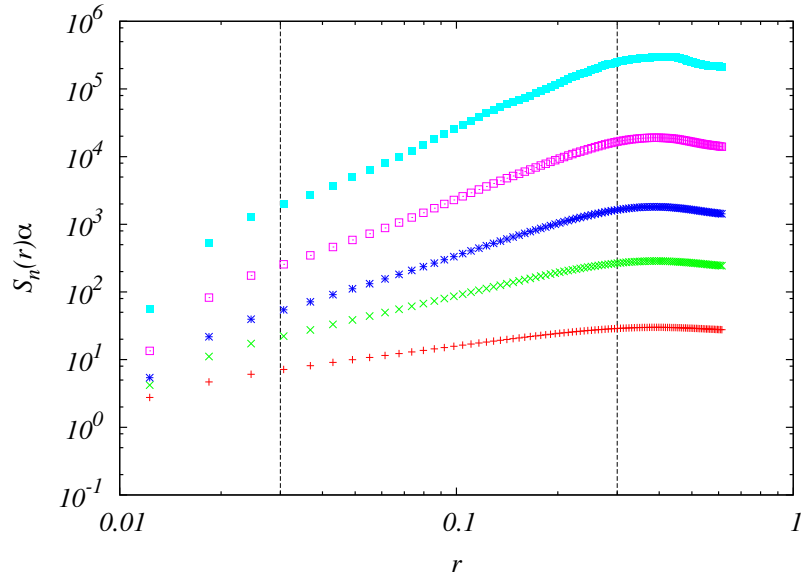
$$S_n(r) = (-1)^n \langle (\omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x}))^n \rangle$$

Insgesamt ergibt sich also

$$S_n(r) = (-1)^n S_n(r).$$

Das kann aber nur erfüllt sein, wenn  $S_n(r)$  für alle ungeraden  $n$  verschwindet.

Dies ist bei der numerischen Auswertung nur für die erste Ordnung,  $n = 1$ , der Fall. Mit zunehmender Ordnung  $n$  werden die ungeraden Strukturfunktionen im Vergleich mit den geraden Strukturfunktionen benachbarter Ordnung immer größer (siehe Abbildung 4.4). Während die ungerade Strukturfunktion der Ordnung  $n = 3$  im Vergleich mit der



**Abbildung 4.5.:** Doppelt logarithmische Darstellung der geraden Strukturfunktionen der Vortizitätsinkremente mit  $n = 2, 4, 6, 8, 10$  (von unten nach oben). Zur besseren Vergleichbarkeit wurden sie mit dem Faktor  $\alpha = 1/3, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$  multipliziert. Die senkrechten gestrichelten Linien bei  $0,03$  und  $0,3$  begrenzen den Inertialbereich.

geraden Strukturfunktionen der darunterliegenden Ordnung  $n = 2$  noch klein ist, nimmt  $S_9(r)$  Werte an, die betragsmäßig an die von  $S_8(r)$  heranreichen oder oberhalb liegen. Dies ist aber wahrscheinlich auf die begrenzte Menge an zur Verfügung stehenden Daten zurückzuführen. Die ungeraden Strukturfunktionen konvergieren nur sehr langsam, da hier Werte gleicher Größenordnung mit verschiedenen Vorzeichen aufsummiert werden und es so sehr lange dauert, bis kleine Werte nahe Null erreicht werden. Mit zunehmender Ordnung  $n$  werden immer mehr Daten<sup>3</sup> benötigt, um numerische Konvergenz zu erreichen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die ungeraden Strukturfunktionen für eine ausreichende Menge an Daten im Inertialbereich verschwinden.

### Gerade Strukturfunktionen

Bei Betrachtung der geraden Strukturfunktionen stellt sich die Frage, ob sich innerhalb des Inertialbereiches ein Skalierungsbereich finden lässt, d.h., ob es einen Bereich gibt, in dem eine lineare Abhängigkeit der Skalensexponenten der Strukturfunktionen  $\zeta_n$  von ihrer Ordnung  $n$  besteht. Die Strukturfunktionsexponenten  $\zeta_n$  sind folgendermaßen definiert:

$$S_n(r) \sim r^{\zeta_n}. \quad (4.1)$$

<sup>3</sup>Zur Berechnung der Strukturfunktionen wurde über 200 Felder (Zeitmittelung) und ca.  $10^6$  Werte pro Feld gemittelt (Raummittelung). Allerdings sind diese Werte teilweise sehr stark korreliert, weshalb die Menge an statistisch relevanten Daten deutlich geringer ausfällt.

Abbildung 4.5 zeigt die geraden Strukturfunktionen der Vortizitätsinkremente bis zur Ordnung  $n = 10$ . Sie scheinen zunächst einem Potenzgesetz zu folgen. Für große Abstände  $r$  werden die beiden Vortizitäten, die jeweils in die Verteilungsfunktion eingehen, statistisch unabhängig voneinander. Beim Vergleich mit den Inkrementverteilungen sowie ihrer Kurtosis (Abbildung 4.2) wird deutlich, dass ein Skalierungsbereich innerhalb des Inertialbereiches nur zwischen  $r \approx 0.2$  und  $r \approx 0.3$  zu finden sein kann. Allerdings ist schon mit bloßem Auge zu erkennen, dass die Kurven in diesem Bereich abknicken. Damit lässt sich hier kein Skalierungsbereich feststellen. Allerdings liegt es im Bereich des Möglichen, dass der Antrieb und die Dissipationsterme durch ein unerwünschtes Einwirken auf den Inertialbereich eventuell vorhandenes Skalierungsverhalten zunichte machen oder Abweichungen durch eine zu geringe Gitterauflösung verursacht werden.

In der Literatur finden sich nur wenige Untersuchungen, die sich mit der Statistik der Vortizitätsinkremente beschäftigen und somit für einen Vergleich mit diesen Ergebnissen herangezogen werden könnten. Es gibt zwei theoretische Arbeiten: Falkovich und Lebedev einerseits [FL94] fordern  $\zeta_n = 0$  (Bis auf mögliche logarithmische Korrekturen). Eyink andererseits [Eyi95] kam, ausgehend von einem konstanten Enstrophiefluss im Inertialbereich, zu dem Schluss, dass  $\zeta_2 \geq 2/3$  und  $\zeta_n \leq 0$  für  $n \geq 3$ . In Übereinstimmung mit der Theorie von Falkovich und Lebedev erhielten Tabeling und Paret in einem Experiment [PJT99]  $\zeta_n \approx 0$  für alle geraden Strukturfunktionen bis zur Ordnung 10. Als Vergleich für die hier ermittelten Ergebnisse kann dieses Experiment allerdings nur bedingt dienen. Es liegt in der Natur der Sache, dass solche Experimente mit einem linearen Reibungsterm arbeiten. Dieser hat mitunter großen Einfluss auf die Form der Strukturfunktion (vgl. hierzu auch [Kam09]). Eine Untersuchung mit einer der für diese Arbeit durchgeführten Simulation vergleichbaren Konfiguration liegt bis jetzt nicht vor.

### Extended Self Similarity

Ein weiterer Ansatz zur Untersuchung von Strukturfunktionen ist die Methode der sogenannten Extended Self Similarity (ESS) [BCT<sup>+</sup>93]. Diese basiert auf der Vorhersage der K41 Theorie für die dritte Strukturfunktion der Geschwindigkeitsinkremente

$$S_3 \propto r^{3/3}. \tag{4.2}$$

Damit gilt für eine Strukturfunktion beliebiger Ordnung  $S_n$ :

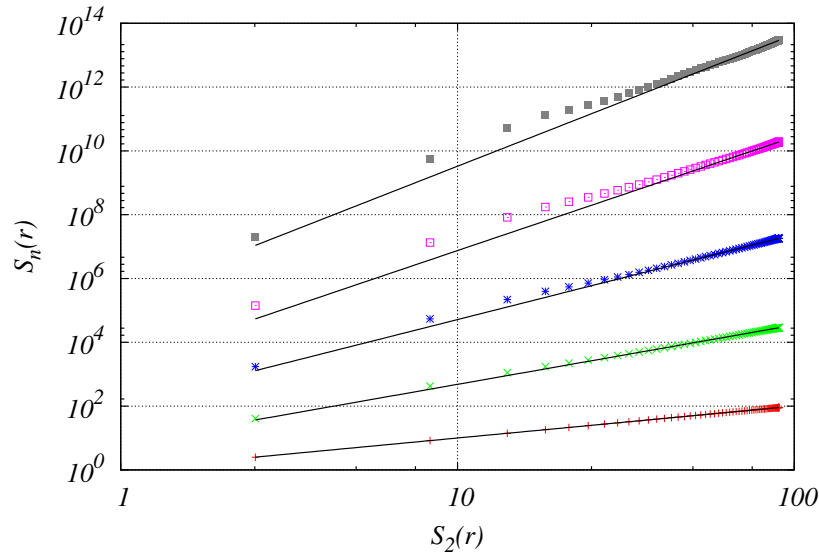
$$S_n \propto r^{n/3} = S_3^{\chi_n}$$

mit dem Skalierungsexponenten  $\chi_n = \frac{n}{3}$ . In logarithmischer Darstellung folgt dann der lineare Zusammenhang

$$\log S_n \propto \chi_n \log S_3.$$

Eine für die hier betrachteten Strukturfunktionen der Vortizitätsinkremente analoge Variante lautet

$$\log S_n \propto \xi_n \log S_2.$$



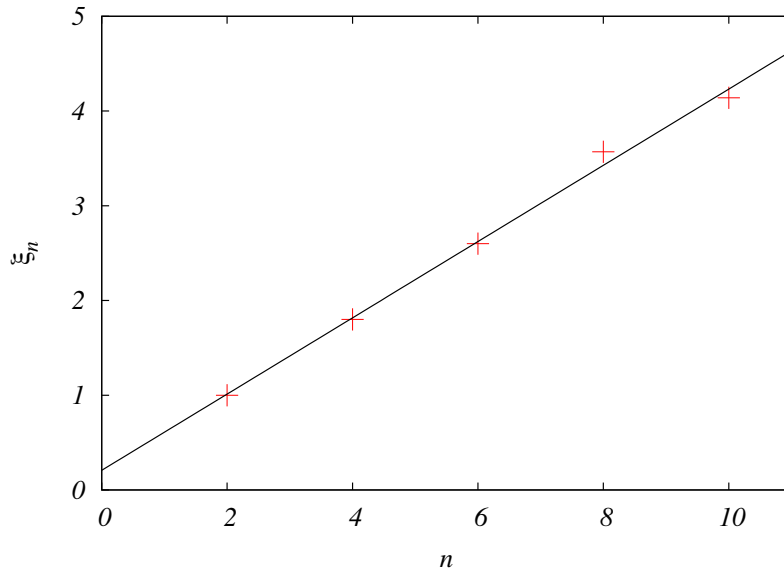
**Abbildung 4.6.:** ESS Plot der geraden Strukturfunktionen der Vortizitätsinkremente mit  $n = 2, 4, 6, 8, 10$  (von unten nach oben). Alle Strukturfunktionen wurden mit einem „Power law“ (schwarze Linien) gefittet.

Obwohl es für die zweite Strukturfunktion der Vortizitätsinkremente sowie die Skalierungsexponenten keine (4.2) entsprechende theoretische Vorhersage gibt, ist die Anwendung von ESS auch hier von Interesse. So können etwaige Abweichungen, die z.B. durch einen unerwünschten Einfluss des Antriebs oder der Dissipationsterme auf den Inertialbereich verursacht werden, durch diese Methode kompensiert werden, sofern ihr Einfluss auf die Strukturfunktionen aller Ordnungen gleich ist.

Abbildung 4.6 zeigt einen ESS Plot der geraden Strukturfunktionen bis zur Ordnung  $n = 10$ . Um die relativen Strukturfunktionsexponenten  $\xi_n$  zu bestimmen, werden die Daten mit  $a \cdot r^{\xi_n}$  mit Hilfe eines Least-Square-Fits gefittet. Für die Ordnung  $n = 4$  ergibt der Fit noch eine relativ gute Übereinstimmung. Mit höheren Ordnungen nehmen die Abweichungen zu. Dies ist möglicherweise wie schon bei den ungeraden Strukturfunktionen auf die begrenzte Datenmenge zurückzuführen.

Um die Strukturfunktionen auf Skalierungsverhalten hin zu überprüfen, werden die relativen Exponenten  $\xi_n$  gegen  $n$  aufgetragen und mit einer Geraden gefittet (Abbildung 4.7). Hier ist die Übereinstimmung für die Ordnungen  $n = 4$  und  $n = 6$  gut. Für die höheren Ordnungen zeigen sich dagegen Abweichungen. Die gefittete Gerade hat eine Steigung von 0,2. Auch wenn die Ergebnisse zunächst auf ein Skalierungsverhalten der relativen Strukturfunktionsexponenten  $\xi_n$  hindeuten, sind sie mit Vorsicht zu genießen, da es insbesondere bei den Strukturfunktionen höherer Ordnung deutliche Abweichungen gibt.





**Abbildung 4.7.:** Die Abbildung zeigt die relativen Strukturfunktionsexponenten  $\xi_n$  aufgetragen gegen ihre Ordnung  $n$ . Die Exponenten wurden mit einer Geraden (schwarze Linie) gefittet.

#### 4.4. Zusammenfassung

Die Verteilungen der Vortizitätsinkremente zeigen einen Bereich, in dem selbstähnliches Verhalten auftritt. Allerdings ist dieser zu klein, um zuverlässige Aussagen zu liefern. Bei den geraden Strukturfunktionen lässt sich kein Skalierungsgesetz der Form (4.1) feststellen. Auch die Betrachtung mit der Methode der Extended Self Similarity zeigt kein eindeutiges Skalierungsverhalten. Die Ergebnisse zu den Inkrementverteilungen lassen aber hoffen, dass sich hier bei geeigneter Wahl der Simulationsparameter ein Skalierungsbereich realisieren lässt. Ein möglicher Schritt um dies zu erreichen wäre die Erhöhung der Gitterauflösung. Auch weiteres Experimentieren mit dem Antrieb sowie den Dissipationstermen könnte hier zum Erfolg führen.

Die Inkrementverteilungen zeigen keine Anzeichen für Asymmetrie. Eine Untersuchung der ungeraden Strukturfunktionen bestätigt dies. Um bei der numerischen Auswertung aber auch für höhere Ordnungen Werte zu erreichen, die (nahe) bei Null liegen ist eine weitaus größere Menge an Daten nötig.



## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die statistische Untersuchung der direkten Enstrophiekaskade in zweidimensionaler Turbulenz. Hierzu dient ein in C++ geschriebener Programmcode zur numerischen Integration der Navier-Stokes-Gleichung in der Vortizitätsformulierung auf einem periodischen Gitter. Die Entwicklung sowie das Testen dieses Programms waren mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden, weshalb ihm auch ein ganzes Kapitel gewidmet wird. Um einen von Antriebs- und Reibungstermen möglichst unbeeinflussten Inertialbereich zu erreichen, wurde für die vorliegende Arbeit mit einem Antrieb, der auf ein schmales Wellenband im Fourierraum wirkt, sowie mit Hyporeibung und Hyperviskosität gearbeitet.

Zunächst werden der spektrale Enstrophie- und Energiefluss untersucht. Wie gemäß der Theorie (Kapitel 2) zu erwarten, gibt es einen großen Bereich, in dem sowohl der Energiefluss als auch der Enstrophiefluss konstant ist. Das Energiespektrum kommt der  $k^{-3}$  Vorhersage (eventuell mit logarithmischer Korrektur) sehr nahe. Auch der für die Kraichnan-Batchelor Konstante ermittelte Wert ist vergleichbar mit Kraichnans theoretischer Vorhersage. Der Vergleich mit Simulationen niedrigerer Auflösung lässt vermuten, dass die Übereinstimmung mit steigender Auflösung hier noch besser wird. Bei Betrachtung des Vortizitätsfeldes lassen sich in Übereinstimmung mit der Literatur deutlich die großen Wirbelflecken erkennen, die durch das Geschwindigkeitsfeld zu langen Fäden gezogen werden.

Bei den Verteilungsfunktionen der Vortizitätsinkremente zeigt sich in einem Teilbereich des Inertialbereiches deutlich selbstähnliches Verhalten. Die geraden Strukturfunktionen lassen aber keinen Skalierungsbereich erkennen. Ob dies aber nun als Hinweis auf intermittentes Verhalten zu werten ist, bleibt noch zu klären. Eine Untersuchung des Symmetrieverhaltens der Inkrementverteilungen zeigt keinerlei Anzeichen für Asymmetrie. Dies wird bei der Untersuchung der ungeraden Strukturfunktionen bestätigt, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass gute numerische Konvergenz bei höheren Ordnungen nur mit einer sehr viel größeren Menge an Daten zu erreichen ist als in dieser Untersuchung zur Verfügung stand.

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Simulation mit dem in der Literatur vermittelten Bild von der direkten Enstrophiekaskade übereinstimmt. Die Ergebnisse zu Energie- und Enstrophiefluss sowie zum Energiespektrum entsprechen im Wesentlichen denen anderer Untersuchungen. Weiterhin ermöglicht diese Arbeit einen Einblick in die Eulersche Statistik der Vortizitätsinkremente in der direkten Enstrophiekaskade. Was das Skalierungsverhalten im Inertialbereich betrifft, so sind die Ergebnisse nicht eindeutig,

lassen aber hoffen, dass sich bei passender Wahl der Simulationsparameter ein Skalierungsbereich realisieren lässt. Hier sollte eine Simulation mit höherer Auflösung weitere Erkenntnisse bringen. Auch eine Veränderung der Parameter des Antriebs und der Dissipationsterme mag hier zum Erfolg führen. Darüberhinaus wäre ein Vergleich mit der Statistik der Vortizitätsinkremente in der inversen Kaskade sicherlich interessant.

# A. Numerik

## A.1. Numerische Berechnung der Wirbeltransportgleichung

In diesem Abschnitt sollen dem Leser möglichst knapp alle technischen Details, die bei der numerischen Integration der Wirbeltransportgleichung in zwei Dimensionen von Bedeutung sind, nahe gebracht werden. Der interessierte Leser sei hier auch auf [Fri09] verwiesen.

Wie in Abschnitt (3.1) beschrieben, wird die Wirbeltransportgleichung in folgender Form betrachtet:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathcal{F}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] - k^2 \mathbf{f}(\mathbf{k}) - \nu \left( \frac{k}{k_{max}} \right)^{2n} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) - \gamma k^{-2m} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.1})$$

Sie wird als Anfangswertproblem auf dem Gebiet  $[0, 2\pi]^2$  mit periodischen Randbedingungen und unter der Bedingung  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  gelöst. Die Tatsache, dass es sich bei der Wirbelstärke in zwei Dimensionen um ein (Pseudo-)Skalar ( $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_z$ ) handelt, verringert den Rechenaufwand deutlich.

Die Berechnung der rechten Seite der Gleichung wird maßgeblich dadurch erleichtert, dass Ortsableitungen im Fourierraum zu bloßen Multiplikationen mit der imaginären Einheit mal der Wellenzahl  $\mathbf{k}$  werden.

Einer genaueren Erklärung bedarf der nichtlineare Term  $\mathcal{F}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}]$ :

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  erhält man durch Bildung der Rotation von  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  und unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \begin{cases} -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) & \text{falls } k^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k^2 = 0 \end{cases}.$$

Dies setzt man nun in den nichtlinearen Term ein:

$$\mathcal{F} \left[ \mathcal{F}^{-1} \left[ -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \right] \times \mathcal{F}^{-1} [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})] \right].$$

Da Produkte durch Fouriertransformation in Faltungen übergehen wird die Nichtlinearität  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  im Ortsraum berechnet. Obwohl dies zwei zusätzliche Rücktransformationen erfordert ist diese Methode, genannt Pseudospektralverfahren (siehe auch [Fri09]), deutlich effizienter, weil der Rechenaufwand einer Fouriertransformation mit Hilfe des hier

verwendeten Fast-Fourier-Transform (FFT) - Algorithmus<sup>1</sup> mit  $\mathcal{O}(N^2 \ln N^2)$  skaliert, eine Faltung im Fourierraum hingegen mit  $\mathcal{O}(N^2 N^2)$ .

### Dealiasing

Da der Ortsraum durch ein diskretes Gitter, bzw. der Fourierraum durch einen endlichen Raum angenähert wird, können sogenannte Aliasing-Fehler auftreten. Diese entstehen dadurch, dass bei der Berechnung der Nichtlinearität Wellenzahlen erzeugt werden, die größer als die maximal darstellbare Wellenzahl  $k_{max} = N/2$  (siehe Abschnitt (3.1)) sind. Zur Vermeidung dieses Effekts wird gemäß der 2/3-Regel von Orszag [Boy01] das obere Drittel aller Moden ( $|k| > \frac{2}{3}k_{max}$ ) gleich Null gesetzt. Dies wird einmal vor Berechnung der Nichtlinearität und einmal danach durchgeführt. Damit wird die maximal zur Verfügung stehende Wellenzahl  $k_{max} = N/3$ . Leicht verständlich erklärt wird die Problematik des Aliasing sowie die 2/3-Regel von Orszag z.B. in [Hüs10].

### Zeitliche Integration

Die zeitliche Integration von Gleichung (3.1) geschieht mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung (siehe z.B. [DR06]). Um numerische Stabilität zu gewährleisten, wird der Zeitschritt  $\Delta t$  unter Berücksichtigung der Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung (für Genaueres siehe z.B. [Wil07]) festgelegt. Diese Bedingung stellt sicher, dass Information sich pro Zeitschritt nicht mehr als eine Gitterzelle weiter bewegt. Sie lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta t_{adv} &:= \frac{2\pi}{u_{max}N}, \\ \Delta t_{diff} &:= \frac{\pi^2}{\nu N^2} \\ \Delta t &= \lambda \cdot \min \{ \Delta t_{adv}, \Delta t_{diff} \} \end{aligned}$$

mit  $\lambda \leq 1$ .

$\Delta t_{adv}$  muß für jeden Iterationsschritt neu berechnet werden.

## A.2. Berechnung des Enstrophie- und Energieflusses

Zunächst soll ein Ausdruck für den Enstrophiefluss hergeleitet werden, wie er auch in [FB09] verwendet wird. Dazu geht man von der Wirbeltransportgleichung im Fourierraum aus.

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} = [\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})]_{\mathbf{k}} - \nu k^2 \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{k} \times \mathbf{f}_{\mathbf{k}}.$$

Multiplikation mit  $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}^*$  ergibt

$$\frac{1}{2} \partial_t |\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}|^2 = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}^* [\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})]_{\mathbf{k}} - \nu k^2 |\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}|^2 + k^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \mathbf{f}_{\mathbf{k}}.$$

---

<sup>1</sup>Genauer gesagt wurde hier die freie Softwarebibliothek FFTW ([www.fftw.org](http://www.fftw.org)) verwendet.

Der letzte Summand folgt aus der Divergenzfreiheit der Kraft  $\mathbf{f}_\mathbf{k}$  und  $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{k}^* = (-i\mathbf{k}) \times \mathbf{u}_\mathbf{k}^*$ . Integration über den Raumwinkel  $\Omega$  führt zur Enstrophiebilanzgleichung (2.17) mit

$$T_Z(k) = \int d\Omega \boldsymbol{\omega}_\mathbf{k}^* [\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})]_k.$$

Daraus lässt sich nach (2.18) der Enstrophiefluss berechnen.

Auf ähnliche Weise berechnet man einen Ausdruck für  $T(k)$  ([Kam09]). Man erhält:

$$T(k) = \int d\Omega \mathbf{u}_\mathbf{k}^* \mathcal{P}(\mathbf{k}) (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_\mathbf{k}$$

mit  $\mathcal{P}(\mathbf{k}) \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k}$ . Dabei projiziert der Operator  $\mathcal{P}(\mathbf{k})$  ein Vektorfeld auf seinen divergenzfreien Anteil. Aus  $T(k)$  wird nach Gleichung (2.14) der Energiefluss berechnet.

### A.3. Simulationsparameter

In den durchgeführten Simulationen wurden folgende Parameter verwendet:

Parameter	Bedeutung
$N$	Anzahl der Stützpunkte in eine Raumrichtung
$L_{Box}$	Länge des Grundgebietes entlang einer Achse
$\Delta x$	Gitterabstand
$m$	Ordnung der Hyporeibung
$\gamma$	Vorfaktor der Hyporeibung
$n$	Ordnung der Hyperviskosität
$\nu$	Viskosität
$k_0$	zentrale Wellenzahl des Deltatreibers
$k_b$	Bandbreite des Deltatreibers
$F_0$	Amplitude der Kraft
$\Delta t$	Zeitschritt
$N_{\Delta t}$	Anzahl der Iterationsschritte in der Simulation
$\Delta t_F$	Abstand in dem die Felder herausgeschrieben werden

Name	$N$	$L_{Box}$	$\Delta x$	$m$	$\gamma$	$n$	$\nu$	$k_0$	$k_b$	$F_0$	$\Delta t$	$N_{\Delta t}$	$\Delta t_F$
sim1024_1	$1024^2$	$2\pi$	0.006	1	5.0	8	500	10	2	25000	0.0005	$2 \times 10^5$	1000
sim512_1	$512^2$	$2\pi$	0.012	1	5.0	8	2000	10	2	500	0.001	$2 \times 10^5$	1000
sim256_1	$256^2$	$2\pi$	0.024	1	5.0	8	2000	10	2	400	0.001	$2 \times 10^5$	1000





## B. Beigelegte CD

Folgendes befindet sich auf der beigelegten CD:

- Video (sim1024\_1.avi) zur Visualisierung des Vortizitätsfeldes einschließlich Einschwingvorgang und stationärem Zustand
- Quellcode der Simulation (Befindet sich im Verzeichnis /turbulenz)
- Quellcode des Tools mit dem fast alle Auswertungen gemacht wurden (Befindet sich im Verzeichnis /auswertung)



# Literaturverzeichnis

- [Bat69] BATCHELOR, G. K.: Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. In: *Physics of Fluids* 12 (1969), Januar, S. 233–239. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1692443>. – DOI 10.1063/1.1692443
- [Bau04] BAULE, Adrian: *Nichtmarkovsche Modelle für die Lagrangesche Teilchenstatistik turbulenter Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2004
- [BCEM05] BOFFETTA, G. ; CENEDESE, A. ; ESPA, S. ; MUSACCHIO, S.: Experimental study of two-dimensional enstrophy cascade. In: *ArXiv Nonlinear Sciences e-prints* (2005), Mai
- [BCT<sup>+</sup>93] BENZI, R. ; CILIBERTO, S. ; TRIPICCIONE, R. ; BAUDET, C. ; MASSAIOLI, F. ; SUCCI, S.: Extended self-similarity in turbulent flows. In: *Phys. Rev. E* 48 (1993), Jul, Nr. 1, S. R29–R32. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.48.R29>. – DOI 10.1103/PhysRevE.48.R29
- [BCV00] BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; VERGASSOLA, M.: Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior. In: *Phys. Rev. E* 61 (2000), Jan, Nr. 1, S. R29–R32. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.61.R29>. – DOI 10.1103/PhysRevE.61.R29
- [Ber00] BERNARD, D.: Turbulence for (and by) amateurs. In: *ArXiv Condensed Matter e-prints* (2000), Juli
- [BFK07] BRUNEAU, C.-H. ; FISCHER, P. ; KELLAY, H.: The structures responsible for the inverse energy and the forward enstrophy cascades in two-dimensional turbulence. In: *EPL (Europhysics Letters)* 78 (2007), Nr. 3, 34002. <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/78/34002>. – DOI 10.1209/0295-5075/78/34002
- [BM10] BOFFETTA, G. ; MUSACCHIO, S.: An update on the double cascade scenario in two-dimensional turbulence. In: *ArXiv e-prints* (2010), Juni
- [Bof07] BOFFETTA, G.: Energy and enstrophy fluxes in the double cascade of two-dimensional turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 589 (2007), Nr. -1, 253–260. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112007008014>. – DOI 10.1017/S0022112007008014

- [Bor93] BORUE, V.: Spectral exponents of enstrophy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), Dec, Nr. 24, S. 3967–3970. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3967>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.71.3967
- [Bor94] BORUE, V.: Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994), Mar, Nr. 10, S. 1475–1478. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1475>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.72.1475
- [Boy01] BOYD, J. P.: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*. Bd. 2 revised edition. Dover Publications, 2001
- [CEE<sup>+</sup>03] CHEN, Shiyi ; ECKE, Robert E. ; EYINK, Gregory L. ; WANG, Xin ; XIAO, Zuoli: Physical Mechanism of the Two-Dimensional Enstrophy Cascade. In: *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), Nov, Nr. 21, S. 214501. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.214501>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.91.214501
- [Dav04] DAVIDSON, P. A.: *Turbulence: An Introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, 2004
- [DG01a] DANILOV, S. ; GURARIE, D.: Forced two-dimensional turbulence in spectral and physical space. In: *Phys. Rev. E* 63 (2001), May, Nr. 6, S. 061208. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.63.061208>. – DOI 10.1103/PhysRevE.63.061208
- [DG01b] DANILOV, S. ; GURARIE, D.: Nonuniversal features of forced two-dimensional turbulence in the energy range. In: *Phys. Rev. E* 63 (2001), Jan, Nr. 2, S. 020203. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.63.020203>. – DOI 10.1103/PhysRevE.63.020203
- [DR06] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2006
- [Eyi95] EYINK, G. L.: Exact Results on Scaling Exponents in the 2D Enstrophy Cascade. In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), May, Nr. 19, S. 3800–3803. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.3800>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.74.3800
- [FB09] FISCHER, P. ; BRUNEAU, C.-H.: Enstrophy Transfers Study in Two-Dimensional Turbulence. In: *Springer Proceedings in Physics* 131 (2009), S. 41–44
- [Fj53] FJÖRTOFT, R.: On the changes in spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non divergent flow. In: *Tellus* 5 (1953), S. 225–230
- [FL94] FALKOVICH, G. ; LEBEDEV, V.: Nonlocal vorticity cascade in two dimensions. In: *Phys. Rev. E* 49 (1994), Mar, Nr. 3, S. R1800–R1803.

- <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.49.R1800>. – DOI 10.1103/PhysRevE.49.R1800
- [Fri96] FRISCH, U.: *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996
- [Fri09] FRIEDRICH, R.: Numerical methods for complex systems. (2009). – Skript einer Vorlesung gehalten im SS 2009 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
- [Gaw99] GAWEDZKI, K.: Easy turbulence. In: *eprint arXiv:chao-dyn/9907024*, 1999, S. 7024–+
- [Got98] GOTOH, T.: Energy spectrum in the inertial and dissipation ranges of two-dimensional steady turbulence. In: *Phys. Rev. E* 57 (1998), Mar, Nr. 3, S. 2984–2991. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.57.2984>. – DOI 10.1103/PhysRevE.57.2984
- [GT05a] GKIOULEKAS, E. ; TUNG, K. K.: On the double cascades of energy and enstrophy in two-dimensional turbulence. Part 1. Theoretical formulation. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 5 (2005), S. 79–102
- [GT05b] GKIOULEKAS, E. ; TUNG, K. K.: On the double cascades of energy and enstrophy in two dimensional turbulence. Part 2. Approach to the KLB limit and interpretation of experimental evidence. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 5 (2005), S. 103–124
- [Hüs10] HÜSER, J.: *Modellierung und gyrokinetische Simulation des Dimits Shifts*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2010
- [Jim98] JIMINEZ, J.: Turbulent velocity fluctuations need not be gaussian. In: *Journal of Fluid Mechanics* 376 (1998), S. 139–147
- [Kam09] KAMPS, O.: *Lagrangesche Statistik in turbulenten Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diss., 2009
- [Kol41a] KOLMOGOROV, A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 30 (1941), Nr. 4, S. 299–303
- [Kol41b] KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 32 (1941), Nr. 1, S. 16–18
- [Kol91a] KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)* 434 (1991), July, Nr. 1890, 15–17. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1991.0075>. – ISSN 09628444
- [Kol91b] KOLMOGOROV, A. N.: The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. In: *Proceedings of the Royal*

- Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)* 434 (1991), Juli, Nr. 1890, 9–13. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1991.0075>
- [Kra67] KRAICHNAN, R. H.: Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. In: *Physics of Fluids* 10 (1967), Juli, S. 1417–1423. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1762301>. – DOI 10.1063/1.1762301
- [Kra71] KRAICHNAN, R. H.: Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 47 (1971), S. 525–535. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071001216>. – DOI 10.1017/S0022112071001216
- [LA00] LINDBORG, E. ; ALVELIUS, K.: The kinetic energy spectrum of the two-dimensional enstrophy cascade The kinetic energy spectrum of the two-dimensional enstrophy cascade. In: *Phys. Fluids* 12 (2000), S. 945–947
- [Lei68] LEITH, C.E.: Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence. In: *Physics of Fluids* 11 (1968), S. 671–673. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1691968>. – DOI 10.1063/1.1691968
- [Les97] LESIEUR, M.: *Turbulence in Fluids*. 3rd Edition. Kluwer Academic Publishers, 1997
- [PF02] PASQUERO, C. ; FALKOVICH, G.: Stationary spectrum of vorticity cascade in two-dimensional turbulence. In: *Phys. Rev. E* 65 (2002), May, Nr. 5, S. 056305. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.65.056305>. – DOI 10.1103/PhysRevE.65.056305
- [PJT99] PARET, J. ; JULLIEN, M.-C. ; TABELING, P.: Vorticity Statistics in the Two-Dimensional Enstrophy Cascade. In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), Oct, Nr. 17, S. 3418–3421. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3418>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.83.3418
- [Pop00] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000
- [PT98] PARET, J. ; TABELING, P.: Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: Experimental observations. In: *PHYSICS OF FLUIDS* 10 (1998), Nr. 12, 3126–3136. <http://dx.doi.org/10.1063/1.869840>. – DOI 10.1063/1.869840
- [Ric22] RICHARDSON, L. F.: *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922
- [Tab02] TABELING, P.: Two-dimensional turbulence: a physicist approach. In: *Physics Reports* 362 (2002), Nr. 1, 1–62. [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00064-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00064-3). – DOI 10.1016/S0370-1573(01)00064-3. – ISSN 0370-1573
- [Vos09] VOSSKUHLE, M.: *Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz*, Diplomarbeit, 2009

- [Wil07] WILCZEK, M.: *Kohärente Strukturen in turbulenten Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2007
- [Zeg05] ZEGLIN, Susanne: *Statistische Eigenschaften zweidimensionaler Turbulenz*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2005





# Danksagung

Zunächst einmal bedanke ich mich bei Herrn Friedrich für die freundliche Aufnahme in die Arbeitsgruppe sowie die Unterstützung und Betreuung meiner Arbeit. Mein Dank gilt auch Oliver Kamps und Michael Wilczek, die mit ihrem fachlichen Rat maßgeblich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Außerdem bedanke ich mich bei der Arbeitsgruppe für die freundliche Atmosphäre, und die stete Bereitschaft zu fachlichen Diskussionen. Darüberhinaus bedanke ich mich bei Felix Blanke, Georg Robbers und Tobias Schmitz für die technische Unterstützung. Nicht zuletzt möchte ich mich bei den Korrekturlesern Christoph Honisch, Michael Wilczek, Anton Daitche, Michel Voßkuhle und Oliver Kamps bedanken.



# Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und, außer den angegebenen, keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, 30. August 2010