

Aufgabe 30 (mündlich): Größe von Atomen (2 Punkte)
Schätzen Sie die Größe eines Cu-Atoms ab. Spezifisches Gewicht von Kupfer: $8,93 \text{ g cm}^{-3}$.

Aufgabe 31 (schriftlich): Optische Übergänge (3 Punkte)
Berechnen Sie die Übergangsenergien der Lyman- α und Balmer- β Linien von Deuterium. Geben Sie die Energiedifferenz dieser Isotopieverschiebung zum entsprechenden Übergang im Wasserstoff an. Erläutern Sie kurz den physikalischen Grund hierfür. Benutzen Sie aktuelle Massenwerte und rechnen Sie in den Einheiten $[\text{cm}^{-1}]$ bis zur vierten Stelle nach dem Komma. Geben Sie auch die Übergangswellenlängen der Spektrallinien an.

Aufgabe 32 (schriftlich): Teilchen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern (7 Punkte)
Gesucht sind das Energiespektrum und die Wellenfunktion eines Teilchens mit Ladung $q = -e$ und Masse m in homogenen, zeitlich konstanten, gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}) = (\mathcal{E}, 0, 0)$ zeige in x -Richtung, die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, \mathcal{B})$ in z -Richtung.

- a) Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass sich im stationären Fall die Felder folgendermaßen aus den Potentialen ϕ und \vec{A} berechnen lassen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) , \quad \vec{B}(\vec{r}) = -\text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r}) = (0, \mathcal{B}x, 0)$ eine mögliche Wahl für das Vektorpotential ist und geben Sie ein passendes skalares Potential $\phi(\vec{r})$ an.

- b) Wie lautet der Hamiltonoperator zu diesem Problem in Ortsdarstellung? Zeigen Sie, dass die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\psi = E\psi$ mit dem Ansatz

$$\psi(x, y, z) = \exp[i(k_y y + k_z z)] \varphi(x)$$

in eine eindimensionale Gleichung für $\varphi(x)$ übergeht. Führen Sie diese Gleichung mit der Transformation $\tilde{x} = x - x_0$ und $\tilde{E} = E - E_0$ in die Schrödingergleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators über. Wie müssen hierzu x_0 und E_0 gewählt werden?

- c) Wie lauten die Eigenwerte \tilde{E} und damit die Energieeigenwerte E des ursprünglichen Problems? Wie lauten die Eigenfunktionen $\psi(x, y, z)$? Benutzen Sie die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\varphi_n(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\beta \tilde{x}) e^{-\frac{1}{2} \beta^2 \tilde{x}^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} .$$

Aufgabe 33 (mündlich): Teilchen im homogenen Vektorpotential (8 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse m und Ladung q bewege sich im homogenen, zeitabhängigen Vektorpotential $\vec{A}(t) = A(t) \vec{e}_x$. Gemäß der Elektrodynamik ergeben sich die Felder in Abwesenheit eines skalaren Potentials zu

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

- a) Wie lauten die zugehörigen Felder für das obige Vektorpotential? Wie muss $A(t)$ gewählt werden, um ein periodisches elektrisches Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t)$ zu beschreiben?
- b) Die klassische Hamiltonfunktion für ein Teilchen im Vektorpotential $\vec{A}(t)$ lautet

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A}(t))^2.$$

Wie lautet der entsprechende Hamiltonoperator und die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung in Ortsdarstellung? Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_{\vec{k}}(t) \right) \right]$$

für beliebige $\vec{A}(t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Phase $\phi_{\vec{k}}(t)$ erhalten. Lösen Sie diese Gleichung mit der Anfangsbedingung $\phi_{\vec{k}}(0) = 0$ für den Fall $\vec{A}(t) = -\frac{E_0}{\omega} \vec{e}_x \sin(\omega t)$.

- c) Da die Funktionen $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$ für beliebiges \vec{k} Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung sind, lassen sich daraus Wellenpakete konstruieren. Im folgenden sei $k_x = k$ und es seien $k_y = k_z = 0$, d. h. wir beschränken uns auf eine eindimensionale Bewegung. Es sei folgendes Wellenpaket gegeben

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(k) \exp [i (kx - \phi_k(t))] dk \quad \text{mit} \quad D(k) = \left(\frac{\alpha^2}{2\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \exp [-\alpha^2 (k - k_0)^2].$$

Berechnen Sie $\psi(x, 0)$.

Hinweis: Führen Sie zweckmäßigerweise im Exponenten eine quadratische Ergänzung durch.

- d) Gesucht ist nun die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ zu beliebigen Zeiten t . Da die Funktion $D(k)$ für genügend große α nur in der Umgebung von k_0 wesentlich von Null verschieden ist, liegt es nahe, $k' = k - k_0$ als neue Integrationsvariable einzuführen und die Phase $\phi_k(t)$ bis zur ersten Ordnung in k' zu entwickeln. Zeigen Sie, dass der Exponent in dieser Näherung die Form $ic_1 + ik'c_2 - \alpha^2 k'^2$ annimmt. Bestimmen Sie c_1 und c_2 . Berechnen Sie damit $|\psi(x, t)|^2$. Welcher physikalische Effekt geht in dieser Näherung verloren?