11. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 17.12.2019, Abgabe: 07.01.2020

Aufgabe 28: Zwei-Niveau-System mit periodischer Störung [8 Punkte]

Gegeben sei ein quantenmechanisches System, das nur zwei Eigenzustände $|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$ mit Energien E_1 und E_2 besitzt. Es sei $E_1 < E_2$. Die zeitabhängigen Zustände dieses Systems haben die Form

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{2} c_n(t)\, \mathrm{e}^{\frac{E_n \cdot t}{i\hbar}}\, |\varphi_n\rangle \; .$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\varphi_1\rangle$.

Dann wird eine zeitlich periodische Störung $\hat{U}(t)$ mit den Eigenschaften

$$\langle\varphi_1|\hat{U}|\varphi_1\rangle = 0 \qquad \langle\varphi_1|\hat{U}|\varphi_2\rangle = U_0\, \mathrm{e}^{i\,\omega\, t}$$

$$\langle\varphi_2|\hat{U}|\varphi_1\rangle = U_0\, \mathrm{e}^{-i\,\omega\, t} \qquad \langle\varphi_2|\hat{U}|\varphi_2\rangle = 0$$

eingeschaltet. U_0 ist eine reelle Konstante.

a) [4P] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{1\to 2}$ für einen Übergang des Systems vom Zustand $|\varphi_1\rangle$ zum Zustand $|\varphi_2\rangle$ im Rahmen der ersten Ordnung Störungstheorie. Was ergibt sich speziell für den Fall $\hbar\omega = E_2 - E_1$?

b) [3P] Lösen Sie das System der Bewegungsgleichungen für die Wellenfunktionskoeffizienten $(n' = 1, 2)$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{n'}(t) = \sum_{n=1}^{2} c_n(t)\, \mathrm{e}^{\frac{E_n - E_{n'}}{i\hbar}t}\, \langle\varphi_{n'}|\hat{U}(t)|\varphi_n\rangle$$

exakt für den Fall $\hbar\omega = E_2 - E_1$ unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{1\to 2}(t) = |c_2(t)|^2$ an.

c) [1P] Vergleichen Sie Ihre Resultate aus a) und b).

Aufgabe 29: Photoionisation [8 Punkte]

Ein Wasserstoffatom befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand. Dann wird ein elektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}}(t)$ eingeschaltet, das ein Störpotential $\hat{U}(\vec{r}, t) = e\,\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{r} \cos(\omega t)$ erzeugt.

a) [5P] Wie groß muss ω gewählt werden, damit Übergänge in Kontinuumszustände mit der Energie $E = E_f > 0$ induziert werden? Berechnen Sie für diesen Fall die Übergangsrate $\Gamma_{j\to f}$ mit Hilfe der goldenen Regel von Fermi. Ersetzen Sie bei dieser Rechnung den Endzustand näherungsweise durch eine ebene Welle $\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

b) [3P] Berechnen Sie die Gesamtübergangsrate für die Energie E

$$W = \int_{E=E_f} \Gamma_{j\to f}\, df \qquad (df \mathrel{\widehat{=}} d^3k) \; .$$

Hinweis:

Legen Sie bei der Berechnung des Ortsraumintegrals zur Bestimmung des Matrixelements des Störoperators das Koordinatensystem derart, dass die Polarachse parallel zu $\vec{k}$ ist. Der Vektor $\vec{\mathcal{E}}_0$ ist dann durch $\mathcal{E}_0$, θ' und φ' bestimmt. Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{r} = \mathcal{E}_0\, r \Big(\cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi')\Big)$$

gilt und führen Sie das Integral aus.

Hilfsintegral:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{x}{(a\,x + b)^4}\, d\,x = -\frac{8\,a\,b}{3\,(b^2 - a^2)^3} \; .$$

Aufgabe 30: Operatoridentität [4 Punkte]

Bei der Berechnung von Auswahlregeln für Dipolübergänge werden wir die Operatoridentität

$$\Big[\hat{\vec{L}}^{\,2}, [\hat{\vec{L}}^{\,2}, \vec{r}]\Big] = 2\,\hbar^2 \left(\hat{\vec{L}}^{\,2}\,\vec{r} + \vec{r}\,\hat{\vec{L}}^{\,2}\right)$$

verwenden.

a) [3P] Zeigen Sie zunächst, dass

$$\Big[\hat{\vec{L}}^{\,2}, [\hat{\vec{L}}^{\,2}, z]\Big] = 2\,\hbar^2 \left(\hat{\vec{L}}^{\,2}\,z + z\,\hat{\vec{L}}^{\,2}\right)$$

gilt. Benutzen Sie für Ihre Berechnungen Kugelkoordinaten.

b) [1P] Begründen Sie dann – ohne weitere Rechnung – die entsprechenden Operatoridentitäten für x und y und zeigen Sie so die Identität für $\vec{r}$.

Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{L}}^{\,2} &= -\hbar^2 \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\,\varphi^2}\right) \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\,\varphi^2}\right) \; .
\end{aligned}$$

Frohe Weihnachten
und einen guten
Rutsch ins neue Jahr!