

Synchronisation und Spannungsstabilität in einem Netzwerk von Synchronmaschinen

als Diplomarbeit vorgelegt von

Katrin Schmietendorf



Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Motivation und Aufbau der Arbeit	v
1. Eine kurze Einführung in Graphen und Netzwerke	1
1.1. Graphentheorie	2
1.1.1. Grundbegriffe, Klassifikation, Graphentypen	2
1.1.2. Abstandsmaße in Graphen	4
1.1.3. Graphen und Matrizen	5
1.2. Komplexe Netzwerke	7
1.2.1. Die Gradverteilungsfunktion: homogene und heterogene Netze	7
1.2.2. Phänomene in komplexen Netzwerken: Kleine-Welt-Eigenschaft und Clusterbildung	8
1.2.3. Drei grundlegende Netzwerktypen	9
1.2.3.1. Das Erdős-Rényi-Zufalls-Modell	9
1.2.3.2. Das Watts-Strogatz-Modell	11
1.2.3.3. Das Barabási-Albert-Modell	12
1.2.4. Robustheit und Fehlertoleranz	15
2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell	17
2.1. Synchronisation: Definition und Begriffsklärung	17
2.2. Das Kuramoto-Modell	21
2.2.1. Der Mean-Field-Fall	22
2.2.2. Modifikationen des Modells	28
2.2.3. Numerische Simulation endlicher Oszillatorpopulationen	29
3. Aufbau und Stabilität von Stromnetzen	37
3.1. Aufbau	37
3.1.1. Spannungsebenen und Netzstruktur	37
3.1.2. Zu den netzwerktheoretischen Eigenschaften	38
3.2. Definition und Klassifikation der Stabilität von Stromnetzen	39
4. Modell eines Netzes von Synchronmaschinen	42
4.1. Baustein 1: Netzwerkrepräsentation und Leistungsfluss	42
4.1.1. Knotenadmittanzmatrix und Netzwerkreduktion	42
4.1.2. Leistungsfluss	46
4.2. Baustein 2: Die Knotendynamik	47
4.2.1. Die Synchronmaschine: Funktionsweise und Eigenschaften	47

4.2.2. Die Swing-Gleichung	51
4.3. Zwischenfazit: Das klassische Modell	53
4.4. Erweiterung: Spannungsdynamik	54
5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems	60
5.1. Klassischer Fall mit konstanten Spannungen	61
5.2. Inklusive Spannungsdynamik	68
6. Zusammenfassung und Ausblick	81
A. Appendix	85
A.1. Formelsammlung Wechselstrom	85
A.2. Mathematische Beschreibung von Synchronmaschinen	86
A.2.1. Die Grundgleichungen im Stator- und Rotorsystem	86
A.2.2. Die charakteristischen Operationszustände	92
A.2.3. Zusammenhang zwischen Generator- und Netzsystem	94
A.2.4. Leistung	95
A.2.5. Vereinfachte Modellgleichungen	95
A.3. Wechsel des Referenzsystems: Netzwerksystem \leftrightarrow dq-Generatorsystem	96
A.4. Kron-Reduktion von Matrizen und Graphen	97
Abbildungsverzeichnis	99
Literaturverzeichnis	102

Motivation und Aufbau der Arbeit

Eine bedarfsdeckende, zuverlässige Energieversorgung stellt die Grundlage für wirtschaftliche Produktivität und die Gewährleistung unseres Lebensstandards dar. Energieerzeugung und -verteilung betreffend beginnt eine Phase des Umdenkens und der Veränderung.

Die Gründe hierfür sind in erster Linie ökologischer und klimatologischer Natur. Dass die Emission von sogenannten Treibhausgasen – allen voran Kohlenstoffdioxid und Methan – zu einem globalen Temperaturanstieg führt, kann mittlerweile als wissenschaftlicher Konsens bezeichnet werden. Um den anthropogenen Klimawandel mit seinen zum Teil drastischen Konsequenzen zu beschränken, muss vor allem die Verbrennung fossiler Energieträger und damit der Einsatz konventioneller Kohle-, Erdöl- und Erdgas-Kraftwerke weltweit reduziert werden. Die zweite Form konventioneller Energieerzeugung, die Kernenergie, ist – zumindest auf nationaler Ebene – zum Auslaufmodell geworden. Schon seit Jahrzehnten hauptsächlich aufgrund der ungewissen Endlagerung radioaktiven Materials kritisiert, hat durch das Unglück im japanischen Fukushima die Skepsis in den sicheren Betrieb deutscher Reaktoren überhandgenommen. Der 2011 von einer konservativ-liberalen Koalition beschlossene „Ausstieg vom Ausstieg“, welcher die schrittweise Abschaltung aller deutschen Kernkraftwerke beinhaltet, drückt den Mangel gesellschaftlicher Zustimmung zur Nuklearenergie aus.

Darüber hinaus sind die Ressourcen Kohle, Erdöl und Erdgas sowie Uran endlich, was ihre Gewinnung langfristig riskanter und kostspieliger machen wird. Zudem kann ihr Erwerb mit unliebsamen politischen Abhängigkeiten verknüpft sein.

Zwar gibt es beim Energieverbrauch und beim Ausstoß klimaschädlicher Gase im Allgemeinen noch Einsparpotenzial, doch kommt man vor dem Hintergrund einer wachsenden Weltbevölkerung, welche nach Wohlstand und wirtschaftlicher Produktivität strebt oder zumindest ihren Status quo erhalten möchte, nicht umhin, auf alternative Formen der Energieerzeugung umzustellen. Diese sogenannten Erneuerbaren Energien (EE) sind Wind-, Wasser-, Solar- und Bioenergie sowie Geothermie. Ihr Anteil am deutschen Endenergieverbrauch hat in den letzten Jahren wesentlich zugenommen und lag 2010 bei 10,9% (vgl. Abb. 0.1). Bis zum Jahr 2020 soll der Anteil der Erneuerbaren Energien am Endenergieverbrauch (bzw. Stromverbrauch) nach Zielvorgabe der jetzigen Bundesregierung auf 18% (>35%) gestiegen sein, im Jahre 2050 sogar auf 60% (>80%)[BDM11]. Abb. 0.2 zeigt die Anteile der oben genannten Erzeugungsformen an der insgesamt durch Erneuerbare Energien gewonnenen Strommenge für das Jahr 2010. Eine Vorrangstellung nimmt hierzulande die Windenergie ein (36,5%). Hier ist zu erwarten, dass die Kapazitäten, vor allem an den Küsten und auf hoher See (off-shore), weiter gen Maximalauslastung ausgebaut werden. Auf die Windenergie folgen

die Wasserkraft (19,9%), biologisch-organische Brennstoffe (13,1%) und Photovoltaik-Anlagen (11,3%).

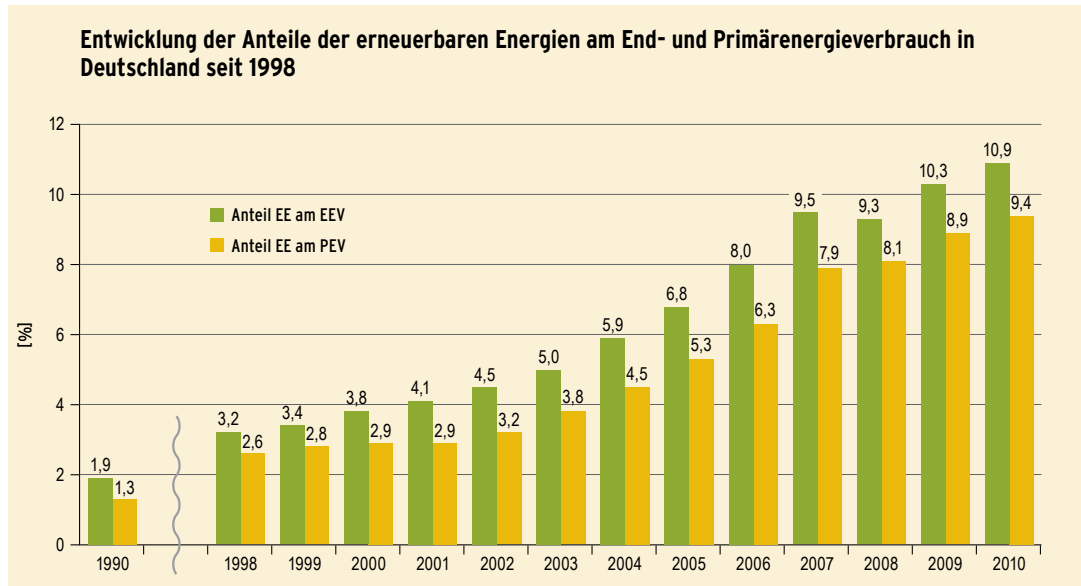


Abbildung 0.1.: Entwicklung der Anteile der Erneuerbaren Energien am End- und Primärenergieverbrauch¹ in der BRD [BDM11].

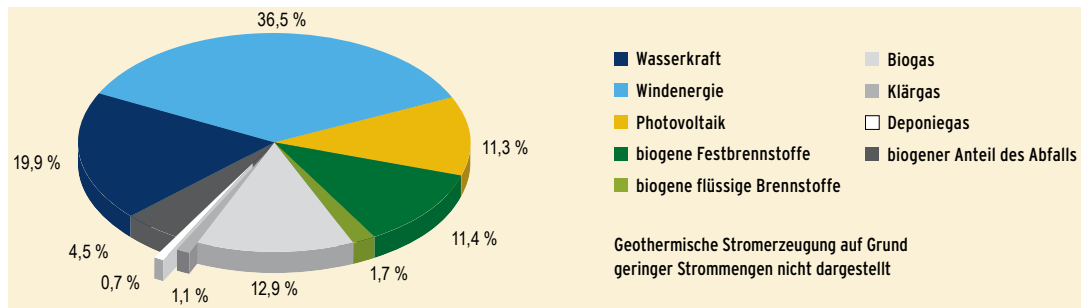


Abbildung 0.2.: Anteile der Erzeugungsformen an der insgesamt durch EE produzierten Strommenge im Jahr 2010 (BRD)[BDM11].

Die Entwicklung hin zu regenerativen Energieformen erfordert eine Modernisierung und Umgestaltung des Stromnetzes. Zum einen wird die bestehende zentrale Energieerzeugung zunehmend dezentral, sprich: statt weniger, großer Kraftwerke konventioneller Art werden viele kleine und mittelgroße, verbrauchernah produzierende

¹Primärenergie: Energie, die zu Beginn eines Umwandlungsprozesses von einem natürlichen Energieträger zur Verfügung gestellt wird; Endenergie: Energie, die schließlich beim Endverbraucher ankommt (Transport- und Umwandlungsverluste exklusive).

Einheiten in das Netz integriert. Zum anderen erfordern zum Beispiel leistungstarke Offshore-Windparks oder multinationale Unternehmungen wie das anvisierte Desertec-Großprojekt belastbare Stromleitungen, welche große Leistungsmengen über weite Strecken zu den Verbrauchern transportieren. Desweiteren bergen die zur Stromerzeugung präferierten Formen Wind- und Solarenergie einen Nachteil: Ihre Erzeugung richtet sich nach äußeren Umständen (Wetter, Tages- und Jahreszeit), kann nur begrenzt prognostiziert und nicht dem momentanen Bedarf angepasst werden. Den auf verschiedenen Zeitskalen stattfindenden Fluktuationen kann man mit folgenden Maßnahmen begegnen: Erhöhung und Innovation von Speicherkapazitäten, intelligentes Management von Verbrauch und Verteilung – Stichwort: Smart Grid – sowie einer den neuen Erfordernissen angepassten Netztopologie.

Die Frage nach der Stabilität und dem Design elektrischer Energieversorgungsnetze ist somit aktuell und von hohem umweltpolitischem, wirtschaftlichem und sozialem Interesse.

Zu Beginn der vorliegenden Arbeit stand die Frage, wie elektrische Energieversorgungsnetze und insbesondere deren Stabilität im Rahmen der Theoretischen Nichtlinearen Physik behandelt werden können. Der Aufbau spiegelt die Annäherung an das Thema chronologisch wieder:

Da elektrische Energieversorgungsnetze sich durch – zumeist komplexe – Graphen darstellen lassen, wird in Kapitel 1 eine Einführung in die *Graphentheorie* und das Forschungsfeld *komplexer Netzwerke* gegeben.

Die Stabilität von Stromnetzen ist eng verknüpft mit dem Phänomen *Synchronisation*. In Kapitel 2 wird der Begriff zunächst definiert und das Konzept erläutert. Im Anschluss daran wird das in diesem Zusammenhang prominente Kuramoto-Modell, welches die Dynamik einer Population gekoppelter Oszillatoren beschreibt und einen Phasenübergang von einem inkohärenten in partiell synchronisierte Zustände beinhaltet, vorgestellt. Die analytischen Ergebnisse werden anhand eigener numerischer Simulationen veranschaulicht.

Das Kapitel 3 beschäftigt sich zuerst mit der *Struktur von elektrischen Energieversorgungsnetzen*: Zum einen geht es um den Aufbau realer Stromnetze, zum anderen um deren Eigenschaften unter netzwerktheoretischen Gesichtspunkten. Im Anschluss wird der Begriff der *Stromnetzstabilität* definiert, erläutert und in Rotorwinkel-, Spannungs- und Frequenzstabilität kategorisiert.

In Kapitel 4 wird das *Modell eines Netzwerks von Synchronmaschinen* entwickelt. Es zeigt sich, dass die dynamischen Gleichungen für die Rotordynamik einer solchen Maschine, die *Swing-Gleichungen*, eine Erweiterung von Kuramotos Modell darstellen. Zwar findet sich in einigen Publikationen zum Kuramoto-Modell der beiläufige Verweis auf die Anwendung auf elektrische Energieversorgungsnetze, doch hat dieser Zusammenhang sowohl seitens der Nichtlinearen Dynamik als auch der Elektrischen Energietechnik ungeachtet der Aktualität des Themas bislang überraschend wenig

Beachtung gefunden.² Die Swing-Gleichungen werden in einem nächsten Schritt um Gleichungen für die Spannungsdynamik ergänzt. Das daraus resultierende Modell berücksichtigt die Kopplung zwischen Rotorwinkel- und Spannungstabilität.

In Kapitel 5 wird ein überdämpftes Zwei-Maschinen-System hinsichtlich stationärer Zustände und der Reaktion auf Störungen untersucht – zuerst für den Spezialfall konstanter Spannungen, dann unter Berücksichtigung der Spannungsdynamik.

Die Arbeit schließt in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse – auch im Hinblick auf die Simulation größerer Netze. Darüber hinaus werden weitere Anknüpfungspunkte für die Behandlung des Themas im Rahmen der Nichtlinearen Physik aufgezeigt.

²Zu den Ausnahmen hiervon siehe Kapitel 6.

1. Eine kurze Einführung in Graphen und Netzwerke

Die mathematische Grundlage für die Behandlung von Netzwerken ist die *Graphentheorie*, welche 1736 von Leonhard Euler im Zuge seiner systematischen Lösung des Königsberger Brückenproblems (siehe Abb. 1.1) initiiert wurde. Auch zu Beginn dieses Kapitels steht deshalb eine kurze Einführung in die Graphentheorie, welche keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, sondern die wichtigsten Grundbegriffe sowie solche, die für die weitere Arbeit relevant sind, vorstellen möchte.¹

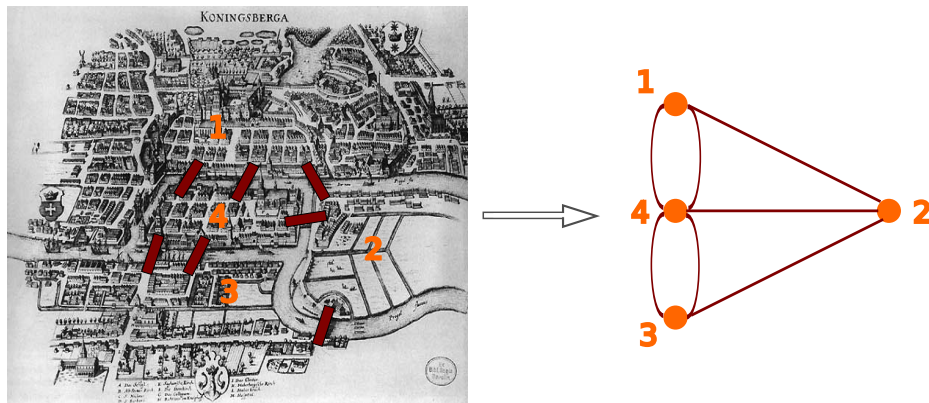


Abbildung 1.1.: Das Königsberger Brückenproblem. Rechts: Gibt es einen Rundweg, der jede der sieben Pregel-Brücken genau einmal überquert? Euler erkannte die Fragestellung als eine topologische und adressierte sie an einen Graphen mit vier Knoten (Ufern) und sieben Kanten (Brücken) (links)². Seine Antwort lautete: nein. Allgemeiner: Ein solcher Rundweg, auch Euler'scher Kreis³ genannt, existiert genau dann, wenn jeder Knoten mit einer geraden Anzahl von Kanten verbunden ist. ([Tit03], hier findet sich auch der Beweis.)

Im Anschluss wird ein Einblick in die Erforschung komplexer Netzwerke gegeben, welche Mitte der Fünfzigerjahre des vorigen Jahrhunderts ihren Anfang nahm. Viele

¹Basierend auf [Tit03, AB02].

²Quelle der in der Abb. 1.1 verarbeiteten historischen Karte Königsbergs: www.preussen-chronik.de

³Def. *Euler'scher Kreis*: geschlossene Kantenfolge in einem Graphen G , die jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft. (Knoten dürfen dabei mehrmals passiert werden.)

Modelle und Resultate aus diesem Themenkomplex sind noch recht jung. Die Analyse komplexer Netzwerke wird heute multidisziplinär betrieben. Motivation hierfür ist die Präsenz netzwerkartiger Strukturen in vielen Bereichen in Natur, Technik und Gesellschaft. Beispiele aus der Biologie sind neuronale, ökologische oder Stoffwechselnetzwerke. Ebenso kann man den Prozess der Proteinfaltung im Kontext von Netzwerken verstehen. Soziologen und Ökonomen interessieren sich für Netzwerke von Bekanntschaften oder Kooperationen. Im Bereich Transport und Versorgung finden sich beispielsweise Straßen-, Flugverkehrs-, Fluss- und elektrische Energieversorgungsnetze. Überdies seien die zwei bedeutendsten Kommunikationsnetzwerke erwähnt: das Internet (Netz von Routern) und das World Wide Web (durch Links verbundene Webseiten).

1.1. Graphentheorie

1.1.1. Grundbegriffe, Klassifikation, Graphentypen

Ein Netzwerk wird durch einen Graphen $G(V, E)$ repräsentiert, welcher über die *Knotenmenge* V und die Menge E der Verbindungen zwischen diesen Knoten, den sogenannten *Kanten* oder *Ecken*, festgelegt ist. Die Anzahl der Knoten gibt die *Ordnung*, die der Kanten die *Größe* des Graphen an.

Existiert zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ eine Kante $e = (u, v)$, so heißen u und v *adjazent*. Die beiden Endknoten u und v der Kante e werden *inzident* zu e genannt. Fallen Anfangs- und Endknoten einer Kante zusammen, ist also $e = (u, u)$, so spricht man von einer *Schlinge*. Sind zwei Knoten durch mehrere Kanten miteinander verbunden, so heißen diese *parallel*. Graphen, welche weder Schlingen noch parallele Kanten aufweisen, werden *schlicht* genannt.

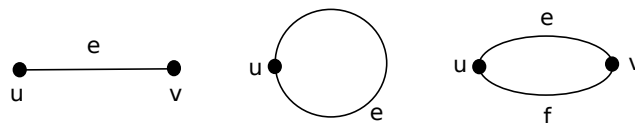


Abbildung 1.2.: Von links nach rechts: Kante $e(u, v)$ verbindet Knoten u und v ; Schlinge $e(u, u)$; parallele Kanten $e(u, v)$ und $f(u, v)$.

Ein Graph $G'(V', E')$ heißt *Untergraph* von $G(V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist. Falls zwischen jedem beliebigen Paar von Knoten ein *Weg* – das heißt eine Kantenfol-

ge^2 , in welcher jeder Knoten höchstens einmal vorkommt - existiert, heißt der Graph *zusammenhängend*. Ein maximaler zusammenhängender Untergraph wird als *Komponente* bezeichnet (siehe Abb. 1.3).

Der *Grad* eines Knotens gibt an, zu wie vielen Kanten dieser inzident ist, wobei Schlingen doppelt gezählt werden. Ein Knoten vom Grad null heißt *isoliert*. Dem Knotengrad kommt bei der statistischen Beschreibung von Netzwerken eine tragende Rolle zu.

Ein Graph, in welchem zwischen jedem Knotenpaar eine Kante existiert, heißt *vollständig* (Abb. 1.4). Die Anzahl der Kanten im (schlichten) vollständigen Graphen der Ordnung n beträgt

$$m = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.1)$$

Hat jeder Knoten des Graphen den gleichen Grad r , liegt ein *r-regulärer* Graph vor.

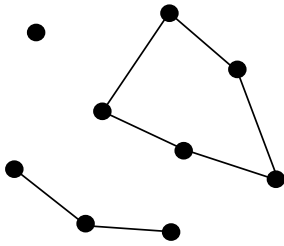


Abbildung 1.3.: Nicht zusammenhängender Graph bestehend aus drei Komponenten, davon ein isolierter Knoten. Die größte Komponente ist 2-regulär.

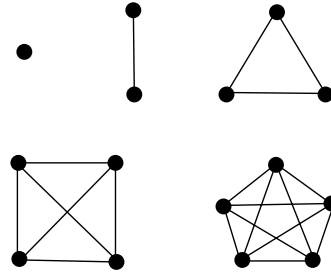


Abbildung 1.4.: Vollständige Graphen der Ordnungen eins bis fünf.

Bis jetzt war die Rede von ungerichteten Graphen. In einem *gerichteten* Graphen wird jeder gerichteten Kante (*Bogen*) ein geordnetes Paar von Anfangs- und Endknoten zugeteilt. Man denke zum Beispiel an ein Flussnetzwerk oder das World Wide Web. Darüber hinaus kann man jede Kante mit einer reellen oder komplexen Zahl behaften und so einen *gewichteten* Graphen erstellen. Hierdurch können etwa Transportnetzwerke mit maximalen Kapazitäten versehen werden. Bei dem in Kapitel 4 aufzustellenden Modell eines elektrischen Netzes bildet ebenfalls ein gewichteter Graph die Grundlage: Jeder Ecke ist eine Impedanz bzw. Admittanz zugeordnet.

²Folge $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$, wobei e_i inzident zu v_i und v_{i+1} ist.

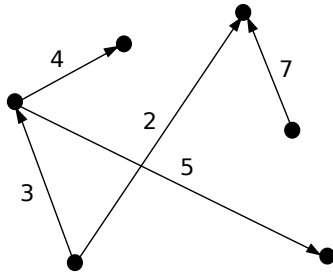


Abbildung 1.5.: Gewichteter und gerichteter Graph. Jeder Bogen ist mit einer reellen Zahl behaftet.

Zwei spezielle Typen von Graphen, welche sich auch als Untergraphen in komplexen Netzwerken wiederfinden, sind in Abb. 1.6 aufgeführt. Ein *Kreis* ist ein Weg, dessen Start- und Endknoten identisch sind, ein *Baum* ein zusammenhängender Graph, der keine Kreise enthält.

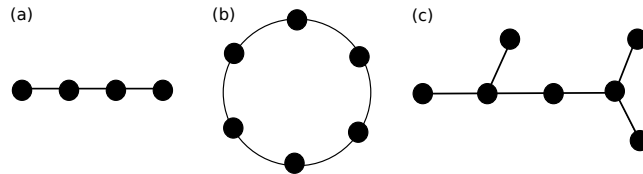


Abbildung 1.6.: (a) Weg der Ordnung vier; (b) Kreis der Ordnung sechs; (c) ein Baum der Ordnung sieben.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ werden *isomorph* genannt, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ gibt, unter der die Anzahl der Kanten zwischen zwei Knoten v und w für alle $v, w \in V$ gleich der Anzahl der Kanten zwischen $\phi(v)$ und $\phi(w)$ ist. Mit anderen Worten: Es wird lediglich eine Umnummerierung vorgenommen. Isomorphe Graphen stimmen in ihren strukturellen Eigenschaften überein. Zu den Größen, welche sich unter der Abbildung nicht ändern, den sogenannten *Graphen-invarianten*, zählen offensichtlich: minimaler und maximaler Grad, Zusammenhang, Anzahl der Komponenten.

1.1.2. Abstandsmaße in Graphen

Mithilfe der folgenden Definitionen lassen sich die topologischen Abstände in einem Graphen $G(E, V)$ der Ordnung n quantifizieren.

- Der *Abstand* $d(u, v)$ zwischen zwei Knoten u und v gibt die Anzahl der Knoten des kürzesten Weges zwischen u und v an. Existiert kein Weg zwischen u und v , so wird $d(u, v) = \infty$ gesetzt. Außerdem gilt: $d(v, v) = 0$.

- Das Maximum aller Abstände eines Knoten v zu den anderen Knoten

$$e(v) = \max_{w \in V} (d(w, v)) \quad (1.2)$$

heißt *Exzentrizität* des Knotens v .

- Der *Radius* des Graphen entspricht dem Minimum der Exzentrizitäten

$$r(G) = \min_{w \in V} (e(w)) \quad (1.3)$$

und der *Durchmesser* dem maximalem Abstand zweier Knoten

$$d(G) = \max_{u, v \in V} (d(u, v)) = \max_{v \in V} (e(v)). \quad (1.4)$$

- Ein weiteres, in der Analyse komplexer Netzwerke wichtiges Maß ist die *charakteristische* oder *mittlere Weglänge*

$$L(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\forall u \neq v} d(u, v). \quad (1.5)$$

Dabei ermittelt man zunächst die mittleren Abstände eines jeden Knotens u zu den jeweils $(n-1)$ anderen Knoten und berechnet dann den Mittelwert dieser Größen über alle n Knoten.

1.1.3. Graphen und Matrizen

Die Beschreibung von Graphen mithilfe von Matrizen ermöglicht neben der Handhabbarkeit bei Speicherung und Verarbeitung die Anwendung von Methoden der Linearen Algebra.

Wir gehen von einem Graphen $G(V, E)$ der Ordnung n und der Größe m aus. Die *Adjazenzmatrix* $A(G)$ des Graphen ist diejenige $n \times n$ -Matrix, deren Komponente a_{ij} die Anzahl der Kanten zwischen den Knoten i und j angibt (siehe Abb. 1.7). Anhand dieser Definition ist offensichtlich, dass die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen symmetrisch ist und im Falle eines schlichten, ungewichteten Graphen lediglich Nullen und Einsen enthalten kann. Der Grad eines Knoten lässt sich direkt aus der zugehörigen Zeile bzw. Spalte berechnen:

$$\text{Grad}(k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj}. \quad (1.6)$$

Die *Inzidenzmatrix* $B(G)$ ist eine $n \times m$ -Matrix, deren Koeffizienten wie folgt festgelegt sind:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Knoten } i \text{ und Kante } j \text{ inzident sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.7)$$

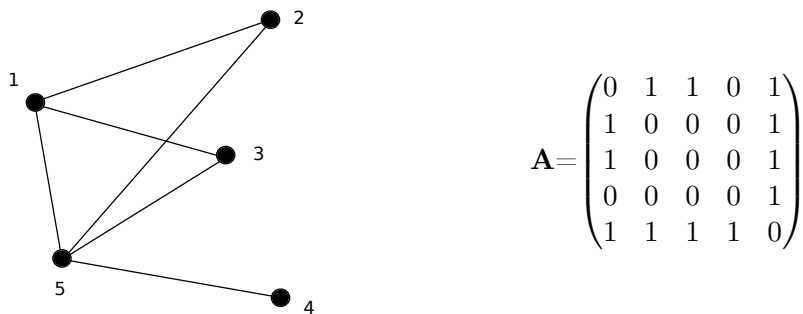


Abbildung 1.7.: Zweierlei Repräsentation eines Graphen: Zeichnung und Adjazenzmatrix.

Die *Gradmatrix* $D(G)$ ist eine $n \times n$ -Diagonalmatrix, welche die Knotengrade

$$d_{ii} = \text{Grad}(i) \quad (1.8)$$

angibt.

Die Einträge der *Abstandsmatrix* $M(G)$ entsprechen den Abständen der Knoten:

$$m_{ij} = d(i, j). \quad (1.9)$$

Adjazenz-, Inzidenz- und Gradmatrix erfüllen den Zusammenhang

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{D}. \quad (1.10)$$

Eine für die Beschreibung elektrischer Netzwerke und damit für die vorliegende Arbeit relevante Matrix ist die *Laplacesche Matrix*, welche sich aus der Differenz von Grad- und Adjazenzmatrix ergibt:

$$\mathbf{L}(G) = \mathbf{D}(G) - \mathbf{A}(G). \quad (1.11)$$

Sie wird als sogenannte Knoten-Admittanzmatrix die Vektoren der Knotenströme und -spannungen in den Knoten-Netzwerkgleichungen verknüpfen (siehe Kap. 4.1.1).

1.2. Komplexe Netzwerke

Komplexe Netzwerke sind – zu erinnern ist an die zu Beginn des Kapitels aufgeführten Beispiele – Graphen von hoher Ordnung bzw. Größe. Damit können die in Kapitel 1.1 vorgestellten Begriffe und Definitionen auf sie angewandt werden.³ Zugleich erfordert die hohe Anzahl an Knoten und Kanten jedoch zusätzliche Instrumente und Herangehensweisen, auch statistische, und bringt neue Phänomene mit sich. Hierüber soll nun ein kurzer Überblick gegeben werden.⁴

1.2.1. Die Gradverteilungsfunktion: homogene und heterogene Netze

Ein grundlegendes Instrument zur Beschreibung von Netzwerken stellt die Verteilung der Knotengrade $P(k)$ dar. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Knoten den Grad k besitzt.

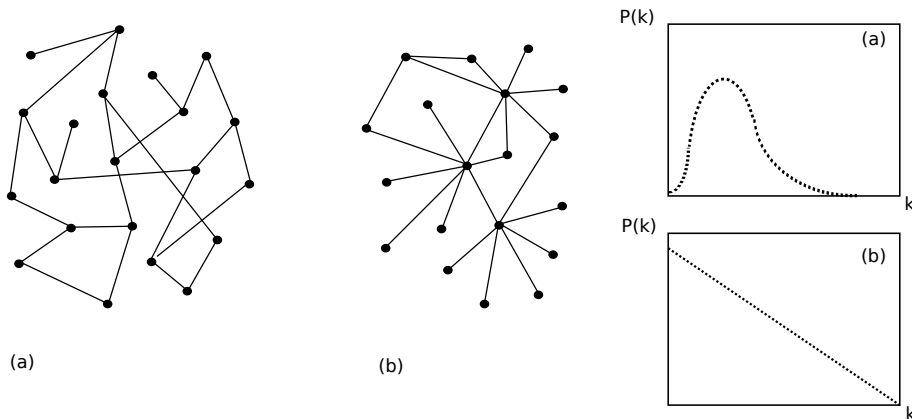


Abbildung 1.8.: Homogenes (a) und heterogenes (b) Netzwerk mit zugehörigen Gradverteilungsfunktionen (bezüglich (b) in doppelt logarithmischer Darstellung).

Anhand dieser Verteilung können Netzwerke zwei Grundtypen zugeordnet werden: *homogenen* und *heterogenen* Netzwerken. Beide sind in Abb. 1.8 illustriert. In einem homogenen Netzwerk haben fast alle Knoten annähernd denselben Grad nahe des Mittelwertes $\langle k \rangle$. Die zugehörige Verteilung kann z. B. Gaußscher oder Poissonscher Art sein.

³An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass in der angelsächsischen Literatur über komplexe Netzwerke die Unterscheidung der graphentheoretischen Termini *order* und *size* nicht immer strikt ist. So wird die Knotenzahl teilweise mit *size* bezeichnet. Des Weiteren werden Kanten bzw. Ecken (*edges*) in diesem Kontext oft Verbindungen (*links*) genannt. Letzterem schließt sich diese Arbeit an.

⁴Dieser basiert auf [AB02, BS03, BBV08, CV07].

Im Gegensatz hierzu besitzen in einem heterogenen Netzwerk einige wenige, sogenannte *zentrale Knotenpunkte* sehr viele Verbindungen zu anderen Knoten, während die Mehrheit der Knoten nur einen kleinen Grad aufweist. Diesen *skalenfreien* oder *skaleninvarianten* Netzwerken entsprechen Verteilungsfunktionen, welche Potenzgesetzen gehorchen: $P(k) \sim k^{-\gamma}$.

1.2.2. Phänomene in komplexen Netzwerken: Kleine-Welt-Eigenschaft und Clusterbildung

Beim *Kleine-Welt-Phänomen* und der *Clusterbildung* handelt es sich um zwei Erscheinungen, welche in komplexen Netzwerken beobachtet werden und zu deren Klassifikation beitragen können.

Die Kleine-Welt-Eigenschaft

Der Begriff „*Kleine Welt*“ (bzw. „*Small-World*“) wurde 1968 vom Soziologen Stanley Milgram geprägt, als er untersuchte, wie groß der mittlere Abstand der Bekanntschaft zwischen zwei beliebigen Einwohnern der USA ist. Das überraschende, weil im Vergleich zur Größe des Netzwerkes aller US-Bürger geringe Ergebnis lautete: $L \approx 6$ („six degrees of separation“).

Mathematisch formuliert spricht man vom Kleine-Welt-Charakter, wenn die mittlere Weglänge zwischen zwei Knoten logarithmisch oder langsamer mit der Größe des Netzwerkes skaliert. Viele komplexe Netzwerke, nicht nur soziologische, besitzen die Kleine-Welt-Eigenschaft.

Clusterbildung

Auch der Begriff der Clusterbildung wurde zunächst im Kontext soziologischer Netzwerke eingeführt und beschreibt die Tendenz zur Ausbildung von vollständigen Untergraphen, sogenannten *Cliquen*. Der *Clusterbildungs-Koeffizient* eines Knoten i lautet

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (1.12)$$

In Worten: Es handelt sich um den Quotienten von den e_i zwischen den k_i Nachbarn von Knoten i tatsächlich existierenden Verbindungen und der Zahl der möglichen Verbindungen. Der Clusterbildungs-Koeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei Nachbarn von i ebenfalls adjazent sind.

Um das gesamte Netzwerk bezüglich Clusterbildung einzuordnen, berechnet man den Mittelwert über die Koeffizienten aller n Knoten:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i. \quad (1.13)$$

1.2.3. Drei grundlegende Netzwerktypen

Bei der Modellierung komplexer Netzwerke gibt es drei Grundtypen, welche im Folgenden kurz vorgestellt werden sollen.

1.2.3.1. Das Erdős-Rényi-Zufalls-Modell

Die Erforschung von Netzwerken beliebiger Größe nahm in den Fünfzigerjahren des vorigen Jahrhunderts ihren Anfang. Pionierarbeit leisteten hierbei die ungarischen Mathematiker Paul Erdős und Alfred Rényi mit der Entwicklung des nach ihnen benannten ER-Zufalls-Netzwerks.

Dieses besteht aus N Knoten und n von insgesamt $\frac{N(N-1)}{2}$ möglichen Verbindungen. Damit ergeben sich

$$\binom{N(N-1)/2}{n} \quad (1.14)$$

Realisierungsmöglichkeiten, von denen jede mit derselben Wahrscheinlichkeit gewichtet ist.

Eine alternative Definition lautet, dass jede mögliche Verbindung mit einer Wahrscheinlichkeit p vorhanden ist, wobei die über mehrere Netzwerkrealisierungen gemittelte Zahl an Verbindungen durch

$$\langle n \rangle = \frac{N(N-1)}{2} p \quad (1.15)$$

gegeben ist.

Die Theorie von Zufalls-Netzwerken beschäftigt sich zu großen Teilen mit den zu Netzwerken der Ordnung $N \rightarrow \infty$ gehörigen Wahrscheinlichkeitsräumen. Dabei durchlaufen die Netzwerke einen Evolutionsprozess, in welchem man bei N isolierten Knoten beginnend immer neue Verbindungen einfügt, die Verbindungswahrscheinlichkeit p also sukzessiv erhöht wird. Die Frage dabei lautet, bei welcher Wahrscheinlichkeit p eine bestimmte Eigenschaft Q , wie z. B. Zusammenhang oder eine spezielle Art von Untergraph, auftritt. Das erstaunliche Ergebnis ist, dass der Übergang zwischen 'Q ist sehr unwahrscheinlich' (d. h. fast kein Graph besitzt Q) und 'Q ist sehr wahrscheinlich' (fast jeder Graph besitzt Q) sehr schnell vonstatten geht. Für eine ausführlichere Schilderung dieses Themenkomplexes sei auf [AB02] verwiesen.

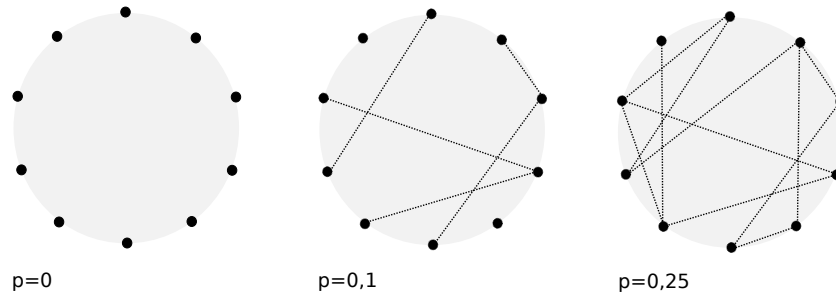


Abbildung 1.9.: Zufalls-Netzwerk der Ordnung $N=10$ für verschiedene Verbindungswahrscheinlichkeiten p . Oder: Evolutionsstadien eines Zufalls-Netzes, welche mit zunehmenden Wahrscheinlichkeiten p korrespondieren.

Wie sieht nun die Verteilungsfunktion eines Zufallsnetzwerks aus? Die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten i den Grad $k_i = k$ besitzt, lautet

$$P(k_i = k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (1.16)$$

Der erste Faktor gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Verbindungen zu den $(N-1)$ anderen Knoten auszuwählen, der zweite und dritte jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass k Verbindungen vorhanden und die restlichen $(N-1-k)$ abwesend sind. Im Limes $N \rightarrow \infty$ ergibt sich eine Poissonsche Verteilungsfunktion

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}. \quad (1.17)$$

Der Clusterbildungs-Koeffizient ist identisch mit der Verbindungswahrscheinlichkeit p :

$$C_{\text{ER}} = p. \quad (1.18)$$

Die mittlere Weglänge skaliert wie der Logarithmus der Knotenanzahl N :

$$L_{\text{ER}} \sim \frac{\ln N}{\ln(\langle k \rangle)}, \quad (1.19)$$

das ER-Netzwerk weist also die Kleine-Welt-Eigenschaft auf.

1.2.3.2. Das Watts-Strogatz-Modell

Dieses Modell wurde 1998 von Duncan J. Watts und Steven H. Strogatz entwickelt und sollte in erster Linie als Repräsentant sozialer Netzwerke dienen. Ziel war es, die Koexistenz von hohem Clusterbildungs-Koeffizienten und Kleine-Welt-Phänomen, wie sie vor allem in sozialen Netzen vorzufinden ist, zu simulieren. Die Kleine-Welt-Eigenschaft tritt auch in ER-Netzwerken auf. Allerdings zeigen die zu modellierenden realen Netze im Vergleich zu künstlich erzeugten Zufallsnetzen größere Clusterbildungskoeffizienten, welche zudem weitestgehend unabhängig von der Ordnung N zu sein scheinen. Letzteres erinnert an regelmäßige Gitter, in denen der Clusterbildungskoeffizient nur von der Koordinationszahl abhängt.

Diese Vorüberlegungen motivieren den zugrundeliegenden Algorithmus (zur Veranschaulichung siehe Abb. 1.10):

- Man starte mit einem Ringgitter, bei dem jeder Knoten mit seinen K nächsten Nachbarn verbunden ist. Die Bedingung $N \gg K \gg \ln(N) \gg 1$ gewährleistet, dass das Netzwerk spärlich, aber zusammenhängend ist. Zu Beginn liegt also ein sehr geordneter Zustand mit hohem Clusterbildungs-Koeffizienten, aber großer mittlerer Weglänge vor.
- Nun wird jede Verbindung mit der Wahrscheinlichkeit p neu gezogen. Durch diese Prozedur werden langreichweitige Verbindungen in das System eingeführt, welche die mittlere Weglänge verringern.

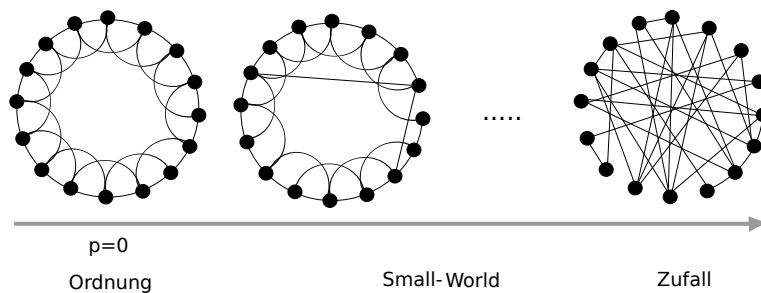


Abbildung 1.10.: Watts-Strogatz-Algorithmus: Für $p = 0$ reguläres Ringgitter. Mit zunehmender Neuverbindungs-Wahrscheinlichkeit p Übergang über ein Kleine-Welt- in ein Zufalls-Netzwerk.

Abb. 1.11 zeigt, wie Clusterbildungs-Koeffizient und mittlere Weglänge von der Neuverbindungs-Wahrscheinlichkeit p abhängen. Die mittlere Weglänge L nimmt mit zunehmender Neuverbindungs-Wahrscheinlichkeit p und dem Einbau langreichweitiger

Verbindungen rasch ab (man beachte die logarithmische Skalierung der p -Achse!), während der Clusterbildungskoeffizient C noch nahezu konstant bleibt. Es gibt also ein p -Intervall, in dem ein hoher Clusterbildungskoeffizient mit einer relativ geringen mittleren Weglänge einhergeht. In diesem Bereich simuliert das WS-Modell soziale Netzwerke mit Clustern von Familien, Nachbarschaften, Freundeskreisen, Arbeitsgruppen u. ä., welche durch langreichweitige Bekanntschaften miteinander verknüpft sein können.

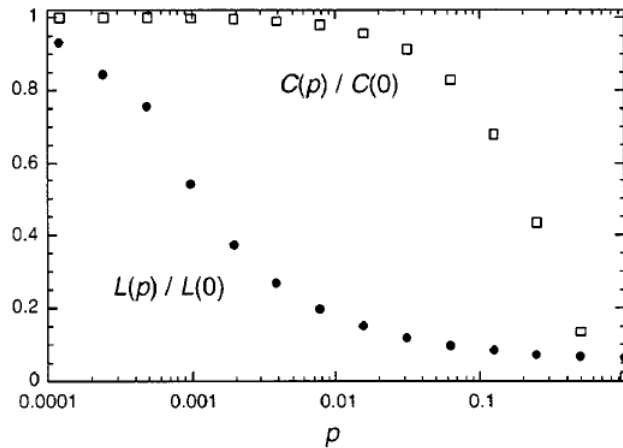


Abbildung 1.11.: Charakteristische Weglänge L und Clusterbildungskoeffizient C in Abhängigkeit der Neuverbindungs-Wahrscheinlichkeit p im WS-Modell. Beide Größen normalisiert durch ihre Werte $L(0)$ und $C(0)$ für das reguläre Gitter [AB02].

1.2.3.3. Das Barabási-Albert-Modell

Die meisten realen Netzwerke besitzen Verteilungsfunktionen $P(k)$, welche Potenzgesetzen gehorchen. Das Paradebeispiel hierfür ist das World Wide Web. Ein Modell für die Erzeugung derartiger Netze wurde 1999 von Albert-László Barabási und Réka Albert entwickelt. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Netzwerkmodellen liegt der Fokus bei der Konstruktion beim BA-Modell auf der Dynamik des Netzwerkes. Man geht davon aus, dass sich bei korrekter Erfassung der während der Netzwerkevolution ablaufenden Prozesse die erwartete Topologie ergeben muss.

Der Algorithmus fußt auf zwei Basismechanismen: *Wachstum* und *präferentieller Bin-*

dung. Ersteres berücksichtigt, dass es sich bei den betrachteten realen Netzen um offene Systeme handelt, denen fortlaufend neue Knoten hinzugefügt werden. Präferentielle Bindung bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein neu zugefügter Knoten an einen bereits vorhandenen Knoten knüpft, von dessen Grad abhängt – und zwar so, dass Knoten mit höherem Grad bevorzugt werden („rich-get-richer“). Bezogen auf das Beispiel des World Wide Web heißt das: Eine neue Webseite wird mit höherer Wahrscheinlichkeit mit einer stark verlinkten bereits bestehenden Seite verlinkt, da diese leichter zu finden ist und einen höheren Bekanntheitsgrad aufweist.

Der Algorithmus lautet wie folgt:

Man beginne mit einem System von m_0 Knoten und füge in jedem Schritt einen weiteren Knoten hinzu, welcher mit $m \leq m_0$ der bereits vorhandenen Knoten verbunden werde. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies mit einem Knoten i geschieht, hängt via

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (1.20)$$

mit dessen Grad k_i zusammen.

Nach t Zeitschritten liegt dann ein Netzwerk mit $N = m_0 + t$ Knoten und mt neuen Verbindungen vor. Numerische Simulationen führen auf eine Verteilungsfunktion

$$P(k) \sim k^{-\gamma_{\text{BA}}}$$

mit $\gamma_{\text{BA}}=3$ unabhängig vom einzigen Modell-Parameter m .

Es bleibt zu bemerken, dass Wachstum *und* präferentielle Bindung essentielle Mechanismen für die Entwicklung eines solchen skaleninvarianten Netzwerks sind. Blendet man jeweils eins der beiden aus, misslingt die Reproduktion.

Als Einblick in die analytische Behandlung des BA-Netzwerkes sei die Kontinuums-*theorie* von Barabási, Albert und Jeong skizziert.

Die Änderung des i -ten Knotengrades (jetzt eine kontinuierliche, reelle Variable) mit der Zeit t genügt der Gleichung

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j}. \quad (1.21)$$

Die Summe berücksichtigt alle vorhandenen Verbindungen, ausgenommen die neu eingefügten:

$$\sum_{j=1}^{N-1} k_j = 2mt - m. \quad (1.22)$$

Dies führt auf

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t}. \quad (1.23)$$

Mit der Anfangsbedingung $k_i(t_i) = m$ – jeder Knoten ist bei seiner Einfügung mit m Verbindungen ausgestattet – erhält man

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (1.24)$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten einen Grad $k_i(t)$ kleiner als k besitzt:

$$P(k_i(t) < k) = P \left(t_i > \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}}} \right). \quad (1.25)$$

Da die Knoten in äquidistanten Zeitintervallen eingefügt werden, ist die zugehörige Verteilungsfunktion konstant:

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}. \quad (1.26)$$

Hiermit folgt

$$P \left(t_i > \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}}} \right) = 1 - \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}} (t + m_0)}. \quad (1.27)$$

Partielles Ableiten nach k liefert die Verteilung

$$P(k) = \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{\beta (m_0 + t) k^{\frac{1}{\beta} + 1}}. \quad (1.28)$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$P(k) \sim 2m^{\frac{1}{\beta}} k^{-\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = 3, \quad (1.29)$$

also ein stationärer skalenfreier Zustand, welcher nicht von der Netzwerkordnung $N = m_0 + t$ abhängig ist. Dieses Ergebnis steht in Einklang mit den oben erwähnten numerischen Simulationen.

Zu den Eigenschaften von BA-Netzwerken:

Die mittlere Weglänge eines BA-Netzwerks ist aufgrund seiner Topologie deutlich geringer als in einem vergleichbaren Zufalls-Netz. Die zentralen Knotenpunkte ermöglichen kleine Abstände und machen das Netz diesbezüglich effizienter.

Betrachtet man den Clusterbildungs-Koeffizienten von BA-Netzwerken verschiedener Ordnungen N mit $\langle k \rangle = 4$, so fällt dieser mit N gemäß

$$C_{\text{BA}} \sim N^{-\frac{3}{4}} \quad (1.30)$$

und damit langsamer als

$$C_{\text{ER}} = \langle k \rangle N^{-1} \quad (1.31)$$

ab. Dabei ist C_{BA} bei kleiner Netzwerkordnung N etwa fünfmal so hoch wie C_{ER} für ein vergleichbares Zufalls-Netzwerk.

Das BA-Netzwerk unterscheidet sich von Zufalls-Netzen ferner dadurch, dass seine Evolutionsmechanismen zu Korrelationen der Knotengrade führen.

1.2.4. Robustheit und Fehlertoleranz

Wie verhalten sich Netzwerke, wenn man Knoten oder Verbindungen eliminiert, vor allem in Bezug auf mittlere Weglänge und Zusammenhang? Zunächst lässt sich festhalten, dass die Eliminierung von Knoten im Allgemeinen größere Konsequenzen für das Netzwerk hat als das Entfernen von Verbindungen, da mit diesen alle zu ihnen inzidenten Kanten ebenfalls verschwinden (siehe Abb. 1.12).

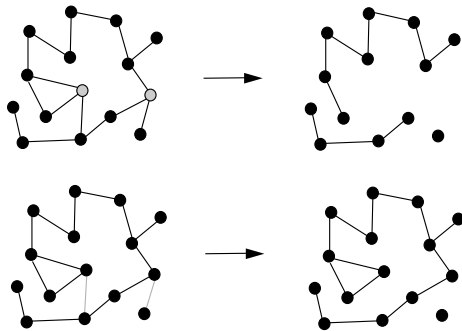


Abbildung 1.12.: Auswirkung der Entfernung von Knoten und Verbindungen. Oben: Eliminierung der zwei grau markierten Knoten führt zum Zerfall des Graphen in drei Komponenten. Unten: Eliminierung der grauen Verbindungen spaltet einen Knoten ab.

Reale Netzwerke erweisen sich häufig als unerwartet robust gegenüber dem Entfernen von Knoten oder Verbindungen. So fallen im Internet beispielsweise regelmäßig etwa 0,3% der Router aus, aber sogar der Defekt von 60% der Router würde noch keinen signifikanten Anstieg in der mittleren Weglänge nach sich ziehen. Ein ähnliches Verhalten zeigen viele natürliche Netzwerke wie zum Beispiel zelluläre, in denen Fehler in Form von Mutationen oder Proteinmissfaltung auftreten. Jeong et al. zeigten hier, dass die Eliminierung von 8% der beteiligten Substrate die mittlere Weglänge nicht nennenswert beeinflusst.

Bei den bisher genannten Ergebnissen wurde allerdings von einem *zufälligen* Entfernen von Knoten ausgegangen. Im Fall *intentionalen* Vorgehens, sprich: dem gezielten Entfernen von Knoten hohen Grades mit der Absicht, möglichst großen Schaden anzurichten, zeigt sich ein anderes Bild. Die mittlere Weglänge im Internet steigt beim intentionalen Entfernen von Routern sofort stark an, bis es bei etwa 3% zum Zusammenbruch des Systems kommt. In den von Jeong untersuchten Zellnetzwerken kommt es bei intentionaler Entfernung von 8% der Knoten zu einem Anstieg in der mittleren Weglänge um etwa das Fünffache.[AB02]

Die Robustheit von Netzwerken liegt nicht nur in der Redundanz, also der Existenz alternativer Verbindungen, sondern vor allem in topologischen Eigenschaften der Netzwerke begründet. Abb. 1.13 stellt das Verhalten von Zufalls- und skalenfreien Netzwerken unter zufälliger und intentionaler Knotenentfernung gegenüber.

Betrachtet man zunächst die zufällige Entfernung von Knoten im Zufalls-Netzwerk, so folgt die Abnahme der Knotenzahl S mit zunehmendem Anteil f der eliminierten Knoten zunächst der Diagonalen, da lediglich die beseitigten Knoten fehlen, bis

schließlich ganze Teile von der Hauptkomponente abgespalten werden. Ab einem kritischen Wert $f_c \approx 0.7$ zerfällt das Netz komplett in kleine Komponenten. Durch das Entfernen von Knoten nimmt die mittlere Weglänge im größten Cluster zunächst zu, bis sie mit dem Zerfall des Netzwerkes stark abfällt. Bei intentionalem Entfernen von Knoten ist der kritische Wert $f_c \approx 0.2$ viel geringer. Dies ist zu erwarten, da gezielt Knoten von höherem Grad beseitigt werden, was den Prozess des Netzwerkzerfalls beschleunigt.

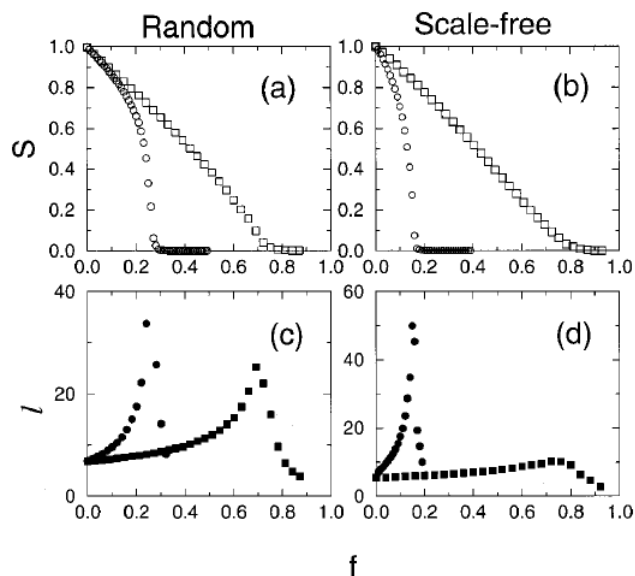


Abbildung 1.13.: Verhalten von Zufalls- und skalenfreien Netzwerken (ER- und BA-Netz jeweils mit $N=10000$, $\langle k \rangle = 4$) unter zufälliger (Quadrate) und intentionaler (Kreise) Knotenentfernung. Die Knotenzahl S und die mittlere Weglänge l sind gegen den Anteil f der eliminierten Knoten aufgetragen. Beide Größen sind auf ihre Anfangswerte normiert. Zerfällt das Netz, geben S und l die Werte der größten Komponente an [AB02].

Die qualitativen Unterschiede im Verhalten von Zufalls- und skalenfreien Netzwerken verwundern nicht, wenn man sich die topologischen Verschiedenheiten ins Gedächtnis ruft. Während das skalenfreie Netzwerk eine höhere Robustheit gegenüber zufälliger Knotenentfernung aufweist ($f_c \approx 0.8$), zeigt es sich wesentlich anfälliger bezüglich intentionaler Knotenentfernung ($f_c \approx 0.2$). Der Grund hierfür ist, dass bei zufälliger Auswahl fast ausschließlich Knoten niedrigen Grades getroffen werden, wohingegen bei gezielter Auswahl der zentralen Knotenpunkte das Netzwerk schneller auseinanderbricht als das vergleichbare Zufalls-Netzwerk. Betrachtet man die mittlere freie Weglänge, so sieht man, dass diese bei zufälliger Auswahl lange nahezu unbeeinflusst bleibt und bei intentionaler Wahl der Knoten die Form eines Peaks besitzt, das Netzwerk also rasch zerfällt.

2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell

2.1. Synchronization: Definition und Begriffsklärung

Ein für den stabilen Betrieb von elektrischen Energieversorgungsnetzwerken relevantes Phänomen ist das der *Synchronisation*. Synchronisation tritt in verschiedenen Kontexten auf. Die erste schriftliche Aufzeichnung über eine entsprechende Beobachtung liegt in Form eines Briefes aus dem Jahre 1665 vor, den der niederländische Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens an seinen Vater adressierte. In diesem berichtet er von der schleichenden Synchronisation zweier Pendeluhren, welche an demselben Holzbalken befestigt waren, und nennt diesen „wundervollen Effekt“ eine „Sympathie der Uhren“.

Die Liste an Beispielen von Synchronisationsvorgängen ist lang und vielfältig. Sie reicht von der allgemein zugänglichen Erfahrung eines sich auf einen gemeinsamen Rhythmus einklatschenden Publikums über physikalisch-technische Fragestellungen wie etwa gekoppelte Josephson-Kontakte¹ und die Stabilität von elektrischen Energieversorgungsnetzen bis hin zu biologischen und medizinischen Sachgebieten, in denen es um die Synchronisation von Herzmuskeln oder neuronalen Impulsen im Gehirn geht. Und um zuletzt noch ein besonders ästhetisches Beispiel zu nennen: das synchrone Aufblinken eines Schwarms Glühwürmchen bei Nacht. Im Anblick dieser Vielfalt an Anwendungsgebieten verwundert es nicht, dass Synchronisationsvorgänge in vielen naturwissenschaftlichen Disziplinen, vor allem auch in der Theoretischen Nichtlinearen Dynamik, auf Interesse gestoßen sind.

In diesem Kapitel werden das Phänomen Synchronisation sowie weitere in diesem Kontext auftretende Begriffe definiert und erläutert. Im Anschluss hieran wird das Kuramoto-Modell (KM), welches das Phasenverhalten eines Ensembles gekoppelter Oszillatoren wiedergibt, vorgestellt und die ersten, den Mean-Field-Fall betreffenden Analyseschritte des Namensgebers präsentiert. Mittels eigener Simulationsergebnisse für den Fall endlicher Oszillatorenzahlen wird das Verhalten eines solchen Systems demonstriert.²

¹Josephson-Kontakt: elektrisches Bauteil, in welchem zwei Supraleiterschichten durch eine wenige Nanometer dicke Barriere aus nicht-supraleitendem Material getrennt sind

²Kapitel 2.1 fasst die entsprechenden Ausführungen aus [PRK03] zusammen, Kapitel 2.2 basiert auf [PRK03, Str00, ABPV⁺05].

2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell

Zunächst soll der Begriff Synchronisation (aus dem Griechischen: $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (Zeit), $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ (zusammen, gemeinsam)), welcher aus dem allgemeinen Sprachgebrauch bekannt und in seinem Grundzug verständlich ist, wissenschaftlich präzisiert werden:

Unter Synchronisation versteht man die Angleichung der Rhythmen oszillierender Objekte aufgrund ihrer schwachen Wechselwirkung.

Diese Definition bedarf einer Erläuterung der auftretenden Termini:

Die *oszillierenden Objekte* sind hier sogenannte *selbsterregte* oder *selbstoszillierende Oszillatoren*. Isoliert man einen derartigen Oszillator, schwingt er in seinem eigenen, natürlichen Rhythmus weiter. Dieser kann aufrechterhalten werden, da der Oszillator über eine interne Energiequelle verfügt, welche Dissipationsverluste ausgleicht. Es liegt somit ein autonomes, nichtlineares System vor. Eine weitere, wesentliche Eigenschaft des selbsterregten Oszillators ist die Existenz eines Grenzyklus, dessen Form nur durch interne Parameter des Systems bestimmt wird. Stört man die Bewegung des Oszillators, so kehrt er hiernach wieder zu seiner ursprünglichen Oszillation, sprich: auf den Grenzyklus, zurück. In anderen Worten: Der Grenzyklus wirkt als Attraktor des Systems. Die Amplitude ist dabei stabil, sie findet sich nach einer Störung wieder bei ihrem eigentlichen Wert ein. Die Phase hingegen ist frei, das heißt eine Störung der Phase bleibt zeitlich konstant bestehen (siehe Abb.2.1). Der Wert der Phase kann also selbst durch eine schwache Beeinflussung verschoben werden, was eine entscheidende Voraussetzung für Synchronisierbarkeit darstellt.

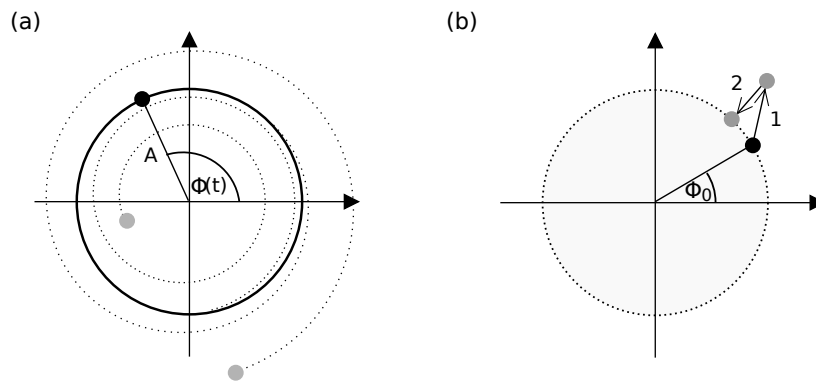


Abbildung 2.1.: Links: Ein selbsterregter Oszillator (Phase $\Phi(t)$, Amplitude A) bewegt sich auf seinem (hier speziell: kreisförmigen) Grenzyklus. Dieser wirkt auf benachbarte Trajektorien (gepunktet) anziehend. Rechts: Im rotierenden Koordinatensystem bleibt der Oszillatortpunkt in Ruhe. Nach einer Störung in Phase und Amplitude (1) kehrt der Oszillator wieder auf den Grenzyklus zurück (2), wobei die Störung der Phase bestehen bleibt.

Das Konzept lässt sich auf angetriebene Rotatoren übertragen. Diese sind zwar per definitionem keine selbsterregten Oszillatoren, haben aber ähnliche Eigenschaften. Insbesondere besitzt der konstant getriebene Rotator einen Grenzyklus. Damit sind auch die Rotatoren in Synchrongeneratoren und -motoren eingeschlossen, welche mechanische Energie in elektrische umwandeln et vice versa. Diese bilden die Knoten in dem für die vorliegende Arbeit verwendeten Netzwerkmodell (siehe Kap. 4).

Der *Rhythmus* der Oszillation wird durch die Frequenz f , der Kehrwert der Periodendauer T , bzw. die Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2.1)$$

wiedergegeben.

Eine *Angleichung der Rhythmen* bedeutet, dass zwei (oder mehrere) ursprünglich mit verschiedenen Frequenzen schwingende Oszillatoren sich unter dem Einfluss der Wechselwirkung auf eine gemeinsame Frequenz einstellen (*frequency entrainment/locking*). Ob es hierzu kommt, hängt von der Kopplungsstärke sowie von der Differenz der Frequenzen der ungekoppelten Oszillatoren $\Delta f = f_1 - f_2$, der sogenannten *Frequenzverstimmung*, ab. Liegt Letztere in einem bestimmte Intervall $[-f_0; f_0]$, verschwindet die Frequenzdifferenz der gekoppelten Oszillatoren (siehe Abb. 2.2).

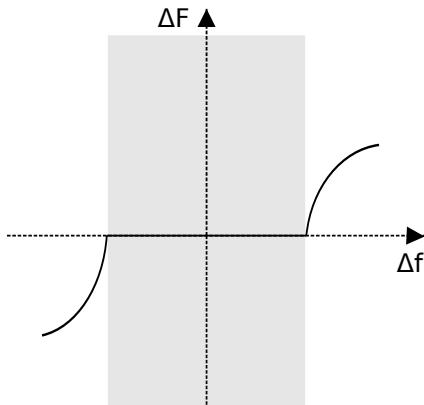


Abbildung 2.2.: Frequenzdifferenz der gekoppelten Oszillatoren $\Delta F = F_1 - F_2$ in Abhängigkeit der Frequenzverstimmung der ungekoppelten Oszillatoren $\Delta f = f_1 - f_2$. Die Synchronisationsregion ist grau unterlegt.

Haben sich die Oszillatoren auf eine gemeinsame Frequenz eingestellt, impliziert das eine feste Phasenbeziehung (*phase locking*). Anders ausgedrückt: Die Oszillatoren bewegen sich *phasenstarr* mit einer konstanten Phasenverschiebung. Diese Phasendifferenz kann nur bei identischen Oszillatoren mit gleichen natürlichen Frequenzen verschwinden. Man unterscheidet zwischen *In-Phase*-Synchronisation, bei der die Phasen nah beieinander liegen, und *Anti-Phase*-Synchronisation, wie Huygens sie bei seinen Pendeluhren beobachtet hat. War das eine Pendel am rechten Umkehrpunkt, so befand sich das zweite, abgesehen von einer kleinen Phasenverschiebung, am linken.

Was ist unter der *schwachen Wechselwirkung* der beteiligten Oszillatoren zu verstehen? Bereits Huygens hat seine Beobachtung der synchronisierenden Pendeluhren richtig interpretiert, indem er das Phänomen auf eine Kopplung der Uhren mittels des nicht vollkommen starren Holzbalkens zurückführte. Eine Messung oder Quantifizierung dieser Kopplung ist nur schwer möglich. Gleiches gilt für viele der eingangs aufgezählten Beispiele für Synchronisierungsprozesse und deren mannigfaltige Kopplungsmechanismen. Das Attribut *schwach* ist recht vage, kann aber wie folgt eingegrenzt werden: Die Wechselwirkung soll einerseits genügend stark sein, sodass die Oszillatoren einander registrieren und beeinflussen, aber sie soll andererseits die Bewegungen nicht zu sehr einschränken und die einzelnen Oszillatoren ihres individuellen Verhaltens nicht komplett berauben. Ein Extrembeispiel für Letzteres wären zwei Pendeluhren, deren Pendel über eine starre Stange verbunden sind.

Synchronisation setzt also ein zerlegbares System individueller, selbsterregter Oszillatoren voraus. Damit grenzt sie sich von anderen Phänomenen, die Rhythmusübereinstimmung beinhalten, wie z. B. Resonanz, ab. Es bleibt zu betonen, dass Synchronisation hier als ein dynamischer Prozess verstanden wird, nicht als der Zustand einer synchronen Bewegung.

Synchronisationsprozesse können in Bezug auf die Anzahl der beteiligten Oszillatoren und die Art der Wechselwirkungen differenziert werden. Die Kopplung kann sowohl wechselseitig sein wie bei Huygens' fast identischen Pendeluhren, als auch unidirektional im Falle einer Synchronisation durch eine äußere Kraft. Die Anzahl der Oszillatoren ist, wie die aufgeführten Beispiele offenbaren, nicht auf zwei beschränkt, sondern kann jede natürliche Zahl N annehmen. Dabei ist die Kopplung der einzelnen Elemente abhängig vom Sachverhalt. So nimmt man etwa beim Glühwürmchenschwarm eine globale Jeder-mit-jedem-Kopplung an, indem man davon ausgeht, dass jedes Insekt die Lichtsignale aller anderen sieht und auf sie reagiert. Im Gegensatz hierzu können die Oszillatoren auch in Gittern oder anderen Strukturen angeordnet sein, welche eine Wechselwirkung nur mit bestimmten anderen, oft den nächsten Nachbarn, erlauben. Das hier vorgestellte Konzept von Synchronisation umfasst außerdem nicht nur Oszillatoren mit rein sinusförmiger Schwingung, sondern auch Oszillatoren komplexer, sogar chaotischer Natur sowie Relaxationsoszillatoren.

2.2. Das Kuramoto-Modell

Die ersten Schritte hin zu einer mathematischen Beschreibung des Phänomens Synchronisation sind Ende der Fünfziger- bzw. in den Sechzigerjahren des vorigen Jahrhunderts von Norbert Wiener und Arthur Winfree gemacht worden. Während sich Wieners auf Fourier-Integralen basierender Ansatz als Sackgasse herausstellte, gelang es Winfree, unter der Annahme einer Gruppe nahezu identischer, an den kollektiven Rhythmus der Gesamtpopulation gekoppelten Grenzyklus-Oszillatoren mit den Gleichungen³

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

ein Modell aufzustellen, welches eine wesentliche Eigenschaft aufweist: Beginnt man mit einer im Vergleich zur Kopplungsstärke großen Streuung in den natürlichen Frequenzen der Oszillatoren, so bewegen sich diese inkohärent jeweils mit ihren eigenen natürlichen Frequenzen. Wird die Streuung sukzessive reduziert, kann man bei einem bestimmten Schwellwert beobachten, wie eine Gruppe von Oszillatoren synchronisiert. Diese Entdeckung motivierte den japanischen Physiker Yoshiki Kuramoto dazu, sich der weiteren Erforschung der kollektiven Synchronisation zu widmen. Er führte Winfree's Überlegungen weiter, indem er zunächst für die Langzeit-Phasendynamik N schwach gekoppelter, nahezu identischer Oszillatoren die universelle Form

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

angab (Γ_{ij} : Wechselwirkungsfunktion).

Im nächsten Schritt ging er von einer rein sinusförmigen Interaktion zwischen den Oszillatoren aus:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.4)$$

Dabei geben die Koeffizienten der Kopplungsmatrix K_{ij} an, ob und wie stark der i -te und j -te Oszillator miteinander in Wechselwirkung stehen. Betrachtet man die Oszillatorpopulation als Netzwerk, in welchem die Oszillatoren die Knoten und die Kopplungen die Ecken darstellen, so entspricht die Kopplungsmatrix einer gewichteten Adjazenzmatrix und gibt als solche die Topologie des Netzwerkes wieder. Die natürlichen Frequenzen ω_i entsprechen den Frequenzen, mit denen sich die Oszillatoren im ungekoppelten Zustand ($K_{ij} = 0 \forall i, j$) bewegen würden.

³ θ_i, ω_i : Phase und natürliche Frequenz des i -ten Oszillators,

$X(\theta_j)$: phasenabhängiger Einfluss, den jeder Oszillator j auf die anderen ausübt,

$Z(\theta_i)$: Sensitivitätsfunktion.

Kuramoto wandte sich zuerst dem *Mean-Field-Fall* zu.⁴ Er konnte hier einen Phasenübergang von einem inkohärenten in (partiell) synchronisierte Zustände nachweisen. Seine Analyse soll im Folgenden nachvollzogen werden.

2.2.1. Der Mean-Field-Fall

In diesem Fall wird von einer gleichgewichteten Jeder-mit-jedem-Kopplung $K_{ij} = \frac{K}{N}$ und einer unendlich großen Oszillatorpopulation ausgegangen. In Analogie zur Statistischen Mechanik kann man hier auch von einem Ensemble von Oszillatoren sprechen. Der Faktor $\frac{1}{N}$ in der Kopplung gewährleistet N -unabhängige Resultate im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$, in dem es bei N -unabhängiger Kopplung zu unendlich großen, auf die Oszillatoren wirkenden Kräften käme.

Die natürlichen Oszillatorfrequenzen ω_i sind gemäß einer unimodalen und um ihren Mittelwert Ω symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte $g(\omega)$ verteilt. Mittels der Transformation in ein mit Ω rotierendes Bezugssystem entspricht, geht die Symmetrie

$$g(\Omega - \omega) = g(\Omega + \omega) \quad (2.5)$$

in

$$g(\omega) = g(-\omega) \quad (2.6)$$

über. Einsetzen von $\theta_i = \tilde{\theta}_i + \Omega t$, $\omega = \tilde{\omega} + \Omega$ und $K_{ij} = \frac{K}{N}$ in (2.4) führt auf

$$\dot{\tilde{\theta}}_i + \Omega = \tilde{\omega} + \Omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j + \Omega t - \theta_i - \Omega t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.7)$$

Die Phasengleichungen lauten somit unter Fortlassung der Tilden

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.8)$$

Im weiteren Verlauf wird der komplexe Ordnungsparameter

$$r e^{i\phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (2.9)$$

eingeführt. Dessen Betrag $0 \leq r(t) \leq 1$ ist ein Maß für die Phasenkohärenz des Systems, $\phi(t)$ die mittlere Phase der Oszillatoren. Der Ordnungsparameter kann als komplexes mittleres Feld interpretiert werden, dessen Amplitude durch r gegeben ist.

⁴Diesem Umstand ist wohl geschuldet, dass in der Literatur der Begriff Kuramoto-Modell sowohl für (2.4) als auch (2.8) verwendet wird.

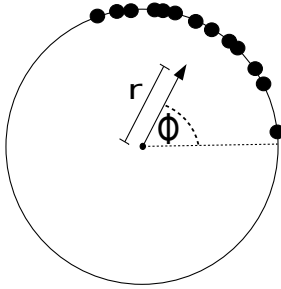


Abbildung 2.3.: Zur Veranschaulichung des Ordnungsparameters. Die Phasen der einzelnen Oszillatoren sind als Punkte auf dem Einheitskreis dargestellt.

Die Bedeutung des Ordnungsparameters veranschauliche man sich graphisch anhand von Abb. 2.3. Die Phasendynamik der Oszillatoren ist hier auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene dargestellt. Der Ordnungsparameter gibt den Schwerpunkt der Population an. Sind die Phasen nahezu gleichförmig auf dem Kreis, d. h. auf dem Intervall $[0, 2\pi)$, verteilt, so liegt der Schwerpunkt in der Nähe des Kreismittelpunktes und $r \approx 0$. Dies entspricht einem inkohärenten Zustand. Bewegen sich die Phasen hingegen kohärent als um die mittlere Phase lokalisierter Pulk, erhält man $r \approx 1$. Multipliziert man die Ordnungsparametergleichung (2.9) mit $e^{-i\theta_i}$ und betrachtet die Imaginärteile

$$r \sin(\phi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.10)$$

so lässt sich (2.8) zu

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\phi - \theta_i) \quad (2.11)$$

umformulieren.

(2.11) macht den Mechanismus der spontanen Synchronisation einsichtig: Die Wechselwirkung der Oszillatoren erfolgt über die Mean-Field-Größen $r(t)$ und $\phi(t)$. Die individuellen Phasen der Oszillatoren sind in der mittleren Phase ϕ zusammengefasst und werden jeweils von dieser angezogen. Die effektive Kopplungsstärke Kr ist proportional zur Kohärenz, was zu einer positiven Rückkopplung führt. Denn mit zunehmender Kohärenz wird die effektive Kopplung erhöht, was wiederum weitere Oszillatoren dazu veranlasst, sich der kohärenten Gruppe anzuschließen.

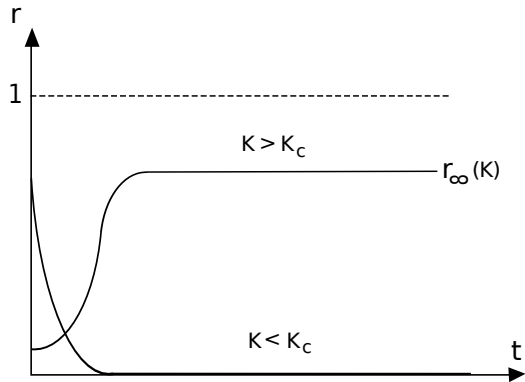


Abbildung 2.4.: Zeitliche Entwicklung der Kohärenz $r(t)$ für Kopplungsstärken K ober- und unterhalb der kritischen Kopplung K_c schematisch.

Abb. 2.4 zeigt, wie sich die Phasenkohärenz $r(t)$ für verschiedene Kopplungsstärken K zeitlich entwickelt. Liegt K unterhalb eines kritischen Wertes K_c , verteilen sich die Phasen unabhängig von den Anfangsbedingungen gleichmäßig über den gesamten Kreis ($r_\infty = 0$).

Für $K > K_c$ nimmt die Kohärenz $r(t)$ mit der Zeit exponentiell zu, bis sie ihren Sättigungswert r_∞ und damit das System einen stationären Zustand erreicht. Dieser scheint global attraktiv und nur vom Parameter K und nicht von den Anfangsbedingungen abhängig zu sein⁵.

Die Abhängigkeit des Sättigungswertes r_∞ vom Kopplungsparameter K ist schematisch in Abb. 2.5 dargestellt. Für $K < K_c$ ist $r_\infty = 0$. Dieser inkohärente Zustand wird bei $K = K_c$ instabil. Das Kohärenzmaß im stationären Zustand nimmt für $K > K_c$ mit wachsender Kopplung zunächst stark zu und nähert sich dann asymptotisch $r_\infty \rightarrow 1$.

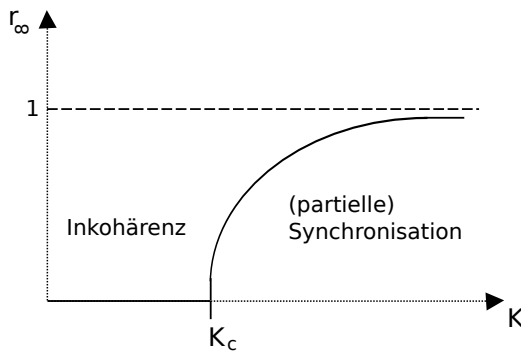


Abbildung 2.5.: Kohärenz r_∞ im stationären Zustand in Abhängigkeit der Kopplungsstärke K schematisch. Bifurkation bei $K = K_c$.

Betrachten wir noch einmal das Langzeitverhalten von Lösungen des KM näher. Im Fall stationärer Zustände kann r als konstant angenommen werden, während die mitt-

⁵Numerische Simulationen legen dies nahe. Die Frage nach der Stabilität von inkohärentem und partiell synchronisierten Zuständen im KM ist allerdings diffizil. Siehe Ende von Kap. 2.2.1.

lere Phase $\phi(t)$ mit der konstanten Frequenz Ω rotiert. Der Übergang in ein ebenfalls mit Ω rotierendes Bezugssystem ermöglicht die Vereinfachung: $\dot{\phi} \equiv 0$.

(2.11) lautet dann:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i). \quad (2.12)$$

Die Oszillatorpopulation kann im stationären Zustand in zwei Gruppen unterteilt werden. Die erste Gruppe ist die der *phasenstarr*en Oszillatoren, welche mit der mittleren Frequenz Ω rotieren, im neuen Bezugssystem also ruhen. Aus $\dot{\theta}_i=0$ folgt:

$$\omega_i = Kr \sin(\theta_i). \quad (2.13)$$

Obige Gleichung definiert implizit die stabilen Fixpunkte mit $|\theta_i^*| \leq \frac{\pi}{2}$ ($\theta_i \in (-\pi; \pi]$, siehe Abb. 2.6), in denen sich die phasenstarreren Oszillatoren im stationären Zustand befinden. Dabei handelt es sich um diejenigen Oszillatoren, deren natürliche Frequenzen nahe des Mittelwertes der zugehörigen Verteilungsfunktion liegen. Genauer: Ob ein Oszillator phasenstarr laufen, d. h. einen Fixpunkt erreichen kann, hängt vom Verhältnis seiner natürlichen Frequenz zum Produkt von Kopplungsstärke und Phasenkohärenz ab. Da $|\sin \theta_i| \leq 1$ ist, muss der Quotient die Ungleichung

$$\frac{|\omega_i|}{Kr} \leq 1 \quad (2.14)$$

erfüllen (siehe Abb. 2.6).

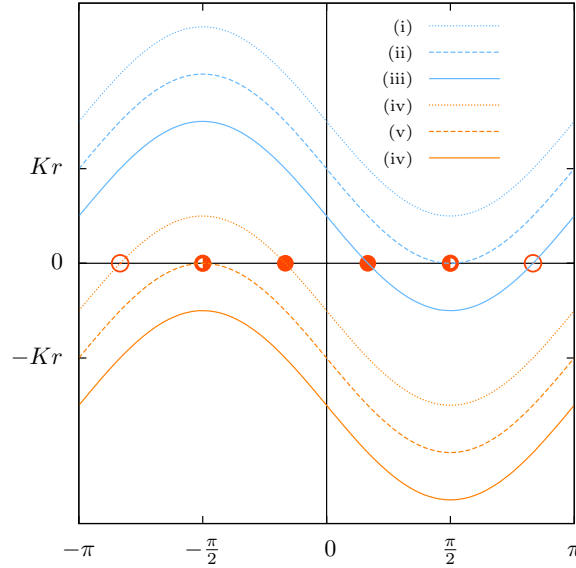


Abbildung 2.6.: $\dot{\theta}(\theta) = \omega - Kr \sin \theta$. Für $\omega \geq 0$: (i) $\omega > Kr$: Es existieren keine Fixpunkte; (ii) $\omega = Kr$: Es gibt einen halb-stabilen Fixpunkt $\theta_{\text{halbst.}}^* = \frac{\pi}{2}$; (iii) $\omega < Kr$: Es gibt einen stabilen Fixpunkt $0 \leq \theta_{\text{stab.}}^* < \frac{\pi}{2}$ und einen instabilen Fixpunkt $\frac{\pi}{2} < \theta_{\text{inst.}}^* \leq \pi$. (Sattel-Knoten-Bifurkation). Für $\omega < 0$: (iv) $|\omega| < Kr$: Es gibt einen stabilen Fixpunkt $-\frac{\pi}{2} < \theta_{\text{stab.}}^* \leq 0$ und ein instabilen Fixpunkt $-\pi \leq \theta_{\text{inst.}}^* < -\frac{\pi}{2}$; (v) $\omega = -Kr$: Es gibt einen halb-stabilen Fixpunkt $\theta_{\text{halbst.}}^* = -\frac{\pi}{2}$; (vi) $|\omega| > Kr$: Es existieren keine Fixpunkte.

2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell

Die zweite Gruppe der Oszillatoren stammt aus den Ausläufern der Verteilung $g(\omega)$, so dass für sie gilt:

$$\frac{|\omega_i|}{Kr} > 1. \quad (2.15)$$

Sie *driften* relativ zu den phasenstarreren Oszillatoren. Um zu gewährleisten, dass das Kohärenzmaß r bei diesen ungleichförmigen Driftbewegungen konstant bleibt, müssen sie der stationären Verteilung

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2} \quad (2.16)$$

genügen.

Ein solcher Zustand, in welchem ein synchronisiertes Cluster und eine Gruppe driftender Oszillatoren koexistieren, heißt *partiell synchronisiert*.

Die weiteren Überlegungen den stationären Zustand betreffend basieren auf der *Selbstkonsistenzbedingung*, d.h. der angenommene konstante Wert des Ordnungsparameters muss mit dem aus (2.9) konsistent sein.

Der Mittelwert der Population⁶ lässt sich als Summe der Anteile von phasenstarreren und driftenden Oszillatoren formulieren:

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{starr}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{drift}}. \quad (2.17)$$

Weil das System so transformiert wurde, dass $\phi=0$ ist, folgt

$$\langle e^{i\theta} \rangle = r e^{i\phi} = r. \quad (2.18)$$

Man betrachte zunächst den Summanden der phasenstarreren Oszillatoren. Die Fixpunkte waren durch (2.13) implizit definiert. Da $g(\omega) = g(-\omega)$ gilt, weist auch die Verteilung der phasenstarreren Oszillatoren eine Symmetrie um $\theta=0$ auf, und damit vereinfacht sich der Beitrag zu

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{starr}} = \langle \cos \theta \rangle_{\text{starr}} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega. \quad (2.19)$$

Dies lässt sich mit der Variablentransformation $\omega \rightarrow \theta$ wie folgt umschreiben:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{starr}} = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (2.20)$$

Der Beitrag der driftenden Oszillatoren

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{drift}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (2.21)$$

⁶hier durch $\langle \cdot \rangle$ kenntlich gemacht

verschwindet aufgrund der Symmetrien $g(\omega) = g(-\omega)$ und $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$. Letztendlich erhält man

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (2.22)$$

Diese Gleichung hat neben der trivialen Lösung, nämlich dem inkohärenten Zustand mit

$$r = 0 \quad \text{und} \quad \rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad (2.23)$$

noch eine weitere, welche einem partiell synchronisierten Zustand entspricht und

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (2.24)$$

erfüllt.

Die kritische Kopplungsstärke K_c ergibt sich für $r \rightarrow 0^+$:

$$1 = K_c g(0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = K_c g(0) \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.25)$$

Sie hängt also einzig vom Maximum $g(0)$ der Verteilung der natürlichen Frequenzen ab.

Um das Skalierungsverhalten in der Nähe der Bifurkation zu ermitteln, wird zunächst $g(Kr \sin \theta)$ im Integranden von (2.24) bis zur zweiten Ordnung in eine Taylorreihe entwickelt:

$$g(Kr \sin \theta) = g(0) + g'(0)(Kr \sin \theta) + \frac{1}{2}g''(0)(Kr \sin \theta)^2 + \dots \quad (2.26)$$

Das lineare Glied verschwindet, da $g(\omega)$ an der Stelle $\omega = 0$ ihr Maximum hat. Einsetzen in (2.24) und Auswertung des Integrals führt mit $K^3 \approx K_c^3$ und unter der Einführung von

$$\mu = \frac{K - K_c}{K_c} \quad (2.27)$$

auf

$$r \approx \sqrt{\frac{16}{\pi K_c^3} \frac{\mu}{-g''(0)}}. \quad (2.28)$$

Sind die natürlichen Frequenzen der Oszillatorpopulation gemäß einer um $\omega=0$ zentrierten Lorentz-Verteilung

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)} \quad (2.29)$$

verteilt, kann man das Integral (2.24) explizit auswerten und erhält für $K > K_c = 2\gamma$:

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}} \quad (2.30)$$

Diese ersten Analyseschritte konnte Kuramoto dank seiner physikalischen Intuition mit verhältnismäßig moderatem mathematischen Aufwand bewerkstelligen. Das sollte nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Modell bezüglich anderer Eigenschaften schwer zu handhaben ist und Physiker und Mathematiker seit Jahrzehnten vor Herausforderungen stellt. Das betrifft zum einen die Stabilitätsanalyse. Der inkohärente Zustand $r=0$, instabil für $K > K_c$, stellte sich für $K < K_c$ wider Erwarten als neutral stabil heraus. An dieser Stelle konnte eine Brücke zur Landau-Dämpfung⁷ geschlagen werden. Der partiell synchronisierte Zustand scheint auf Grundlage numerischer Simulationen stabil, jedoch steht der Beweis noch aus. Die andere Hauptschwierigkeit des Modells betrifft die Unterschiede des Verhaltens zwischen unendlichen und endlichen (wenn auch sehr großen) Oszillatorpopulationen (Fluktuationen etc., siehe dazu Kap. 2.2.3). [Str00, Str01, SM91]

2.2.2. Modifikationen des Modells

Das Grundmodell (2.11) kann man in vielerlei Hinsicht erweitern. [ABPV⁺05] gibt einen Überblick hierüber und verweist auf weiterführende Literatur. Die wichtigsten Modifikationen sollen hier kurz aufgelistet werden:

- Ergänzung eines Trägheitsterms :

$$m\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \Omega_i + Kr \sin(\phi - \theta_i). \quad (2.31)$$

Die Motivation für die Einführung eines Trägheitsterms war u. a. die im Vergleich zu den experimentellen Daten zu schnelle Synchronisation in Schwärmen von Glühwürmchen. Außerdem bedarf es im konventionellen KM (aus Kap. 2.2.1) eines unendlich großen Kopplungsparameters, um vollständige Synchronisation ($r=1$) zu erreichen. Im Gegensatz zu dem Phasenübergang zweiter Ordnung lässt sich in (2.31) im $r(K)$ -Diagramm ein Phasenübergang erster Ordnung mit Hysterese beobachten ([TLO97], siehe auch [ABS00, AS98]).

- verschiedene Kopplungsszenarien, z. B. short-range, Gitteranordnung verschiedener Dimension
- Beeinflussung durch externe Felder
- zeitverzögerte Kopplung:
Zeitverzögerungen treten u. a. in Systemen auf, in denen Signale mit endlicher Geschwindigkeit weitergeleitet werden, also beispielsweise auch bei der Modellierung von Neuronen im Gehirn.
- von einer unimodalen Lorentz-Verteilung abweichende (z. B. multimodale und nicht-symmetrische Verteilungen) $g(\omega)$ der natürlichen Frequenzen (siehe auch [ABS98, Paz05])

⁷Dämpfung von longitudinalen Druckwellen in Plasmen.

- Addition eines stochastischen Rauschterms (gauß'scher oder nicht-gauß'scher Art) (siehe auch [BPH07, AS00, PRK03])

Die genannten Modifikationen treten je nach Anwendungsgebiet bzw. Interessenlage der Forschenden kombiniert auf. Bei dem in Kapitel 4 zu entwickelnden Modell eines Netzes von Synchrongeneratoren und -motoren handelt es sich ebenfalls um eine Erweiterung des KM. In den Kapiteln 4.3 und 4.4 wird dieser Zusammenhang wieder aufgegriffen und näher erläutert.

2.2.3. Numerische Simulation endlicher Oszillatorpopulationen

Um sich mit dem Verhalten des Systems unter verschiedenen Parametereinstellungen und den bei endlichen Populationen auftretenden Abweichungen von den Ergebnissen des Mean-Field-Falls vertraut zu machen, wurden einige numerische Simulationen des Modells (2.11) durchgeführt.

Kern dieser Simulationen ist ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung. Die Anfangsphasen $\theta_1(0), \dots, \theta_N(0)$ sind (wenn nicht anders angegeben) zufällig über das Intervall $[0, 2\pi)$ verteilt (FORTRAN-Systemroutine `random_number`) und die natürlichen Frequenzen gemäß einer Lorentz-Verteilung (2.29) mit $\gamma=0.5$ bestimmt worden (Rejection-Acceptance-Methode, vgl. [PTVF07]). Im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ gilt nach (2.25) und (2.30):

$$K_c = 1 \quad ; \quad r(K) = \sqrt{1 - \frac{1}{K}} \quad \text{für } K \geq K_c . \quad (2.32)$$

Fluktuationen aufgrund endlicher Oszillatorpopulationen

Bevor die Ergebnisse vorgestellt werden, zuerst noch eine Bemerkung zu den auftretenden Fluktuationen, welche durch die endliche Anzahl N der Oszillatoren bedingt sind. Die von Kuramoto bei der Analyse der stationären Zustände für $N \rightarrow \infty$ getroffene Annahme eines konstanten Kohärenzmaßes r kann im endlichen Fall nicht aufrechterhalten werden. Im ungekoppelten Fall $K=0$, d.h. $\dot{\theta}_i = \omega_i \forall i$, für rational unabhängige Frequenzen liegt jede Trajektorie dicht auf dem N -Torus, und r kann jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen. Es gilt also nicht $r \equiv 0$. Im partiell synchronisierten Zustand gibt es für endliches N genau genommen drei Subpopulationen. Neben den phasenstarrten und den driftenden Oszillatoren existiert eine dritte Gruppe, deren Mitglieder aufgrund der fluktuierenden Synchronisationsgrenze $\omega_i = Kr(t)$ (siehe (2.13)) zwischen beiden Zuständen wechselt. Für sehr große Oszillatorpopulationen haben die Fluktuationen des Kohärenzmaßes die Ordnung $O(N^{-\frac{1}{2}})$, ausgenommen der Nahbereich um K_c , in dem die Fluktuationen größer ausfallen können [Str00]. Nach Daido skalieren die Fluktuationen dort wie $[(K_c - K)N]^{-1/2}$ (für $K \rightarrow K_c^-$) bzw. wie $(K - K_c)^{-1/8} N^{-1/2}$ ($K \rightarrow K_c^+$) [ABPV⁺05].

Simulationsergebnisse

Die Abb. 2.7 bis 2.11 zeigen die zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für verschieden große Oszillatorpopulationen ($N=100$, $N=500$, $N=1000$, $N=10000$ sowie $N=100000$) jeweils für fünf Einstellungen des Kopplungsparameters K (vgl. dazu die schematische Darstellung für den Mean-Field-Fall in Abb. 2.4).

Für $K=1.1$; 1.5 und 2.5 sind die Anfangsphasen $\theta_i(0)$ zufällig über das Intervall $[0; 2\pi)$ verteilt, das Kohärenzmaß nimmt ausgehend von einem kleinen Wert $r(0)>0$ (abhängig von den zufällig bestimmten Anfangswerten) exponentiell zu, bis es um einen stationären Wert r_∞ fluktuiert. Für $K=0.5$ und $K=0.9$ sind die Anfangsphasen $\theta_i(0)=0 \forall i$ gesetzt, das Kohärenzmaß fällt somit von $r=1$ ab.

Aus der Abbildung lassen sich die folgenden qualitativen Feststellungen entnehmen: Die Fluktuationen nehmen für festes K mit zunehmender Populationsgröße N ab. Betrachtet man eine feste Anzahl N , so fluktuiert das Kohärenzmaß in der Nähe von $K_{c, MF}=1$ stärker. In diesem Bereich braucht das System darüber hinaus länger, um $r_\infty(K)$ zu erreichen.

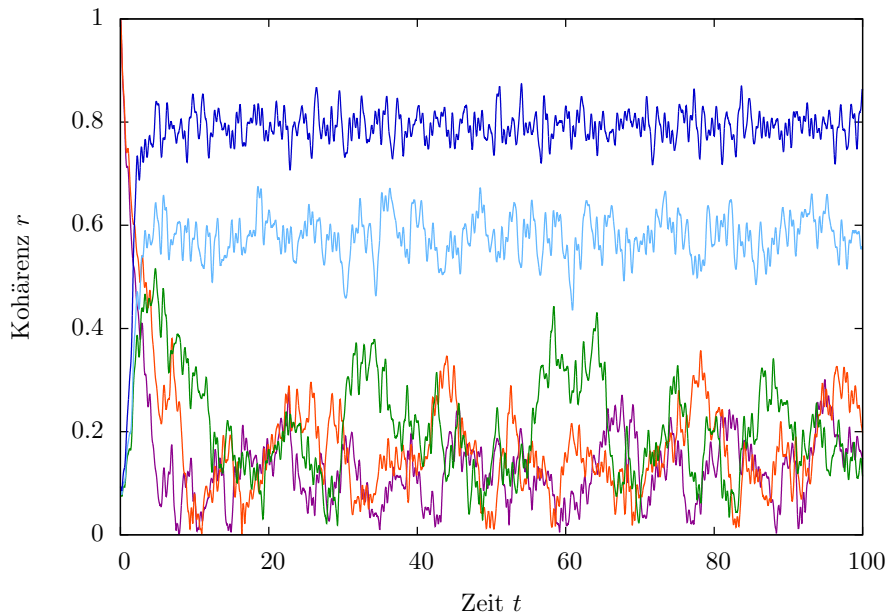


Abbildung 2.7.: Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für $N=100$ Oszillatoren und verschiedene Kopplungsstärken ($K=0.5$; $K=0.9$; $K=1.1$; $K=1.5$; $K=2.5$).

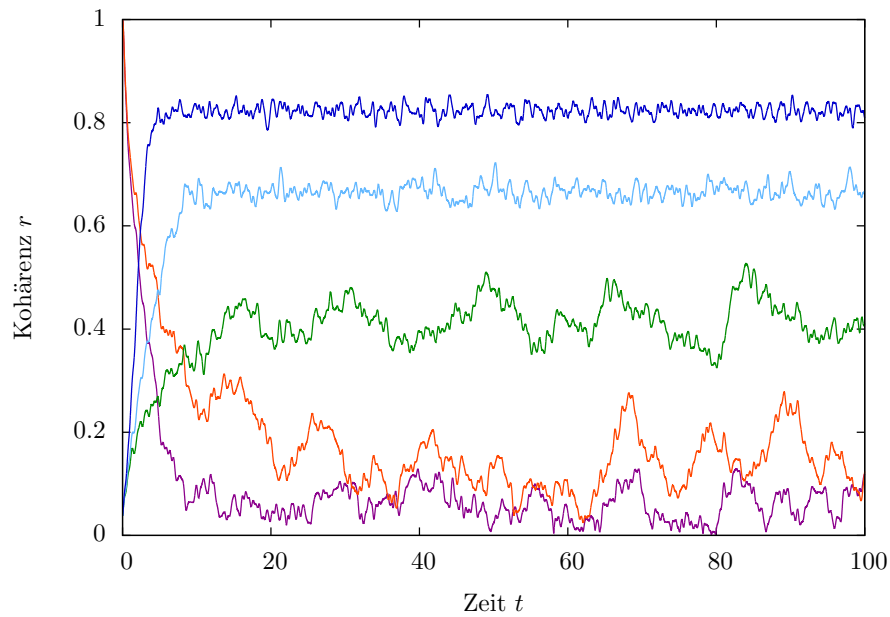


Abbildung 2.8.: Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für $N=500$ Oszillatoren und verschiedene Kopplungsstärken ($K=0.5$; $K=0.9$; $K=1.1$; $K=1.5$; $K=2.5$).

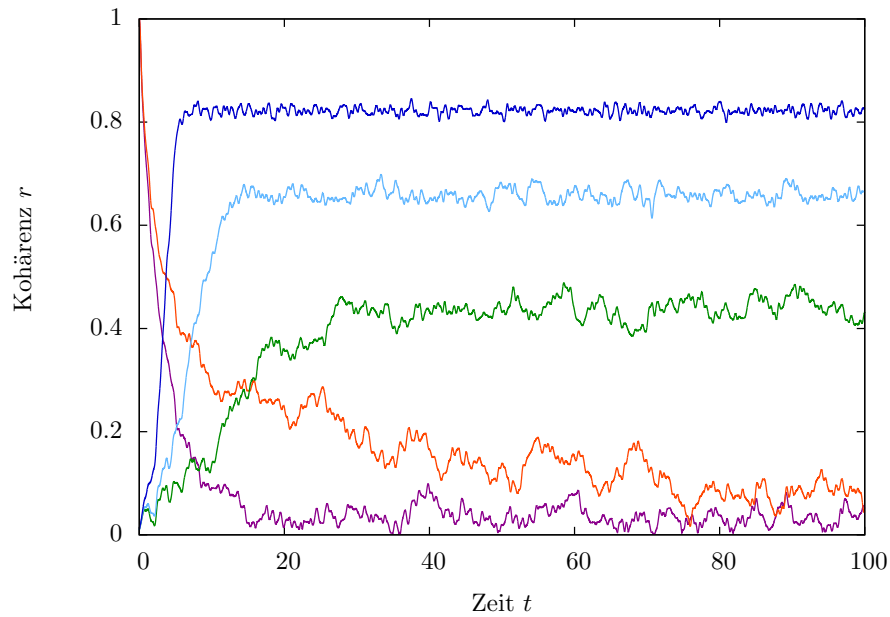


Abbildung 2.9.: Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für $N=1000$ Oszillatoren und verschiedene Kopplungsstärken ($K=0.5$; $K=0.9$; $K=1.1$; $K=1.5$; $K=2.5$).

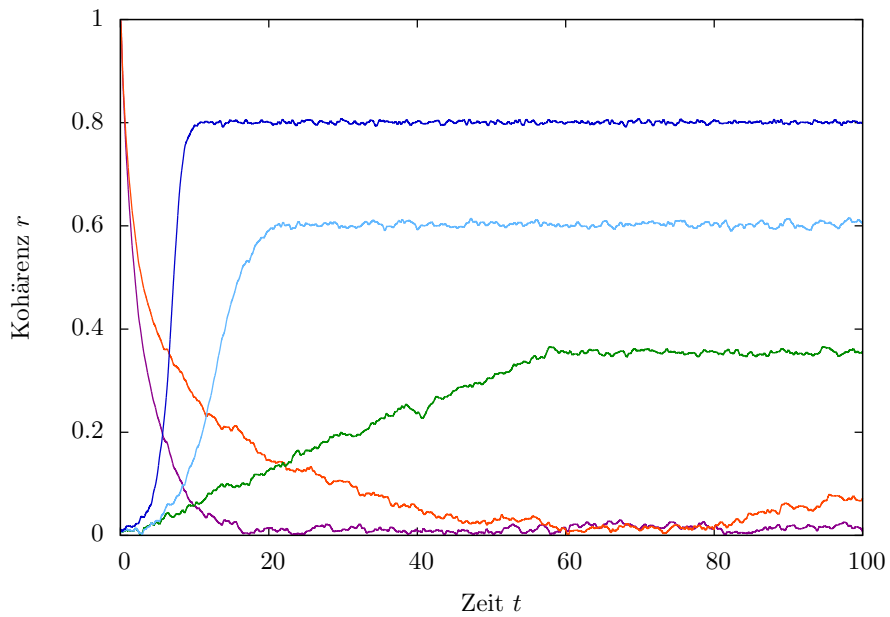


Abbildung 2.10.: Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für $N=10000$ Oszillatoren und verschiedene Kopplungsstärken ($K=0.5$; $K=0.9$; $K=1.1$; $K=1.5$; $K=2.5$).

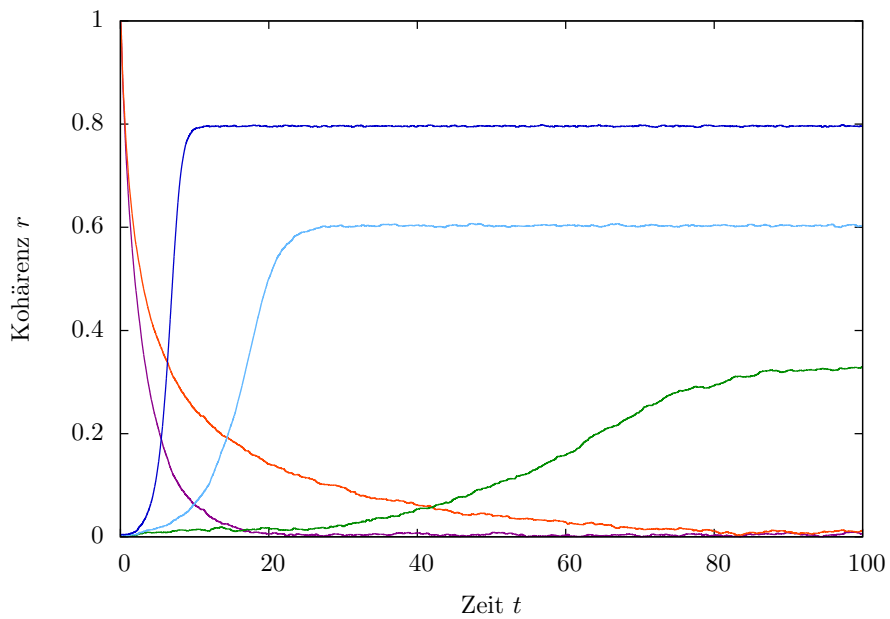


Abbildung 2.11.: Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes r für $N=100000$ Oszillatoren und verschiedene Kopplungsstärken ($K=0.5$; $K=0.9$; $K=1.1$; $K=1.5$; $K=2.5$).

In Abb. 2.12 ist die Kohärenz r_∞ in Abhängigkeit des Kopplungsparameters K für verschiedene große Oszillatorpopulationen $N=1000$, 10000 und 100000 aufgetragen. Das System wurde für jeden K -Wert zunächst solange entwickelt, bis es um r_∞ fluktuierte. Im Anschluss wurde die Simulation noch eine gewisse Zeit fortgeführt und aus den r -Werten dieser Zeitschritte der Mittelwert gebildet. Zum Vergleich ist der Mean-Field-Fall gemäß (2.32) mit $K_{c, MF}=1$ dargestellt.

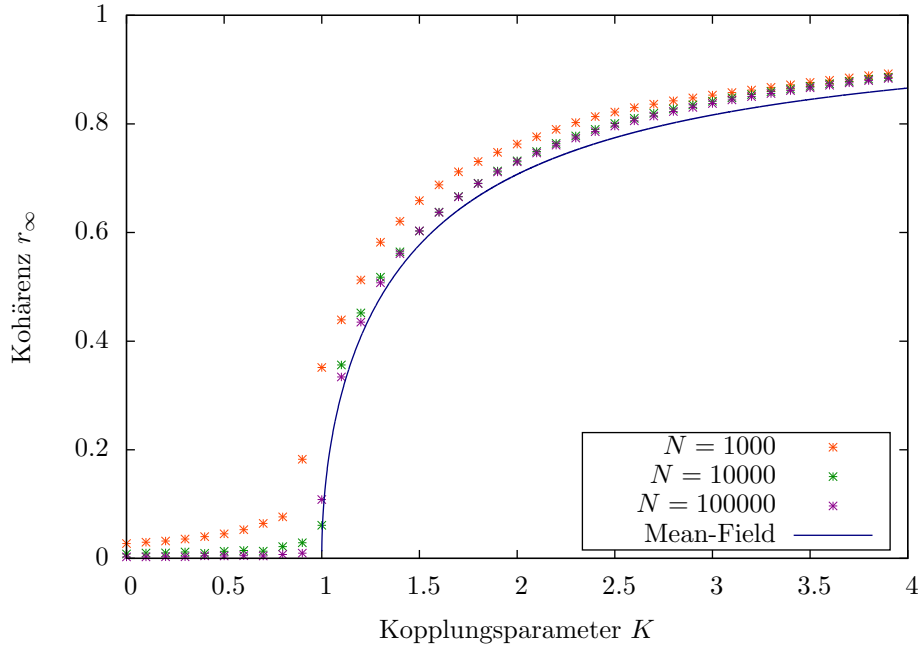


Abbildung 2.12.: Kohärenzmaß r_∞ in Abhängigkeit des Kopplungsparameters K für verschiedene Oszillatorpopulationen. Mean-Field-Fall gemäß (2.32).

Anhand dieser Abbildung läßt sich zunächst erkennen, wie sich für zunehmende Oszillatorenzahlen N der $r_\infty(K)$ -Verlauf dem des Mean-Field-Falles annähert. Darüber hinaus lassen sich Unterschiede zwischen Mean-Field und endlichen Oszillatorpopulation ablesen. Während im Mean-Field-Fall für $K < K_{c, MF}$ $r=0$ gilt, verschwindet das Kohärenzmaß für endliches N – auch für $K=0$ – nicht, nimmt aber mit zunehmender Größe der Population ab. Die scharfe Bifurkation bei $K_{c, MF}$ ist mit geringer werdender Oszillatorenzahl zunehmend „verwischt“. Die Phasenkohärenz wächst zunächst nur langsam an, bis die Steigung bei einer Kopplungsstärke $K < 1$ rasch zunimmt und die Datenpunkte sich an den Mean-Field-Verlauf anschmiegen. Dass die Phasenkohärenz für endliches N – zumindest ab einer gewissen Kopplung – oberhalb der Mean-Field-Kurve liegt, war zu erwarten. Während sich die Phasenkohärenz im Mean-Field-Fall asymptotisch $r=1$ nähert ohne diesen Wert zu erreichen⁸, kommt es im endlichen Fall,

⁸Wie groß die Kopplung K auch immer gewählt wird, es gibt Oszillatoren, deren natürliche Frequenz zu groß ist, als dass für sie ein Fixpunkt nach (2.13) existiert.

2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell

in welchem alle natürlichen Frequenzen in einem kompakten Intervall $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ liegen, ab einer bestimmten Kopplungsstärke zu *vollständiger Synchronisation* $r=1$, d. h. die gesamte Population bewegt sich phasenstarr.⁹

Man beachte, dass die Daten aus Abb. 2.12 für jede Oszillatorenzahl N nur *eine* nach der oben genannten Methode gewonnene Konfiguration von natürlichen Frequenzen ω_i ($i=1, \dots, N$) repräsentieren. Für kleinere Populationen hängt das $r_\infty(K)$ -Verhalten stark von den generierten natürlichen Frequenzen ab. Zur Demonstration ist in Abb. 2.13 die $r_\infty(K)$ -Abhängigkeit für drei verschiedene Konfigurationen der natürlichen Frequenzen bei fester Oszillatorenzahl $N=100$ dargestellt. Man erkennt, dass das Verhalten dieser Systeme vornehmlich in einem Bereich $K \in [0.6; 1.5]$ um $K_{c, \text{MF}}$ signifikant voneinander abweicht. Für größere Oszillatorpopulationen liegen die natürlichen Frequenzen zunehmend dichter auf dem Intervall $[\bar{\omega}_{\min}; \bar{\omega}_{\max}]$ (wobei $\bar{\omega}_{\min}$ und $\bar{\omega}_{\max}$ die Cut-off-Frequenzen der Verteilung $g(\omega)$ in der Simulation sind) und die Unterschiede für verschiedene Konfigurationen werden geringer.

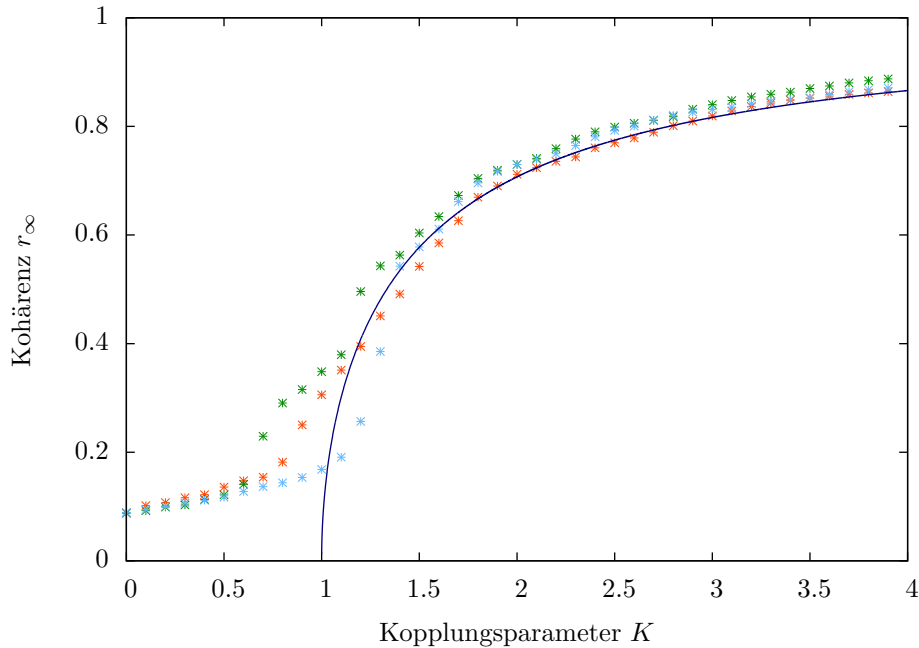


Abbildung 2.13.: Kohärenzmaß r_∞ in Abhängigkeit des Kopplungsparameters K für $N=100$ bei verschiedenen Konfigurationen der natürlichen Frequenzen. Mean-Field-Fall nach (2.32).

Abb. 2.14 (a)-(c) bis veranschaulichen anhand von θ_i - und $\dot{\theta}_i$ -Diagrammen den bei sukzessiver Erhöhung der Kopplung sich vollziehenden Übergang vom inkohärenten Zustand in partiell synchronisierte Zustände wachsender Kohärenz. Die Simulation wurde für eine Gruppe von $N=10000$ Oszillatoren durchgeführt. Die Oszillatoren wur-

⁹Zur kritischen Kopplungsstärke in endlichen Populationen siehe [DB11b].

den nach der Größe ihrer natürlichen Frequenzen ω_i geordnet, das heißt die Oszillatoren, deren natürliche Frequenzen nahe des Zentrums der Verteilung $g(\omega)$ liegen, sind um $i=5000$ lokalisiert. Die Phasen θ_i wurden in das Intervall $[0,2\pi)$ transformiert. Für $K=0, 1.05$ und 1.5 sind jeweils die Phase θ_i und momentane Phasengeschwindigkeit $\dot{\theta}_i$ des i -ten Oszillators aufgetragen. Dabei konnte sich das System wieder zunächst solange entwickeln, bis es um r_∞ fluktuierte.

In Abb. 2.14 (a) ist mit $K=0$ ein ungekoppelter, inkohärenter Zustand dargestellt. Die Phasen sind annähernd gleichmäßig über das Intervall $[0,2\pi)$ verteilt, die Phasengeschwindigkeiten entsprechen den natürlichen Frequenzen, welche gemäß der Lorentz-Verteilungen (2.29) mit $\gamma=0.5$ zugeordnet wurden. Das Kohärenzmaß im abgebildeten Zustand beträgt $r \cong 0.004$.

Für $K=1.05$ (Abb.2.14 (b)) erkennt man, dass sich symmetrisch um $i=5000$ ein Pulk von etwa 3600 phasenstarrten Oszillatoren ($r \cong 0.2737$) herausgebildet hat. Deren Phasen sind gemäß der Fixpunktrelation (2.13) arcussinus-förmig angeordnet. Die mittlere Phase ϕ ist hier und in den vorigen Simulationen im Gegensatz zu Kuramotos Überlegungen zum Mean-Field-Fall im mitrotierenden System nicht zeitlich konstant, sondern bewegt sich gleichförmig. Der Grund hierfür ist die endliche Zahl der Oszillatoren, deren natürliche Frequenzen allesamt zufällig gemäß (2.29) bestimmt wurden und dadurch nicht symmetrisch um $\omega=0$ sind. Die Geschwindigkeit der mittleren Phase verschwindet mit zunehmender Oszillatorenzahl N – und damit einer Annäherung an die Verhältnisse des Mean-Field-Falls – oder bei symmetrischer Konfiguration der natürlichen Frequenzen, beispielsweise indem man die Hälfte der natürlichen Frequenzen mit dem hier verwendeten Verfahren und jeweils eine zweite Frequenz mit entgegengesetztem Vorzeichen wählt. Setzte man zudem die Anfangsphasen $\theta_i(0)=0 \forall i$, anstatt sie zufällig über das Intervall $[0;2\pi)$ zu verteilen, so lägen die phasenstarrten Oszillatoren punktsymmetrisch um $(i=5000, \theta=0)$. Im $\dot{\theta}_i$ -Diagramm zeigt sich das entsprechende Bild: Die Phasengeschwindigkeiten der phasenstarrten Oszillatoren verschwinden im mitrotierenden System.

Abb. 2.14 (c) ist der vorigen qualitativ ähnlich. Durch die stärkere Kopplung $K=1.5$ ist das Kohärenzmaß jedoch höher ($r \cong 0.6037$) bzw. die Gruppe der synchronisierten Oszillatoren ist mit etwa 6900 Mitgliedern größer. Zum Vergleich sind im $\dot{\theta}_i$ -Diagramm die Phasengeschwindigkeiten $\dot{\theta}_i = \omega_i$ des ungekoppelten Falls (a) eingezeichnet.

Da es sich bei den Abbildungen um Momentaufnahmen handelt, welche nicht über mehrere Zeitschritte gemittelt wurden, sind die Phasengeschwindigkeiten der driftenden Oszillatoren für $K=1.05$ und 1.5 mit zunehmender Kopplung mehr und mehr „verschmiert“.

2. Synchronisation und das Kuramoto-Modell

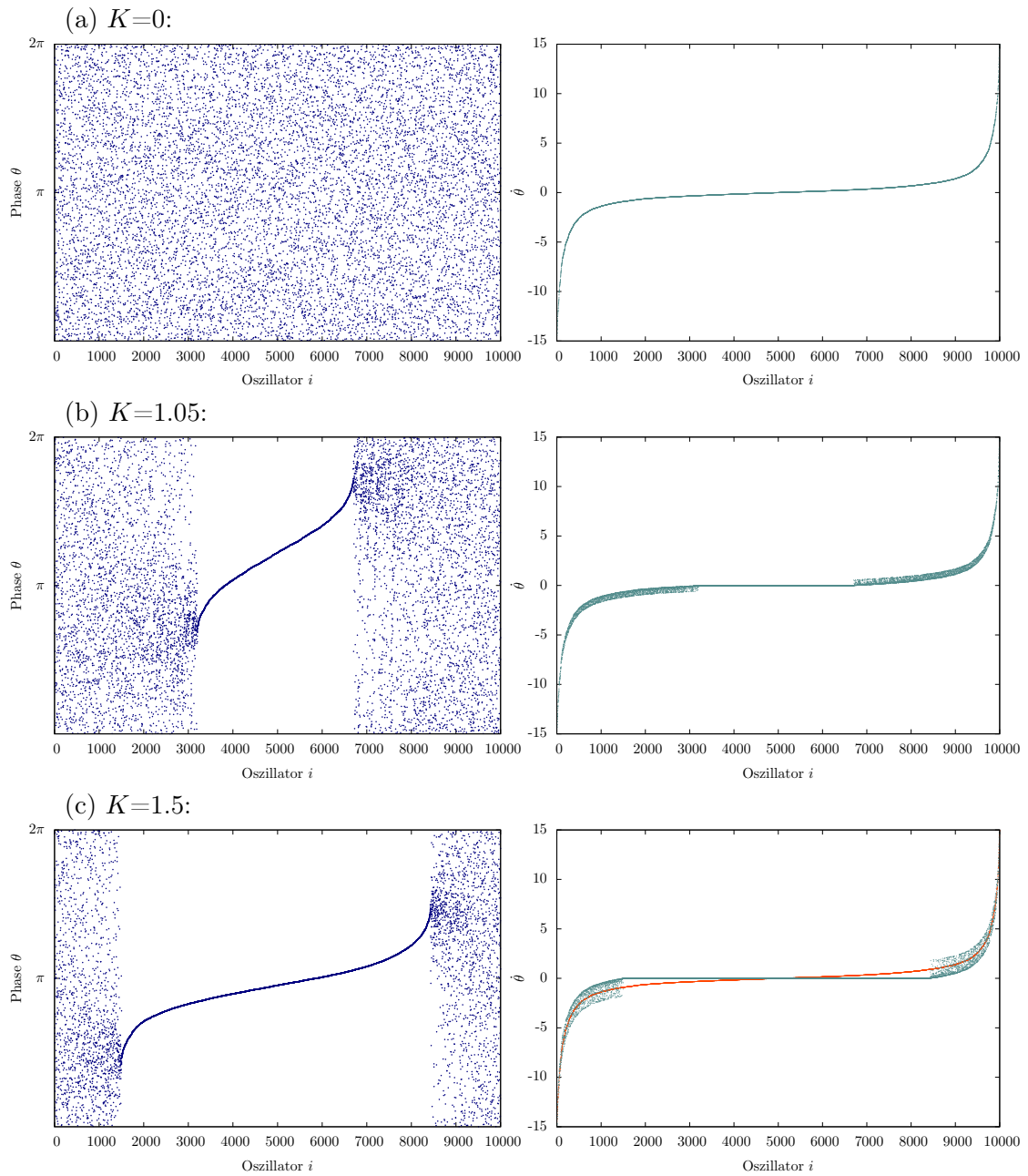


Abbildung 2.14.: Phase θ und instantane Phasengeschwindigkeit $\dot{\theta}$ einer Population von $N=10000$ Oszillatoren für verschiedene Kopplungsstärken K . (c) rechts, rote Linie: Phasengeschwindigkeiten $\dot{\theta}_i = \omega_i$ im ungekoppelten Fall $K=0$.

3. Aufbau und Stabilität von Stromnetzen

3.1. Aufbau

3.1.1. Spannungsebenen und Netzstruktur

In elektrischen Energieversorgungsnetzen gibt es vier Hauptspannungsebenen: die *Nieder-, Mittel- und Hoch-* bzw. *Höchstspannungsebene*. Der Leistungsfluss zwischen diesen Ebenen erfolgt über Umspannstationen (Transformatoren).

Kleine Verbraucher wie z. B. Haushalte beziehen ihren Strom aus der Niederspannungsebene, größere industrielle Abnehmer auch aus dem Mittelspannungs- und Hochspannungsnetz. Konventionelle, zentrale Großkraftwerke speisen Energie auf der Hoch- bzw. Höchstspannungsebene ein. Mit zunehmender Dezentralisierung werden mittelgroße und kleine energieerzeugende Einheiten auf Nieder- und Mittelspannungsebene integriert. Der Leistungstransfer erfolgt damit nicht mehr unidirektional von Ebenen höherer zu Ebenen niedrigerer Spannung, sondern auch in umgekehrter Richtung.

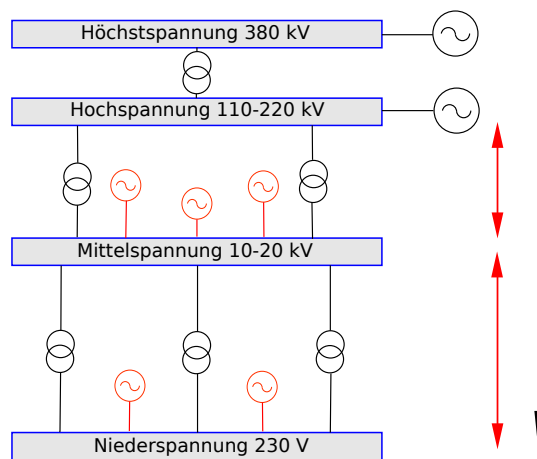


Abbildung 3.1.: Spannungsebenen und Leistungstransfer in zentralen (schwarz) und dezentralisierten (rot) Stromnetzen.

Die einzelnen Spannungsebenen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Struktur. Niederspannungsnetze bestehen bei geringer Lastdichte, z. B. in ländlichen Gebieten, aus

sogenannten *Strahlennetzen*. Darunter versteht man eine Reihe verzweigter, aus einer gemeinsamen Netzstation gespeister Leitungen – in graphentheoretischen Worten: Bäume. Diese können an ihren Endknoten mit (im störungsfreien Fall: offenen) Trennstellen versehen und damit zu sogenannten *Ringleitungen* verbunden werden. Diese Maßnahme garantiert die Weiterversorgung der Verbraucher im Falle des Defekts einer Leitung. Bei höherer Lastdichte im urbanen Raum wird zu *vermaschten Netzen* oder *Maschennetzen* übergegangen. Diese besitzen strukturell viele Maschen, mehrfache Einspeisungen und auch im Normalbetrieb verbundene Trennstellen.

Das Mittelspannungsnetz setzt sich im Wesentlichen aus *verzweigten Ringen* (Kreisen), einer Zwischenform von Strahlen- und Maschennetz, zusammen.

Das Hoch- bzw. Höchstspannungsnetz verbindet hauptsächlich Großkraftwerke mit Umspannstationen sowie die Transportnetzwerke verschiedener Betreiber, auch über Landesgrenzen hinweg. Die Netzstruktur, welche auch Maschen enthalten kann, ist dabei einfach gehalten. Die mehrfache Parallelschaltung von Leitungen sorgt für Sicherheit.[HD05]

3.1.2. Zu den netzwerktheoretischen Eigenschaften

Elektrische Energieversorgungsnetzwerke setzen sich aus Generatoren, Transformatoren, Umspannwerken etc. (Knoten) und Leitungen (Verbindungen) zusammen.

[AB02] verweist auf eine Analyse des Western U. S. Grid, ein Stromnetz der Ordnung $N=4941$ mit mittlerem Knotengrad $\langle k \rangle = 2.67$. Die hierfür berechnete mittlere Weglänge $L=18.7$ liegt nur leicht über der eines vergleichbaren¹ Zufalls-Netzwerks, der Clusterbildungs-Koeffizient $C=0.08$ ist jedoch wesentlich höher. Das Stromnetz weist eine exponentielle Gradverteilungsfunktion auf.

[HBCSB10] macht auf mangelnde Übereinstimmung bei der Charakterisierung der Knotengradverteilungen in vorangegangenen Publikationen aufmerksam, in denen sowohl exponentielle als auch Potenzgesetzen folgende Verteilungsfunktionen festgestellt wurden – und das teilweise in identischen Netzen! Bei dem von ihnen untersuchten US-amerikanischen Eastern-Interconnect-Netz kommen [HBCSB10] zu dem Ergebnis, dass dessen Knotengradverteilung, abgesehen von einem breiteren Ausläufer, zufriedenstellend durch die exponentielle Verteilungsfunktion eines Zufalls-Netzwerks wiedergegeben wird. Die Verteilung weicht dagegen stark von der eines synthetischen Netzwerks mit präferentieller Bindung ab. Zwar weist das Eastern Interconnect einen hohen Clusterbildungs-Koeffizienten auf, doch ist dieser immer noch signifikant kleiner als in einem Kleine-Welt-Netz.

Es zeigt sich, dass die drei Standard-Netzwerkmodelle aus Kapitel 1.2.3 zur Erfassung elektrischer Energieversorgungsnetze nur bedingt geeignet sind. Zum einen werden in ihnen nur die topologischen, nicht aber die geographischen Abstände berücksichtigt, zum anderen werden die elektrodynamischen Grundgleichungen (Kirchhoff, Ohm; vgl. Kap. 4.1.2) außer Acht gelassen. [HBCSB10] schlägt deswegen ein neues Netzwerkmo-

¹ *Vergleichbar* heißt hier: das synthetische Zufallsnetz besitzt gleiche Ordnung und mittlere Knotenzahl.

dell, den *Graphen minimaler Distanz*, vor, welches die Knoten per Zufall in eine planare Ebene einbettet und Verbindungen zwischen diesen unter der Maßgabe minimaler euklidischer Distanz zieht. Dieser Modelltyp stimmt in den Eigenschaften Gradverteilungsfunktion, Clusterbildungs-Koeffizient und mittlere Weglänge mit dem Eastern Interconnect überein.

3.2. Definition und Klassifikation der Stabilität von Stromnetzen

Die folgenden Ausführungen fassen eine Veröffentlichung der „IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions“ aus dem Jahr 2004 [H⁺04] zusammen. Mit dieser sollten verschiedene Unzulänglichkeiten der bis zu diesem Zeitpunkt existierenden Definitionen und Klassifikationen behoben und die Fachsprache vereinheitlicht werden. Der Stabilitätsbegriff wurde präzisiert und weitestgehend in Einklang mit den aus der Mathematik bzw. der Theorie nichtlinearer Systeme bekannten Begrifflichkeiten formuliert, die Klassifikation wurde auf alle beobachteten Instabilitätsszenarios ausgedehnt und eine Brücke zu den Aspekten Zuverlässigkeit und Sicherheit geschlagen.

Ein komplexes elektrisches Netz unterliegt permanent Veränderungen, sodass man genau genommen nie von einem stationären Zustand sprechen kann. Bei den Störungen kann es sich um *kleine Störungen* handeln, wie z.B. Fluktuationen in der Lastabnahme oder der Einspeisung – Letzteres nimmt mit der Integration regenerativer Energien zu –, oder um *große Störungen* wie Kurzschlüsse, Ausfälle von Generatoren, Lasten oder Leitungen. Aus ökonomischen und praktischen Gründen werden Stromnetze nicht stabil gegenüber jeder beliebigen Störung, sondern nur gegenüber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftretenden Störungen entworfen.

Stabilitätsdefinition

Die vorgeschlagene Stabilitätsdefinition lautet (sinngemäß übersetzt):

Unter der Stabilität eines Stromnetzes versteht man dessen Fähigkeit (bei gegebenem Anfangs-Betriebszustand), nach einer physikalischen Störung einen Gleichgewichts-Betriebszustand wiederzuerlangen, wobei die meisten Variablen beschränkt sind und praktisch das gesamte System intakt bleibt.

Ein stabiles Stromnetz kehrt also nach einer Störung entweder wieder in seinen ursprünglichen Betriebszustand (nur möglich, falls sich die Netztopologie nicht geändert hat) oder einen anderen akzeptablen Zustand zurück. Die Stabilität eines Netzes hängt dabei vom Anfangs-Betriebszustand und der Art der Störung ab. Obige Definition ist konform mit der aus der Theorie nichtlinearer Systeme bekannten *asymptotischen Sta-*

Stabilität. Diese beinhaltet *Lyapunov-Stabilität*² und Attraktivität³ des Gleichgewichtszustands [AFHF10].

Klassifikation

Abb. 3.2 gibt einen Überblick der verschiedenen Stabilitätskategorien. Sie zeigt auch, unter welchen Gesichtspunkten die Klassifikation erstellt wurde: zunächst die physikalische Natur der Instabilität, repräsentiert durch die zugehörige Hauptsystemvariable (Rotorwinkel, Spannung, Frequenz), dann die Größe der Störung sowie die Zeitspanne, die erforderlich ist, um die Stabilität des Systems beurteilen zu können.

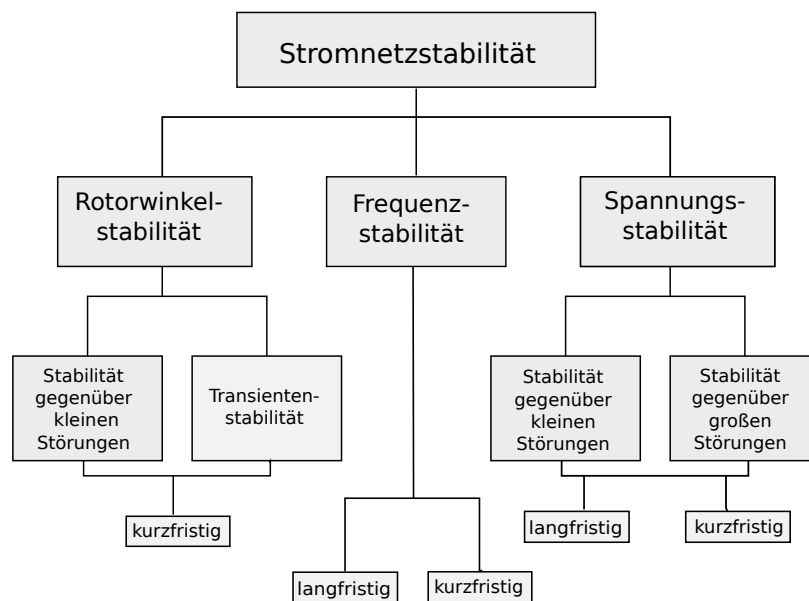


Abbildung 3.2.: Stabilitätskategorien nach [H⁺04].

Die einzelnen Kategorien sollen im Folgenden kurz erläutert werden:

- **Rotorwinkelstabilität**

Hierunter versteht man die Fähigkeit von Synchronmaschinen, nach einer Störung weiter synchron zu operieren. Dies hängt mit der Frage zusammen, ob das Gleichgewicht zwischen mechanischem und elektromagnetischem Drehmoment einer jeden Synchronmaschine erhalten bzw. wiederhergestellt werden kann. Um

²Eine Lösung $\tilde{x}(t)$ ist Lyapunov-stabil, wenn es für jedes ϵ ein $\delta(\epsilon)$ gibt, sodass für alle Lösungen $x(t)$ mit $|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta(\epsilon)$ für alle $t > t_0$ gilt: $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \epsilon$.

³ $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$

diesen Sachverhalt zu verstehen, muss man die mechanische Dynamik von Synchronmaschinen sowie den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Rotorwinkel und Energietransfer kennen. Deswegen sei an dieser Stelle auf Kapitel 4.2.1 und 4.2.2 verwiesen, welche diese Stabilitätskategorie wieder aufgreifen. Rotorwinkelstabilität wird weiter differenziert in Stabilität gegenüber kleinen Störungen und gegenüber großen Störungen, der sogenannten Transientenstabilität. Die zu betrachtenden Zeitfenster betragen in beiden Subkategorien maximal 20 Sekunden. Damit handelt es sich um kurzfristige Phänomene.

- **Spannungsstabilität**

Spannungsstabilität bezieht sich auf die Fähigkeit eines Stromnetzes, nach einer Störung konstante Spannungen an allen Knoten zu bewahren und ist eine Frage der Erhaltung bzw. der Wiederherstellung eines (globalen) Gleichgewichts zwischen Bedarf und Versorgung. Instabilitäten treten in Form eines progressiven Spannungsabfalls oder -anstiegs an mehreren Knoten auf. Neben der Unterscheidung bezüglich der Größe der initiierenden Störung wird weiter nach kurz- und langfristiger Spannungsstabilität differenziert, da die relevanten Zeitfenster von wenigen Sekunden bis hin zur Ordnung zehn Minuten reichen.

- **Frequenzstabilität**

Ein Stromnetz weist Frequenzstabilität auf, wenn es nach einer Störung eine stabile Frequenz aufrechterhalten kann. Dies hängt damit zusammen, ob im System ein Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Bedarf erhalten bzw. wiederhergestellt werden kann.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Subkategorien Rotorwinkel-, Spannungs- und Frequenzstabilität miteinander gekoppelt sind und die jeweiligen Instabilitäten in der Praxis gemeinsam auftreten.

Stabilität, Zuverlässigkeit, Sicherheit

Neben einem stabilen Betrieb fordert man von einem elektrischen Energienetz *Zuverlässigkeit* und *Sicherheit*.

Die Zuverlässigkeit eines Netzes ist eine zeitgemittelte Größe, die angibt, ob das System über einen längeren Zeitraum zufriedenstellend operiert. Um sicher zu sein, muss das System nicht nur stabil sein, sondern auch robust gegenüber Ereignissen, welche nicht als Stabilitätsproblem klassifiziert werden (z. B. Schaden am Equipment). Außerdem wird bei diesem Aspekt nicht nur berücksichtigt, ob das System in einer bestimmten Situation stabil ist, sondern auch, wie gravierend die Konsequenz einer Instabilität einzuschätzen ist.

4. Modell eines Netzes von Synchronmaschinen

In diesem Kapitel soll das im weiteren Verlauf der Arbeit zu untersuchende Modell vorgestellt werden. Dabei sind zuerst die drei Leitfragen zu klären:

- Wie lässt sich ein elektrisches Netzwerk graphentheoretisch repräsentieren?
- Wie erfolgt der Leistungstransport innerhalb des Netzwerks?
- Wie ist die Dynamik der Knoten zu modellieren?

Mit der Beantwortung der ersten Frage wird sich Kapitel 4.1.1 beschäftigen, mit der zweiten Kapitel 4.1.2. Die Netzknoten entsprechen Synchrongeneratoren und -motoren, welche als Prototypen von energieumwandelnden Einheiten in Stromnetzen angesehen werden können. Auf deren Eigenschaften und Dynamik wird in Kapitel 4.2 eingegangen.

4.1. Baustein 1: Netzwerkrepräsentation und Leistungsfluss

4.1.1. Knotenadmittanzmatrix und Netzwerkreduktion

Zuerst wird der Frage nachgegangen, wie Wirk- und Blindleistung innerhalb eines elektrischen Netzwerkes zwischen den Knoten transportiert werden. Die Antwort hierauf gibt ein Teilgebiet der Energietechnik, welches als Leistungsflussanalyse oder Lastflussberechnung bezeichnet wird. Grundlegend hierfür ist die *Knotenadmittanzmatrix*, welche die topologischen Informationen über das Netzwerk beinhaltet.

Die Aufstellung einer solchen Matrix soll am Beispiel eines kleinen elektrischen Schaltkreises nachvollzogen und danach verallgemeinert werden.¹ (vgl. Abb. 4.1)

¹In A.1 sind alle hier und im Folgenden auftretenden Wechselstromgrößen und ihre Zusammenhänge aufgelistet.

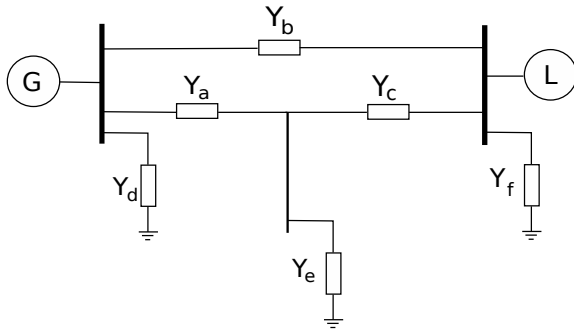


Abbildung 4.1.: Schaltplan: Generator G, Last L, Reihenadmittanzen Y_a , Y_b , Y_c . Erdung über Y_d , Y_e , Y_f .

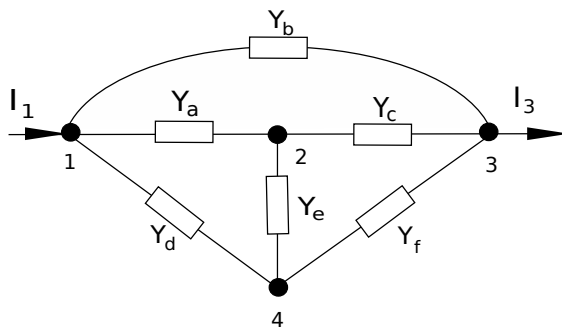


Abbildung 4.2.: Darstellung des obigen Schaltplans als Graph.

Der Schaltplan zeigt einen Generator G, der mit einer Last L über die Reihenadmittanzen Y_a , Y_b , und Y_c verbunden ist. Über Y_d , Y_e , und Y_f ist das System geerdet. Der Schaltplan wurde für die weitere Behandlung als Graph G aufbereitet (siehe Abb. 4.2). Knoten 1 repräsentiert den Generator, Knoten 3 die Last. Knoten 4 ist der Erdknoten und Knoten 2 korrespondiert mit der Schnittstelle. Es liegt somit ein mit den Admittanzen Y_i , $i = a, \dots, f$, gewichteter Graph der Ordnung vier vor. Die zugehörige gewichtete Adjazenzmatrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Y_a & Y_b & Y_d \\ Y_a & 0 & Y_c & Y_e \\ Y_b & Y_c & 0 & Y_f \\ Y_d & Y_e & Y_f & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Mittels der Kirchhoffschen Regel und des Ohmschen Gesetzes lassen sich die Stromsummen I_i ($i=1, \dots, 4$), sprich die Summe der an einem Knoten ein- und ausfließenden Ströme, mit den Knotenspannungen V_i ($i=1, \dots, 4$) in Beziehung setzen. Für die vier Knoten ergeben sich folgende Gleichungen:

$$Y_a(V_1 - V_2) + Y_b(V_1 - V_3) + Y_d(V_1 - V_4) = I_1, \quad (4.2)$$

$$Y_a(V_2 - V_1) + Y_c(V_2 - V_3) + Y_e(V_2 - V_4) = I_2, \quad (4.3)$$

$$Y_b(V_3 - V_1) + Y_c(V_3 - V_2) + Y_f(V_3 - V_4) = I_3, \quad (4.4)$$

$$Y_d(V_4 - V_1) + Y_e(V_4 - V_2) + Y_f(V_4 - V_3) = I_4. \quad (4.5)$$

Fasst man die Knotenströme und -spannungen in Vektoren zusammen:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_4 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

kann man die obigen Knoten-Netzwerk-Gleichungen in der Kurzform

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}(G) \mathbf{V} \quad (4.7)$$

angeben. Dabei ist

$$\mathbf{Y}(G) = \begin{pmatrix} Y_a + Y_b + Y_d & -Y_a & -Y_b & -Y_d \\ -Y_a & Y_a + Y_c + Y_e & -Y_c & -Y_e \\ -Y_b & -Y_c & Y_b + Y_c + Y_f & -Y_f \\ -Y_d & -Y_e & -Y_f & Y_d + Y_e + Y_f \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

die *Knotenadmittanzmatrix* des Graphen. Deren Diagonaleinträge Y_{ii} sind mit der Summe aller zum Knoten i inzidenten Admittanzen identisch, sie werden auch als *Selbstadmittanzen* bezeichnet. Die Nicht-Diagonalelemente Y_{ij} heißen *gegenseitige Admittanzen* und sind gleich dem Negativen der zwischen Knoten i und j geschalteten Admittanz. Bei der Knotenadmittanzmatrix handelt es sich also um die Laplacesche Matrix des zugehörigen Graphen (vgl. Kap 1.1):

$$\mathbf{Y}(G) = \mathbf{D}(G) - \mathbf{A}(G) = \mathbf{L}(G). \quad (4.9)$$

Die Knotenadmittanzmatrix der Beispielschaltung soll nun vereinfacht werden. Allgemein besitzt eine $n \times n$ -Matrix von solcher Struktur höchstens den Rang $(n - 1)$, was eine Gleichung bzw. einen Knoten – zweckmäßigerweise den Erdknoten – überflüssig macht. Außerdem setzt man die Spannung V_4 am Erdknoten gleich Null, indem dieser als Bezugspotenzial für die Knotenspannungen gewählt wird. Im Zuge dessen verschwinden die vierte Spalte und Zeile der Matrix:

$$\mathbf{Y}(G) = \begin{pmatrix} Y_a + Y_b + Y_d & -Y_a & -Y_b \\ -Y_a & Y_a + Y_c + Y_e & -Y_c \\ -Y_b & -Y_c & Y_b + Y_c + Y_f \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Bei den verbliebenen drei Knoten handelt es sich um zwei sogenannte *aktive* Knoten – Generatorknoten 1 und Lastknoten 3 –, an denen ein Strom injiziert bzw. entnommen wird, und um den *passiven* Knoten 2 mit $I_2 = 0$, welcher eliminiert werden kann. Dazu wird die Gleichung

$$I_2 = -Y_a V_1 + (Y_a + Y_c + Y_e) V_2 - Y_c V_3 = 0 \quad (4.11)$$

nach

$$V_2 = \frac{Y_a}{Y_a + Y_c + Y_e} V_1 + \frac{Y_c}{Y_a + Y_c + Y_e} V_3 \quad (4.12)$$

umgestellt und dieser Ausdruck in die Gleichungen für die Knoten 1 und 3 eingesetzt. Schließlich erhält man

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = Y_{\text{red}}(G) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

mit der *reduzierten Admittanzmatrix*

$$Y_{\text{red}}(G) = \begin{pmatrix} Y_a + Y_b + Y_d - \frac{Y_a^2}{Y_a + Y_c + Y_e} & -\frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_c + Y_e} - Y_b \\ -Y_b - \frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_c + Y_e} & -\frac{Y_c^2}{Y_a + Y_c + Y_e} + Y_a + Y_c + Y_f \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Zur Verallgemeinerung gehe man von einem elektrischen Netzwerk der Ordnung M aus, wobei $N < M$ Knoten aktiv seien. Die zugehörigen Knoten-Netzwerkgleichungen lauten:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{M1} & \cdots & Y_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_M \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Die Admittanzmatrix Y ist in einem komplexen Stromnetzwerk normalerweise *spärlich* besetzt, da zwischen den meisten der Knoten keine Verbindung besteht und die zugehörige Adjazenzmatrix somit hauptsächlich Nullen als Einträge besitzt. Darüber hinaus ist die Admittanzmatrix *symmetrisch*, was sich aufgrund ihrer Identität mit der Laplaceschen Matrix direkt einsehen lässt.

Das Netzwerk soll nun mittels Eliminierung der $(M - N)$ passiven Knoten reduziert werden. Der hierbei durchzuführende Prozess heißt *Kron-Reduktion* und wurde im vorigen Beispiel bereits exemplarisch an Knoten 2 vorgestellt. Es handelte sich hierbei eigentlich nur um eine Gauß'sche Elimination.

Dafür gilt allgemein:

Die Einträge der $(M-1) \times (M-1)$ -Matrix Y_{red} , welche aus der Eliminierung des passiven Knotens k ($I_k=0$) resultiert, lauten:

$$Y_{\text{red}}^{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{ik} Y_{kj}}{Y_{kk}} \quad i, j = 1, \dots, M - 1 \quad (i, j \neq k). \quad (4.16)$$

Die Prozedur wird solange wiederholt, bis alle passiven Knoten aus dem Netzwerk verschwunden sind und man bei einer $N \times N$ -Matrix, welche nur die aktiven Knoten berücksichtigt, angelangt ist.

Aus (4.16) folgt: Die Eliminierung des Knotens k hat nur Auswirkungen auf die gegenseitige Admittanz Y_{ij} , wenn die Knoten i und j zu k adjazent waren. Zwischen ihnen wird gegebenenfalls eine neue Verbindung eingeführt, welche die Verbindung über den Knoten k ersetzt. Auch die Selbstadmittanzen aller Nachbarn von k werden modifiziert.²[BV00, MBB08, HD05]

²Weiteres zur Kron-Reduktion von Matrizen und ihren Auswirkungen auf die korrespondierenden Graphen ist in A.4 aufgeführt.

4.1.2. Leistungsfluss

Der Ausgangspunkt zur Berechnung der Wirk- und Blindleistungsflüsse sind die Knoten-Netzwerk-Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

welche die komplexen Knotenspannungen

$$V_j = |V_j|e^{i\delta_j} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (4.18)$$

und -ströme

$$I_j = Y_{jj}V_j + \sum_{k=1, j \neq k}^N Y_{jk}V_k \quad (j = 1, \dots, N) \quad (4.19)$$

verknüpfen.³ Die komplexen Einträge der Admittanzmatrix Y haben die Form

$$Y_{jk} = |Y_{jk}|e^{i\theta_{jk}} = G_{jk} + iB_{jk}, \quad (4.20)$$

mit der Konduktanz G_{kj} und der Suszeptanz B_{ij} . Die Scheinleistung am Knoten j beträgt

$$\begin{aligned} S_j &= V_j I_j^* \\ &= |V_j|^2 |Y_{jj}| e^{-i\theta_{jj}} + |V_j| \sum_{k=1, j \neq k}^N |V_k| |Y_{jk}| e^{i(\delta_j - \delta_k - \theta_{jk})}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Daraus folgt für die Wirkleistung

$$P_j = \operatorname{Re}(S_j) = |V_j|^2 |Y_{jj}| \cos(\theta_{jj}) + \sum_{k=1, j \neq k}^N |Y_{jk}| |V_j| |V_k| \cos(\delta_j - \delta_k - \theta_{jk}). \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mithilfe von

$$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk} = |Y_{jk}| \cos(\theta_{jk}) + i|Y_{jk}| \sin(\theta_{jk}) \quad (4.23)$$

und dem Additionstheorem

$$\cos(\delta_j - \delta_k - \theta_{jk}) = \cos(\delta_j - \delta_k) \cos \theta_{jk} + \sin(\delta_j - \delta_k) \sin \theta_{jk} \quad (4.24)$$

zu

$$P_j = |V_j|^2 G_{jj} + \sum_{k=1, j \neq k}^N |V_j| |V_k| [G_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k) + B_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k)] \quad (4.25)$$

³Hierbei wird nur eine Phase des gegebenenfalls mehrphasigen Wechselstroms (i. A. Drei-Phasen-Wechselstrom, siehe Kap. 4.2.1) betrachtet.

umformen. Für die Blindleistung erhält man analog

$$Q_j = \text{Im}(S_j) = -|V_j|^2 |Y_{jj}| \sin(\theta_{jj}) + \sum_{k=1, j \neq k}^N |V_j| |V_k| \sin(\delta_j - \delta_k - \theta_{jk}) \quad (4.26)$$

bzw.

$$Q_j = -|V_j|^2 B_{jj} + \sum_{k=1, j \neq k}^N |V_j| |V_k| [G_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k) - B_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k)]. \quad (4.27)$$

Die zwischen zwei Knoten transferierten Wirk- und Blindleistungen hängen also u. a. von deren Phasenwinkeldifferenz ab.[MBB08, And08]

4.2. Baustein 2: Die Knotendynamik

Als Knotenelemente des Netzwerks werden Synchronmaschinen gewählt. Diese können sowohl elektrische Leistung einspeisen (Generatorbetrieb) als auch aufnehmen (Motorbetrieb).

Die mechanische Dynamik einer Synchronmaschine wird durch die *Swing-Gleichung* beschrieben, deren Herleitung Gegenstand des Kapitels 4.2.2 sein wird. Vorab erfolgt eine kurze Einführung in Aufbau, Funktionsweise und Charakteristika von Synchronmaschinen.

4.2.1. Die Synchronmaschine: Funktionsweise und Eigenschaften

Aufbau und Funktionsweise

Zunächst soll ein grober Überblick über den Aufbau und die Funktionsweise einer Synchronmaschine gegeben werden. Einige Aspekte werden im Verlauf der Arbeit wieder aufgegriffen und spezifiziert werden.

Abb. 4.3 zeigt schematisch den Aufbau eines Synchrongenerators⁴. Ein solcher besteht aus zwei Hauptelementen: dem *Feld* und dem *Anker*. Aus technischen Gründen befinden sich die Feldwindungen auf dem *Rotor* und die um 120° versetzten Ankerwindungen aa', bb' und cc' auf dem *Stator*. Die Feldspule wird von einem Gleichstrom durchflossen und erzeugt somit ein magnetisches Feld mit Nordpol N und Südpol S. Der Rotor wird – gegebenenfalls über ein zwischengeschaltetes Getriebe – von einer Turbine angetrieben. Das rotierende Magnetfeld induziert in den Ankerwindungen eine dreiphasige Wechselspannung, deren Frequenz – genauso wie die Frequenz des Stromes,

⁴Dabei handelt es sich aufgrund der Rotorform um eine Schenkelpolmaschine. Diese werden bei niedrigen Drehzahlen, z. B. bei Wasserturbinen, eingesetzt. In dieser Arbeit werden allerdings die häufiger vorkommenden Vollpolmaschinen betrachtet, welche bei höheren Drehzahlen zum Einsatz kommen und einen zylinderförmigen Rotor besitzen. Prinzipiell ist der Aufbau und die Funktionsweise gleich. Die beschreibenden Gleichungen unterscheiden sich jedoch leicht voneinander.

4. Modell eines Netzes von Synchronmaschinen

welcher bei Anlegen einer Last durch die Windungen fließt – von der Winkelgeschwindigkeit des Rotors abhängt, genauer gesagt: synchron zu ihr ist. Aus dieser Tatsache leitet sich die Benennung einer solchen Maschine als *Synchrongenerator* ab.

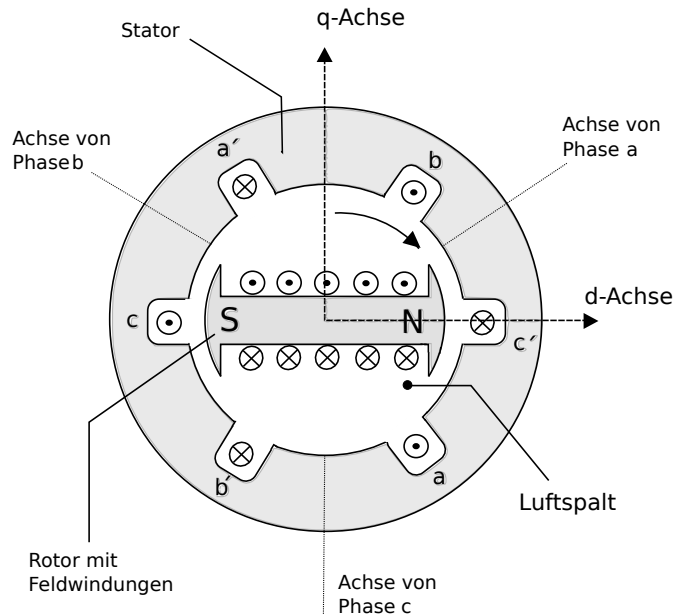


Abbildung 4.3.: Aufbau eines Synchrongenerators. Rotorfeste Achsen d (zentriert im magnetischen Nordpol) und q.

Die Wechselströme in den Ankerwindungen erzeugen entsprechend ihrer räumlichen Anordnung ihrerseits ein rotierendes Magnetfeld. Die Frequenz dieses Feldes ist im stationären Zustand identisch mit der des Rotors. Stator- und Rotorfeld wechselwirken miteinander. Zwischen beiden besteht eine Winkeldifferenz, aber sie haben die Tendenz, sich gleich auszurichten. Das daraus resultierende *elektromagnetische Drehmoment* wirkt der Rotation des Rotors entgegen. Um sie aufrechtzuerhalten, muss das *mechanische Drehmoment* gegenarbeiten. Soll das elektromagnetische Drehmoment bzw. die abgegebene elektrische Leistung erhöht oder verringert werden, muss man das mechanische Drehmoment bzw. die zugeführte mechanische Leistung vergrößern oder verkleinern. Dadurch verändert sich die Position des Rotors in Bezug auf das rotierende Statorfeld und damit auch das elektromagnetische Drehmoment und die abgegebene Leistung. Der Winkelabstand zwischen dem Rotor und dem Statorfeld wird auch als *interner Winkel* bezeichnet.[KBL94]

Die Ausführungen für den Synchrongenerator können auf den Synchronmotor übertragen werden, indem elektromagnetisches und mechanisches Drehmoment ihre Rollen

tauschen.

Rotorwinkel-Leistungs-Charakteristik

Von fundamentaler Bedeutung für die Stabilität von elektrischen Energienetzen ist der nichtlineare Zusammenhang zwischen Winkeldifferenz und (Wirk-)Leistungsabgabe. Man betrachte ein Zwei-Maschinen-System, bestehend aus einem Generator und einem Motor, welche über eine Reaktanz X_T miteinander verbunden sind (Abb. 4.4(a)). X_T setzt sich additiv aus der Generatorreaktanz X_G , der Motorreaktanz X_M und der Leiterreaktanz X_L zusammen (Abb. 4.4(b)):

$$X_T = X_G + X_L + X_M. \quad (4.28)$$

Für die vom Generator an den Motor abgegebene Leistung gilt:

$$P(\delta) = P_{\max} \sin \delta. \quad (4.29)$$

Der Winkel δ besitzt drei Anteile:

$$\delta = \delta_G + \delta_L + \delta_M, \quad (4.30)$$

nämlich den internen Winkel des Generators δ_G (der Winkel, um welchen der Rotor des Generators dessen Statorfeld vorausseilt), den internen Winkel des Motors δ_M (der Winkel, um welchen der Rotor des Motors dem Statorfeld hinterherläuft) sowie die Winkeldifferenz δ_L der Anschlussspannungen von Motor und Generator (die Winkeldifferenz, um die das Statorfeld des Generators dem des Motors vorwegläuft) (siehe Abb. 4.4(c)). Die maximal übertragbare Leistung hängt von den internen Spannungen E_G und E_M und von der Reaktanz X_T ab:

$$P_{\max} = \frac{E_G E_M}{X_T} \sin \delta. \quad (4.31)$$

Die Leistungs-Winkel-Charakteristik ist in Abb. 4.4(d) dargestellt. Für $\delta=0^\circ$ wird keine Leistung übertragen. Bei Erhöhung des Winkels nimmt die transferierte Leistung zu und erreicht bei $\delta=90^\circ$ ihr Maximum. Im Bereich $\delta > 90^\circ$ geht eine Erhöhung des Winkels mit einer Abnahme der übertragenen Energie einher.

4. Modell eines Netzes von Synchronmaschinen

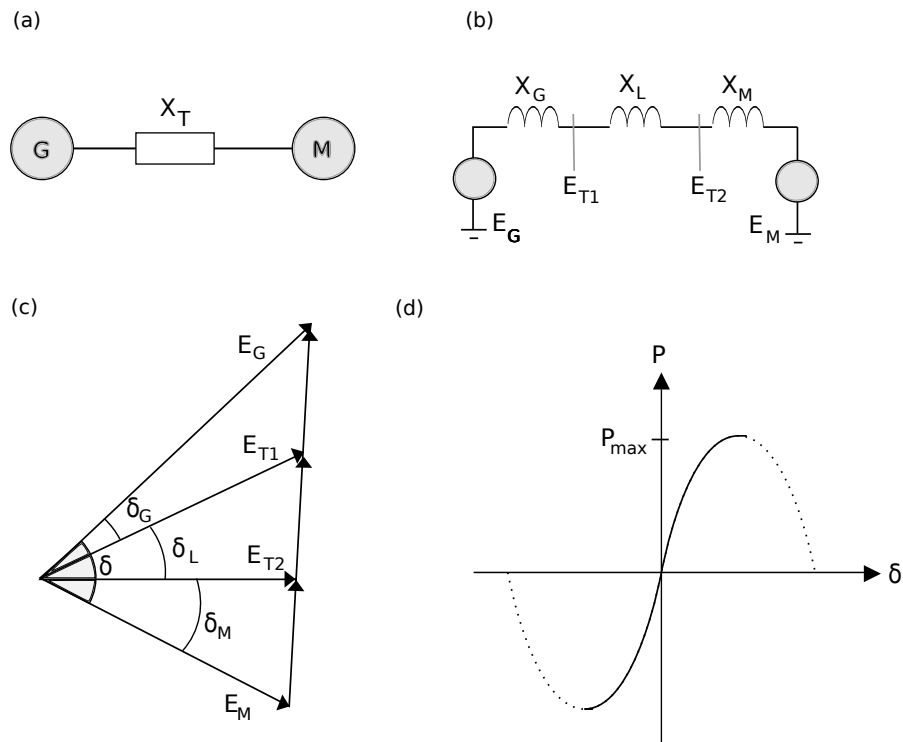


Abbildung 4.4.: Zwei-Maschinen-System: (a) Generator G und Maschine M verbunden über eine Reaktanz X_T ; (b) Idealisiertes Modell; (c) Phasordiagramm der auftretenden Spannungen; (d) Charakteristik der Leistungsübertragung im $P(\delta)$ -Diagramm. Der ungestrichelte Verlauf markiert den Bereich stabiler Operation. Vgl. [KBL94].

Wird der Generator durch vermehrte Zufuhr mechanischer Energie beschleunigt, erhöht dies das mechanische Drehmoment und den internen Winkel. Im stabilen Bereich $0 < \delta < 90^\circ$ wird gemäß (4.29) mehr elektrische Leistung an den Motor abgegeben, die Rotorgeschwindigkeit des Generators reduziert sich wieder, ebenso die Winkeldifferenz. Gerät das System in den instabilen Bereich $\delta > 90^\circ$, ist dies nicht mehr der Fall. [KBL94, H⁺04]

4.2.2. Die Swing-Gleichung

Die Swing-Gleichung gibt die Rotorwinkel-Dynamik einer Synchronmaschine wieder. Zu ihrer Herleitung betrachte man einen Synchrongenerator, der die mechanische Rotationsenergie einer Turbine in elektrische Energie umwandelt (siehe Abb. 4.5).⁵

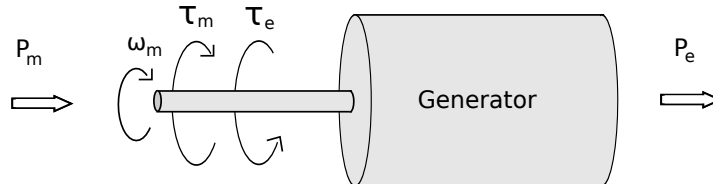


Abbildung 4.5.: Ein Synchrongenerator wandelt mechanische Leistung P_m in elektrische Leistung P_e um.

Das Newtonsche Gesetz hierfür lautet:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + D_d \omega_m = \tau_{\text{net}} . \quad (4.32)$$

Dabei ist ω_m die Winkelgeschwindigkeit der Rotorachse. J kennzeichnet das Gesamtträgheitsmoment der Turbine und des Generator-Rotors. Der Dämpfungsterm $D_d \omega_m$ bezieht Reibungs- und Strömungsverluste ein. Das Netto-Drehmoment

$$\tau_{\text{net}} = \tau_t - \tau_e \quad (4.33)$$

ergibt sich aus der Differenz des Drehmoments τ_t , welches von der Turbine produziert wird, und des entgegengerichteten elektromagnetischen Drehmoments τ_e .

Im stationären Zustand läuft der Rotor mit der Synchron-Winkelgeschwindigkeit ω_{sm} , und das Turbinendrehmoment ist gleich der Summe aus elektromagnetischem und Dämpfungsdrehmoment:

$$\tau_t = \tau_e + D_d \omega_{\text{sm}} . \quad (4.34)$$

Die Differenz aus dem Turbinendrehmoment und den Dämpfungsverlusten bei Synchron-Winkelgeschwindigkeit ist das Nettodrehmoment der mechanischen Achse:

$$\tau_m = \tau_t - D_d \omega_{\text{sm}} . \quad (4.35)$$

Im stationären Zustand befindet es sich im Gleichgewicht mit dem elektromagnetischen Drehmoment:

$$\tau_m = \tau_e . \quad (4.36)$$

⁵Die Herleitung orientiert sich in Aufbau und Nomenklatur an [MBB08], sie findet sich in ähnlicher Form in [KBL94, BV00, AF03, And08].

Wird es in diesem Zustand beispielsweise durch einen Anstieg der eingespeisten mechanischen Energie, das heißt $\tau_m > \tau_e$, gestört, führt dies zu einer Beschleunigung des Rotors. Im umgekehrten Fall $\tau_m < \tau_e$ verlangsamt er sich.

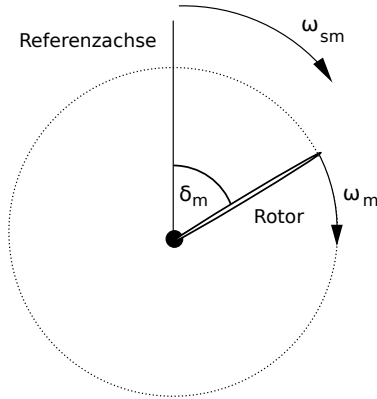


Abbildung 4.6.: Mechanischer Winkel δ_m als Differenz zwischen mit ω_m rotierender Rotorachse und mit ω_{sm} rotierender Referenzachse.

Die Rotorposition wird in Bezug auf ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, der Synchrongeschwindigkeit ω_{sm} , bewegtes Bezugssystem angegeben (siehe Abb. 4.6). Es gilt:

$$\theta_m(t) = \omega_{sm}t + \delta_m(t). \quad (4.37)$$

Zeitliche Ableitung liefert die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_m = \omega_{sm} + \frac{d\delta_m}{dt}, \quad (4.38)$$

wobei $\frac{d\delta_m}{dt}$ die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von der Synchron-Winkelgeschwindigkeit ω_{sm} darstellt. Man setzt dies nun in das (4.32) ein und erhält:

$$J \frac{d^2\delta_m}{dt^2} + D_d \frac{d\delta_m}{dt} = \tau_m - \tau_e. \quad (4.39)$$

Weiter möchte man die Drehmomente durch Leistungen ersetzen. Zu diesem Zweck wird (4.39) mit ω_{sm} multipliziert. Berücksichtigt man, dass Leistung das Produkt von Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit ist, also für die mechanische Leistung

$$P_m = \tau_m \omega_m \quad (4.40)$$

sowie für die elektrische

$$P_e = \tau_e \omega_m \quad (4.41)$$

gilt, ergibt sich

$$J \omega_{sm} \frac{d^2\delta_m}{dt^2} + \omega_{sm} D_d \frac{d\delta_m}{dt} = \frac{\omega_{sm}}{\omega_m} P_m - \frac{\omega_{sm}}{\omega_m} P_e. \quad (4.42)$$

Da die Winkelgeschwindigkeit ω_m während einer Störung gewöhnlich nicht stark von der Synchrongeschwindigkeit ω_{sm} abweicht⁶, d. h. $\omega_m \approx \omega_{sm}$, kann man die Gleichung weiter zu

$$M_m \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} + D_m \frac{d\delta_m}{dt} = P_m - P_e \quad (4.43)$$

umschreiben. Dabei entspricht der Dämpfungskoeffizient

$$D_m = \omega_{sm} D_d \quad (4.44)$$

dem Dämpfungs-Drehmoment und

$$M_m = J \omega_{sm} \quad (4.45)$$

dem Drehimpuls bei Synchron-Winkelgeschwindigkeit.

Der mechanische Rotorwinkel δ_m und der elektrische (Phasen-)Winkel $\delta_e =: \delta$ der induzierten Spannung sind über die Polzahl⁷ p des Generators miteinander verknüpft:

$$\delta = \frac{\delta_m}{p/2}. \quad (4.46)$$

Im Falle eines zweipoligen Generators gilt die Identität:

$$\delta = \delta_m. \quad (4.47)$$

4.3. Zwischenfazit: Das klassische Modell

Kombiniert man die Resultate (4.25) und (4.43) der vorangegangenen Abschnitte unter der Annahme eines verlustfreien Netzes (d.h. $G_{ij}=0 \forall i, j$), ergibt sich das folgende Modell:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{m,i} - \sum_{j=1}^N P_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \quad (i = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (4.48)$$

wobei $E_i > 0$ die Spannungsamplitude des i -ten Generators ist und

$$P_{ij} = E_i E_j B_{ij} > 0 \quad (4.49)$$

⁶Dieser Umstand wird in [AF03] anhand des folgenden Rechenbeispiels verdeutlicht: Für eine Netzfrequenz von $\omega_{sm}=60 \text{ Hz} \approx 377\text{s}^{-1}$ würde eine Abweichung von einem Prozent, also $3,77^{-1}$, in einer Sekunde den Rotorwinkel um $3,77 > \pi$ ändern, was mit Sicherheit mit einem Synchronisationsverlust einherginge.

⁷Anzahl der Pole des Rotors. Im Beispiel aus Abb. 4.3 ist $p=2$ (ein Nord- und Südpol). p kann jedoch je nach Bautyp auch größer sein.

die maximale, zwischen den Generatoren i und j transferierte Leistung. Lässt man die Annahme der Verlustfreiheit beiseite, so enthält die Summe in (4.48) gemäß (4.25) noch einen Cosinus-Term, welcher auch als Phasenverschiebung ϕ_{ij} im Argument der Sinus-Funktion ($\delta_i - \delta_j \rightarrow \delta_i - \delta_j + \phi_{ij}$) ausgedrückt werden kann.

(4.48) entspricht einer modifizierten Form des Kuramoto-Modells (vgl. Kap. 2.2.2), welches um einen Trägheitsterm erweitert ist. Die mechanische Leistung $P_{m,i}$ korrespondiert mit der natürlichen Frequenz ω_i (bzw. der Summe aus natürlicher Frequenz und einem eventuellen Rausch-Term $\xi_i(t)$). Die Oszillatoren bzw. Rotatoren sind nicht identisch, sie können sich bezüglich ihres Trägheitsmomentes und ihrer Dämpfung unterscheiden.

(4.48) wird dem sogenannten *klassischen Modell* zugeordnet. Dieser Begriff umfasst jedoch nicht nur die obigen Bewegungsgleichungen, sondern impliziert einige weitere Annahmen, welche die Gültigkeit des Modells auf einen kleineren Zeitbereich nach der Störung (in der Größenordnung von 1s oder geringer, daher der Terminus „*first swing stability*“) limitieren bzw. aus dieser Begrenzung folgen.

Neben der Vernachlässigung jeglichen Kontroll-Equipments und oft auch des Dämpfungsterms geht man davon aus, dass die mechanische Leistung im betrachteten Zeitbereich konstant bleibt. Bei einer Ausdehnung auf längere Zeitintervalle ist diese Annahme, insbesondere für fluktuierende Energiequellen wie z. B. Windkraftanlagen, nicht mehr gültig. Die Lasten im Netz werden mittels konstanter Impedanzen modelliert und als passive Knoten eliminiert. In der Realität können Lasten allerdings ein hiervon abweichendes, eigenes dynamisches Verhalten an den Tag legen. Es bietet sich hier an, sie als *Synchronmotoren* zu modellieren, welche eine elektrische Leistung aufnehmen ($P_e > 0$) und mechanische Leistung abgeben ($P_m < 0$). Infolgedessen würden bimodale Verteilungen der mechanischen Leistung von Interesse sein.

Darüber hinaus nimmt man im klassischen Modell konstante Spannungsamplituden E_i an („*constant-voltage-behind-transient-reactance*“). [KBL94, MBB08, AF03, DB10b]

In diesem Fall wird also die Dynamik der Spannungen ausgeklammert und das Wechselspiel Rotorwinkelstabilität-Spannungsstabilität (siehe Kap. 3.2) unberücksichtigt gelassen. Um diesen Effekt einzubeziehen und den Gültigkeitsbereich des Modells auf ein längeres Zeitintervall auszudehnen, muss (4.48) um dynamische Gleichungen für die Spannungsamplituden erweitert werden.

4.4. Erweiterung: Spannungsdynamik

Um das Modell in diese Richtung auszubauen, bedarf es einer detaillierteren Betrachtung der Funktionsweise einer Synchronmaschine als in Kapitel 4.2 geschehen. Dafür muss die elektromagnetische Dynamik der Maschine, genauer gesagt: die elektrodynamischen Wechselwirkungen der beteiligten Stator- und Rotorkreise, erfasst werden. Aufgrund ihrer länglichen Darstellung sind die Ausführungen hierzu als Anhang an-

gefügt.⁸

Dieses Kapitel beginnt somit in medias res:

Bei der Stabilitätsbetrachtung einer Synchronmaschine werden drei charakteristische Zustände unterschieden: der *subtransiente* ($''$), der *transiente* ($'$) und der *stationäre Zustand*⁹ (chronologisch vom Eintreten der Störung bis zur eventuellen Wiedererlangung des Gleichgewichts geordnet), mit denen jeweils charakteristische Generatorreaktanzen X und Zeitkonstanten T assoziiert sind (siehe A.2.2). Die drei Zustände gehen in der Realität stetig ineinander über, werden aber üblicherweise separat als diskrete Zustände behandelt. Zur Illustration zeigt Abb. 4.7 die Drei-Schritt-Approximation der stetigen Funktion $X(t)$.

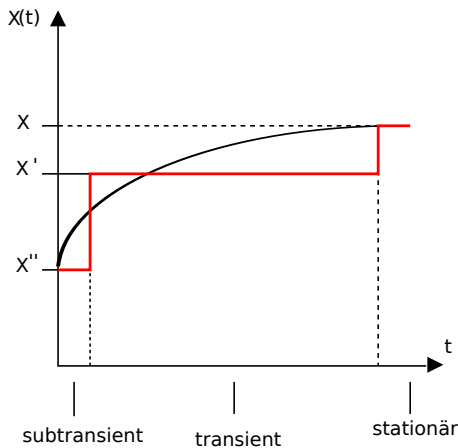


Abbildung 4.7.: Drei-Schritt-Approximation der Reaktanz $X(t)$ nach einer Störung: Subtransiente Reaktanz X'' , transiente Reaktanz X' , synchrone Reaktanz X (nach [MBB08]).

Der Synchrongenerator wird durch *subtransiente* bzw. *transiente Spannungen* (E'' bzw. E') hinter entsprechenden Reaktanzen modelliert. Deren d- und q-Komponenten¹⁰ sind nicht zu verwechseln mit den Komponenten der Generatoranschlussspannung V_d und V_q . Der Zusammenhang zwischen beiden ist durch (A.27) und (A.31) gegeben. Die Dynamik der d- und q-Komponenten dieser Spannungen wird durch den folgen-

⁸In A.2 werden die Grundgleichungen der Synchronmaschine im Stator(ABC)- und im Rotor(dq0)-System formuliert und die charakteristischen Operationszustände und -parameter präsentiert. In A.2.5 werden die daraus abgeleiteten vereinfachten Modellgleichungen, insbesondere das hier gewählte *Modell dritter Ordnung*, vorgestellt.

⁹Das Unterscheidungskriterium hierbei ist, ob der magnetische Fluss des Ankers durch Dämpfer- und Feldwindungen (subtransient) oder nur durch die Feldwindungen (transient) abgeschirmt wird. Eine Vernachlässigung der Dämpferspulen impliziert somit das Ausklammern des subtransienten Zustands.

¹⁰Komponenten im rotorfesten, durch die d- und q-Achse des Rotors festgelegten System, siehe A.2.

den Satz von DGLen festgelegt (siehe A.2.5):

$$T''_{d0} \dot{E}''_q = E'_q - E''_q + I_d(X'_d - X''_d), \quad (4.50)$$

$$T''_{q0} \dot{E}''_d = E'_d - E''_d - I_q(X'_q - X''_q), \quad (4.51)$$

$$T'_{d0} \dot{E}'_q = E_f - E'_q + I_d(X_d - X'_d), \quad (4.52)$$

$$T'_{q0} \dot{E}'_d = -E'_d - I_q(X_q - X'_q) \quad . \quad (4.53)$$

Dabei sind T'_{d0} , T''_{d0} , T'_{q0} , T''_{q0} die transienten und subtransienten Zeitkonstanten der d- und q-Achse, I_d und I_q die Ankerströme in Rotorsystemkoordinaten und E_f proportional zur Spannung der Feldspule.

Die rechten Seiten der obigen Gleichungen geben die Kirchhoffschen Regeln für die mittleren oder linken Teile der in Abb. 4.8 dargestellten Äquivalentkreise der d- und q-Achse an.

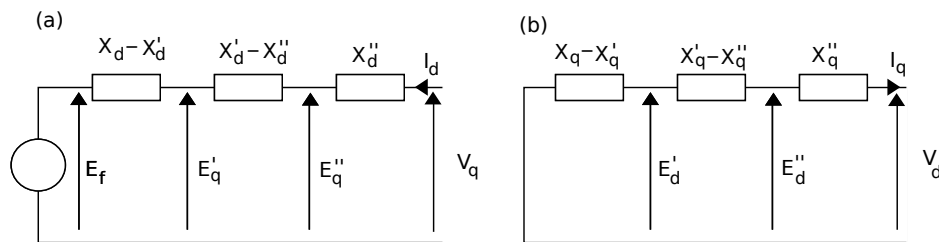


Abbildung 4.8.: Äquivalentkreise einer Synchronmaschine für die d- und die q-Achse. [MBB08]

Die Beschreibung der Synchronmaschine wird durch die Swing-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega, \\ M\dot{\omega} + D\omega &= P_m - P_e \end{aligned} \quad (4.54)$$

für die Rotordynamik vervollständigt.

Weitere vereinfachende Annahmen reduzieren (4.50) - (4.54) auf das sogenannte *Modell dritter Ordnung* oder $(\dot{\delta}, \dot{\omega}, \dot{E}'_q)$ -Modell. Zunächst wird der Effekt der Dämpferwicklungen vernachlässigt und infolgedessen der subtransiente Zustand übergangen. Damit verschwinden die ersten beiden DGLen. Geht man ferner davon aus, dass die d-Komponente der transienten Spannung verschwindet ($E'_d = 0$) und $X'_q = X_q$ gilt, so

erhält man schlussendlich für ein System von $i = 1, \dots, N$ Maschinen:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i, \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{m,i} - P_{e,i}, \\ T'_{d0,i} \dot{E}'_{q,i} &= E_{f,i} - E'_{q,i} + I_{d,i}(X_{d,i} - X'_{d,i}).\end{aligned}\quad (4.55)$$

Für die elektrische Leistung P_e ergibt sich aus den Gleichungen (A.27), (A.31) sowie (A.41):

$$P_e = 3(E'_d I_d + E'_q I_q + (X'_d - X'_q) I_d I_q). \quad (4.56)$$

Unter Vernachlässigung der sogenannten *transienten Salienz*, das heißt unter der Annahme $X'_q = X'_d$, reduziert sich dies zu

$$P_e = 3(E'_d I_d + E'_q I_q). \quad (4.57)$$

Die obigen Gleichungen sind bis jetzt in den individuellen Rotorkoordinaten der i -ten Synchronmaschine formuliert. Für den Zusammenhang zwischen diesen und den komplexen (a,b)-Netzkoordinaten gilt nach A.3:

$$\begin{pmatrix} E_d \\ E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta & \cos \delta \\ \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} I_d \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta & \cos \delta \\ \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Der Strom am k -ten Knoten hat die Form

$$I_k = I_{a,k} + iI_{b,k} = \sum_{j=1}^N Y_{kj} E'_j = \sum_{j=1}^N (G_{kj} + iB_{kj})(E'_{a,j} + iE'_{b,j}). \quad (4.60)$$

Sein Real- und Imaginärteil lauten:

$$I_{a,k} = \sum_{j=1}^N G_{kj} E'_{a,j} - B_{kj} E'_{b,j} \quad \text{und} \quad I_{b,k} = \sum_{j=1}^N B_{kj} E'_{a,j} + G_{kj} E'_{b,j}. \quad (4.61)$$

Einsetzen in die Transformation liefert für die d-Komponente des Stroms zunächst

$$I_{d,k} = - \sum_{j=1}^N \sin \delta_k [G_{kj} E'_{a,j} - B_{kj} E'_{b,j}] + \sum_{j=1}^N \cos \delta_k [B_{kj} E'_{a,j} + G_{kj} E'_{b,j}]. \quad (4.62)$$

Setzt man weiter die Transformationsformeln für $E'_{a,j}$ und $E'_{b,j}$ ein, so erhält man schließlich unter Ausnutzung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\delta_k - \delta_j) &= \sin \delta_k \sin \delta_j + \cos \delta_k \cos \delta_j \\ \text{und } \sin(\delta_k - \delta_j) &= \sin \delta_k \cos \delta_j - \cos \delta_k \sin \delta_j \end{aligned} \quad (4.63)$$

mit $\delta_{kj} = \delta_k - \delta_j$:

$$I_{d,k} = \sum_{j=1}^N (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj}) E'_{d,j} + (-G_{kj} \sin \delta_{kj} + B_{kj} \cos \delta_{kj}) E'_{q,j}. \quad (4.64)$$

Für die q-Komponente ergibt sich analog:

$$I_{q,k} = \sum_{j=1}^N (G_{kj} \sin \delta_{kj} - B_{kj} \cos \delta_{kj}) E'_{d,j} + (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj}) E'_{q,j}. \quad (4.65)$$

Für die elektrische Leistung gilt damit:

$$\begin{aligned} P_{e,k} &= 3(E'_{d,k} I_{d,k} + E'_{q,k} I_{q,k}) \\ &= 3E'_{d,k} \left[\sum_{j=1}^N (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj}) E'_{d,j} + (-G_{kj} \sin \delta_{kj} + B_{kj} \cos \delta_{kj}) E'_{q,j} \right] \\ &\quad + 3E'_{q,k} \left[\sum_{j=1}^N (G_{kj} \sin \delta_{kj} - B_{kj} \cos \delta_{kj}) E'_{d,j} + (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj}) E'_{q,j} \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Geht man von einem verlustfreien elektrischen Netz aus ($G_{kj} = 0 \forall k, j$) und verwendet das Modell dritter Ordnung mit $E'_{d,j} = 0 \forall j$, vereinfachen sich (4.64) und (4.66) zu

$$I_{d,i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} E'_{q,j} \cos \delta_{ij} \quad (4.67)$$

und

$$P_{e,i} = 3 \sum_{j=1}^N B_{ij} E'_{q,i} E'_{q,j} \sin \delta_{ij}. \quad (4.68)$$

Eingesetzt in das Modell dritter Ordnung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i, \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{m,i} - 3 \sum_{j=1}^N B_{ij} E'_{q,i} E'_{q,j} \sin \delta_{ij}, \\ T_{d0,i} \dot{E}'_{q,i} &= E_{f,i} - E'_{q,i} + (X_{d,i} - X'_{d,i}) \sum_{j=1}^N B_{ij} E'_{q,j} \cos \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Die durch (4.69) gegebene Modellierung stellt eine Erweiterung des klassischen Modells dar, welche über die Größe E'_q das elektrodynamische Verhalten der Synchronmaschine berücksichtigt. Die transienten Spannungen $E'_{q,i}$ – und demzufolge die Kopplungsstärken zwischen den Rotatoren – besitzen eine eigene zeitliche Dynamik, welche u. a. wiederum von den Winkeldifferenzen abhängt. Dieses reduzierte Modell beinhaltet somit die wichtige Feststellung von [H⁺04] (siehe Kap. 3.2), dass Rotorwinkel- und Spannungsstabilität keine separat zu behandelnden Problematiken sind, sondern gekoppelte.

(4.69) wird oft auch als *Ein-Achsen-Modell* bezeichnet, siehe z. B. [CC99, CVLMF⁺08, CCC95, GAH01].

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

Das zugrundeliegende Modell für ein N -Maschinen-System lautet nach (4.69) unter Einführung der verkürzten Schreibweisen $E'_{q,i} \rightarrow E_i$, $T'_{d0,i} = \frac{L_{f,i}}{R_{f,i}} \rightarrow \frac{L_i}{R_i}$, $3B_{ij} \rightarrow B_{ij}$ sowie $(X_{d,i} - X'_{d,i}) \rightarrow X_i$:

$$M_i \ddot{\delta}_i = -D_i \dot{\delta}_i + P_{m,i} - \sum_{j=1}^N B_{ij} E_{q,i} E_{q,j} \sin \delta_{ij}, \quad (5.1)$$

$$\frac{L_i}{R_i} \dot{E}_i = E_{f,i} - E_i + X_i \sum_{j=1}^N B_{ij} E_j \cos \delta_{ij}. \quad (5.2)$$

Wegen $X'_d < X_d$ (siehe A.2.2 und Abb. 4.7) gilt: $X_i > 0$.

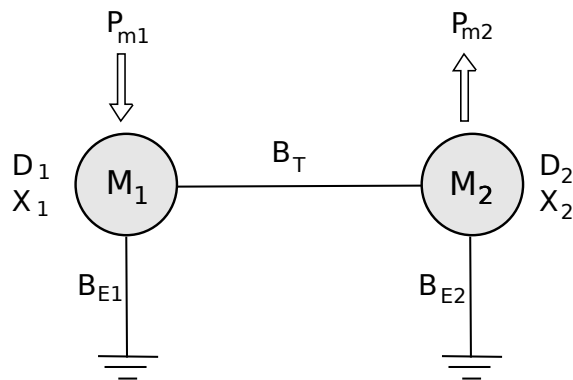


Abbildung 5.1.: System zweier Synchronmaschinen M_1 (Generator, $P_{m1} > 0$) und M_2 (Motor, $P_{m2} < 0$), welche über die Suszeptanz B_T verbunden sind. Erdung über B_{E1} bzw. B_{E2} .

Man betrachte das Zwei-Maschinen-System aus Abb. 5.1:

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{\delta}_1 &= -D_1 \dot{\delta}_1 + P_{m,1} - B_{12} E_1 E_2 \sin(\delta_1 - \delta_2), \\
 M_2 \ddot{\delta}_2 &= -D_2 \dot{\delta}_2 + P_{m,2} + B_{12} E_1 E_2 \sin(\delta_1 - \delta_2), \\
 \frac{L_1}{R_1} \dot{E}_1 &= E_{f,1} + (X_1 B_{11} - 1) E_1 + X_1 B_{12} E_2 \cos(\delta_1 - \delta_2), \\
 \frac{L_2}{R_2} \dot{E}_2 &= E_{f,2} + (X_2 B_{22} - 1) E_2 + X_2 B_{12} E_1 \cos(\delta_1 - \delta_2).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Aus B_T , B_{E1} und B_{E2} können die Koeffizienten der Admittanzmatrix – hier eigentlich: Suszeptanzmatrix – berechnet werden. Es gilt:

$$B_{11} = B_T + B_{E1}, \quad B_{12} = -B_T = B_{21} \quad \text{und} \quad B_{22} = B_T + B_{E2} .$$

Für reale Leitungen ist die (Serien-)Suszeptanz B_T negativ, die (Quer-)Suszeptanzen B_{E1} und B_{E2} sind positiv [And08]. Da ferner i. Allg. $|B_T| > |B_{Ei}|$ ist, folgt:

$$B_{12} = B_{21} > 0 \quad \text{und} \quad B_{ii} < 0 . \tag{5.4}$$

Weiter gehe man vom überdämpften Fall $\frac{M_i}{D_i} \ll 1$ ($i=1,2$) aus. Die (mechanische) Dämpfungskonstante D_i in der Swing-Gleichung wird im Modell dritter Ordnung erhöht, um die Vernachlässigung der Dämpferspulen auszugleichen (vgl. A.2.5). Mittels weiteren Kontroll-Equipments läßt sich der überdämpfte Fall in der Praxis realisieren. Die ersten beiden Gleichungen aus (5.3) lauten dann (mit $\delta_i - \delta_j =: \delta_{ij}$):

$$\begin{aligned}
 D_1 \dot{\delta}_1 &= P_{m,1} - B_{12} E_1 E_2 \sin(\delta_{12}), \\
 D_2 \dot{\delta}_2 &= P_{m,2} + B_{12} E_1 E_2 \sin(\delta_{12}).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Spannungsgleichungen bleiben unverändert.

5.1. Klassischer Fall mit konstanten Spannungen

Vorab wird der klassische Spezialfall mit konstanten Spannungen E_1 und E_2 betrachtet. Eine Entdimensionalisierung von (5.5) liefert

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_1 &= A_1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12}, \\
 \frac{D_2}{D_1} \dot{\delta}_2 &= A_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dabei ist:

$$\epsilon_i = \frac{E_i}{E_{\text{ref}}} \quad \text{mit der Referenzspannung } E_{\text{ref}},$$

$$t = T\tau \quad \text{mit der charakteristischen Zeitskala}^1 \quad T = \frac{D_1}{B_{12} E_{\text{ref}}^2},$$

¹(..) kennzeichnet nun die Ableitung nach der Zeit τ .

$$\text{und } A_i = \frac{P_{mi}}{B_{12}E_{\text{ref}}^2}.$$

Im Kontext von Stromnetzstabilität sind stationäre Zustände mit $\dot{\delta}_1=0$ und $\dot{\delta}_2=0$ – und damit zwangsläufig $\dot{\delta}_{12}=0$ – von Interesse (zur Erinnerung: $\delta(t)$ ergibt sich aus der Differenz der Rotorachse und der sich mit der Synchron-Winkelgeschwindigkeit ω_{sm} drehenden Referenzachse).

Hieraus folgt:

$$A_1 = -A_2 \quad (5.7)$$

und

$$\sin \delta_{12}^* = \frac{A_1}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (5.8)$$

Die vom Generator M_1 aufgenommene mechanische Leistung P_{m1} ist im stationären Zustand vom Betrag her gleich der vom Motor M_2 abgegebenen Leistung P_{m2} . Das Verhältnis $\frac{A_1}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ bzw. $\frac{P_{m1}}{B_{12}E_1E_2}$ legt fest, ob es auf dem Intervall $(-\pi; \pi]$ keine Fixpunkte ($\frac{A_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} > 1$), einen halbstabilen Fixpunkt ($\frac{A_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} = 1$) oder einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt ($\frac{A_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} < 1$) gibt. Die Überlegungen sind analog zu den zuvor in Kapitel 2.2.1 bezüglich der Fixpunkte eines Kuramoto-Oszillators gemachten (siehe auch Abb. 2.6).

Fordert man nur, dass die Phasenwinkeldifferenz δ_{12} zwischen Generator und Motor konstant ist, also $\dot{\delta}_{12} = 0$, ergibt sich:

$$\sin \delta_{12}^* = \frac{A_1 - \frac{D_1}{D_2} A_2}{(1 + \frac{D_1}{D_2}) \epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (5.9)$$

Die einzelnen Phasenwinkel selbst müssen dabei nicht zeitlich konstant sein. Die beiden Maschinen operieren nicht mehr bei Synchron-Winkelgeschwindigkeit ω_{sm} , sondern laufen mit

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = \frac{\frac{D_1}{D_2} (A_1 + A_2)}{1 + \frac{D_1}{D_2}} \quad (5.10)$$

relativ zum Referenzsystem. Für $A_1 = -A_2$ erhält man $\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = 0$ und (5.8).

Zur Veranschaulichung einige Beispiele, zunächst für eine Störung aus einem stationären Zustand mit $A_1 = -A_2$.

$\mathbf{A_1 = -A_2}$:

Zuerst wird die Reaktion des Systems auf eine kleinere Störung betrachtet. Die Störung tritt hier und im Folgenden in Form einer zeitweiligen Steigerung der mechanischen Input-Leistung des Generators M_1 , also einer Erhöhung von A_1 , auf. Abb. 5.2 (wie auch Abb. 5.3, Abb. 5.5 und Abb. 5.7) zeigt die zeitliche Entwicklung der Phasenwinkel δ_1 , δ_2 und der Winkeldifferenz δ_{12} . Zur Illustration des Leistungsflusses ist darüber

$\sin \delta_{12}(\tau) \sim P_e = B_{12} E_1 E_2 \sin \delta_{12}$ aufgetragen. Besitzt der Term $\sin \delta_{12}$ ein positives Vorzeichen, so findet ein Leistungstransfer von M_1 nach M_2 statt, bei negativem Vorzeichen in die andere Richtung. Das System in Abb. 5.2 bewegt sich, ausgehend vom hier gewählten Anfangszustand $(\delta_1(0), \delta_2(0)) = (1, 0)$, in den Fixpunkt $\delta_{12}^* = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236$ (nach (5.8)). Im Anschluss hieran wird die Störung simuliert, indem A_1 im Zeitintervall $\tau \in [5;6]$ von $A_1 = 0.5$ auf $A_{1,st} = 1$ erhöht wird. Beide Phasenwinkel δ_1 und δ_2 wachsen an, δ_{12} strebt in Richtung des neuen Fixpunkts $\delta_{12,st}^* \approx 0.8481$ (nach (5.9)) und die vom Generator zur Maschine transferierte elektrische Leistung nimmt zu. Nach Abschalten der Störung kehrt das System in den ursprünglichen Fixpunkt zurück.

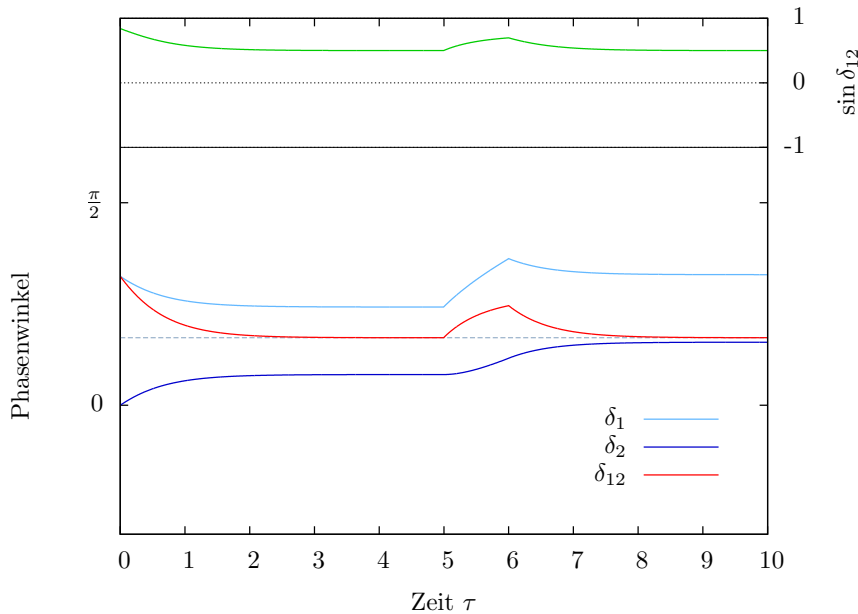


Abbildung 5.2.: Phasenwinkel δ_1 , δ_2 und δ_{12} in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1 = 0.5$; $A_2 = -0.5$; $\delta_1(0) = 1$; $\delta_2(0) = 0$; $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$, $\frac{D_1}{D_2} = 1$. Für $5 \leq \tau \leq 6$ Störung des Systems mit $A_{1,st} = 1$. Oben: $\sin \delta_{12} \sim P_e$.

In Abb. 5.3 ist die Störung mit $A_{1,st} = 5$ größer. Beide Phasenwinkel reagieren zunächst mit einer Zunahme, ebenso δ_{12} . Infolgedessen nimmt die von M_1 nach M_2 transferierte Leistung bis $\delta_{12} = \frac{\pi}{2}$ zu. Danach geht die weitere Erhöhung von δ_{12} mit einer Verringerung der übertragenen Leistung einher. Bei $\delta_{12} = \frac{5\pi}{6}$ wechselt δ_2 das Vorzeichen, da M_2 jetzt weniger elektrische Leistung aufnimmt, als sie mechanische abgibt. Zwischen $\delta_{12} = \pi$ und $\delta_{12} = 2\pi$ wird elektrische Leistung von M_2 zu M_1 transferiert. Nachdem die Störung ausgeschaltet worden ist, läuft das System in $\delta_{12}^* = \frac{13\pi}{6} \approx 6.8068$, also in einen um 2π gegenüber dem ursprünglichen verschobenen Fixpunkt, die transferierte Leistung nimmt dementsprechend wieder ihren vorherigen Wert an.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

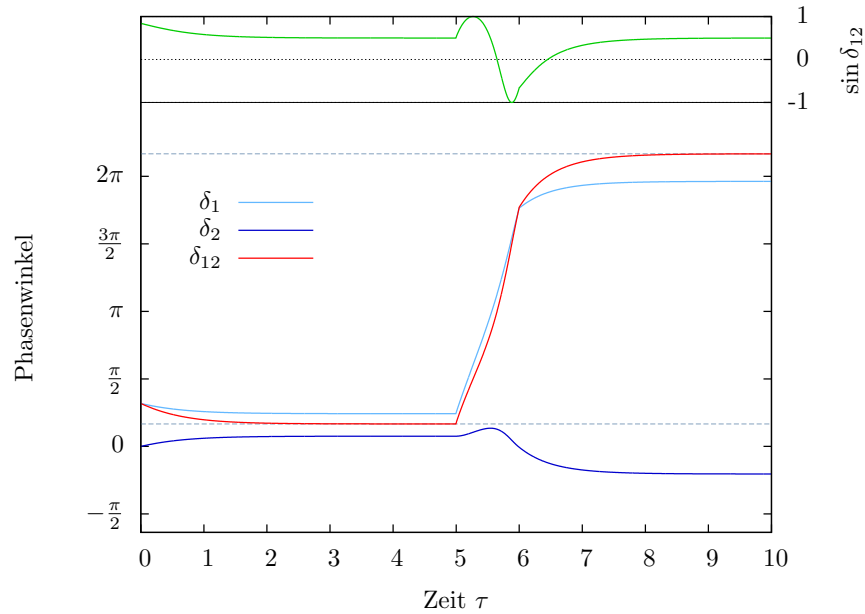


Abbildung 5.3.: Phasenwinkel δ_1 , δ_2 und δ_{12} in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $\delta_1(0)=1$; $\delta_2(0)=0$; $\epsilon_1\epsilon_2=1$, $\frac{D_1}{D_2}=1$. Für $5 \leq \tau \leq 6$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=5$. Oben: $\sin \delta_{12} \sim P e$.

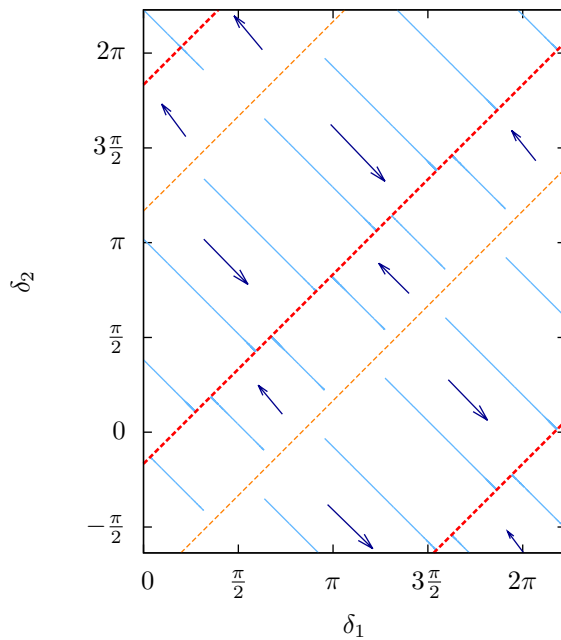


Abbildung 5.4.: Phasenportrait für $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $\epsilon_1\epsilon_2=1$; $\frac{D_1}{D_2}=1$. Trajektorien (hellblau) laufen in stabile Fixpunkte $\delta_{12}^* = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (rot-gestrichelt). Instabile Fixpunkte $\delta_{12}^{*,inst} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: orange-gestrichelt. Die Pfeile geben die Richtung der zeitlichen Entwicklung an.

Abb. 5.4 zeigt das zum ungestörten Zustand aus den beiden vorangegangenen Beispielen ($A_1=0.5$; $A_2=-0.5$) gehörige Phasenportrait. Die Trajektorien entsprechen Geradenabschnitten der Steigung -1 , welche auf die stabile Fixpunktgerade zulaufen und im Auftreffpunkt verbleiben ($\dot{\delta}_1 = 0 \wedge \dot{\delta}_2 = 0$). Eine Störung aus dem stationären Zustand verschiebt den Phasenpunkt aus seinem Fixpunkt – wie er sich dabei durch die δ_1 - δ_2 -Ebene bewegt, hängt von der Größe und Dauer der Störung ab. Nach Beendigung der Störung läuft der Phasenpunkt in der dargestellten Weise wieder in einen Fixpunkt ein.

$|\mathbf{A}_1| \neq |\mathbf{A}_2|$:

Abb. 5.5 zeigt, wie sich das System mit $A_1=1$ und $A_2=-0.5$ entwickelt. Ausgangspunkt ist der stationäre Zustand aus den vorigen Beispielen ($A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $\delta_{12}^* = \frac{\pi}{6}$), bei $\tau=1$ wird A_1 auf 1 erhöht. Das System läuft in den Fixpunkt $\delta_{12}^* \approx 0.2678\pi \approx 0.8481$, wobei die einzelnen Phasenwinkel sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = \frac{1}{4}$ (nach (5.10)) bewegen.

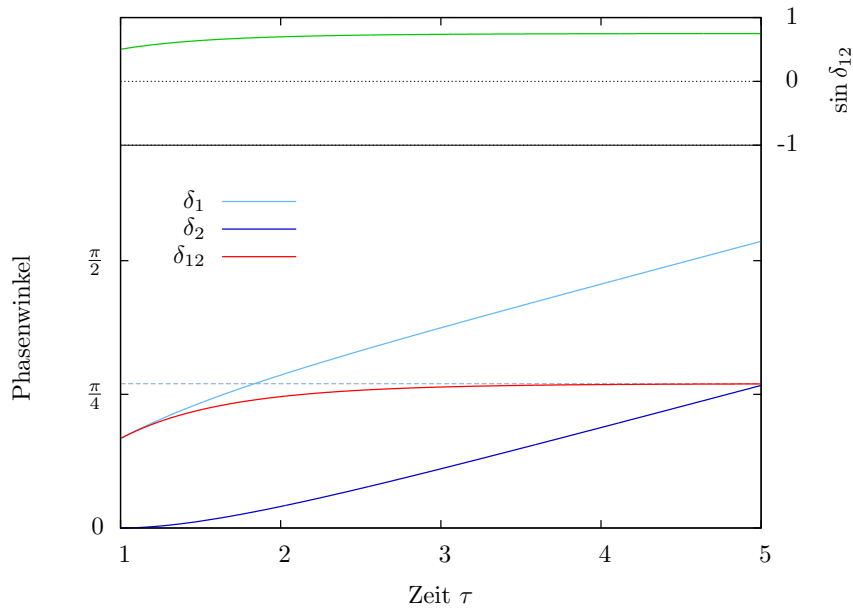


Abbildung 5.5.: Phasenwinkel δ_1 , δ_2 und δ_{12} in Abhängigkeit der Zeit τ für $A_1=1$; $A_2=-0.5$; $\delta_1(1) = \frac{\pi}{6}$; $\delta_2(1) = 0$; $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$; $\frac{D_1}{D_2} = 1$. Oben: $\sin \delta_{12} \sim P_e$.

In Abb. 5.6 ist das zugehörige Phasenportrait dargestellt. Die Trajektorien laufen in die Geraden der stabilen Fixpunkte $\delta_2 = \delta_1 - \delta_{12}^* + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ein und auf diesen weiter. δ_1 und δ_2 nehmen dabei gleichförmig zu, sodass die Winkeldifferenz δ_{12} konstant bleibt.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

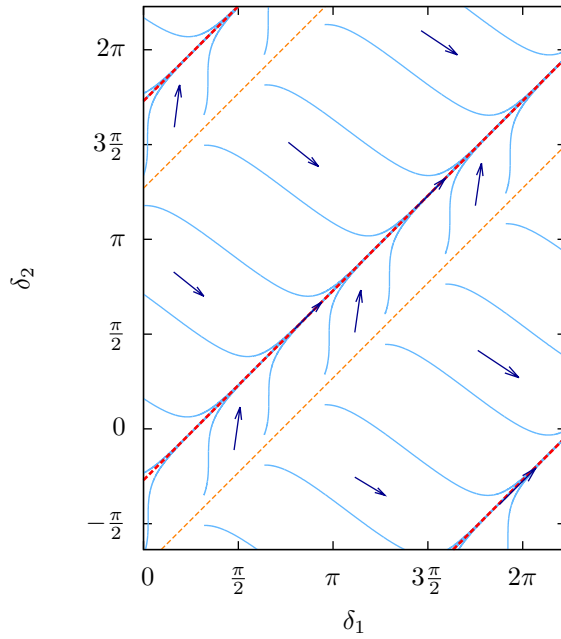


Abbildung 5.6.: Phasenportrait für $A_1=1$; $A_2=-0.5$; $\epsilon_1\epsilon_2=1$; $\frac{D_1}{D_2}=1$.
 Stabile Fixpunkte $\delta_{12}^*=0.8481+2k\pi$: rot-gestrichelt.
 Instabile Fixpunkte $\delta_{12,\text{inst}}^*=2.2935+2k\pi$: orange-gestrichelt.

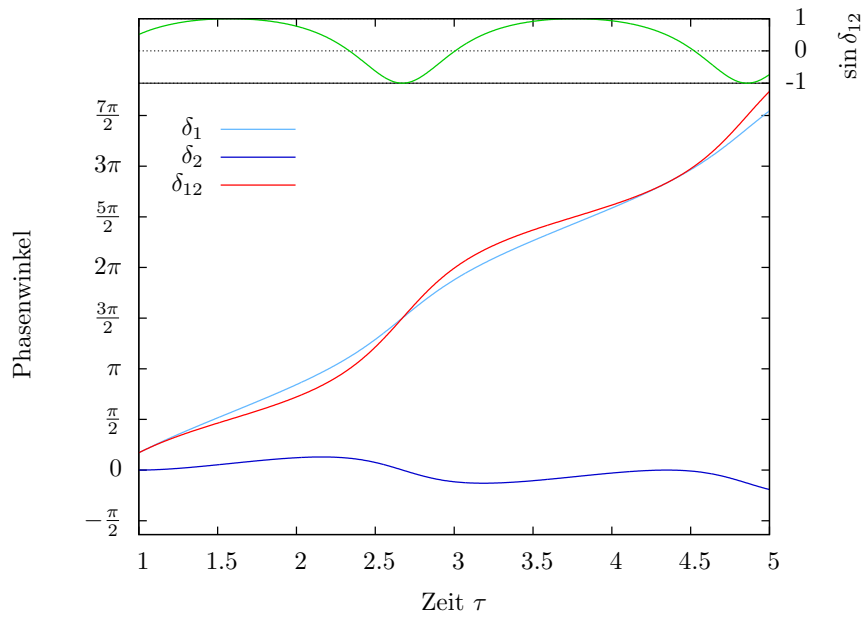


Abbildung 5.7.: Phasenwinkel δ_1 , δ_2 und δ_{12} in Abhängigkeit der Zeit τ für $A_1=3$; $A_2=-0.5$; $\delta_1(1) = \frac{\pi}{6}$; $\delta_2(1) = 0$; $\epsilon_1\epsilon_2=1$; $\frac{D_1}{D_2}=1$. Oben: $\sin \delta_{12} \sim P_e$.

Abb. 5.7 zeigt die vorige Situation für ein größeres $A_1=3$. Es existieren keine Fixpunkte mehr (siehe auch das Phasenportrait in Abb. 5.8). Die transferierte Leistung wechselt periodisch ihre Richtung.

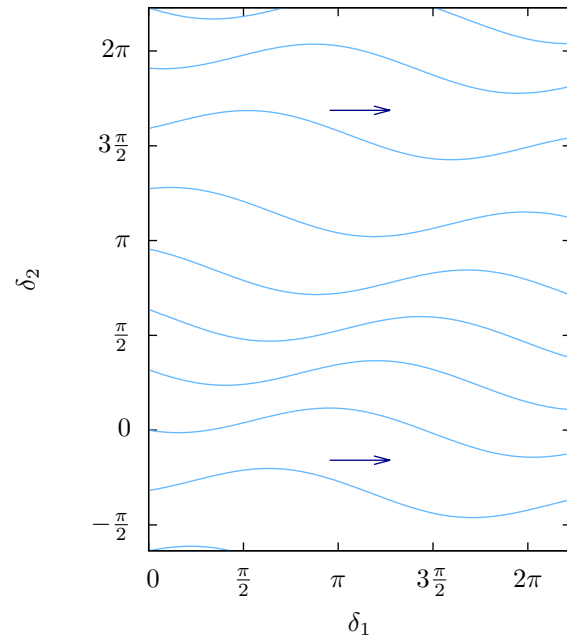


Abbildung 5.8.: Phasenportrait für $A_1=3; A_2=-0.5; \epsilon_1\epsilon_2=1; \frac{D_1}{D_2}=1$.

5.2. Inklusive Spannungsdynamik

Zu untersuchen ist die folgende entdimensionalisierte und reskalierte Version des Systems (5.3)²:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_1 &= A_1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12}, \\
 D \dot{\delta}_2 &= A_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12}, \\
 B_1 \dot{\epsilon}_1 &= C_1 + F_1 \epsilon_1 + \epsilon_2 \cos \delta_{12}, \\
 B_2 \dot{\epsilon}_2 &= C_2 + F_2 \epsilon_2 + \epsilon_1 \cos \delta_{12}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dabei ist (für $i=1,2$):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_i &= \frac{E_i}{E_{\text{ref}}} \quad \text{die skalierte Spannung,} \\
 \tau &= \frac{B_{12} E_{\text{ref}}^2}{D_1} \cdot t \quad \text{die skalierte Zeit,} \\
 A_i &= \frac{P_{\text{mi}}}{B_{12} E_{\text{ref}}^2} \quad \text{proportional zur mechanischen Leistung,} \\
 D &= \frac{D_2}{D_1} \quad \text{das Dämpfungsverhältnis,} \\
 B_i &= \frac{L_i E_{\text{ref}}^2}{R_i D_1 X_i} \quad \text{abhängig von den Maschinenparametern,} \\
 C_i &= \frac{\epsilon_{f,i}}{X_i B_{12}} \quad \text{proportional zur Spannung der Feldspule} \\
 \text{und } F_i &= \frac{X_i B_{ii} - 1}{X_i B_{12}} < 0.^3
 \end{aligned}$$

Geht man – wie im Weiteren – von identischen Maschinenparametern und symmetrischer Erdung aus, so gilt: $D=1$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$ und $F_1 = F_2$.

Fordert man stationäre Zustände mit $\dot{\delta}_1 = 0$ und $\dot{\delta}_2 = 0$, so folgt wiederum

$$A_1 = -A_2, \tag{5.12}$$

d. h. die dem Generator zugeführte mechanische Leistung und die von der Maschine abgegebene müssen einander die Waage halten.

²Für das System wird im Weiteren die Abkürzung M3O verwendet. Diese folgt aus der Bezeichnung *Modell dritter Ordnung*, welche sich im Kontext der Modellherleitung erschließt (siehe Appendix), jedoch insofern missverständlich ist, als das Modell keine DGL dritter Ordnung beinhaltet.

³Zur Begründung siehe (5.4).

Mit $\dot{\delta}_{12} = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2$, $D=1$ und $A_1=-A_2$ lässt sich (5.11) umformulieren zu:

$$\begin{aligned} B_1 \dot{\epsilon}_1 &= C_1 + F_1 \epsilon_1 + \epsilon_2 \cos \delta_{12}, \\ B_2 \dot{\epsilon}_2 &= C_2 + F_2 \epsilon_2 + \epsilon_1 \cos \delta_{12}, \\ \dot{\delta}_{12} &= 2A_1 - 2\epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für die Parametereinstellung $D=1$, $A_1=0.5$, $B_1=B_2=1$, $C_1=C_2=1$ und $F_1=F_2=-1.85$ existiert ein stationärer Zustand mit $\epsilon_1^*=\epsilon_2^*=1.03624$ und $\delta_{12}^*=0.48435$ (siehe Abb. 5.9). Dieser wurde zunächst durch Ausprobieren verschiedener Parametereinstellungen mithilfe des hierfür erstellten Programms gefunden und durch MATLAB als einzige reelle Lösung des zugehörigen nichtlinearen Gleichungssystems ((5.13) mit $\dot{\delta}_{12}=0$, $\dot{\epsilon}_1=\dot{\epsilon}_2=0$ und den besagten Parameterwerten) bestätigt.

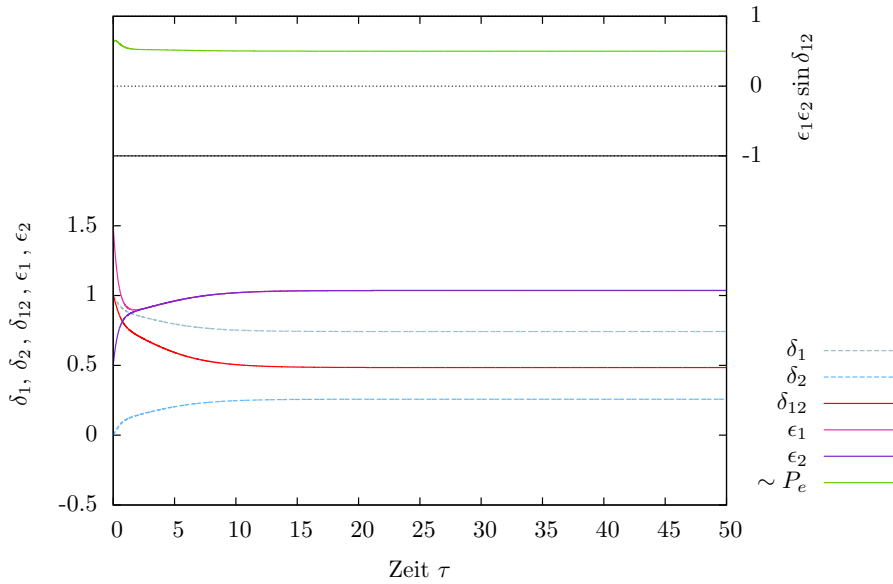


Abbildung 5.9.: Stationärer Zustand mit $\delta_{12}^*=0.48435$ und $\epsilon_1^*=\epsilon_2^*=1.03624$ für die Parametereinstellung $A_1=0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Phasenwinkel δ_1 , δ_2 , δ_{12} und Spannungen ϵ_1 , ϵ_2 sowie $\epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $\delta_1(0)=1$, $\delta_2(0)=0$, $\epsilon_1(0)=1.5$, $\epsilon_2(0)=0.5$.

Die zum System (5.13) gehörige Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{B_1} & \frac{1}{B_1} \cos \delta_{12} & -\frac{\epsilon_2}{B_1} \sin \delta_{12} \\ \frac{1}{B_2} \cos \delta_{12} & \frac{F_2}{B_2} & -\frac{\epsilon_1}{B_2} \sin \delta_{12} \\ -2\epsilon_2 \sin \delta_{12} & -2\epsilon_1 \sin \delta_{12} & -2\epsilon_1 \epsilon_2 \cos \delta_{12} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

lautet, ausgewertet am Punkt $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \delta_{12}^* + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$J|_{(\delta_{12}^*, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*)} = \begin{pmatrix} -1.85 & 0.88498 & -0.48251 \\ 0.88498 & -1.85 & -0.48251 \\ -0.96502 & -0.96502 & -1.90057 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Sie besitzt die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = -2.7350 < 0$, $\lambda_2 = -2.5052 < 0$ und $\lambda_3 = -0.3604 < 0$ (MATLAB). Der Zustand ist also linear stabil.

In Abb. 5.10 bis Abb. 5.13 sind exemplarisch Trajektorien im ϵ_1 - ϵ_2 - δ_{12} -Phasenraum für verschiedene Anfangsbedingungen dargestellt. Die roten Punkte markieren die jeweils relevanten Fixpunkte $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \delta_{12}^*) = (1.03624, 1.03624, 0.48435 + 2k\pi)$. Für Anfangsbedingungen mit $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0)$ verlaufen die entsprechenden Trajektorien in der $\epsilon_1 = \epsilon_2$ -Ebene.

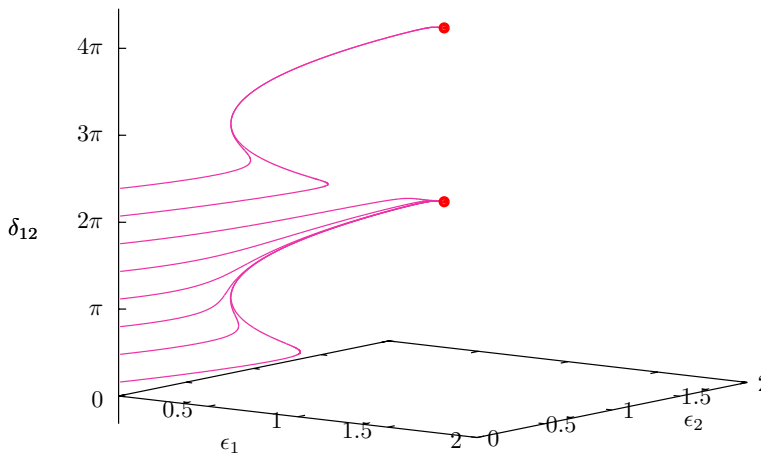


Abbildung 5.10.:
Exemplarische Phasenraumtrajektorien für Anfangsbedingungen mit $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0) = 0$.

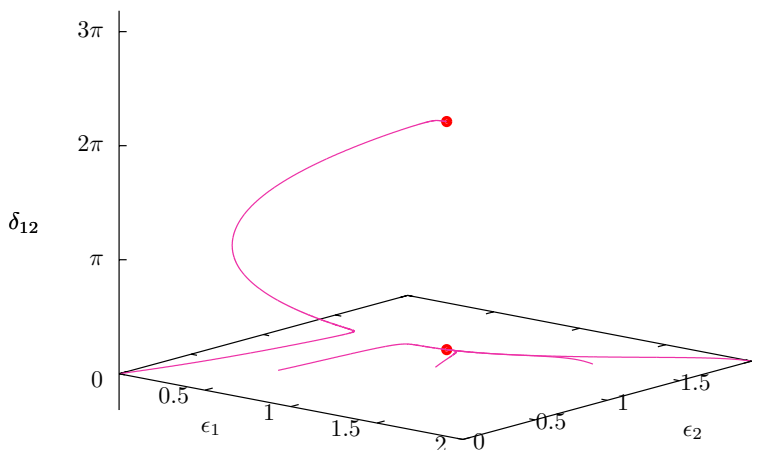


Abbildung 5.11.:
Exemplarische Phasenraumtrajektorien für Anfangsbedingungen mit $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0)$ und $\delta_{12}(0) = 0$.

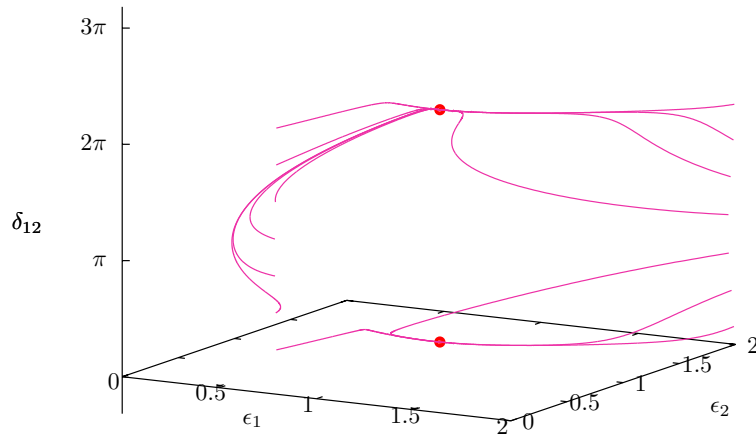


Abbildung 5.12.:
Exemplarische Phasenraumtrajektorien für Anfangsbedingungen mit $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=0.5$ bzw. $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=2$.

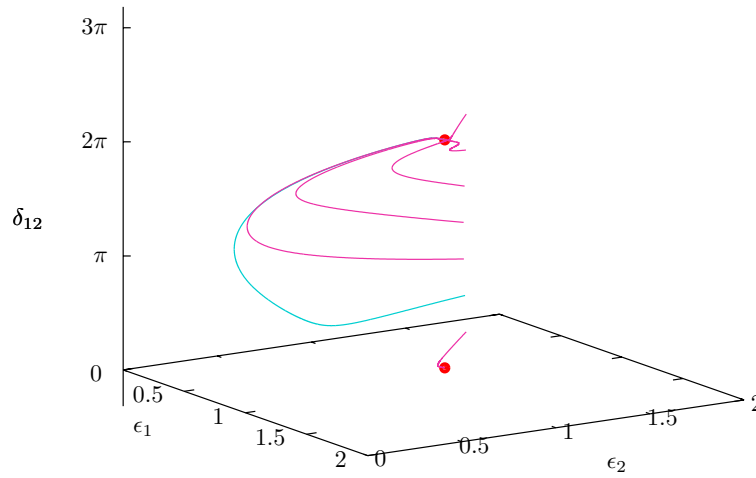


Abbildung 5.13.:
Exemplarische Phasenraumtrajektorien für Anfangsbedingungen mit $\epsilon_1(0)=0.5$ und $\epsilon_2(0)=1.5$ (blau: Trajektorie aus Abb. 5.9).

Numerische Simulationen für Anfangsbedingungen, welche im Phasenraum weiter entfernt von den Fixpunkten $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \delta_{12}^*) = (1.03624, 1.03624, 0.48435 + 2k\pi)$ liegen, zeigen, dass auch diese Trajektorien in einen solchen stationären Zustand laufen (siehe z. B. Abb. 5.14).

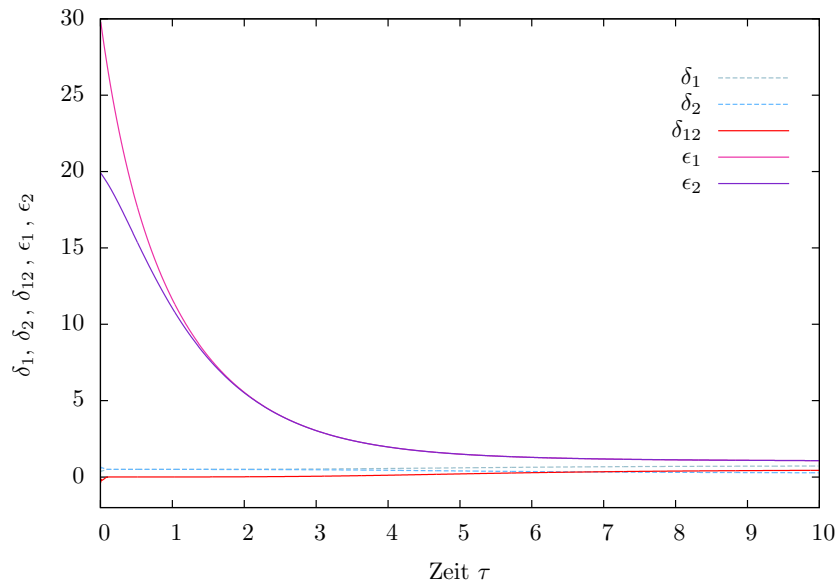


Abbildung 5.14.: Phasenwinkel δ_1 , δ_2 , δ_{12} und Spannungen ϵ_1 , ϵ_2 in Abhängigkeit der Zeit τ für $A_1=0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$ und $D=1$. $\delta_1(0)=1$, $\delta_2(0)=0$, $\epsilon_1(0)=30$, $\epsilon_2(0)=20$.

Variation der Parameter

Im Weiteren soll untersucht werden, wie sich eine Veränderung der Parameter auf das Systemverhalten auswirkt. Dabei wird ausgehend von der Einstellung $A_1=0.5$, $B_1=B_2=1$, $C_1=C_2=1$, $F_1=F_2=-1.85$ und $D=1$ jeweils *einer* der Parameter verändert.

In Abb. 5.15 und 5.17 ist die Entwicklung des Systems ausgehend von der Anfangsbedingung $\delta_{12}(0)=1$, $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=1$ für verschiedene Werte des zur eingespeisten bzw. entnommenen mechanischen Leistung proportionalen Parameters A_1 dargestellt⁴. In Abb. 5.15 strebt das System je nach Einstellung von A_1 ($A_1=0.52, 0.45, 0.30$) in verschiedene stationäre Zustände. Mit abnehmendem A_1 verringert sich die Phasenwinkeldifferenz δ_{12}^* , die Spannungen $\epsilon_{1,2}^*$ nehmen zu.

Für $A_1=0.3$ sind in Abb. 5.16 die zu verschiedenen Anfangsbedingungen gehörigen Trajektorien im ϵ_1 - ϵ_2 - δ_{12} -Phasenraum dargestellt. Sie alle laufen in den stationären Zustand $\epsilon_{1,2}^*=1.14027$ und $\delta_{12}^*=0.23283$ bzw. $\delta_{12}^*=0.23283+2\pi$.

⁴Zur Erinnerung: $A_2=-A_1$.

Bei den stationären Zuständen handelt es sich jeweils um die einzige reelle Lösung – und damit den einzigen Fixpunkt – des korrespondierenden nichtlinearen Gleichungssystems. Für $A_1=0.55$ und 0.60 existieren keine reellen Lösungen des Gleichungssystems. (Diese Aussagen gelten analog für die folgenden Ausführungen bezüglich der stationären Lösungen unter Variation der anderen Parameter.)

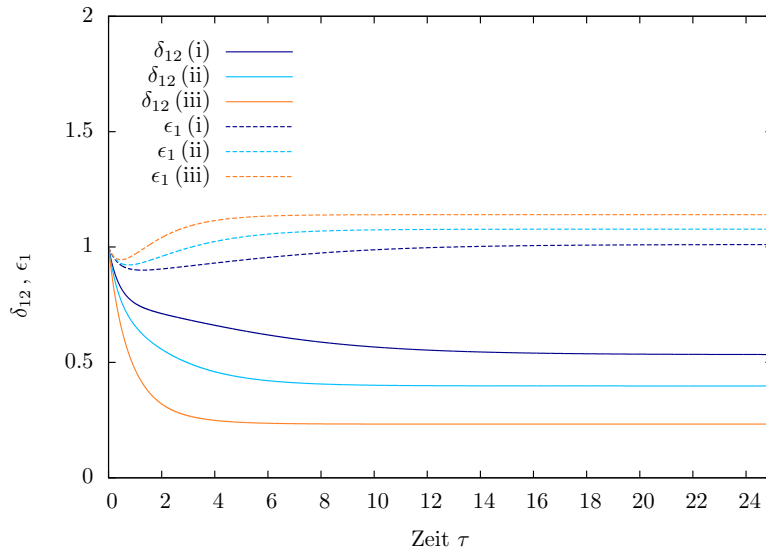


Abbildung 5.15.:
 $\delta_{12}(\tau)$ und $\epsilon_1(\tau)$
 für (i) $A_1=0.52$,
 (ii) $A_1=0.45$ und
 (iii) $A_1=0.30$.
 $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=1$
 und $\delta_{12}(0)=1$.

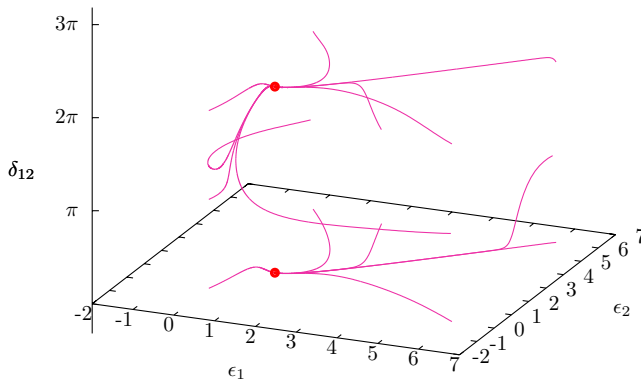


Abbildung 5.16.:
 Exemplarische Phasenraumtrajektorien für $A_1=0.30$.

Bei den beiden in Abb. 5.17 gezeigten Parametereinstellungen $A_1=0.55, 0.60$ nehmen die Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} kontinuierlich zu. Für $A_1=0.55$ ist ein stufenartiges Ansteigen der Phasenwinkeldifferenz mit längeren Plateaus, während derer δ_{12} fast konstant ist, zu erkennen (dies setzt sich in dieser Form über das hier dargestellte τ -Intervall hinaus fort). Die Spannungen sind in beiden Fällen nicht konstant, ein starker Anstieg in der Phasenwinkeldifferenz beim Erklimmen einer Stufe geht dabei mit einem temporären Spannungsabfall einher.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

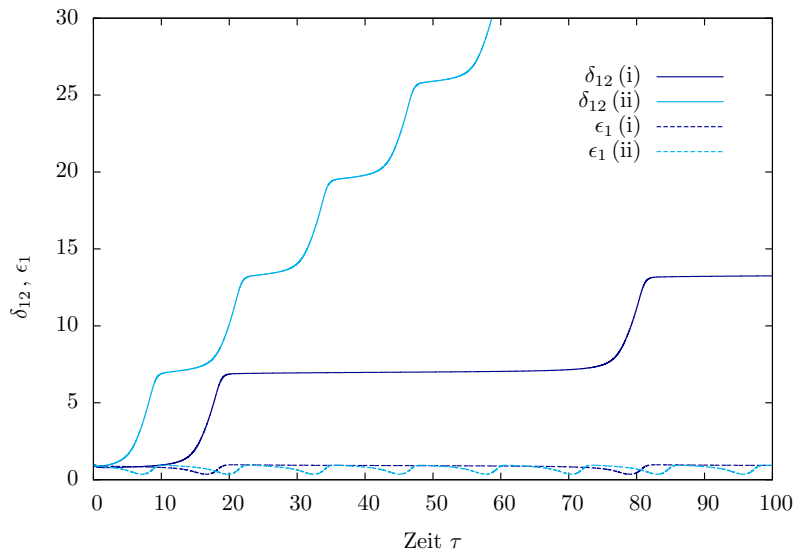


Abbildung 5.17.:
 $\delta_{12}(\tau)$ und
 $\epsilon_1(\tau)$ für (i)
 $A_{1,2}=0.55$ und (ii)
 $A_{1,2}=0.60$.
 $\delta_{12}(0)=1$,
 $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=1$.

Abb. 5.18 und 5.21 zeigen, wie sich das System ausgehend vom oben genannten Anfangszustand für verschiedene Einstellungen des Parameters $C_{1,2}$ ($C_{1,2}=1.50, 2.00, 5.00$ und 10.00 bzw. 0.94 und 0.60), welcher direkt über die Spannung der Feldspule zu regeln ist, entwickelt.

Für die in Abb. 5.18 dargestellten Parametereinstellungen strebt das System jeweils in unterschiedliche stationäre Zustände, wobei mit zunehmendem $C_{1,2}$ die Spannungen $\epsilon_{1,2}^*$ ansteigen und die Phasenwinkeldifferenz δ_{12}^* sich verringert.

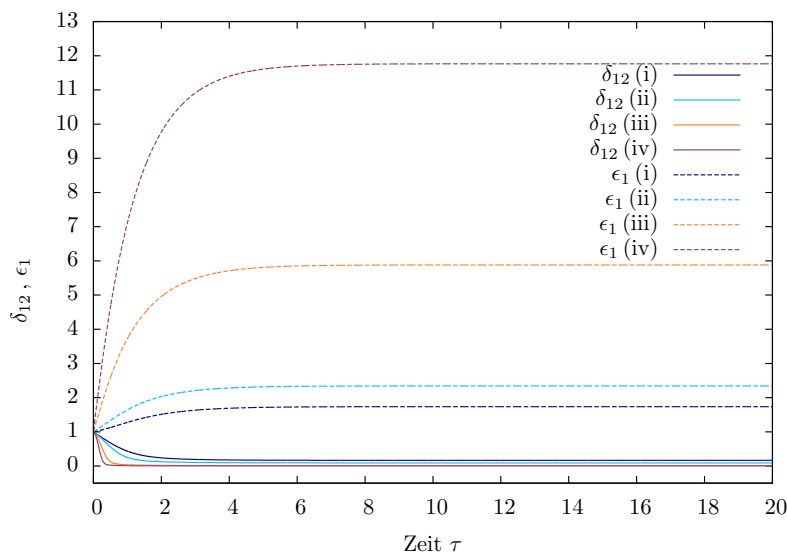


Abbildung 5.18.:
 $\delta_{12}(\tau)$ und
 $\epsilon_1(\tau)$ für (i)
 $C_{1,2}=1.50$, (ii)
 $C_{1,2}=2.00$, (iii)
 $C_{1,2}=5.00$ und
(iv) $C_{1,2}=10.00$.
 $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=1$,
 $\delta_{12}(0)=1$.

Für $C_{1,2}=2.00$ und $C_{1,2}=5.00$ sind in den Abb. 5.19 und 5.20 exemplarisch Trajektorien im ϵ_1 - ϵ_2 - δ_{12} -Phasenraum dargestellt, welche für $C_{1,2}=2.00$ in die stationären Punkte $(2.34146, 2.34146, 0.09133)$ und $(2.34146, 2.34146, 0.09133+2\pi)$ bzw. für $C_{1,2}=5.00$ in $(5.88163, 5.88163, 0.01445)$ und $(5.88163, 5.88163, 0.01445+2\pi)$ laufen.

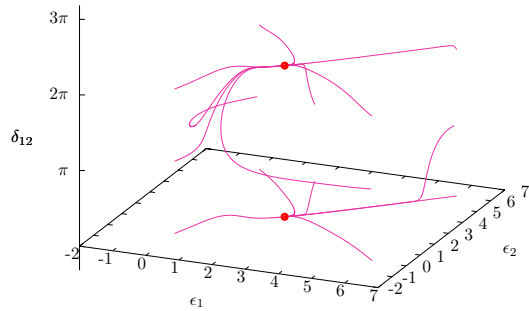


Abbildung 5.19.: Exemplarische Phasenraumtrajektorien für $C_{1,2}=2.00$.

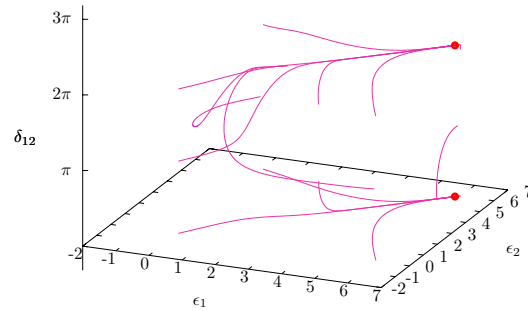


Abbildung 5.20.: Exemplarische Phasenraumtrajektorien für $C_{1,2}=5.00$.

In Abb. 5.21 nehmen die Phasenwinkeldifferenzen wieder ungleichförmig zu, die Spannungen oszillieren.

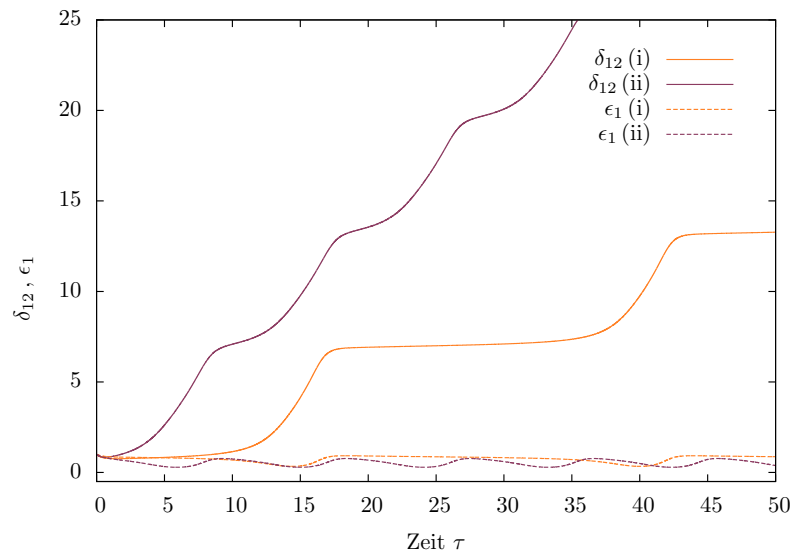


Abbildung 5.21.:
 $\delta_{12}(\tau)$ und
 $\epsilon_1(\tau)$ für (i)
 $C_{1,2}=0.94$ und
(ii) $C_{1,2}=0.60$.
 $\epsilon_1(0)=\epsilon_2(0)=1$,
 $\delta_{12}(0)=1$.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

In den Abb. 5.22 wird die zeitliche Entwicklung des Systems aus dem besagten Ausgangszustand für verschiedene Einstellungen des Parameters $F_{1,2}$ ($F_{1,2} = -1.20, -1.70, -1.88, -2.00$) gezeigt. Für die ersten drei läuft das System in stationäre Zustände. Mit zunehmenden $|F_{1,2}|$ nehmen die Spannungen $\epsilon_{1,2}^*$ hierbei ab, die Phasenwinkeldifferenzen δ_{12}^* zu.

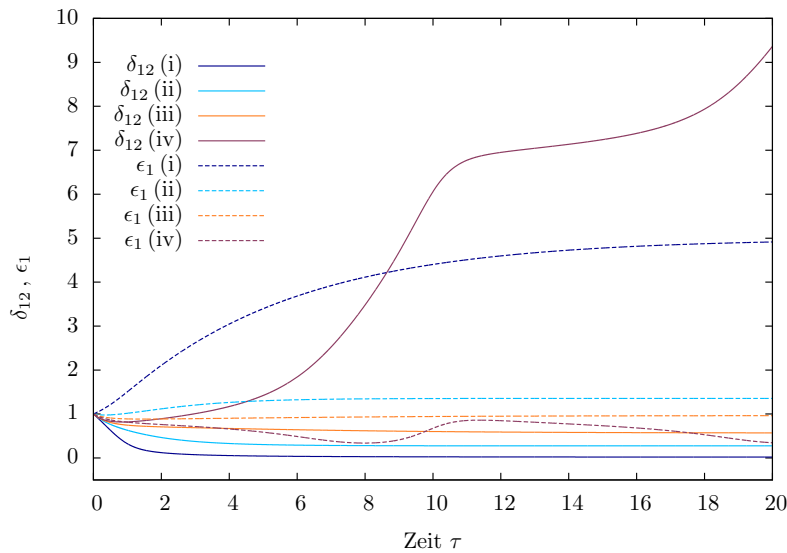


Abbildung 5.22.:
 $\delta_{12}(\tau)$ und $\epsilon_1(\tau)$
 für (i) $F_{1,2} = -1.20$,
 (ii) $F_{1,2} = -1.70$,
 (iii) $F_{1,2} = -1.88$
 und (iv)
 $F_{1,2} = -2.00$.
 $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0) = 1$,
 $\delta_{12}(0) = 1$.

Abb. 5.23 zeigt für $F_{1,2} = -1.2$ einige Phasenraumtrajektorien, welche alle in die stationären Zustände $(4.99498, 4.99498, 0.02004)$ bzw. $(4.99498, 4.99498, 0.02004 + 2\pi)$ laufen.

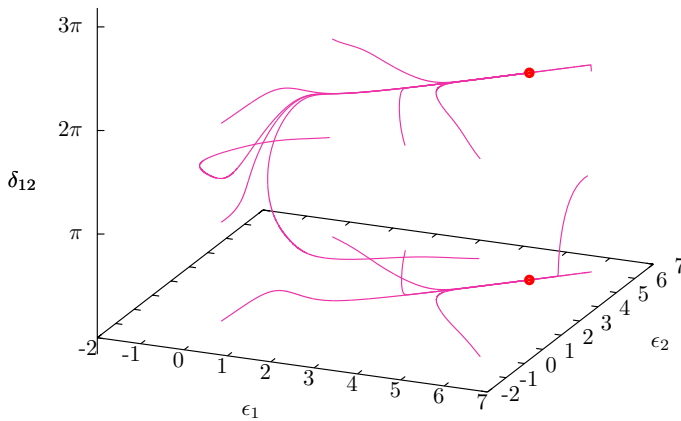


Abbildung 5.23.:
 Exemplarische
 Phasenraum-
 trajektorien für
 $F_{1,2} = -1.20$.

Eine Veränderung des Parameters $B_{1,2}$ wirkt sich – wie (5.13) zu entnehmen ist – nicht auf die Lage der Fixpunkte des Systems aus. Der Zustand $(1.03624, 1.03624, 0.48435 + 2k\pi)$ bleibt unter Festhaltung der anderen Parameter für alle $B_{1,2} > 0$ linear stabil.

Reaktion auf Störungen – Vergleich mit klassischem Modell

Analog zum vorigen Unterkapitel werden nun verschiedene Störungen aus dem zur Parametereinstellung $D=1$, $A_1=0.5$, $A_2=-0.5$, $B_1=B_2=1$, $C_1=C_2=1$ und $F_1=F_2=-1.85$ gehörigen stationären Zustand $\epsilon_{1,2}^*=1.03624$ und $\delta_{12}^*=0.48435$ simuliert, indem der zur mechanischen Input-Leistung des Generators M_1 proportionale Parameter A_1 für ein gewisses Zeitintervall (hier: für $\tau \in [10;11]$) auf einen Wert $A_{1,st}$ gesetzt wird. Gleichzeitig soll das Verhalten des M3O-Systems mit dem des klassischen Modells mit den konstanten Spannungen $\epsilon_1=\epsilon_2=1.03624$ – und damit ebenfalls $\delta_{12}^*=0.48435$ (nach (5.8)) – verglichen werden. Zu diesem Zweck sind in Abb. 5.24, Abb. 5.25, Abb. 5.26 und Abb. 5.27 jeweils die Phasenwinkeldifferenz δ_{12} , die Spannung ϵ_1 (stellvertretend für beide Spannungen ϵ_1 und ϵ_2) und der zur übertragenen elektrischen Leistung P_e proportionale Term $\epsilon_1\epsilon_2 \sin \delta_{12}$ in Abhängigkeit der Zeit τ aufgetragen. Letzterer gibt wieder auch die Richtung des Leistungstransfers an (positives Vorzeichen heißt: Leistungstransfer vom Generator M_1 zur Maschine M_2).

In Abb. 5.24 wird das System mit $A_{1,st}=1$ gestört. Die Spannung verringert sich während der Störung, Phasenwinkeldifferenz δ_{12} und transferierte Leistung nehmen wie im klassischen Fall zu. Nach Abschalten der Störung gehen alle Größen wieder auf ihre stationären Werte zurück, was beim klassischen System schneller vonstatten geht.

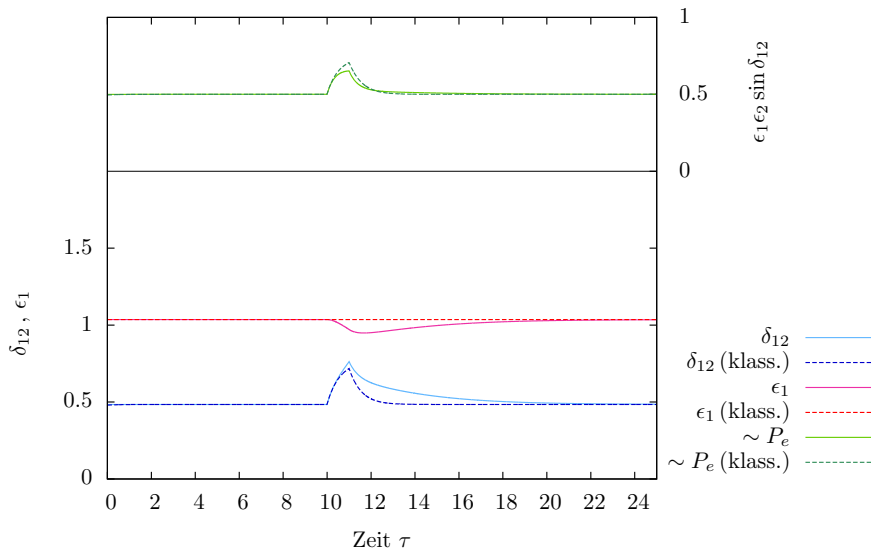


Abbildung 5.24.: Reaktion auf eine Störung, verglichen mit dem klassischen System. Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} , Spannung ϵ_1 und $\epsilon_1\epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Für $10 \leq \tau \leq 11$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=1$.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

Die Vermutung, dass sich für kleine und kurze Störungen beide Systeme sowohl qualitativ als auch quantitativ nicht signifikant voneinander unterscheiden, wird in Abb. 5.25 bestätigt. Die dort gezeigte Störung ist mit $A_{1,st}=0.55$ klein gewählt. Die Unterschiede sind marginal.

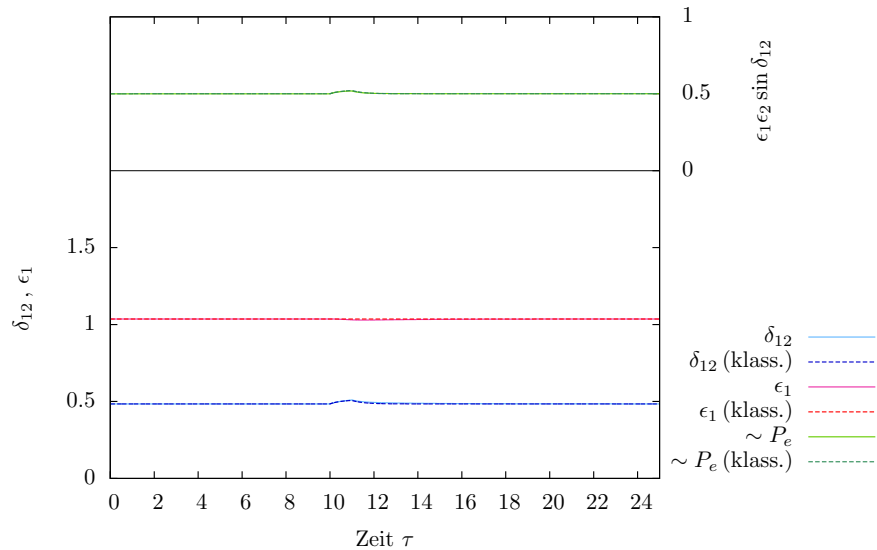


Abbildung 5.25.: Reaktion auf eine Störung, verglichen mit der des klassischen Systems. Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} , Spannung ϵ_1 und $\epsilon_1\epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Für $10 \leq \tau \leq 11$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=0.55$.

In Abb. 5.26 ist die Störung $A_{1,st}=2.5$ wieder größer. Die Spannung im M30 bricht während der Störung ein und nimmt auch nach Abschalten zunächst noch weiter ab. Während sich die Phasenwinkeldifferenz im klassischen Fall nach einer Zunahme während der Störung wieder in ihrem ursprünglichen Wert einfindet, läuft sie im M30 in den um 2π verschobenen Punkt $\delta_{12}^*=6.76754$. Das führt insgesamt dazu, dass sich die während und nach der Störung transferierten Leistungen in Betrag und Richtung deutlich voneinander unterscheiden. Im klassischen Fall nimmt die übertragene Leistung während der Störung zu und kehrt hiernach wieder auf den anfänglichen Wert zurück. Im M30 kommt es in der Zeit nach der Störung zu einer Umkehr des Leistungstransfers (nämlich, wenn die zugehörige Phasenwinkeldifferenz zwischen π und 2π liegt).

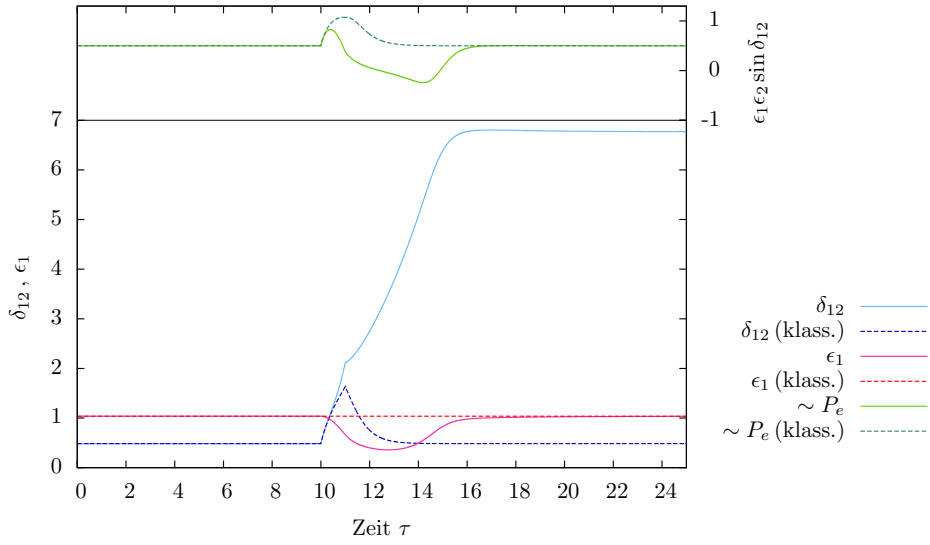


Abbildung 5.26.: Reaktion auf eine Störung, verglichen mit der des klassischen Systems. Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} , Spannung ϵ_1 und $\epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Für $10 \leq \tau \leq 11$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=2.5$.

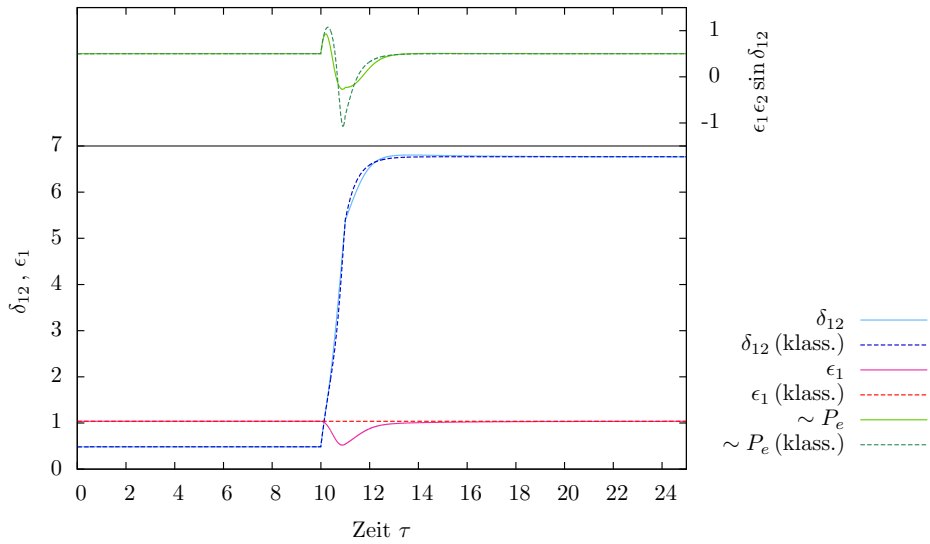


Abbildung 5.27.: Reaktion auf eine Störung, verglichen mit der des klassischen Systems. Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} , Spannung ϵ_1 und $\epsilon_1 \epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Für $10 \leq \tau \leq 11$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=5$.

5. Analyse eines überdämpften Zwei-Maschinen-Systems

In Abb. 5.27 ist die Störung mit $A_{1,st}=5$ noch größer. Die Spannung ϵ_1 im M30 bricht zunächst wieder ein. Im Unterschied zur vorherigen Situation laufen nun beide Phasenwinkeldifferenzen annähernd deckungsgleich in $\delta_{12}^*=6.76754$ ein. Infolgedessen finden die Richtungswechsel der transferierten Leistung etwa zu gleichen Zeitpunkten statt. Die Leistungsausschläge im M30 sind dabei geringer, da durch den Spannungsabfall abgemildert.

Zuletzt sei in Abb. 5.28 noch ein Beispiel für eine Störung in Form einer zeitweiligen Abnahme des Inputs an mechanischer Leistung gezeigt. Zwischen $\tau=10$ und $\tau=11$ fällt die Einspeisung komplett aus, d. h. $A_{1,st}=0$. Die Spannung steigt hierbei an, die Phasenwinkeldifferenz und die transferierte Leistung nehmen wie im klassischen Fall ab.

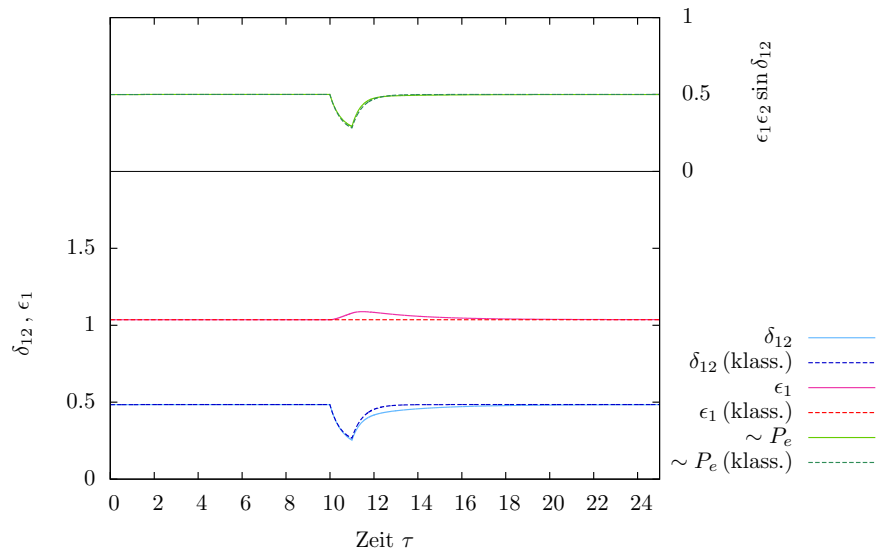


Abbildung 5.28.: Reaktion auf eine Störung, verglichen mit der des klassischen Systems. Phasenwinkeldifferenzen δ_{12} , Spannung ϵ_1 und $\epsilon_1\epsilon_2 \sin \delta_{12} \sim P_e$ in Abhängigkeit der Zeit τ . $A_1=0.5$; $A_2=-0.5$; $B_1=B_2=1$; $C_1=C_2=1$; $F_1=F_2=-1.85$; $D=1$. Für $10 \leq \tau \leq 11$ Störung des Systems mit $A_{1,st}=0$.

Die Reaktion auf eine oben beschriebene Störungen kann man analog zum vorigen Unterkapitel wie folgt betrachten: Das System ruht im dreidimensionalen $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_{12})$ -Phasenraum in seinem Fixpunkt $\epsilon_{1,2}^*=1.03624$, $\delta_{12}^*=0.48435$. Eine Störung verschiebt es – je nach Art, d. h. Paramatereinstellung während der Störung, und Dauer – im Phasenraum. Im Anschluss an die Störung, also wieder unter den anfänglichen Parametern, läuft die Trajektorie erneut in einen Fixpunkt mit $\epsilon_{1,2}^*=1.03624$ und $\delta_{12}^*=0.48435+2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6. Zusammenfassung und Ausblick

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage, wie im Rahmen der Theoretischen Nichtlinearen Physik zur Problematik der Stabilität von elektrischen Energieversorgungsnetzen beigetragen werden kann. Dies zog die Einarbeitung in die Themenfelder Graphen und Netzwerke, Synchronisation, speziell das Kuramoto-Modell, sowie in die mathematische Beschreibung von Stromnetzen und Synchronmaschinen vonseiten der Elektro- und Energietechnik nach sich. Als Folge dieser breiten Einarbeitung ergaben sich am Rande des Weges hin zum schlussendlich zugrundegelegten Modell einige weitere, interessante Anknüpfungspunkte.

Die folgenden Ausführungen gliedern sich in zwei Teile. Zuerst werden die Inhalte der Kapitel 1 bis 4 rekapituliert, wobei der rote Faden der Modellherleitung noch einmal herausgestellt und die sich an verschiedenen Stellen ergebenden Anknüpfungspunkte genannt werden. Im zweiten Teil werden die Ergebnisse aus Kapitel 5 zusammengefasst und ein Ausblick auf die Modellierung größerer Netze mittels des hier verwendeten Modells gegeben.

Das erste Kapitel begann mit einer Einführung in die Graphentheorie, im Zuge derer einige für die Beschreibung elektrischer Energieversorgungsnetze grundlegende Termini eingeführt wurden, insbesondere der Begriff der gewichteten Laplaceschen Matrix. Als solche stellte sich in Kapitel 4 die für die Stromnetzrepräsentation bedeutende Admittanzmatrix heraus. Im Anschluss daran wurde ein Einblick in das Themenfeld komplexer Netzwerke gegeben, indem die Beschreibungswerkzeuge und Phänomene Knotengradverteilung, Clusterbildung und Kleine-Welt-Eigenschaft erläutert und die drei Standardalgorithmen für die Erzeugung synthetischer Netzwerke – das ER-Zufallsnetz, das WS-Kleine-Welt-Netz und das skalenfreie BA-Netz – präsentiert wurden. Kapitel 3 ging auf die netzwerktheoretischen Eigenschaften realer Stromnetze ein und wies auf die Unzulänglichkeiten der drei genannten Modelle für deren Modellierung hin. Offengeblieben ist bis dato die Entwicklung eines Netzwerk-Algorithmus, welcher die Eigenschaften moderner (oder besser: zukünftiger) dezentraler Stromnetze wiedergibt. Darüber hinaus ist von Interesse, ob es im Hinblick auf Netzsynchronisation und -stabilität günstige Netztopologien gibt. Einer der hierbei zu beachtenden Aspekte ist die in Kapitel 1 erörterte Robustheit des Netzes gegenüber der Entfernung von Knoten und Verbindungen, was übertragen auf Stromnetze dem Defekt bzw. Ausfall von Generatoren und Lasten bzw. Leitungen entspricht.

Kapitel 2 erläuterte zuerst das Phänomen Synchronisation und stellte dann mit dem Kuramoto-Modell ein Modell für die Phasendynamik einer Oszillatorpopulation unter globaler Jeder-mit-jedem-Kopplung vor, welches einen Phasenübergang zwischen inkohärentem und partiell synchronisiertem Zustand beinhaltet. Anhand der eigenen Simulationsergebnisse wurde das Verhalten des Systems veranschaulicht und die qualitativen Unterschiede zwischen endlichen Populationen und dem Mean-Field-Fall aufgezeigt. Die mit zunehmender Populationsgröße N abnehmenden und für festes N im Bereich der kritischen Kopplung erhöhten Fluktuationen wurden durch die Simulationsergebnisse wiedergegeben. Was die Abhängigkeit des Kohärenzmaßes r vom Kopplungsparameter K betrifft, zeigte sich, dass sich für große Populationen annähernd der $r(K)$ -Verlauf des Mean-Field-Falls ergibt. Zudem war zu beobachten, wie mit abnehmender Oszillatorenzahl die scharfe Bifurkation mehr und mehr verwischt und der Verlauf im Bereich der kritischen Kopplung stark von der spezifischen Wahl der natürlichen Frequenzen der Oszillatoren abhängt. Kapitel 2 schloss mit einem Überblick über Variationen des Kuramoto-Modells. Hierauf nahm das Zwischenfazit des klassischen Modells in Kapitel 4 wieder Bezug, als es die Swing-Gleichungen als eine Modifikation des Kuramoto-Modells identifizierte.

Kapitel 3 schob eine kurze Erläuterung des Aufbaus realer Stromnetze ein, um im Anschluss den Begriff der Stromnetzstabilität zu definieren, zu erläutern und in Rotorwinkel-, Spannungs- und Frequenzstabilität zu kategorisieren. Eine wichtige Erkenntnis hieraus lautete, dass Rotorwinkel- und Spannungsstabilität keine separat zu behandelnden, sondern gekoppelte Probleme sind.

In Kapitel 4 wurde schließlich das Modell eines Netzwerks von Synchronmaschinen hergeleitet. Dafür mussten zunächst die drei Stränge Netzwerkrepräsentation mittels Admittanzmatrix, (Wirk-)Leistungsfluss und Knotendynamik zusammengeführt werden. Die Aufstellung der Admittanzmatrix Y , welche die Knotenspannungen \mathbf{U} und -ströme \mathbf{I} eines Stromnetzes verknüpft, konnte, Kenntnis des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Regeln vorausgesetzt, nachvollzogen werden. Aus den Knoten-Netzwerk-Gleichungen $\mathbf{I} = Y\mathbf{U}$ wurde die zwischen zwei Knoten i und j transferierte elektrische Leistung berechnet, welche im Fall eines verlustfreien Netzes eine sinusförmige Abhängigkeit von der Phasenwinkeldifferenz δ_{ij} der beiden Knoten aufweist. Weiter wurde vorgestellt, wie via Kron-Reduktion der Admittanzmatrix bzw. des korrespondierenden Graphen die passiven Knoten aus dem Netz eliminiert werden können. Als Knoten des daraus entstehenden reduzierten Netzes, die allesamt elektrische Leistung injizieren oder aufnehmen, wurden Prototypen von energieumwandelnden Einheiten gewählt: Synchrongeneratoren und -motoren. Die Swing-Gleichung, welche die mechanische Rotordynamik einer solchen Maschine wiedergibt, leitet sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für einen Rotator ab. Aufgrund der Proportionalität von mechanischem Rotorwinkel δ_m und elektrischem Phasenwinkel δ_e konnte die Swing-Gleichung auch mit Phasenwinkeln formuliert werden.

Das Zwischenfazit führte mit dem bis hierhin Behandelten zunächst zum klassischen

Modell. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen stellen eine Modifikation des Kuramoto-Modells dar und schlagen somit eine Brücke zum Phänomen Synchronisation und zu Kapitel 2.

Das klassische Modell bzw. die Swing-Gleichungen sind schon in einigen wenigen Publikationen aus dem Bereich der Nichtlinearen Dynamik explizit mit dem Kuramoto-Modell in Verbindung gebracht [DB10b, DB10a, DB10c] respektive zur Simulation einiger gekoppelter Synchronmaschinen herangezogen worden [SMH08, FNP08]. Allerdings geht das klassische Modell von konstanten Spannungen aus und ist unter anderem deswegen nur für einen sehr kleinen Zeitbereich (von maximal einer Sekunde) gültig und damit für die Simulation längerer Zeiträume ungeeignet.

Deswegen wurde das Modell in einem nächsten Schritt um Differentialgleichungen für die Spannungsdynamik erweitert. Ausgehend von den Grundgleichungen für das elektrodynamische Verhalten einer Synchronmaschine (aufgeführt im Appendix) wurde ein Modell hergeleitet, welches als Modell dritter Ordnung bekannt ist. Die letztendlich verwendete Form legt offen, wie die Dynamik der Spannung einer Synchronmaschine unter anderem von den Phasenwinkeldifferenzen zu den adjazenten Maschinen abhängt. Das Modell beinhaltet somit die Kopplung zwischen Rotorwinkel- und Spannungsstabilität¹, ist aber gleichzeitig so weit reduziert, dass sich auf seiner Basis auch komplexe Stromnetze handhaben lassen.

In Kapitel 5 wurde ein überdämpftes Zwei-Maschinen-System, bestehend aus einem Generator und einem Motor, untersucht. Zuerst wurde dabei in Anlehnung an das klassische Modell der Fall konstanter Spannungen betrachtet, stationäre Zustände hierfür bestimmt und die Reaktion des Systems auf verschiedene Störungen in Form von temporären Erhöhungen der eingespeisten mechanischen Leistung gezeigt. Danach fanden die DGLen für die Spannungsdynamik Berücksichtigung (M3O). Das System wurde für verschiedene Parametereinstellungen vor allem im Hinblick auf stabile, stationäre Zustände betrachtet. Weiter wurde die Reaktion des M3O-Systems auf verschiedene Störungen präsentiert und in puncto Rotorwinkel- und Spannungsstabilität sowie Leistungsfluss mit dem klassischen Fall verglichen. Es zeigte sich, dass – vor allem für größere Störungen – das Verhalten des M3O-Systems während und nach der Störung signifikant von dem des klassischen Modells abweicht.

An die vorliegende Arbeit anschließend kann zunächst eine genaue Eingrenzung der Parameterkonfigurationen, für welche stationäre Zustände existieren, erfolgen – auch für nicht-identische Maschinen und Erdungen (d. h. $B_1 \neq B_2$ etc.).

¹Das Phänomen Spannungsstabilität ist damit nicht vollständig erfasst. Spannungsstabilität hängt u. a. auch mit dem Fluss von Blindleistung zusammen, welcher in der vorliegenden Arbeit völlig vernachlässigt wird. Betrachtungsweisen, die beim Leistungsfluss ansetzen, lassen dabei aber die Verknüpfung mit der Rotorwinkelstabilität und die Dynamik der beteiligten Maschinen außer Acht und sind in dieser Hinsicht unzureichend [H⁺04, VSP96, And08].

Hiernach kann zur Simulation zunächst kleinerer Netze mit $N > 2$ Synchronmaschinen übergegangen werden. Dabei stellt sich auch die Frage, wie ein Wiederaufgreifen des Trägheitsterms das Systemverhalten beeinflusst.

Zusätzlich zu den Synchrongeneratoren und -motoren könnten intelligente Einheiten in das Netz integriert werden, welche zwischen Konsumenten- und Produzentenstatus wechseln bzw. ihren momentanen Verbrauch den jeweiligen Gegebenheiten anpassen und zwar mit dem Ziel, Energieerzeugung und -verbrauch zu homogenisieren und Netzstabilität zu gewährleisten. Die Rolle solcher Einheiten soll in einem zukünftigen Netz (Smart Grid) u. a. von Elektro-Autos eingenommen werden. Es handelt sich dabei wohlgerne nicht um Synchronmaschinen, sondern um Einheiten mit Batteriecharakter.

Mit Blick auf Erneuerbare Energien ist ein weiterer interessanter Aspekt die Auswirkung von volatilen Energiequellen auf die Netzstabilität. Die zeitlich variierende Einspeisung von z. B. Windkraftanlagen kann über eine fluktuierende mechanische Leistung $P_m(t)$ der betreffenden Generatoren modelliert werden.

A. Appendix

A.1. Formelsammlung Wechselstrom

- komplexe Spannung:

$$U = |U|e^{i\delta_U}$$

- komplexer Strom:

$$I = |I|e^{i\delta_I}$$

- Scheinleistung:

$$S = U I^* = P + iQ$$

- Wirkleistung:

$$P = \operatorname{Re}(S)$$

- Blindleistung:

$$Q = \operatorname{Im}(S)$$

- Impedanz (oder: komplexer Widerstand)

$$Z = \frac{|U|}{|I|}e^{i(\delta_U - \delta_I)} \quad ; \quad Z = R + iX$$

R : Wirkwiderstand/Resistanz

X : Blindwiderstand/Reaktanz

- Scheinwiderstand:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

- Admittanz (oder: komplexer Leitwert)

$$Y = \frac{|I|}{|U|}e^{i(\delta_I - \delta_U)} = \frac{1}{Z} \quad ; \quad Y = G + iB = Z^{-1}$$

G : Wirkleitwert/Konduktanz

B : Blindleitwert/Suszeptanz

- Scheinleitwert:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

A.2. Mathematische Beschreibung von Synchronmaschinen

A.2.1. Die Grundgleichungen im Stator- und Rotorsystem

Um das elektromagnetische Verhalten einer Synchronmaschine zu beschreiben, betrachtet man die Dynamik und die Wechselwirkung der beteiligten Stator- und Rotorkreise (siehe Abb. A.1).¹

Die Statorkreise sind die Drei-Phasen-Ankerwicklungen A, B und C. Zu den Rotorkreisen zählen neben der von einem Gleichstrom durchflossenen Feldspule f die zwei Dämpferspulen D (auf der d-Achse) und Q (auf der q-Achse).

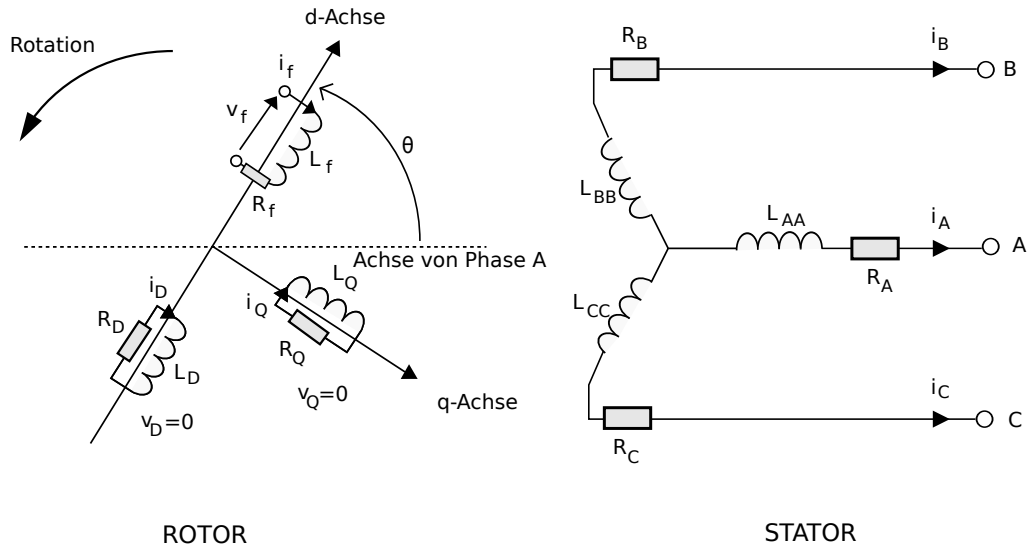


Abbildung A.1.: Stator- und Rotorkreise einer Synchronmaschine. A, B, C: Statorwicklungen; f: Feldwicklung; D: Dämpferwicklung d-Achse; Q: Dämpferwicklung q-Achse; $\theta = \angle(\text{A-Achse}, \text{d-Achse})$.

¹Die folgenden Ausführungen orientieren sich in inhaltlichem Aufbau und Nomenklatur an [MBB08] und [KBL94], sie finden sich in ähnlicher Form in [AF03, BV00, HD05]. Eine ausführliche Darstellung aller Umformungsschritte und Vereinfachungen inklusive technischer Erläuterungen würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit übersteigen. Sie beschränkt sich aus diesem Grund auf eine Skizzierung der Grundideen und -gleichungen. Der darüber hinaus interessierte Leser sei auf die Quellen verwiesen.

Auftretende Größen:

- v_A, v_B, v_C : instantane Statorspannungen der Phasen A, B, C
- i_A, i_B, i_C : instantane Statorströme der Phasen A, B, C
- v_f : Feldspannung
- i_f, i_D, i_Q : Ströme im Feld- und in den Dämpferkreisen
- L_{AA}, L_{BB}, L_{CC} : Selbstinduktivitäten der Statorwindungen
- L_{AB}, L_{BC}, L_{CA} : wechselseitige Induktivitäten der Statorwindungen
- L_{Af}, L_{AD}, L_{AQ} : wechselseitige Induktivitäten zwischen den Rotorwindungen und Statorspule A (B und C analog)
- L_{ff}, L_{DD}, L_{QQ} : Selbstinduktivitäten der Rotorkreise
- L_{fD}, L_{DQ}, L_{fQ} : wechselseitige Induktivitäten der Rotorwindungen
- $R_A, R_B, R_C, R_f, R_D, R_Q$: Ohmsche Widerstände
- $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C, \Psi_f, \Psi_D, \Psi_Q$: magnetische Flüsse

Die Dynamik der Synchronmaschine wird gemäß den aus der Elektrodynamik bekannten Gesetzen (Maxwell, Kirchhoff, Ohm) vollständig wiedergegeben durch die folgenden Grundgleichungen.²

Grundgleichungen im Referenzsystem des Stators/ABC-System:

Spannungen:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v_A &= -\frac{d\Psi_A}{dt} - R_A i_A, \\
 v_B &= -\frac{d\Psi_B}{dt} - R_B i_B, \\
 v_C &= -\frac{d\Psi_C}{dt} - R_C i_C.
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

²Unter Berücksichtigung einiger vereinfachender Annahmen, siehe [MBB08, KBL94].

$$\begin{aligned}
 -v_f &= -\frac{d\Psi_f}{dt} - R_f i_f \\
 0 &= -\frac{d\Psi_D}{dt} - R_D i_D \\
 0 &= -\frac{d\Psi_Q}{dt} - R_Q i_Q
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

In kompakter Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{ABC} \\ \mathbf{v}_{fDQ} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{ABC} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{ABC} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_{ABC} \\ \Psi_{fDQ} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Magnetische Flüsse:

Die Stator- und Rotorwindungen sind gemäß

$$\begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Af} & L_{AD} & L_{AQ} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Bf} & L_{BD} & L_{BQ} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Cf} & L_{CD} & L_{CQ} \\ L_{fA} & L_{fB} & L_{fC} & L_{ff} & L_{fD} & L_{fQ} \\ L_{DA} & L_{DB} & L_{DC} & L_{Df} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{QA} & L_{QB} & L_{QC} & L_{Qf} & L_{QD} & L_{QQ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

magnetisch gekoppelt.

Kompakt:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{ABC} \\ \Psi_{fDQ} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{L}_{SR} \\ \mathbf{L}_{SR}^T & \mathbf{L}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{ABC} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Die Selbstinduktivitäten L_{AA} , L_{BB} und L_{CC} lassen sich mithilfe geometrischer Überlegungen bezüglich des Magnetfelds in einen konstanten und einen winkelabhängigen Anteil zerlegen:

$$\begin{aligned}
 L_{AA} &= L_S + \Delta L_S \cos 2\theta, \\
 L_{BB} &= L_S + \Delta L_S \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \\
 L_{CC} &= L_S + \Delta L_S \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right).
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 L_{AB} &= L_{BA} = -M_s - \Delta L_S \cos\left(2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right), \\
 L_{BC} &= L_{CB} = -M_s - \Delta L_S \cos\left(2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right), \\
 L_{CA} &= L_{AC} = -M_s - \Delta L_S \cos\left(2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)\right).
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 L_{Af} &= L_{fA} = M_f \cos \theta \\
 L_{AD} &= L_{DA} = M_D \cos \theta \\
 L_{AQ} &= L_{QA} = M_Q \sin \theta
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Für die entsprechenden Induktivitäten der Phasen B und C ist θ durch $(\theta - \frac{2\pi}{3})$ bzw. $(\theta + \frac{2\pi}{3})$ zu ersetzen.

Die wechselseitigen Induktivitäten und Selbstinduktivitäten der Rotorspulen sind unabhängig von der Rotorposition konstant. Aufgrund der Orthogonalität von d- und q-Achse verschwinden ihre wechselseitigen Induktivitäten:

$$L_{fQ} = L_{Qf} = 0 \quad ; \quad L_{DQ} = L_{QD} = 0. \tag{A.9}$$

dq0- oder Parks-Transformation, Grundgleichungen im Rotorsystem

Zwecks besserer Handhabung werden die Gleichungen vom Statorsystem (ABC) in das Rotorsystem (dq0) transformiert.

Physikalisch kann diese Transformation so interpretiert werden: Der Strom i_d/i_q kann als fiktiver Strom in einer sich mit der Rotorgeschwindigkeit drehenden Ankerwicklung (so, dass deren Achse mit der d-Achse/q-Achse zusammenfällt) angesehen werden. Die Ströme sind dabei derart beschaffen, dass sie das gleiche Magnetfeld erzeugen wie die tatsächlichen Ankerströme.

Zusätzlich zur d- und q-Komponente muss eine dritte Komponente i_0 , die sogenannte *Null-Sequenz-Komponente*, eingeführt werden, welche ihrerseits kein zusätzliches Feld im Luftspalt erzeugen darf:

$$i_0 = \beta_0(i_A + i_B + i_C). \tag{A.10}$$

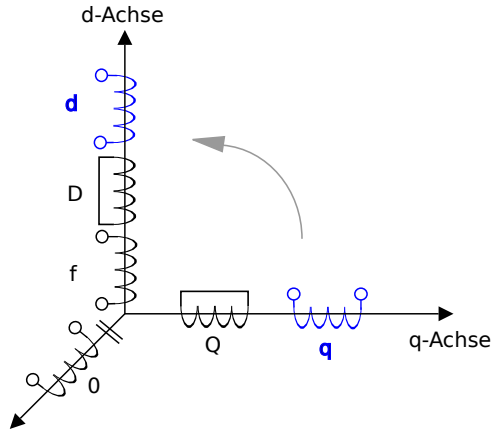


Abbildung A.2.: Repräsentation der Synchronmaschine im dq0-System: Feldspule f, Dämpferwicklungen D und Q, je eine fiktive Spule (blau) auf der q- und d-Achse; 0-Achse mit separater Spule 0.

Transformation der Ströme in Matrixschreibweise³:

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_0 & \beta_0 \\ \beta_d \cos \theta & \beta_d \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \beta_d \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \beta_q \sin \theta & \beta_q \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \beta_q \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Kurz:

$$\mathbf{i}_{0dq} = \mathbf{W} \mathbf{i}_{ABC}. \quad (\text{A.12})$$

W ist invertierbar, sodass vice versa gilt:

$$\mathbf{i}_{ABC} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{i}_{0dq}. \quad (\text{A.13})$$

Die Transformation ist wie physikalisch zu erwarten *leistungsinvariant* (was durch die Orthogonalität von W gewährleistet ist). Für die vom Generator abgegebene Drei-Phasen-Leistung gilt:

$$p_g = v_A i_A + v_B i_B + v_C i_C = v_0 i_0 + v_d i_d + v_q i_q. \quad (\text{A.14})$$

Die **Statorspannungen** in (dq0)-Komponenten lauten:

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{d\Psi_0}{dt} - R i_0, \\ v_d &= -\frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \frac{d\theta}{dt} - R i_d, \\ v_q &= -\frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \frac{d\theta}{dt} - R i_q. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

³Bemerkung: Die Wahl der Koeffizienten $\beta_0, \beta_d, \beta_q$ in der Transformation ist nicht einheitlich. In [MBB08]: $\beta_d = \beta_q = \sqrt{\frac{2}{3}}, \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dies führt zu einer orthogonalen Matrix $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}^{-1}$.

Die $\Psi \frac{d\theta}{dt}$ -Terme resultieren aus dem Übergang von einem stationären in ein rotierendes System.

Die **Rotorspannungen** waren bereits in (dq)-Koordinaten formuliert:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{d\Psi_f}{dt} + R_f i_f, \\ 0 &= \frac{d\Psi_D}{dt} + R_D i_D, \\ 0 &= \frac{d\Psi_Q}{dt} + R_Q i_Q. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Für die **magnetischen Flüsse** gilt:

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_f & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_f & 0 & L_f & L_{fD} & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & L_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

mit

$$L_0 = L_S - 2M_S, \quad L_d = L_S + M_S + \frac{3}{2}\Delta L_S, \quad L_q = L_S + M_S - \frac{3}{2}\Delta L_S \quad (\text{A.18})$$

und $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Alle Einträge der Induktivitätsmatrix sind konstant – ein wesentlicher Vorteil der Transformation – und man kann (A.17) in drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= L_0 i_0, \\ \begin{pmatrix} \Psi_d \\ \Psi_f \\ \Psi_D \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} L_d & kM_f & kM_D \\ kM_f & L_f & L_{fD} \\ kM_D & L_{fD} & L_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Psi_q \\ \Psi_Q \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} L_q & kM_Q \\ kM_Q & L_Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_q \\ i_Q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

fassen. Diese entsprechen drei voneinander unabhängigen Mengen magnetisch gekoppelter Spulen: die Feldspule f, die Dämpferspule D und die fiktive Spule d auf der d-Achse; die Dämpferspule Q und die fiktive Spule q auf der q-Achse sowie die separate fiktive Null-Sequenz-Spule auf der 0-Achse (siehe Abb. A.2: $d \perp q \perp 0$ -Achse).

Jetzt können noch die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

- Die Änderungen der Rotorgeschwindigkeit haben keine signifikanten Auswirkungen auf die Spannungen: $\omega \approx \omega_s$.

- $\dot{\Psi}_d$ und $\dot{\Psi}_q$ sind klein gegenüber den $\omega\Psi_{d,q}$ -Beiträgen.
- Im Fall balancierter Operation verschwindet die Gleichung für die Null-Sequenz-Komponente.

Damit verbleiben aus (A.15) und (A.16):

$$\begin{aligned}
 v_d &\approx -Ri_d - \omega\Psi_q, \\
 v_q &\approx -Ri_q + \omega\Psi_d, \\
 \dot{\Psi}_f &= -R_f i_f + v_f, \\
 \dot{\Psi}_D &= -R_D i_D, \\
 \dot{\Psi}_Q &= -R_q i_Q.
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Zusammen mit den algebraischen Gleichungen für die magnetischen Flüsse bilden sie ein vollständiges Modell des Synchrongenerators.

A.2.2. Die charakteristischen Operationszustände

Reaktanzen/Zeitkonstanten in den charakteristischen Generatorzuständen

Bezüglich des Betriebs eines Synchrongenerators werden drei Zustände unterschieden: der subtransiente, der transiente und der stationäre (vgl. Kap. 4.4). Mit diesen sind charakteristische Generatorinduktivitäten/-reaktanzen und Zeitkonstanten verknüpft⁴:

- Stationärer Zustand: *synchrone Induktivitäten/Reaktanzen*

$$L_d/X_d \quad , \quad L_q/X_q$$

- Transienter Zustand:

transiente Induktivitäten/Reaktanzen:

$$L'_d = L_d - \frac{k^2 M_f^2}{L_f}, \quad X'_d = \omega L'_d$$

$$L'_q = L_q, \quad X'_q = \omega L'_q = X_q$$

transiente Zeitkonstante:

$$T'_{d0} = \frac{L_f}{R_f}$$

⁴Herleitung: siehe [MBB08].

- Subtransienter Zustand: siehe [MBB08]⁵

Stationäre Operation

Im stationären Betrieb ist der Strom in der Feldwindung konstant, für die Dämpferströme gilt: $i_D = i_Q = 0$. Damit folgt

$$\Psi_d = L_d i_d + kM_f i_f \quad , \quad \Psi_q = L_q i_q \quad (\text{A.21})$$

sowie

$$v_d = -Ri_d - X_q i_q \quad , \quad v_q = -Ri_q + X_d i_d + e_q \quad (\text{A.22})$$

mit der neu eingeführten Größe

$$e_q = \omega kM_f i_f = \omega \frac{kM_f}{L_f} \Psi_{f(i_d=0)} . \quad (\text{A.23})$$

Transiente Operation

Im transienten Zustand hat der magnetische Fluss des Ankers die Dämpferspulen durchdrungen und die Dämpferströme sind auf geringe Werte abgefallen, sodass die entsprechenden Gleichungen beiseitegelassen werden können. Es bleibt:

$$\begin{pmatrix} \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & kM_f \\ kM_f & L_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_f \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_q = L_q i_q , \quad (\text{A.24})$$

$$\dot{\Psi}_f = v_f - R_f i_f \quad ; \quad (\text{A.25})$$

$$v_d = -Ri_d - \omega \Psi_q \quad , \quad v_q = -Ri_q + \omega \Psi_d . \quad (\text{A.26})$$

Für die q-Komponente der Ankerspannung lässt sich damit schreiben:

$$v_q = -Ri_q + \omega \left[i_d \left(L_d - \frac{k^2 M_f^2}{L_f} \right) + \frac{kM_f}{L_f} \Psi_f \right] = -Ri_q + X'_d i_d + e'_q . \quad (\text{A.27})$$

Die neu eingeführte Größe

$$e'_q = \omega \frac{kM_f}{L_f} \Psi_f \quad (\text{A.28})$$

wird als *transiente elektromotorische Kraft/Spannung der q-Achse* bezeichnet.

Da sich auf der q-Achse keine Feldwindungen befinden, gilt $X_q = X'_q$ und somit

$$v_d = -Ri_d - X'_q i_q . \quad (\text{A.29})$$

⁵Da der subtransiente Zustand für das in dieser Arbeit verwendete Modell nicht relevant ist, entfallen die Ausführungen zu Reaktanzen, Zeitkonstanten und Operation.

Um dem Abschirmungseffekt auf der q-Achse, den viele Generatoren mit Rotoren aus beruhigtem Stahl aufweisen, Rechnung zu tragen, führt man eine weitere, kurzgeschlossene Spule g auf der Achse ein. Mit dieser gilt:

$$\begin{pmatrix} \Psi_q \\ \Psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_q & kM_g \\ kM_g & L_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_q \\ i_g \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{\Psi}_g = -R_g i_g. \quad (\text{A.30})$$

Damit erhält man analog zur d-Achse für die Spannung v_d den Ausdruck

$$v_d = -R i_d - X'_q i_q + e'_d \quad (\text{A.31})$$

mit

$$e'_d = -\omega \frac{kM_g}{L_g} \Psi_g. \quad (\text{A.32})$$

Führt man weiter

$$e_f = \omega \frac{kM_f}{R_f} v_f \quad (\text{A.33})$$

ein, ergeben sich für die Dynamik der transienten Spannungen e'_q und e'_d die DGLen

$$\dot{e}'_q = \frac{e_f - e'_q + i_d(X_d - X'_d)}{T'_{d0}} \quad (\text{A.34})$$

sowie

$$\dot{e}'_d = \frac{-e'_d - i_d(X_q - X'_q)}{T'_{q0}} \quad \text{für } X_q \neq X'_q, \quad \text{sonst: } e'_d = 0. \quad (\text{A.35})$$

A.2.3. Zusammenhang zwischen Generator- und Netzsystem

Im stationären Zustand gilt für die Spannungen der Phasen A, B und C:

$$v_A = \sqrt{2}V_g \sin(\omega t), \quad v_B = \sqrt{2}V_g \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}), \quad v_C = \sqrt{2}V_g \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}), \quad (\text{A.36})$$

mit $\theta = \omega t + \delta$. Via Park-Transformation ergibt sich hieraus:

$$v_d = -\sqrt{3}V_g \sin \delta \quad ; \quad v_q = \sqrt{3}V_g \cos \delta. \quad (\text{A.37})$$

Die Anschlussspannung V_g kann in zwei orthogonale Anteile entlang der d- und q-Achse zerlegt werden:

$$\mathbf{V}_g = \begin{pmatrix} V_q \\ V_d \end{pmatrix} \quad ; \quad V_q = V_g \cos \delta \quad ; \quad V_d = -V_g \sin \delta. \quad (\text{A.38})$$

Es gilt somit:

$$v_d = \sqrt{3}V_d \quad ; \quad v_q = \sqrt{3}V_q. \quad (\text{A.39})$$

Analog können die Ströme i_d und i_q sowie die Spannungen e_d , e_q , e'_d und e'_q durch die orthogonalen Phasengrößen I_d und I_q , E_d , E_q , E'_d und E'_q ersetzt werden.⁶

⁶Zur Rechtfertigung des Transfers auf nicht-stationäre Betriebszustände siehe [MBB08].

A.2.4. Leistung

Für die Anschlussleistung gilt:

$$P_g = v_d i_d + v_q i_q = 3(V_d I_d + V_q I_q). \quad (\text{A.40})$$

Die sogenannte Luftspaltleistung oder elektrische Leistung P_e ergibt sich hieraus durch Addition der Ohmschen Verluste:

$$P_e = 3 (V_d I_d + V_q I_q + (I_d^2 + I_q^2) R). \quad (\text{A.41})$$

A.2.5. Vereinfachte Modellgleichungen

Aus A.2 folgt für die Dynamik der transienten bzw. subtransienten Spannungen E'_q/E'_d bzw. E''_q/E''_d hinter den transienten bzw. subtransienten Reaktanzen X'_d und X'_q bzw. X''_d und X''_q :

$$T''_{d0} \dot{E}''_q = E'_q - E''_q + I_d (X'_d - X''_d) \quad (\text{A.42})$$

$$T''_{q0} \dot{E}''_d = E'_d - E''_d - I_q (X'_q - X''_q) \quad (\text{A.43})$$

$$T'_{d0} \dot{E}'_q = E_f - E'_q + I_d (X_d - X'_d) \quad (\text{A.44})$$

$$T'_{q0} \dot{E}'_d = -E'_d - I_q (X_q - X'_q) \quad (\text{A.45})$$

Komplettiert wird diese Modellierung der Synchronmaschine durch die Swing-Gleichungen.

Im akkuratesten Modell, dem sogenannten *Modell sechster Ordnung*, werden alle sechs DGLen⁷ berücksichtigt. Durch vereinfachende Annahmen kann deren Zahl sukzessive reduziert werden. Für das *Modell dritter Ordnung* vernachlässigt man die Wirkung der Dämpferspulen – dies kann mittels einer Erhöhung der Dämpfungskonstanten D in der Swing-Gleichung ausgeglichen werden) – und beseitigt damit die DGLen für die subtransienten Spannungen. Darüber hinaus nimmt man $E'_d = 0$ und $X'_q = X_q$ an, sodass die Synchronmaschine letztlich durch das folgende Modell beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega, \\ M\dot{\omega} &= -D\omega + P_m - P_e, \\ T'_{d0} \dot{E}'_q &= E_f - E'_q + I_d (X_d - X'_d). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Bemerkung: Eine weitere Reduktion, nämlich die Annahme einer konstanten Spannung E'_q hinter einer transienten Reaktanz X'_d , führt zum klassischen Modell (in diesem Kontext das *Modell zweiter Ordnung*).

⁷Die Swing-Gleichung entspricht zwei DGLen erster Ordnung.

A.3. Wechsel des Referenzsystems: Netzwerksystem ↔ dq-Generatorsystem

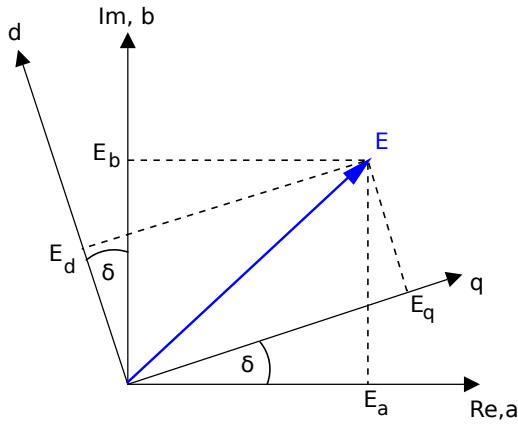


Abbildung A.3.: Relative Position von (a,b)-Netzwerksystem und (d,q)-Generatorsystem. Die Achsen sind um den Rotorwinkel δ gegeneinander gedreht.

Die in den Netzwerkgleichungen auftretenden Spannungen sind in komplexen Netzwerkkoodinaten (a,b) formuliert. Für die in Abb. A.3 eingezeichnete Spannung gilt:

$$E = E_a + iE_b. \quad (\text{A.47})$$

Die Transformation in das (d,q)-System eines Generators erfolgt mittels

$$\begin{pmatrix} E_d \\ E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta & \cos \delta \\ \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

Die entsprechende Rücktransformation lautet:

$$\begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta & \cos \delta \\ \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_d \\ E_q \end{pmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Die anderen Phasoren lassen sich analog transformieren.

Man beachte: Die Transformation hängt vom Rotorwinkel einer Maschine ab, jede Synchronmaschine besitzt ihr individuelles (d,q)-Koordinatensystem.

A.4. Kron-Reduktion von Matrizen und Graphen

Die Kron-Reduktion von Matrizen stellt ein gebräuchliches Werkzeug in der Stabilitätsanalyse von elektrischen Netzwerken dar, mit dessen Hilfe passive Knoten ($\sum I_k = 0$) eliminiert werden können. Im Folgenden soll der zugrundeliegende Prozess definiert und aus der graphentheoretischen Perspektive beleuchtet werden.[DB11a]

Kron-Reduktions-Prozess (mit Blick auf elektrische Netzwerke)

Gegeben sei ein elektrisches Netz mit den Zweigkonduktanzen A_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) und den Querkonduktanzen⁸ A_{ii} ($i = 1, \dots, n$). Dann ist der entsprechende Graph $G(I_n, E)$ ein nicht-gerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph mit der zugehörigen Adjazenzmatrix $A(G)$, der Laplaceschen Matrix $L(A)$ und der Schlingen-Laplace-Matrix $Q(A)$ ⁹. Sei $\alpha \subsetneq I_n$ mit $|\alpha| \geq 2$ die Untermenge der aktiven Knoten und $\beta = \{1, \dots, n\} \setminus \alpha$ die der passiven.

Nach entsprechender Umordnung kann man die Netzwerk-Gleichung $\mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{V}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_\alpha \\ \mathbf{I}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Q}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Q}_{\beta\alpha} & \mathbf{Q}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_\alpha \\ \mathbf{V}_\beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

angeben. Gauß'sche Eliminierung der passiven Knoten führt auf

$$\mathbf{I}_\alpha + \mathbf{Q}_{\text{begl}} \mathbf{I}_\beta = \mathbf{Q}_{\text{red}} \mathbf{V}_\alpha, \quad (\text{A.51})$$

bzw. für $\mathbf{I}_\beta = (0, \dots, 0)$

$$\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{Q}_{\text{red}} \mathbf{V}_\alpha \quad (\text{A.52})$$

mit der reduzierten Matrix

$$\mathbf{Q}_{\text{red}} = \mathbf{Q}_{\alpha\alpha} - \mathbf{Q}_{\alpha\beta} \mathbf{Q}_{\beta\beta}^{-1} \mathbf{Q}_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}^{|\alpha| \times |\alpha|} \quad (\text{A.53})$$

und der begleitenden Matrix

$$\mathbf{Q}_{\text{begl}} = -\mathbf{Q}_{\alpha\beta} \mathbf{Q}_{\beta\beta}^{-1} \in \mathbb{R}^{|\alpha| \times (n-|\alpha|)}. \quad (\text{A.54})$$

Die reduzierte Matrix ist wohldefiniert und entspricht ihrerseits einer Schleifen-Laplace-Matrix. Sie induziert folglich wiederum einen ungerichteten, gewichteten Graphen. Somit kann die Matrixreduktion auch als *Graphenreduktion* $G \rightarrow G_{\text{red}}$ verstanden werden. Der korrespondierende Graphenreduktionsprozess besitzt die folgenden topologischen Eigenschaften.

⁸Die Querkonduktanz A_{ii} verbindet den i -ten Knoten mit der Erde (Nullpotential).

⁹ $Q(A) = L(A) + \text{diag}(\{A_{ii}\}_{i=1}^n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erweitert die Laplacesche Matrix insofern, als sie Schlingen berücksichtigt.

Topologische Eigenschaften

- Zwei Knoten $i, j \in \alpha$ sind dann und nur dann in G_{red} durch eine Ecke verbunden, wenn in G ein Weg existiert, dessen Knoten allesamt Elemente der Menge $\{i, j\} \cup (I_n \setminus \alpha)$ sind.
- Ein Knoten $i \in \alpha$ weist in G_{red} dann und nur dann eine Schlinge auf, wenn er eine Schlinge in G aufweist oder es einen Weg von i zu einem schlingenbehafteten Knoten $j \in I_n \setminus \alpha$ gibt, dessen Knoten allesamt Elemente von $\{i, j\} \cup (I_n \setminus \alpha)$ sind.
- Wenn die inneren Knoten $\beta \subseteq I_n \setminus \alpha$ in G einen zusammenhängenden Untergraphen formieren, dann bilden die in G zu β adjazenten Knoten $\bar{\alpha} \subseteq \alpha$ in G_{red} eine Clique. Weist ein Knoten aus β in G eine Schlinge auf, so tun dies auch alle in G zu β adjazenten Knoten in G_{red} .

Abb. A.4 veranschaulicht die obigen Aussagen.

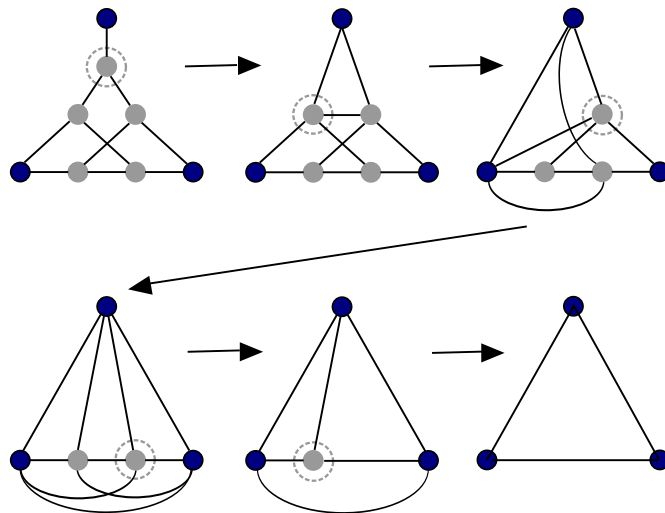


Abbildung A.4.: Kron-Reduktionsprozess eines Graphen bestehend aus drei aktiven (blau) und fünf passiven Knoten (grau). Sukzessive Eliminierung des jeweils eingekreisten Knotens (dabei wird in jedem Schritt der zu eliminierende Knoten als passiv, alle anderen als aktiv angesehen). Der erste Reduktionsschritt ist als Δ -Y-Transformation bekannt.

Abbildungsverzeichnis

0.1. Anteile der Erneuerbaren Energien am End- und Primärenergieverbrauch (BRD)	vi
0.2. Anteile der Erzeugungsformen an der insgesamt durch EE produzierten Strommenge im Jahr 2010 (BRD)	vi
1.1. Königsberger Brückenproblem	1
1.2. Adjanzenz, Inzidenz	2
1.3. Komponenten eines Graphen	3
1.4. Vollständige Graphen	3
1.5. Gewichteter und gerichteter Graph	4
1.6. Weg, Kreis und Baum	4
1.7. Graph mit korrespondierender Adjazenzmatrix	6
1.8. Homogenes und heterogenes Netz mit ihren Verteilungsfunktionen	7
1.9. Evolutionsstadien eines ER-Zufalls-Netzwerks	10
1.10. Illustration des WS-Algorithmus	11
1.11. Charakteristische Weglänge $L(p)$ und Clusterbildungskoeffizient $C(p)$ im WS-Modell	12
1.12. Auswirkung der Entfernung von Knoten und Verbindungen	15
1.13. Verhalten von Zufalls- und skalenfreien Netzwerken unter zufälliger und intentionaler Knotenentfernung	16
2.1. Selbsterregter Oszillator: Grenzyklus, Verhalten nach einer Störung	18
2.2. Frequenzdifferenz in Abhängigkeit der Frequenzverstimmung zweier gekoppelter Oszillatoren	19
2.3. Veranschaulichung des Ordnungsparameters $r(t)$	23
2.4. KM Mean-Field: $r(t)$ schematisch	24
2.5. KM Mean-Field: $r(K)$ schematisch	24
2.6. Fixpunkte KM-Oszillator: $\dot{\theta} = \omega - Kr \sin \theta$ für $ \omega > Kr$, $ \omega = Kr$, $ \omega < Kr$	25
2.7. Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes für $N=100$ Oszillatoren (Simulation)	30
2.8. Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes für $N=500$ Oszillatoren (Simulation)	31
2.9. Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes für $N=1000$ Oszillatoren (Simulation)	31

2.10. Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes für $N=10000$ Oszillatoren (Simulation)	32
2.11. Zeitliche Entwicklung des Kohärenzmaßes für $N=100000$ Oszillatoren (Simulation)	32
2.12. Kohärenzmaß r_∞ in Abhängigkeit des Kopplungsparameters K für verschiedene Oszillatorpopulationen (Simulation)	33
2.13. Kohärenzmaß r_∞ in Abhängigkeit des Kopplungsparameters K für $N=100$ (Simulation)	34
2.14. Phase und instantane Phasengeschwindigkeit einer Population von $N=10000$ Oszillatoren bei verschiedenen Kopplungsstärken	36
3.1. Spannungsebenen und Leistungstransfer	37
3.2. Stabilitätskategorien nach [H ⁺ 04]	40
4.1. Schaltplan Generator-Last-System	43
4.2. Generator-Last-System als Graph	43
4.3. Aufbau eines Synchrongenerators	48
4.4. Zwei-Maschinen-System	50
4.5. Leistungsumwandlung durch Synchrongenerator	51
4.6. Mechanischer Winkel δ_m	52
4.7. Drei-Schritt-Approximation der Reaktanz $X(t)$	55
4.8. Äquivalentkreise einer Synchronmaschine	56
5.1. System zweier Synchronmaschinen M_1 und M_2	60
5.2. Klassischer Fall: Reaktion auf eine Störung. δ_1 , δ_2 und δ_{12} und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (i)	63
5.3. Klassischer Fall: Reaktion auf eine Störung. δ_1 , δ_2 und δ_{12} und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (ii)	64
5.4. Klassischer Fall: Phasenportrait (i)	64
5.5. Klassischer Fall: $ A_1 \neq A_2 $. δ_1 , δ_2 und δ_{12} und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (iii)	65
5.6. Klassischer Fall: Phasenportrait (ii)	66
5.7. Klassischer Fall: $ A_1 \neq A_2 $. δ_1 , δ_2 und δ_{12} und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (iv)	66
5.8. Klassischer Fall: Phasenportrait (iii)	67
5.9. Stationärer Zustand. $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}, \epsilon_1, \epsilon_2(\tau)$ -Diagramm für $A_1=0.5; B_1=B_2=1; C_1=C_2=1; F_1=F_2=-1.85; D=1, \delta_1(0)=1, \delta_2(0)=0, \epsilon_1(0)=1.5, \epsilon_2(0)=0.5$	69
5.10. Exemplarische Phasenraumtrajektorien (i)	70
5.11. Exemplarische Phasenraumtrajektorien (ii)	70
5.12. Exemplarische Phasenraumtrajektorien (iii)	71
5.13. Exemplarische Phasenraumtrajektorien (iv)	71
5.14. $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}, \epsilon_1, \epsilon_2(\tau)$ -Diagramm für $A_1=0.5; B_1=B_2=1; C_1=C_2=1; F_1=F_2=-1.85; D=1, \delta_1(0)=1, \delta_2(0)=0, \epsilon_1(0)=30, \epsilon_2(0)=20$	72

5.15. Variation des Parameters A_1 . δ_{12}, ϵ_1 - τ -Diagramm (i).	73
5.16. Phasenraumtrajektorien für $A_1=0.3$	73
5.17. Variation des Parameters A_1 . δ_{12}, ϵ_1 - τ -Diagramm (ii).	74
5.18. Variation des Parameters $C_{1,2}$. δ_{12}, ϵ_1 - τ -Diagramm (i).	74
5.19. Phasenraumtrajektorien für $C_{1,2}=2.00$	75
5.20. Phasenraumtrajektorien für $C_{1,2}=5.00$	75
5.21. Variation des Parameters $C_{1,2}$. δ_{12}, ϵ_1 - τ -Diagramm (ii).	75
5.22. Variation des Parameters $F_{1,2}$. δ_{12}, ϵ_1 - τ -Diagramm (i).	76
5.23. Phasenraumtrajektorien für $F_{1,2}=-1.20$	76
5.24. Reaktion auf eine Störung. Vergleich mit klassischem Modell. δ , ϵ_1 und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (i)	77
5.25. Reaktion auf eine Störung. Vergleich mit klassischem Modell. δ , ϵ_1 und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (ii).	78
5.26. Reaktion auf eine Störung. Vergleich mit klassischem Modell. δ , ϵ_1 und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (iii).	79
5.27. Reaktion auf eine Störung. Vergleich mit klassischem Modell. δ , ϵ_1 und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (iv).	79
5.28. Reaktion auf eine Störung. Vergleich mit klassischem Modell. δ , ϵ_1 und Leistungsfluss in Abhängigkeit der Zeit τ (iv).	80
A.1. Stator- und Rotorkreise einer Synchronmaschine	86
A.2. Repräsentation der Synchronmaschine im dq0-System	90
A.3. Relative Position von (a,b)-Netzwerkssystem und (d,q)-Generatorsystem	96
A.4. Sukzessive Kron-Reduktion eines Graphen	98

Literaturverzeichnis

- [AB02] ALBERT, R. ; BARABÁSI, A.-L.: Statistical mechanics of complex networks. In: *Rev. Mod. Phys.* 74 (2002), Nr. 47, S. 47–97
- [ABPV⁺05] ACEBRÓN, J. A. ; BONILLA, L. L. ; PÉREZ VICENTE, C. J. ; RITORT, F. ; SPIGLER, R.: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. In: *Rev. Mod. Phys.* 77 (2005), S. 137–185
- [ABS98] ACEBRÓN, J. A. ; BONILLA, L. L. ; SPIGLER, R.: Breaking the symmetry in bimodal frequency distributions of globally coupled oscillators. In: *Phys. Rev. E* 57 (1998), Nr. 5, S. 5287–5290
- [ABS00] ACEBRÓN, J. A. ; BONILLA, L. L. ; SPIGLER, R.: Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects. In: *Phys. Rev. E* 62 (2000), S. 3437–3454
- [AF03] ANDERSON, P.M. ; FOUAD, A.A.A.: *Power System Control and Stability*. IEEE Press, 2003
- [AFHF10] ARGYRIS, J. H. ; FAUST, G. ; HAASE, M. ; FRIEDRICH, R.: *Die Erforschung des Chaos: eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. Springer, 2010
- [And08] ANDERSSON, G.: *Modelling and Analysis of Electric Power Systems*. 2008. – Skript zur Vorlesung 227-0526-00, ETH Zürich
- [AS98] ACEBRÓN, J. A. ; SPIGLER, R.: Adaptive Frequency Model for Phase-Frequency Synchronization in Large Populations of Globally Coupled Nonlinear Oscillators. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), Nr. 11, S. 2229–2232
- [AS00] ACEBRÓN, J. A. ; SPIGLER, R.: Uncertainty in phase-frequency synchronization of large populations of globally coupled nonlinear oscillators. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 141 (2000), S. 65–79
- [BBV08] BARRAT, A. ; BARTHÉLEMY, M. ; VESPIGNANI, A.: *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008
- [BDM11] BÖHME, D. ; DÜRRSCHMIDT, W. ; MARK, M. van: *Erneuerbare Energien in Zahlen. Nationale und internationale Entwicklung*. 2011. – Ver-

- öffentlichung des Bundesministeriums für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit
- [BPH07] BAG, B. C. ; PETROSYAN, K. G. ; HU, C.-K.: Influence of noise on the synchronization of the stochastic Kuramoto model. In: *Phys. Rev. E* 76 (2007), S. 056210
- [BS03] BORNHOLDT, S. ; SCHUSTER, H.G.: *Handbook of Graphs and Networks: from the Genome to the Internet*. Wiley-VCH, 2003
- [BV00] BERGEN, A. R. ; VITTAL, V.: *Power Systems Analysis*. Pearson Education, 2000
- [CC99] CHU, C.-C. ; CHIANG, H.-D.: Constructing analytical energy functions for lossless network-reduction power system models: Framework and new developments. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 18 (1999), S. 1–16
- [CCC95] CHANG, H.-D. ; CHU, C.-C. ; CAULEY, G.: Direct Stability Analysis of Electric Power Systems Using Energy Functions: Theory, Applications, and Perspective. In: *Proceedings of the IEEE* 83 (1995), Nr. 11, S. 1497–1529
- [CV07] CALDARELLI, G. ; VESPIGNANI, A.: *Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks: from Information Technology to Finance and Natural Science*. World Scientific, 2007
- [CVLMF⁺08] COLBIA-VEGA, A. ; LEÓN-MORALES, J. de ; FRIDMAN, L. ; SALAS-PEÑA, O. ; MATA-JIMÉNEZ, M. T.: Robust excitation control design using sliding-mode technique for multimachine power systems. In: *Electric Power Systems Research* 78 (2008), S. 1627–1634
- [DB10a] DÖRFLER, F. ; BULLO, F.: Spectral Analysis of Synchronization in a Lossless Structure-Preserving Power Network Model. In: *First IEEE International Conference on Smart Grid Communications*, 2010, S. 179–184
- [DB10b] DÖRFLER, F. ; BULLO, F.: Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators. In: *American Control Conference*, 2010, S. 930–937
- [DB10c] DÖRFLER, F. ; BULLO, F.: Synchronization of Power Networks: Network Reduction and Effective Resistance. In: *IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*, 2010, S. 197–202
- [DB11a] DÖRFLER, F. ; BULLO, F.: Kron Reduction of Graphs with Applications to Electrical Networks. In: *ArXiv e-prints: arXiv:1102.2950v1* (2011)

- [DB11b] DÖRFLER, F. ; BULLO, F.: On the critical coupling strength for Kuramoto oscillators. In: *American Control Conference*, 2011, S. 3239–3244
- [FNP08] FILATRELLA, G. ; NIELSEN, A. H. ; PEDERSEN, N. F.: Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. In: *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 61 (2008), S. 485–491
- [GAH01] GHANDHARI, M. ; ANDERSSON, G. ; HISKENS, I. A.: Control Lyapunov Functions for Controllable Series Devices. In: *Power Systems, IEEE Transactions on* 16 (2001), Nr. 4, S. 689–694
- [H⁺04] HILL, D. u. a.: Definition and Classification of Power System Stability IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions. In: *IEEE Transactions on Power Systems* 19 (2004), Nr. 3, S. 1387 – 1401
- [HBCSB10] HINES, P. ; BLUMSACK, S. ; COTILLA SANCHEZ, E. ; BARROWS, C.: The Topological and Electrical Structure of Power Grids. In: *43rd Hawaii International Conference on System Sciences*, 2010, S. 1 –10
- [HD05] HEUCK, K. ; DETTMANN, K.D.: *Elektrische Energieversorgung*. Vieweg, 2005
- [KBL94] KUNDUR, P. ; BALU, N. J. ; LAUBY, M. G.: *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, 1994
- [MBB08] MACHOWSKI, J. ; BIALEK, J. ; BUMBY, D.J.: *Power System Dynamics: Stability and Control*. John Wiley & Sons, 2008
- [Paz05] PAZÓ, D.: Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. In: *Phys. Rev. E* 72 (2005), S. 046211
- [PRK03] PIKOVSKY, A. ; ROSENBLUM, J. K. M. ; KURTHS, J.: *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2003
- [PTVF07] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007
- [SM91] STROGATZ, S. H. ; MIROLLO, R. E.: Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. In: *Journal of Statistical Physics* 63 (1991), S. 613–635
- [SMH08] SUSUKI, Y. ; MEZIC, I. ; HIKIHARA, T.: Global swing instability of multimachine power systems. In: *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008, S. 2487 –2492

- [Str00] STROGATZ, S. H.: From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143 (2000), Nr. 143, S. 1–202
- [Str01] STROGATZ, S. H.: Exploring Complex Networks. In: *Nature* 410 (2001), S. 268–276
- [Tit03] TITTMANN, P.: *Graphentheorie*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2003
- [TLO97] TANAKA, H.-A. ; LICHTENBERG, A. J. ; OISHI, S.: First Order Phase Transition Resulting from Finite Inertia in Coupled Oscillator Systems. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), S. 2104–2107
- [VSP96] VOURNAS, C. D. ; SAUER, P. W. ; PAI, M. A.: Relationships between voltage and angle stability of power systems. In: *International Journal of Electrical Power and Energy Systems* 18 (1996), S. 493–500

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Rudolf Friedrich für die interessante Aufgabenstellung und seine freundliche und motivierende Betreuung bedanken.

Meiner gesamten Arbeitsgruppe möchte ich für die offene und kollegiale Arbeitsatmosphäre danken, besonders meinen Bürokollegen Cornelia Petrovic, Dr. Michael Wilczek und Johannes Lülff.

Darüber hinaus möchte ich mich bei Dirk Sandbrink, Michael Wilczek und Felix Huerkamp für ihr aufmerksames Korrekturlesen und ihre konstruktive Kritik sowie bei Dr. Josef Huerkamp für seine finale Rechtschreib- und Stilkorrektur bedanken.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbst verfasst und keine weiteren Quellen und Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Münster, Juli 2012