Aufgabe 11 (mündlich): Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden (8 Punkte)
Ein Teilchen befinde sich in einem Potentialtopf der Länge L mit unendlich hohen Wänden. Das Potential lautet also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \leq \frac{L}{2} \\ \infty & \text{für} \quad |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

a) Wie lauten die normierten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ und die Energien E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ für diesen Potentialtopf.

b) Betrachten Sie nun die nichtstationäre Lösung der Schrödingergleichung $\psi(x, t)$ mit der Anfangsbedingung

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right) \; .$$

Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t)$, die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ sowie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ und die Unschärfe $(\Delta x)^2$. Skizzieren Sie $\rho(x, t)$ zu den Zeiten $t = 0,\ \frac{T}{4},\ \frac{T}{2},\ \frac{3T}{4}$ mit $T = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}$.

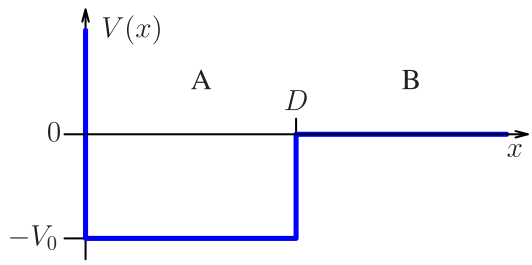
c) Untersuchen Sie analog zu Aufgabenteil **b)** die nichtstationäre Lösung mit

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1(x) + \varphi_3(x)\right)$$

und diskutieren Sie die Unterschiede.

Aufgabe 12 (mündlich): Vereinfachtes Molekülbindungspotential (3 Punkte)
Das Bindungspotential zwischen den Atomen eines einfachen zweiatomigen Moleküls kann durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -V_0 & \text{für} \quad 0 < x < D \\ 0 & \text{für} \quad D \leq x \end{cases}$$



approximiert werden.

a) Leiten Sie die Lösbarkeitsbedingung

$$\cot(kD) = -\frac{\kappa}{k} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \quad \text{und} \quad \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$$

für gebundene Zustände mit $-V_0 < E < 0$ her.

b) Zeigen Sie, dass außerdem

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mD^2}$$

gelten muss, damit ein gebundener Zustand existiert.

Aufgabe 13 (schriftlich): Gebundene Zustände im δ-Potential (12 Punkte)

Gegeben sei zunächst ein einzelnes anziehendes δ-Potential der Form

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \; .$$

Gesucht sind gebundene Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, d. h. Lösungen mit $E < 0$.

a) Machen Sie geeignete Ansätze für die Wellenfunktion in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ und verwenden Sie die in Aufgabe 10 hergeleiteten Anschlussbedingungen am δ-Potential. Bestimmen Sie damit die möglichen Energiewerte und die zugehörigen Wellenfunktionen. Wie viele gebundene Zustände gibt es?

b) Als einfaches Modell für das Elektron im H_2^+-Molekülion dient das negative Doppeldelta-Potential

$$V(x) = -\alpha \left[\delta\left(x + \frac{L}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \right] \; .$$

Gesucht sind wiederum Zustände mit $E < 0$. Aufgrund der Symmetrie des Problems sind die Lösungen entweder gerade oder ungerade. Machen Sie für die beiden Fälle geeignete Ansätze und leiten Sie aus den Anschlussbedingungen Bestimmungsgleichungen für die möglichen Energiewerte her.

c) Lösen Sie diese Gleichungen graphisch (qualitativ) für verschiedene Werte von L. Für welche Werte von L existieren gerade bzw. ungerade Lösungen?

d) Wie lauten die Energiewerte in den Granzfällen $L \to 0$ und $L \to \infty$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **a)**.