

Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2018)

Prof. Dr. G. Münster, Jun.-Prof. Dr. C. Schuck; Koordinator: Dr. J. Salomon

Übungsblatt 4

Abgabe: 17.05.2018, Besprechung: 29./30.05.2018

Aufgabe 21: Thomson'sches Atommodell (4 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Im Atommodell von Thomson ist die positive Ladung gleichförmig über eine Kugel vom Radius R verteilt. Die punktförmigen Elektronen bewegen sich in dieser Ladungswolke. Betrachtet werden soll ein Thomson-Wasserstoffatom mit Radius $R = 10^{-10}$ m.

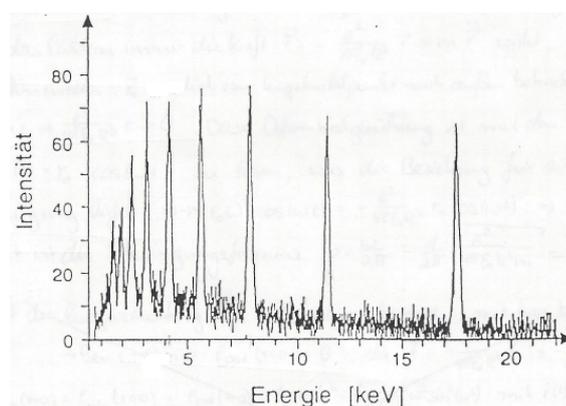
- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Elektron eine harmonische Schwingung ausführt, wenn es zur Zeit $t = 0$ im Abstand r_0 vom Zentrum mit Geschwindigkeit 0 startet. Berechnen Sie Frequenz ν und Energie der Schwingung in eV für $r_0 = R$.
- (2 Punkte) Als beschleunigtes Teilchen strahlt das Elektron elektromagnetische Wellen ab. Gemäß Larmor-Formel strahlt ein mit a beschleunigtes Elektron die Leistung $P = \frac{e_0^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ ab. Berechnen Sie den Energieverlust ΔE pro Periode, wenn die Amplitude der Schwingung R beträgt. Schätzen Sie größenordnungsmäßig ab, nach welcher Zeit ein Elektron, dessen Schwingungsamplitude zunächst R beträgt, einen erheblichen Teil seiner Energie verloren hat.

Aufgabe 22: Bohr'sches Atommodell 1 (3 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

- (1 Punkt) Berechnen Sie für ein Niveau, das der Quantenzahl n entspricht, die Frequenz ν_n der Kreisbewegung eines Elektrons in einem Wasserstoffatom.
- (1 Punkt) Berechnen Sie die Frequenz der beim Übergang vom Zustand n in den Zustand $n - 1$ emittierten Strahlung.
- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Ergebnisse von a) und b) übereinstimmen, wenn n sehr groß ist.

Aufgabe 23: Bohr'sches Atommodell 2 (4 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Von L. Simons et al. (Physikal. Blätter 48 (1992) Nr. 4) ist das abgebildete Spektrum gemessen worden, das emittiert wird, wenn Antiprotonen von Neon-Kernen eingefangen wurden. Identifizieren Sie die Linien oberhalb von 5 keV und machen Sie eine quantitative Analyse mit Hilfe des Bohr'schen Atommodells. Gehen Sie davon aus, dass die Linien zu Übergängen gehören, bei der die Änderung der Quantenzahl $\Delta n = 1$ ist. Welchen Radius r_6 hat die Bohr'sche Kreisbahn für $n = 6$ im Vergleich mit dem Radius der innersten Bahn für Elektronen? Nehmen Sie nun an, dass der Neon-Kern neben dem Antiproton auch ein Elektron eingefangen hat. Welche Kernladung wirkt effektiv auf das Elektron?



Aufgabe 24: Schrödingergleichung und Wasserstoffatom (5 Punkte) [Atom- und Molekülphysik]

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom lautet

$$E\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{r} \right) \psi,$$

bzw. mit $\gamma = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0}$ und $a_0 = \frac{\hbar^2}{m\gamma}$:

$$\frac{E}{\gamma}\psi = \left(-\frac{a_0}{2}\Delta - \frac{1}{r} \right) \psi.$$

Zwei Lösungen zur Hauptquantenzahl $n = 2$ sind $\psi_{200} = f_{20}(r)Y_{00}(\theta, \phi)$ und $\psi_{210} = f_{21}(r)Y_{10}(\theta, \phi)$, wobei

$$\begin{aligned} f_{20}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \\ f_{21}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \\ Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta. \end{aligned}$$

Beide Lösungen entsprechen unterschiedlichen Drehimpulsen. Verifizieren Sie durch Einsetzen in die zeitunabhängige Schrödingergleichung, dass ψ_{200} und ψ_{210} Lösungen sind und berechnen Sie die zugehörigen Energien. Zeigen Sie, dass beide Energien gleich sind und dass sie mit der Energie E_2 des Bohr'schen Atommodells übereinstimmen. (Hinweis: Verwenden Sie den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten.)

Aufgabe 25: Potenzialstufe (2 Punkte)

Betrachten Sie die eindimensionale Potenzialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ V_0 > 0, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

- a) (0,5 Punkte) Welche Bedingungen werden an die Wellenfunktion bei $x = 0$ gestellt? (Keine Herleitung erforderlich.)
- b) (0,5 Punkte) Betrachten Sie den Fall $E > V_0$. Für welche Werte von B und C liefert der Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp^{ikx} + B \exp^{-ikx}, & x < 0, \\ C \exp^{iqx}, & x > 0, \end{cases}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung? (Die Wellenzahlen k und q müssen nicht durch E bzw. V_0 ausgedrückt werden.)

- c) (1 Punkt) Welche physikalische Situation beschreibt diese Wellenfunktion? Berechnen Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten.