

Aufgabe 1: Differentiation

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

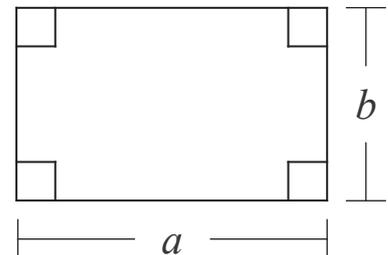
- | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = x^8$ | b) $f(x) = (2 + x)(x^2 + 1)$ | c) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ |
| d) $f(x) = \cos(7x)$ | e) $f(x) = x^3 + 2 \sin(2\pi x)$ | f) $f(x) = \sin^2 x$ |
| g) $f(x) = \sqrt{2x - 6x^4}$ | h) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}$ | i) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$ |
| j) $f(x) = e^{2x-1}$ | k) $f(x) = e^{-x} \sin(x)$ | l) $f(x) = \ln(\sqrt{2} \cdot x)$ |
| m) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ | | |

Aufgabe 2: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$ durch. Diskutieren Sie insbesondere Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, und zeichnen Sie ein Schaubild.

Aufgabe 3: Extremwerte

Aus einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen $a = 8$ cm und $b = 5$ cm soll nach Aussägen eines Quadrates an den Ecken des Rechtecks und Hochbiegen der dadurch entstandenen Randflächen ein oben offenes Kästchen mit möglichst großem Rauminhalt hergestellt werden. Berechnen Sie die Seitenlänge der herauszusägenden Quadrate und das Volumen des Kästchens.



Aufgabe 4*: Taylor Entwicklung

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ in einer Taylor-Reihe um $x = 2$ bis zur 3. Ordnung:

Aufgabe 5*: Differential Gleichungen

Finden Sie jeweils eine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

- | | |
|--|---------------------------|
| a) $\frac{d^2}{dx^2}f(x) + 4\frac{d}{dx}f(x) + 13f(x) = 0$ | mit $f(0) = 0, f'(0) = 3$ |
| b) $7\ddot{x} = \frac{5(t-2)^2}{\dot{x}+1}$ | mit $\dot{x}(1) = 2$ |

Tipp: Für Aufgabenteil a) ist die Eigenschaft der Exponentialfunktion $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$ sehr hilfreich. Für Aufgabenteil b) bietet sich die Methode der Trennung der Variablen an.

Aufgabe 6: Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$:

- a) $f(x) = x^2 + 4x^4$ b) $f(x) = \sqrt{x} - 6x^4$
c) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = (7x + 3)^7$
e) $f(x) = x(3 + 3x^2)^3$ f) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^2(x)$
g) $f(x) = x^2 e^{-3x^3}$ h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$
i) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ j) $f(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 7: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale:

- a) $\int_1^5 dx$ b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ c) $\int_{-3}^3 |x| dx$
d) $\int_0^\pi \sin(x) dx$ e) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$ f) $\int_0^{1/2} \sin(2\pi(x+1)) dx$
g) $\int_1^\infty e^{-3x} dx$ h) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ i) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
j) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$

k*) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = 2x$$

sowie von der x -Achse begrenzt wird.

Aufgabe 8: Fläche zwischen Funktionen

Die Funktionen $y = x^2$ und $y + 2x^2 = 3$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 9: Doppelintegrale

Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

- a) $\int_1^2 \left[\int_0^t 2 dx \right] dt$ b) $\int_1^e \left[\int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right] dt$ c) $\int_\pi^{2\pi} \left[\int_0^t \sin(x) dx \right] dt$.