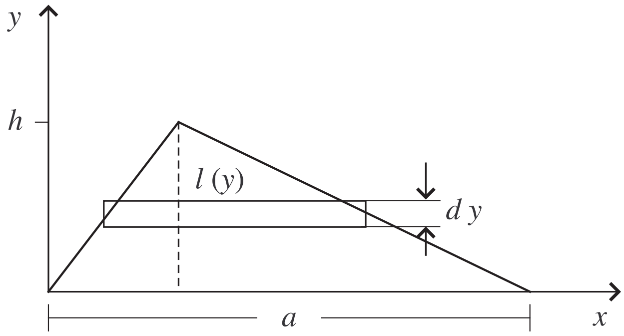
Aufgabe 1: Fläche eines Dreiecks

Betrachten Sie ein Dreieck mit Kantenlänge a und Höhe h. Überlegen Sie sich, durch welche Funktion $l\,(y)$ gegeben ist. Die Fläche des schmalen Rechtecks beträgt dann $l\,(y) \cdot d\,y$. Die Fläche des Dreiecks ist dann durch

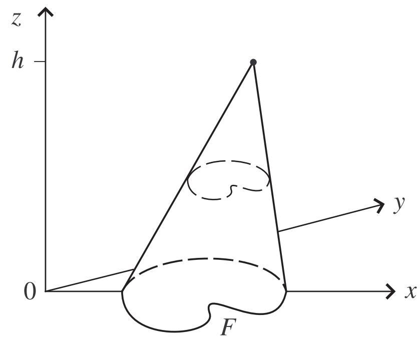
$$F = \int_0^h l\,(y)\,d\,y$$

gegeben. Bestimmen Sie F.



Aufgabe 2: Volumen eines Kegels

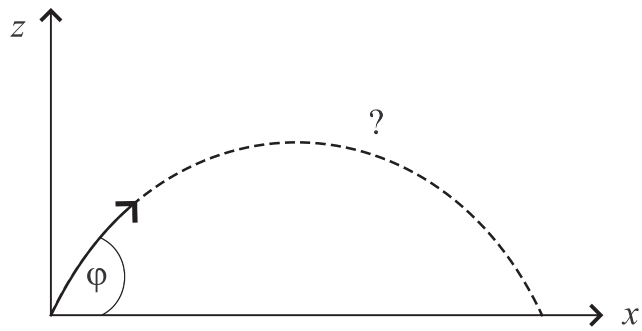
Analog zu Aufgabe 1 kann man auch dreidimensionale Volumeninhalte berechnen. Betrachten Sie eine/n Pyramide/Kegel/... der Höhe h über einer beliebigen Grundfläche (in der x-y-Ebene) mit Flächeninhalt F. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels. Überlegen Sie hierzu zunächst, welchen Flächeninhalt eine Querschnittsfläche in Höhe z hat.



Aufgabe 3: Wurfbahn

Ein Ball wird unter einem Winkel φ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen und bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Bahnkurve

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} v_0\,t\,\cos(\varphi) \\ 0 \\ v_0\,t\,\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{pmatrix} .$$

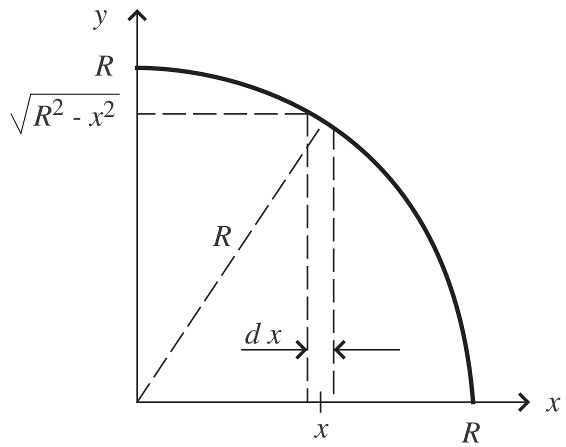


a) Berechnen Sie für beliebige v_0 und φ die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t)$, die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$ und deren Beträge.

b) Zu welcher Zeit t_1 erreicht der Ball den höchsten Punkt der Bahn? Wie muss der Abwurfwinkel φ gewählt werden, damit die Höhe maximal wird?

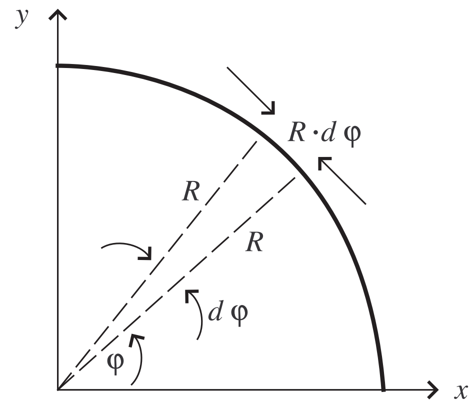
c) Nach welcher Zeit t_2 trifft der Ball wieder am Erdboden auf? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit beim Auftreffen? Wie muss der Abwurfwinkel φ gewählt werden, damit die Wurfweite maximal wird? Wie groß ist die maximale Wurfweite?

Aufgabe 4: Kreise und Kugeln

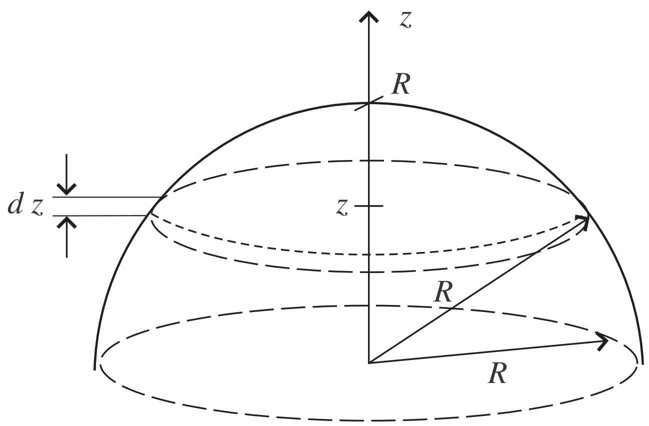


a) Bestimmen Sie durch Integration mittels geeigneter Substitution die Fläche eines (Viertel-)Kreises mit Radius R:

$$F_{1/4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, d\, x \ .$$



b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung ebener Polarkoordinaten.



c) Bestimmen Sie das Volumen einer (Halb-)Kugel unter Verwendung des Ergebnisses aus a/b. Überlegen Sie hierzu zunächst, welche Fläche der Querschnitt in Höhe z hat.

Aufgabe 5: Kreisbahn

Ein Körper bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius R. Die Bahnkurve lautet

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \\ z\,(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\,(\omega\, t) \\ \sin\,(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Dabei sei die sogenannte Winkelgeschwindigkeit ω konstant.

a) Skizzieren Sie die Bahn in der x-y-Ebene. Wo befindet sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ und wo bei $t = \dfrac{3\,\pi}{2\,\omega}$?

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t) \equiv \dot{\vec{r}}\,(t)$, die Beschleunigung $\vec{a}\,(t) \equiv \ddot{\vec{r}}\,(t)$ und die Beträge von $\vec{v}\,(t)$ und $\vec{a}\,(t)$. Geben Sie $\vec{v}\,(t)$ und $\vec{a}\,(t)$ für $t = 0$ und $t = \dfrac{3\,\pi}{2\,\omega}$ an.