Aufgabe 14 (schriftlich): Operatorrelationen (6 Punkte)
Da in der Quantenmechanik ständig mit linearen Operatoren gerechnet wird, sollen im folgenden einige Relationen bewiesen werden.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B} + \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] ,$$
$$\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0 .$$

b) Bekanntlich gilt für den Ortsoperator $\hat{x}$ und den Impulsoperator $\hat{p}$ eines eindimensionalen Teilchens die Vertauschungsrelation $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$[\hat{x}^m\hat{p}^n,\hat{x}] = -ni\hbar\hat{x}^m\hat{p}^{n-1} = -i\hbar\frac{\partial\hat{x}^m\hat{p}^n}{\partial p} ,$$
$$[\hat{x}^m\hat{p}^n,\hat{p}] = mi\hbar\hat{x}^{m-1}\hat{p}^n = i\hbar\frac{\partial\hat{x}^m\hat{p}^n}{\partial x} .$$

Damit erhält man für eine beliebige, in eine Reihe entwickelbare Funktion $F(\hat{x},\hat{p})$

$$[F(\hat{x},\hat{p}),\hat{x}] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad [F(\hat{x},\hat{p}),\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial F}{\partial x} .$$

Berechnen Sie damit $\left[\hat{H},\hat{x}\right]$ und $\left[\hat{H},\hat{p}\right]$ mit $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$.

Aufgabe 15 (schriftlich): Ehrenfest-Theorems (4 Punkte)
Berechnen Sie unter Verwendung der Ehrenfest-Theorems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{A}\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H},\hat{A}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle , \qquad \text{mit } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

die Bewegungsgleichungen für die Erwartunswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ für

a) ein freies Teilchen mit $V(\hat{x}) = 0$.

b) den Harmonischen Oszillator mit $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$.

c) den Anharmonischen Oszillator mit $V(\hat{x}) = \gamma\hat{x}^3$.

Diskutieren Sie, ob die Bewegungsgleichungen für $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ ein geschlossenes System bilden.

(Bereits in Aufgabe 14 berechnete Kommutatoren müssen nicht erneut berechnet werden.)

Aufgabe 16 (mündlich): Hermitesche und unitäre Operatoren (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Operatoren auf Hermitizität und Unitarität:

a) Den Ableitungsoperator:

$$\hat{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

b) Den Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

c) Den Translationsoperator $\hat{T}_a$ mit:

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x + a)$$

d) Die z-Komponente des Drehimpulsoperators:

$$\hat{L}_z = \left(\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right)_z$$

Aufgabe 17 (mündlich): Funktion eines Operators (3 Punkte)

Die Matrix $\hat{\sigma}_x$ sei definiert durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweisen Sie die Beziehung

$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_x} = \underline{1}\cos(\alpha) + i\hat{\sigma}_x \sin(\alpha) ,$$

wobei $\underline{1}$ die 2×2 - Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 18 (mündlich): Darstellungstheorie (3 Punkte)

Ein unitärer Vektorraum werde von einer Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ aufgespannt (Vollständigkeitsrelation: $\sum_\nu |\alpha_\nu\rangle \langle\alpha_\nu| = 1$, Orthonormalität: $\langle\alpha_\mu|\,\alpha_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$).

a) Geben Sie die Darstellung eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis an.

b) Transformieren Sie den in **a)** gewonnenen Ausdruck auf eine neue Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$ ($\sum_\nu |\beta_\nu\rangle \langle\beta_\nu| = 1$, $\langle\beta_\mu|\,\beta_\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}$). (Hinweis: Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation)

c) Stellen Sie nun das Skalarprodukt $\left\langle \psi \middle| \hat{Q} \middle| \psi \right\rangle$ (Erwartungswert des Operators $\hat{Q}$) zuerst in der Basis $\{|\alpha_\nu\rangle\}$ dar, transformieren sie auf die Basis $\{|\beta_\nu\rangle\}$, und zeigen Sie, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt.