Mathematische Hilfsmittel

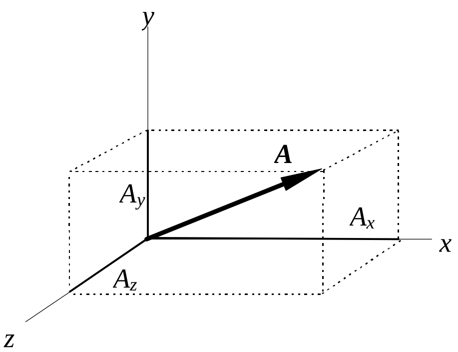
Gundkenntnisse der Trigonometrie, Differential- und Integralrechnung werden für die Vorlesung vorausgesetzt. Um diese bei Bedarf anwenden zu können, wird die Anschaffung eines kompakten mathematischen Taschenbuches (Sammlung mathematischer Formeln, Integraltafeln etc.) - sofern nicht bereits vorhanden - dringend empfohlen.

Im folgenden werden einige Grundkenntnisse an besonderen mathematischen Hilfsmitteln aufgeführt, die in der Physik häufig Anwendung finden und immer wieder benötigt werden. Die hier zusammengestellten Beziehungen können mathematische Tafeln nicht ersetzen!

Rekapitulation der Vektorrechnung

Grundkenntnisse der Vektorrechnung werden zum Verständnis der Vorlesung zwar vorausgesetzt, sollen hier aber noch einmal rekapituliert werden.

- Vektor $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$: Größe mit Betrag $|\boldsymbol{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ und Richtung

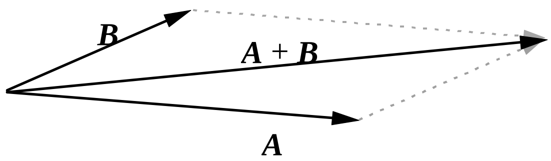


Gemäß der Abbildung lassen sich Vektoren auch als Überlagerung aus drei Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$ darstellen:

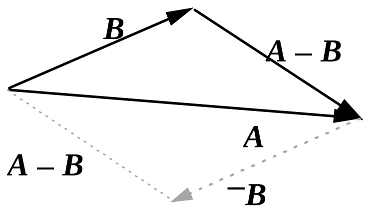
$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$

mit $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)$ und $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$.

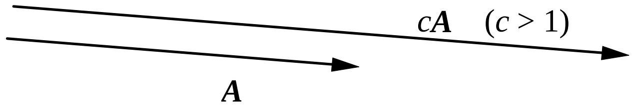
- Addition von Vektoren: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$



- Subtraktion von Vektoren: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

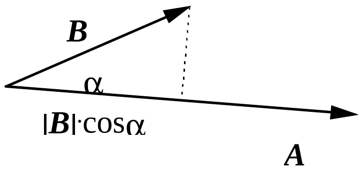


- Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar c: $c\boldsymbol{A} = (cA_x, cA_y, cA_z)$



Ein Skalar c ist i. a. eine physikalische Größe, kann aber auch einfach eine Zahl sein.

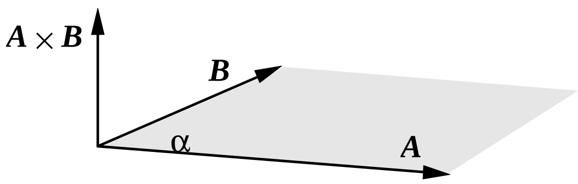
- Skalarprodukt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot \cos\alpha$



Das Skalarprodukt ergibt Null, wenn die zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Gemäß Definition gilt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}.$$

- Vektorprodukt: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y,\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z,\ A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)$; Betrag $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot \sin\alpha$



Anschauliche Darstellung des Vektorproduktes ('Rechte-Hand-Regel'): Zeigen Daumen der rechten Hand in Richtung von $\boldsymbol{A}$ und Zeigefinger in Richtung von $\boldsymbol{B}$, so zeigt der Mittelfinger senkrecht zu Daumen und Zeigefinger in Richtung von $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Daher

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}.$$

Der Betrag des Vektorproduktes beschreibt die Größe der grau gezeichneten 'Fläche', die natürlich nur dann eine geometrische Fläche ist, wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Längenvektoren sind. Der Betrag des Vektorproduktes ist Null ('Nullvektor' $\boldsymbol{O}$), wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ parallel oder antiparallel stehen.

- Vektoren $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ bzw. ihre Komponenten A_i können von der Zeit abhängen:

$$\boldsymbol{A}(t) = [A_x(t), A_y(t), A_z(t)].$$

Unter der zeitlichen Ableitung eines Vektors versteht man

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{A}} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right).$$

Hängt ein Vektor vom Ort ab,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(x, y, z) = [A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)],$$

so sprechen wir von einem Vektorfeld $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

- Zeitliche Änderung von 'Produkten' mit Vektoren: Skalar c und die Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ können von der Zeit abhängen. Für die zeitlichen Ableitungen gilt die 'Produktregel':

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = \dot{c}\mathbf{A} + c\dot{\mathbf{A}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad \text{insbesondere gilt :} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{A}^2 \equiv \frac{d}{dt}A^2 = 2\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}})$$