Credit Metrics: Eine Einführung

Volkert Paulsen

July 23, 2009

Abstract

Credit Metrics ist ein Kredit Risko Modell, daß den Verlust quantifiziert, der durch eine Bonitätsveränderung von Schuldnern verursacht wird. Kredite unterliegen einem Zinsänderungs- und einem Adressenausfallrisiko. Durch Betrachtung von Forwardpreisen wird das Zinsänderungsrisiko ausgeblendet und nur das verbleibende Adressenausfallrisiko quantifiziert.

1 Grundlagen

Um den Ansatz von Credit Metrics wirklich zu verstehen, müssen zunächst einige finanzmathematische Grundlagen erläutert werden. Wir betrachten einen Finanzmarkt, auf dem viele Finanzgüter gehandelt werden. Wichtig für uns sind defaultable-free zero-coupon Bonds. Dies ist ein Finanzgut, daß zu einem zukünftigen Zeitpunkt T, der Maturity bzw. Fälligkeit, den festen Wert 1 auszahlt, ohne daß damit ein Ausfallrisiko verbunden ist. Diser Bond wird gehandelt und wir bezeichnen mit $(B(t,T))_{0\leq t\leq T}$ den dazugehörigen Preisprozeß . Wir nehmen an, daß es zu jedem Zeitpunkt T einen solchen Bond mit dieser Maturity gibt. Um das Marktrisiko eines risikobehafteten Finanzgutes, etwa Aktie, zu eliminieren, kann man forward Kontrakte benutzen. Bezeichnen wir mit S den Preisprozeß dieser Aktie, so ist ein Forwardkontrakt ein Vertrag zwischen Parteien A und B mit folgendem Inhalt:

- A zahlt in T_1 den Betrag F an B, A ist long im Forward

- B gibt in T_1 eine Aktie an A, B ist short im Forward

Es findet also zum zukünftigen Ausübungszeitpukt T_1 ein Austausch Ware gegen Geld statt. Deshalb nennt man einen solchen Kontrakt auch Termingeschäft. Wichtig ist, daß der sogenannte Forwardpreis F heute beim Eingehen des Vertrages spezifiziert wird und daß ein Forward Kontrakt zu Beginn mit keinen Kosten verbunden ist.

1.1 Bemerkung *Der Forwardpreis F ist eindeutig festgelegt und hängt nicht von einer subjektiven Einschätzung des Markteilnehmers ab. Andernfalls würde es Arbitragemöglichkeiten geben.*

Um diese Bemerkung herzuleiten, betrachten wir die beiden folgenden Strategien:

1. Halten einer Aktie bis T_1
2. Halten des folgenden Porfolios
   - long im forward auf die Aktie mit Aus"ubungszeitpunkt T_1 und Forwardpreis F
   - F zero Coupon Bonds mit Maturity T_1

Dann haben beide Strategien in T_1 eine Aktie als Auszahlung. Das No-Arbitrage Prinzip impliziert, daß der Anfangswert beider Strategien übereinstimmen müssen, also gilt

$$S_0 = FB(0, T_1) \tag{1}$$

Der Forwardkontrakt eliminiert das Marktrisiko der Aktie während des Zeitraumes $[0, T_1]$, denn wir wissen heute, für welchen Preis F wir die Aktie in T_1 erwerben können. Die Kursentwicklung bis T_1 hat hierfür keinerlei Auswirkungen.

Wir wollen diesen Zusammenhang benutzen, um das Zinsänderungsrisiko einer Zero Coupon Anleihe mit Fälligkeit T während des Zeitraumes $[0, T_1]$ zu entfernen. Dazu gehen wir einen Forward auf den Bond mit Maturity T zum Ausübungszeitpunkt T_1 ein. Für

$$F(T_1, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, T_1)} \tag{2}$$

erhalten wir also dann in T_1 diesen Bond mit Auszahlung 1 in T. Das heißt, daß wir heute garantieren können, daß eine Investition von F in T_1 zu einer Auszahlung von 1 in T führt. Vom heute aus betrachtet haben wir also eine jährliche Rendite, die sogenannte Forwardrendite, für eine Investition in einen Bond zwischen T_1 und T von

$$f(T_1, T) = (\frac{1}{F(T_1, T)})^{\frac{1}{T-T_1}} - 1 \tag{3}$$

2 Verlust durch Bonitätsänderung

Einen Kredit einer Bank an einen Schuldner können wir auffassen als einen sogenannten defaultable Bond. Die Bank kauft heute vom Schuldner den Bond und erhält zum Zeitpunkt T den Nominalbetrag 1 zurück. Der heutige Preis dieser Investition hängt von der Bonitätseinschätzung des Schuldners ab. Ist die Bonität schlecht, wird die Bank nur wenig bereit sein zu zahlen. Credit Metrics nimmt an, daß es eine gewisse Anzahl N von Bonitätsklassen, oder auch Ratingklassen genannt, gibt und daß Bondpreise innerhalb einer Ratingklasse konstant sind. Für einen Zero-Coupon Bond der i-ten Ratingklasse bezeichne mit $B_i(t, T)$ dessen Preisprozeß . Credit Metrics quantifiziert den Verlust versursacht durch Bonitätsänderung für den Zeitraum $T_1 = 1$, etwa einem Jahr. Dazu wird das Zinsänderungsrisiko ausgeblendet durch übergang zum Forwardpreis. Für einen Bond der Ratingklasse $j \in \{1, \cdots, N-1\}$ bezeichne mit

$$F_j(T_1, T) = \frac{B_j(0, T)}{B_j(0, T_1)} \tag{4}$$

dessen Forwardpreis zum Termin T_1. Für die Defaultklasse N betrachten wir zunächst keine Recovery. Deshalb hat der Bond nach Ausfall keinen Wert mehr und wir setzen

$$F_N(T_1, T) = 0. \tag{5}$$

Betrachten wir die obige Definition, so fällt auf, daß diese nicht konsistent ist mit der Bewertung eines Forwards entsprechend (1), da mit dem Preis eines risikobehafteten Bonds abdiskontiert wird. An dieser Stelle möchte ich nur darauf hinweisen, daß die obige Formel üblicherweise benutzt wird, um Forward aus Bondpreisen auszurechnen. Die alleinige Forderung der Arbitragefreiheit von Finanzmärkten gibt keine Mögklichkeit den obigen Zusammenhang zwischen Forward- und Bondpreisen theoretisch nachzuweisen. Welche Forderung bei ausfallrisikobehafteten Finanzgütern zusätzlich erfüllt sein muß , ist Thema der aktuellen Forschung. Für die Anwendung ist dies von untergeordneter Bedeutung, da Forward Preise am Markt direkt beobachtbar sind.

Wir gehen nun von einem Bond der Ratingklasse i aus. Eine Bonitätsveränderung, also ein Übergang zu einer Ratingklasse j, verursacht einen Verlust in Höhe der Forwardpreisänderung

$$l^{(i)}(j) = F_i(T_1, T) - F_j(T_1, T) \quad . \tag{6}$$

Eine Verbesserung der Bonität führt zu einem negativen Verlust, also Gewinn, eine Verschlechterung zu einem echten Verlust. Bleibt die Bonität gleich, fällt kein Verlust an. Der Übergang zur zukünftigen Ratingklasse ist zufällig und wird beschrieben durch eine Zufallsvariable $U^{(i)}$ mit Werten in den ersten N natürlichen Zahlen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnen wir mit p_{ij}, so daß also gilt

$$P(U^{(i)} = j) = p_{ij}$$

für jede Ratingklasse j. Der zufällige Verlust eines Bonds der Ratinglasse i ergibt sich also durch

$$L^{(i)} = l^{(i)}(U^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} (F_i(T_1, T) - F_j(T_1, T)) 1_{\{U^{(i)}=j\}} \tag{7}$$

3 Defaultable Bonds mit Couponzahlungen

Bislang haben wir nur Bonds betrachtet, die keine Coupons währen der Laufzeit zahlen, sondern nur am Ende ihren Nominalwert 1 auszahlen. Eine Einbeziehung von Coupontragenden Bonds ist einfach, da diese immer durch ein Portfolio von Zero-Coupon Bonds dupliziert werden können. Um dies zu konkretisieren betrachten wir einen Bond mit Laufzeit T Jahren und jährlichen Couponzahlungen $r(t), t = 1 \cdots, T-1$. Dann entspricht eine Couponzahlung $r(t)$ am Ende des $t-$ten Jahres einer Auszahlung von $r(t)$

Zero-Coupon Bonds mit Fälligkeit t. Durch ein Portfolio aus Zero-Coupon Bonds mit unterschiedlichen Fälligkeiten können wir also den Coupontragenden Bond duplizieren. Bezeichnen wir mit $B^c(0,T)$ dessen Anfangspreis, so erhalten wir

$$B^c(0,T) = \sum_{t=1}^{T-1} r(t)B(0,t) + B(0,T). \tag{8}$$

Diese Vorgehen kann auch auf defaultable Bonds angewendet werden und wir erhalten f"ur einen Coupontragenden Bond der Ratingklasse i die Zerlegung des Anfangspreises

$$B_i^c(0,T) = \sum_{t=1}^{T-1} r(t)B_i(0,t) + B_i(0,T). \tag{9}$$

Entsprechend können wir Forward Preise angeben für $T_1 = 1$ durch

$$F^c(T_1,T) = \frac{B^c(0,T)}{B(0,T_1)} = \sum_{t=1}^{T-1} r(t)F(T_1,t) + F(T_1,T) \tag{10}$$

sowie

$$F_i^c(T_1,T) = \frac{B_i^c(0,T)}{B_i(0,T_1)} = \sum_{t=1}^{T-1} r(t)F_i(T_1,t) + F_i(T_1,T). \tag{11}$$

Somit können wir auch für Coupontragende Anleihen den Verlust durch Bonitätsveränderung entsprechend (7) quantifizieren.

4 Einbeziehung einer Recovery

Bislang sind wir davon ausgegangen, daß im Falle eines Ausfalls der Totalverlust der Forderungen eintritt. Durch Sicherheiten bzw. Restwerte eines Schuldners ist es sinnvoll, daß nur ein Anteil des Nominalwertes tatsächlich ausfällt. Wir gehen davon aus, daß dieser sogenannte loss given default (LGD) eine $[0,1]$ - wertige Zufallsvariable ist. Für die Bewertung eines risikobehafteten Bonds spielt der LGD natürlich eine Rolle und muß berücksichtigt werden. Credit Metrics macht eine Unterteilung der Bonds in Klassen nach ihrer LGD Verteilung, siehe Tabelle

Klasse	Mittelwert	Standarabweichung
Senior secured	46.20	26.86
Senior unsecured	48.87	25.45
Senior Subordinated	51.48	23.81
Subordinated	67.26	20.18
Junior subordinated	82.91	10.9

Dies bedeutet, daß der Preis eines defaultable Bond nicht nur von seiner Ratingklasse sondern auch von seiner Recoveryklasse abhängt. Wir wollen dies abstrakt modellieren durch

$$I = \{1, \cdots, N\} \times \{1, \cdots, M\}$$

Die erste Koordinate gibt dabei die Rating- und die zweite die Recoveryklasse an. Wir nehmen an, daß zwar der Bond die Ratingklasse im nächsten Jahr ändern kann, aber die Recoveryklasse erhalten bleibt. Deshalb ändert sich für die Quantifizierung des Verlustes durch Bonitätsänderung auch nicht viel. Die Bond-und Forwardpreise $B_{ik}(t,T), F_{ik}(t,T)$ hängen nur zusätzlich von der Recoveryklasse ab. Für die Verlustquantifizierung ändert sich ausgehend von einer Ratingklasse i der Forwardpreis bei Sprung in die Defaultklasse, da der zufällige Anteil $Rec^{(k)} = 1 - LGD^{(k)}$ erhalten bleibt. Wir setzen also

$$F_{Nk}(T_1,T) = Rec^{(k)} \cdot F_{ik}(T_1,T) \quad 1 \leq k \leq M \tag{12}$$

und erhalten so einen zufälligen Verlust entsprechend (7) der Höhe

$$\begin{aligned} L^{(ik)} &= \sum_{j=1}^{N} (F_{ik}(T_1,T) - F_{jk}(T_1,T)) 1_{\{U^{(i)}=j\}} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (F_{ik}(T_1,T) - F_{jk}(T_1,T)) 1_{\{U^{(i)}=j\}} + LGD^{(k)} \cdot F_{ik}(T_1,T) 1_{\{U^{(i)}=N\}} \end{aligned} \tag{13}$$

5 Portfoliosichtweise

Grundlegend für die Betrachtung von Kreditportfolios ist, daß deren Kreditrisiken stochastische Abhängigkeiten zeigen. Deshalb hängt die Portfolioverlustverteilung von der gemeinsamen Verteilung der Ratingklassenübergänge des Gesamtportfolios ab. Schon bei kleinen Portfolios ist dies numerisch und statistisch nicht in den Griff zu bekommen. Ökonomisch gesehen macht es Sinn, daß es wenige makroökonomische Einflüsse gibt, die simultan eine Bonitätsveränderung aller Kredite im Portfolio zur Folge haben. Zusätzlich gibt es firmenspezifische Einflüße, die aber unabhängig sind von den anderen Krediten im Portfolio. Das Vorgehen erläutern wir am folgenden Einfaktormodell. Hierzu betrachten wir ein Portfolio bestehend aus n Krediten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß alle Kredite im Portfolio der gleichen Rating i und Recoveryklasse angehören. Für den standardisierten Return der k-ten Firma postulieren wir den Zusammenhang

$$r_k = \rho Y + \sqrt{1-\rho^2} Z_k \quad , -1 < \rho < 1, \tag{14}$$

Dabei nehmen wir an, daß $Y, Z_1, \cdots, Z_n$ stochastisch unabhängige $N(0,1)$ verteilte Zufallsgrößen bezeichen. Weiter führen wir in Abhängigkeit vom Eingangsrating i Schwellen

$$-\infty = c_N < c_{N-1} < c_{N-2} < \cdots < c_1 < c_0 = +\infty \tag{15}$$

ein, so daß

$$P(c_j < r_k < c_{j-1}) = p_{ij} \tag{16}$$

für alle $1 \leq j \leq N$ gilt. Da r_k standard normalverteilt ist, können wir diese Schwellen leicht mit der Standardnormalverteilungsfunktion ausrechnen. Wir führen also einen Wechsel der Ratingklasse von i nach j durch, wenn $c_j < r_k < c_{j-1}$ erfüllt ist. Somit definieren wir für den k-ten Kredit

$$U_k = \sum_{j=1}^{N} j 1_{\{c_j < r_k < c_{j-1}\}} \quad 1 \leq k < n. \tag{17}$$

Setzen wir die zugehörigen Verluste entsprechend (6) ein, so erhalten wir als zufälligen Portfolioverlust.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} l^{(i)}(U_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} l^{(i)}(j) 1_{\{U_k = j\}} \end{aligned} \tag{18}$$

Man beachte, daß bei gegebenem makroökonomischem Faktor $Y = y$ die Übergänge $U_1, \cdots, U_n$ und damit die dadurch hervorgerufenen Verluste bedingt stochastisch unabhängig sind. Damit verhält sich der Portfolioverlust

- gegeben $Y = y$ - wie ein individuelles Model der klassischen Risikotheorie. Die bedingte Verteilung kann prinzipiell ausgerechnet werden und durch Mischung bezüglich der Verteilung von Y kann auch die unbedingte Portfolioverteilung berechnet werden. Alternativ könnte auch eine Approximation der bedingten Portfolioverlustverteilung durch eine Possonsche Summenverteilung erfolgen. Dies entspricht einer Approximation eines individuellen Modells durch ein kollektives Modell. Durch Mischung erhielte man eine approximative Lösung für die Portfolioverlustverteilung. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, daß die zugehörigen Berechnungen einfacher durchzuführen sind. Schließlich kann man auch ohne Berechnungen durchzuführen zu approximativen Ergebnissen für die Portfolioverlustverteilung kommen, indem eine Simulation durchgeführt wird.

Zum Abschluß möchte ich die Ergebnisse einer Simulation zeigen. Hierzu wurde ein Portfolio von 1000 Bonds mit Nominalwert 100 betrachtet. Jeder Bond ist BBB geratet und gehört der Recoveryklasse Subordinated an. Damit können die Verluste und Wahrscheinlichkeiten anhand folgender Tabelle abgelesen werden.

Ratingklasse	Forward	Wahrscheinlichkeit
AAA	109.37	0.02
AA	109.19	0.33
A	108.66	5.95
BBB	107.55	86.93
BB	102.02	5.30
B	98.1	1.17
CCC	83.64	0.12
def	51.13	0.18

Die Werte der Tabelle sind einem Beispiel von Credit Metric entnommen. Es wurden nun 10000 Simulationen für dieses Portfolio durchgef"uhrt mit $\rho = 0.5$. Als Ergebnis erhielten wir 10000 simulierte Portfolioverluste, deren empirische Verteilung annähernd mit der tatsächlichen Portfolioverlustverteilung übereinstimmt und in der untenstehenden Grafik dargestellt ist. Man erkennt die schiefe Verteilung und die schwere Flanke. Unterstützt wird dies auch durch den Boxplot, der eine Vielzahl von Beobachtungen als Ausreißer verwerfen möchte.

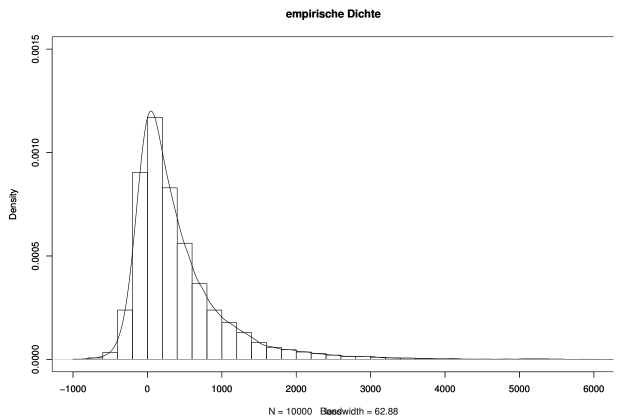

Figure 1: Histogramm und Kern-Dichte Schätzung einer simulierten Portfolioverlustverteilung

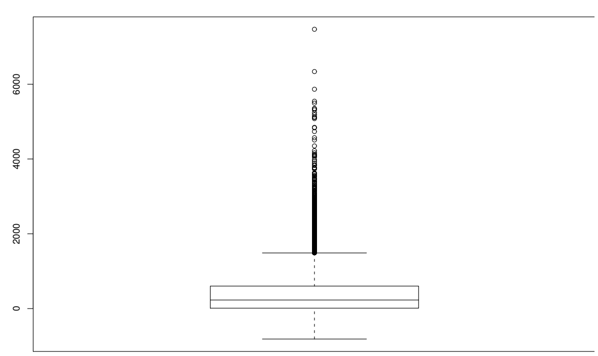

Figure 2: Boxplot der simulierten Portfolioverluste