Über die Abweichung der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte zufälliger Matrizen vom universellen Gesetz

Diplomarbeit

von Kristina Schubert

Lehrstuhl VII Analysis der
Fakultät für Mathematik an der
Ruhr-Universität Bochum im
März 2007

Betreuer:	Prof. Dr. Th. Kriecherbauer
Gutachter:	Prof. Dr. Th. Kriecherbauer
	Prof. Dr. A. Huckleberry

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit soll ein Resultat über die Eigenwerte zufälliger Matrizen beweisen. Dazu betrachten wir das Gaußsche Unitäre Ensemble (GUE), d.h. wir betrachten die folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_{N,\sigma}$ auf den hermiteschen $(N \times N)$-Matrizen, so dass gilt:

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{N,\sigma}$ auf den Matrizen $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $M^* = M$ und $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le N}$ ist dadurch bestimmt, dass die reellen Diagonalelemente, sowie Real- und Imaginärteil der Einträge oberhalb der Diagonalen unabhängig normalverteilt sind mit

$$m_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2) \text{ für } i = 1, \dots, N$$

und

$$\mathrm{Re}(m_{ij}), \mathrm{Im}(m_{ij}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ für } 1 \le i < j \le N.$$

Da für eine hermitesche Matrix $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le N}$ gilt

$$tr(M^2) = \sum_{i=1}^{N} m_{ii}^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le N} \mathrm{Re}(m_{ij})^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le N} \mathrm{Im}(m_{ij})^2,$$

erhalten wir als gemeinsame Dichte der Einträge von M

$$d\mathbb{P}_{N,\sigma}(M) = c_{N,\sigma} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} tr(M^2)} dM \tag{1.1}$$

für eine Normierungskonstante $c_{N,\sigma} \in \mathbb{R}$ und

$$dM = \prod_{i=1}^{N} dm_{ii} \prod_{1\le i<j\le N} d\,\mathrm{Re}(m_{ij})\; d\,\mathrm{Im}(m_{ij}).$$

Da dM und $tr(M)$ invariant unter unitärer Konjugation sind, hängt $d\mathbb{P}_{N,\sigma}(M)$ nur von den Eigenwerten $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_N$ der Matrix M ab, und wir schreiben $d\mathbb{P}_{N,\sigma}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ statt $d\mathbb{P}_{N,\sigma}(M)$.

Nach [2, Theorem 5.22] erhalten wir als gemeinsame Dichte der Eigenwerte

$$d\,\mathbb{P}_{N,\sigma}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_{N,\sigma}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\lambda_k^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_N \tag{1.2}$$

auf $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N\}$ mit einer Normierungskonstanten $Z_{N,\sigma} \in \mathbb{R}$.

Nach Wigners-Halbkreisgesetz in [2, (6.159)] und einem einfachen Skalierungsargument gilt folgende Aussage über den Grenzwert $N \to \infty$ der erwarteten Anzahl Eigenwerte von M:

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_{N,\sigma}\left(\text{Anzahl der Eigenwerte von M } \leq s\sqrt{8\sigma^2 N}\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{s} \psi(t)dt, \qquad (1.3)$$

wobei $\psi(t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\chi_{[-1,1]}$ und der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_{N,\sigma}$ gebildet wird.

Wir wollen im Folgenden σ in Abhängigkeit von N so wählen, dass (1.3) eine möglichst einfache Gestalt hat, und zwar $\sigma = \frac{1}{\sqrt{8N}}$ und damit $\sqrt{8\sigma^2 N} = 1$.

Bemerkung 1.0.1. *Meist wählt man für GUE $\sigma = \frac{1}{2}$, wodurch man in (1.1) die einfache Darstellung $d\mathbb{P}_{N,\sigma}(M) = c_{N,\sigma}e^{-tr(M^2)}dM$ erhält.*

Die Wahrscheinlichkeitsmaße mit verschiedenen σ unterscheiden sich nur durch Reskalierung, d.h. für $\mathcal{A}$ eine messbare Menge von Matrizen und $\lambda > 0$ gilt

$$\mathbb{P}_{N,\sigma}(\lambda\mathcal{A}) = \mathbb{P}_{N,\lambda\sigma}(\mathcal{A}).$$

Die Wahl von $\sigma = \frac{1}{\sqrt{8N}}$ bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit und hat den Vorteil, dass die Eigenwerte auf $[-1,1]$ konzentriert sind, unabhängig von N.

Wir verwenden die Notation

$$\mathbb{P}_N := \mathbb{P}_{N,\frac{1}{\sqrt{8N}}} \qquad (1.4)$$

und erhalten in (1.2)

$$d\mathbb{P}_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N}\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{k=1}^{N} e^{-2N\lambda_k^2} d\lambda_1 \ldots d\lambda_N$$

mit entsprechender Normierungskonstanten $Z_N \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.0.2. *Alle in dieser Arbeit auftretenden Erwartungswerte werden bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_N$ aus (1.4) gebildet.*

Sei $a \in (-1,1)$, I_N ein Intervall, das symmetrisch um a liegt, und für $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $M = M^*$ bezeichnen wir mit $\lambda_1(M) \leq \ldots \leq \lambda_N(M)$ die Eigenwerte von M. Nach dem Halbkreisgesetz von Wigner aus (1.3) gilt für große Werte von N, dass

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_N\left[\text{Anzahl der Eigenwerte im Intervall } I_N\right] \approx \int_{I_N} \psi(t)dt,$$

wobei $\mathbb{E}_N$ den Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_N$ aus (1.4) bezeichnet.

Ist die Länge von $(I_N) =: |I_N|$ klein, so erwarten wir also ungefähr $N\psi(a)|I_N|$ Eigenwerte in I_N und für Eigenwerte $\lambda_j(M)$ nahe bei a erwarten wir, dass $\lambda_{j+1}(M) - \lambda_j(M)$ von der Größenordnung $\frac{1}{N\psi(a)}$ ist. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 1.0.3. *Für eine hermitesche $(N \times N)$-Matrix M mit Eigenwerten $\lambda_1(M) \leq \ldots \leq \lambda_N(M)$, $s \in \mathbb{R}$ und $I_N \subset \mathbb{R}$ Intervall sei*

$$\begin{aligned} & S_{N,a,I_N}(s,M) \\ := \; & \frac{1}{N\psi(a)|I_N|}\#\left\{j : \lambda_{j+1}(M) - \lambda_j(M) \leq \frac{s}{N\psi(a)} \text{ und } \lambda_j(M), \lambda_{j+1}(M) \in I_N\right\}, \end{aligned}$$

wobei wir mit # die Anzahl der Elemente der Menge bezeichnen.

Damit lässt sich der Hauptsatz dieser Arbeit formulieren.

Satz 1.0.4. *Sei $a \in (-1,1)$, I_N eine Familie um a symmetrischer Intervalle und S_{N,a,I_N} wie in Definition 1.0.3. Dann gibt es ein Maß μ auf $\mathbb{R}$, so dass a) und b) gelten.*

a) *Falls $|I_N| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $N\psi(a)|I_N| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt*

$$\mathbb{E}_N\left[\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|S_{N,a,I_N}(s,\cdot) - \int_{-\infty}^{s} d\mu\right|\right] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.5}$$

b) *Für $I_N = [a - \frac{1}{\sqrt{N}}, a + \frac{1}{\sqrt{N}}]$ gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists C \in \mathbb{R}, \;\; \textit{so dass } \forall N \textit{gilt}:$$

$$\mathbb{E}_N\left[\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|S_{N,a,I_N}(s,\cdot) - \int_{-\infty}^{s} d\mu\right|\right] \leq CN^{\varepsilon - \frac{1}{12}}. \tag{1.6}$$

Dabei wird der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_N$ aus (1.4) gebildet.

Bemerkung 1.0.5. *Wir verwenden im Weiteren die Bezeichnung $\mathbb{E}$ für $\mathbb{E}_N$.*

Hauptziel dieser Arbeit ist es, obigen Satz 1.0.4 zu beweisen, wobei wir uns am Buch *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy* von Nicholas M. Katz und Peter Sarnak ([5]) orientieren und die Struktur des Beweises, wie er in den ersten fünf Kapiteln von [5] dargestellt ist, übernehmen und die Abschätzungen anpassen.

Wir werden im nächsten Kapitel das Wahrscheinlichkeitsmaß aus (1.4) genauer betrachten und einen Zusammenhang mit orthogonalen Polynomen herstellen. Um die damit gewonnene Darstellung der Dichte mit der Funktion K_N, die als Summe von orthogonalen Polynomen gegebenen ist, ausnutzen zu können, werden wir in Kapitel 2 aus den Eigenschaften der orthogonalen Polynome hilfreiche Identitäten und Abschätzungen herleiten, mit denen wir später Aussagen über den Erwartungswert in Satz 1.0.4 treffen können. Insbesondere lässt sich der Grenzwert der Dichtefunktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes aus (1.4) mit dieser neu gewonnenen Darstellung angeben und wir werden später im Beweis des Hauptsatzes dieses asymptotische Verhalten der Dichte ausnutzen können.

In Kapitel 3 werden wir die im Hauptsatz auftretende Größe $S_{N,a,I_N}(s,M)$ als Verteilungsfunktion eines Maßes schreiben, so dass im Hauptsatz eine Abschätzung über die erwartete Abweichung der Verteilungfunktionen zweier Maße zu beweisen bleibt. Wir werden dann Lemmata über den Zusammenhang des zu $S_{N,a,I_N}(s,M)$ gehörenden Maßes mit einem verwandten, aber leichter zu behandelnden Hilfsmaß, dessen Vorteil ist, dass es nicht so stark von der Sortierung der Eigenwerte abhängt, beweisen und einige später verwendete Abschätzungen herleiten.

Wir benötigen Ungleichungen für den Erwartungswert und die Varianz des Integrals bezüglich des in Kapitel 3 definierten Hilfsmaßes, und werden in Kapitel 4 unter Verwendung der asymptotischen Aussage über die Dichte aus Kapitel 2 für den Beweis wichtige Abschätzungen erhalten.

Damit lässt sich in Kapitel 5 die Aussage des Hauptsatzes beweisen. Dabei werden wir das Problem von $\mathbb{R}$ auf ein Problem an M diskreten Punkten zurückführen und eine Abschätzung für den dabei gemachten Fehler erhalten. Im letzten Teil des Beweises gelangen wir damit zu einer Ungleichung, von der wir durch geschickte Wahl von bis dahin zwei freien Parametern, unter anderem der Anzahl an Stützstellen, auf die wir das Problem reduziert haben, die zu beweisende Abschätzung erhalten.

Viele der in [5] gemachten Abschätzungen und Umformungen können so modifiziert werden, dass sie auch für die in dieser Arbeit verwendeten Größen gelten, allerdings gibt es einige Unterschiede, die insbesondere in Kapitel 4 zum Tragen kommen.

Wir wollen den Hauptsatz für hermitesche Matrizen, deren Eigenwerte in $\mathbb{R}$ liegen, beweisen, während der Beweis in [5] für mehrere Mengen von Matrizen, nämlich $U(N)$, $SO(2N+1)$, $USp(2N)$, $SO(2N)$ und $O_-(2N+2)$, geführt wird. Dabei liegen in [5] die komplexen Eigenwerte auf dem Einheitskreis und es werden die Abstände der Winkel, die in $[0, 2\pi]$ liegen, betrachtet. Außerdem werden in [5] nicht nur die Abstände zwischen zwei, zu komplexen Eigenwerten gehörenden, Winkeln betrachtet, sondern Vektoren, deren Komponenten allgemeinere Abstände darstellen, so dass die hier betrachteten Abstände zwischen benachbarten Eigenwerten dem Spezialfall von eindimensionalen Vektoren entsprechen. In [5] erhält man für die dort verwendete Kernfunktion K_N eine explizite Darstellung mit trigonometrischen Funktionen, abhängig von der Menge betrachteter Matrizen. Wir erhalten für das in dieser Arbeit verwendete K_N, das hier über skalierte Hermit-Polynome definiert ist, nur einen asymptotischen Zusammenhang mit der Funktion $\frac{\sin(\pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ und müssen außerdem die Eigenwerte entsprechend skalieren und nur solche in einem Intervall I_N betrachten. Dadurch erhalten wir insbesondere in Kapitel 4 andere Abschätzungen, die noch von der Größe des Intervalls I_N abhängen und lediglich asymptotische Abschätzungen darstellen. Mit einer ähnlichen Wahl der freien Parameter wie in [5] am Ende des Beweises in Kapitel 5 erhalten wir schließlich eine Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{12}})$ statt $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{6}})$ in [5].

2 Die Methode der Orthogonalen Polynome

In diesem Kapitel werden wir eine Darstellung der zum Wahrscheinlichkeitsmaß in (1.4) gehörenden Dichte mit Hilfe orthogonaler Polynome erhalten und einige Aussagen über diese Darstellung beweisen, die wir später in Kapitel 4 für die zentralen Abschätzungen zum Beweis des Hauptsatzes 1.0.4 verwenden werden.

Definition 2.0.1. *Orthogonale Polynome*

Sei

$$p_j^{(N)}(x) := \gamma_j^{(N)} x^j + \gamma_{j-1}^{(N)} x^{j-1} + \ldots + \gamma_0 \tag{2.1}$$

das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad j mit $\gamma_j^{(N)} > 0$, so dass gilt

$$\int p_i^{(N)}(x) p_j^{(N)}(x) e^{-2Nx^2}\, dx = \delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Bemerkung 2.0.2. *Bei den Polynomen $p_j^{(N)}(x)$ aus obiger Definition handelt es sich um reskalierte Hermite Polynome $q_j(x) = \alpha_j x^j + \ldots + \alpha_0$ mit $\alpha_j > 0$ und*

$$\int q_i(x) q_j(x) e^{-x^2} dx = \delta_{ij}.$$

Definition 2.0.3. *Sei $p_j^{(N)}$ wie in Definition 2.0.1. Wir setzen*

$$\varphi_j^{(N)}(x) := p_j^{(N)}(x) e^{-Nx^2}$$

und

$$K_N(x,y) := \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j^{(N)}(x) \varphi_j^{(N)}(y). \tag{2.3}$$

Dann gilt mit [2, (5.30)] für die zu (1.4) gehörende Dichte

$$\begin{aligned} d\mathbb{P}_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) &= \frac{1}{Z_N} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{k=1}^{N} e^{-2N\lambda_k^2} d\lambda_1 \ldots \lambda_N \\ &= \det\left(K_N(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \le i,j \le N}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Damit haben wir eine Darstellung der Dichte des Wahrscheinlichkeitsmaßes, bezüglich dem wir Erwartungswerte betrachten, mit Hilfe orthogonaler Polynome und der Funktion K_N erhalten, und wir werden nun nützliche Eigenschaften der Funktion K_N und ihrer Determinante zusammenstellen, um diese später im Beweis des Hauptsatzes 1.0.4 verwenden zu können.

2.1 Eigenschaften der Funktion $K_N(x,y)$

Wir werden im folgenden Satz und den darauf folgenden zwei Korollaren Aussagen über den asymptotischen Zusammenhang der Funktion $K_N(\widetilde{x},\widetilde{y})$ mit $\frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}$ erhalten.

Satz 2.1.1. *Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $C(\delta) > 0$, so dass für alle Intervalle $I \subset [-1+\delta, 1-\delta]$ und alle $a \in I$, $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sup_{\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta}\in I} \left| \frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta}) - \frac{\sin(\pi(\zeta-\eta))}{\pi(\zeta-\eta)} \right| \leq C(\delta) \left(|I| + \frac{1}{N} \right), \tag{2.5}$$

wobei $\zeta = N\psi(a)(\widetilde{\zeta} - a)$, $\eta = N\psi(a)(\widetilde{\eta} - a)$ und $|I|$ bezeichne die Länge des Intervalls I.

Bemerkung 2.1.2. *Wir werden einen Beweis dieses Satzes im Anhang (Kapitel 6) skizzieren, wobei wir jedoch den entscheidenden Beweisschritt, nämlich die Bestimmung der Asymptotik von Hermite Polynomen, aus der Literatur zitieren werden. Man kann mit Hilfe von Riemann-Hilbert Methoden zeigen, dass für alle bislang in der Literatur studierten unitär invarianten Ensembles hermitescher Matrizen die analoge Formulierung des obigen Satzes 2.1.1 richtig bleibt und damit die im Hauptsatz 1.0.4 formulierten Abschätzungen für die Konvergenzrate der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte auch für diese Klasse von Ensembles richtig bleiben. Da die asymptotische Analyse der orthogonalen Polynome und der Kernfunktion K_N nicht das Hauptanliegen dieser Arbeit sind, verzichten wir auf die Untersuchung allgemeinerer Ensembles und beschränken uns auf den Beweis des Hauptsatzes für das Gaußsche Unitäre Ensemble (GUE).*

Korollar 2.1.3. *Gilt in Satz 2.1.1, dass die Länge des Intervalls I von N abhängt und $|I| \to 0$ für $N \to \infty$, dann gilt für alle $\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta} \in I$*

$$\frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta}) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(\pi(\zeta-\eta))}{\pi(\zeta-\eta)}, \tag{2.6}$$

und wegen $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$|K_N(\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta})| \leq 2 \cdot N\psi(a) \tag{2.7}$$

für hinreichend großes N.

Korollar 2.1.4. *Ist $I = I_N$ mit $|I_N| \to 0$ und $N\psi(a)|I_N| \to \infty$, wie in Hauptsatz 1.0.4, dann folgt aus Satz 2.1.1*

$$\frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{\zeta}, \widetilde{\eta}) = \frac{\sin(\pi(\zeta - \eta))}{\pi(\zeta - \eta)} + \mathcal{O}(|I_N|) \quad \text{für alle } \widetilde{\zeta}, \widetilde{\eta} \in I_N. \tag{2.8}$$

Bisher haben wir die Funktion K_N betrachtet, aber in der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte in (2.4) verwenden wir die Determinante von K_N. Deshalb werden wir im folgenden Satz einige Eigenschaften dieser Determinante zusammenstellen. Dazu führen wir zunächst folgende Notation ein.

Definition 2.1.5. *Wir setzen*

$$B_{N,m}(t_1, \ldots, t_m) := \det \left(\frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j}) \right)_{1 \le i,j \le m} \quad \text{wobei } \widetilde{t_i} = a + \frac{t_i}{N\psi(a)}$$

Satz 2.1.6. *Mit der Notation aus Definition 2.1.5 gilt:*

1. *Für alle $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ ist*

$$B_{N,m}(t_1, \ldots, t_m) = B_{N,m}(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(m)}) \text{ für alle } \sigma \in S_m. \tag{2.9}$$

2. *Für alle $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m}} B_{N,N}(t_1, \ldots, t_N)\, dt_{m+1} \ldots dt_N = (N-m)! B_{N,m}(t_1, \ldots, t_m). \tag{2.10}$$

3. *Für $\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_m} \in I \subset [-1, 1]$ gilt*

$$|B_{N,m}(t_1, \ldots, t_m)| \le 2^m \text{ für } N \text{ hinreichend groß.} \tag{2.11}$$

4. *Für $\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_m} \in I_N$ gilt*

$$B_{N,k+2}(t_1, \ldots, t_{k+2}) = \det \left(\frac{\sin(\pi(t_i - t_j))}{\pi(t_i - t_j)} \right)_{i,j \le k+2} + (k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|). \tag{2.12}$$

Um Satz 2.1.6 beweisen zu können, benötigen wir die folgenden zwei Lemmata, nämlich die Hadamard-Ungleichung und ein Lemma zum Vergleich von zwei Determinanten.

Lemma 2.1.7. *Hadamard-Ungleichung*

Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in einem Hilbertraum.
Dann gilt
$$|\det(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j}| \leq \prod_i ||v_i||^2.$$

Beweis der Hadamard-Ungleichung:
Falls $v_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j} = 0$ und die Hadamard-Ungleichung gilt. Wir nehmen deshalb im Folgenden an, dass $v_i \neq 0$ für alle i. Sei $w_i := \beta_i v_i$ mit $\beta_i \in \mathbb{R}$, so dass $||w_i|| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Setze} \quad A &= (a_{ij})_{ij} := (\langle v_i, v_j\rangle)_{ij} \quad \textit{und} \\ B &= (b_{ij})_{ij} := (\langle w_i, w_j\rangle)_{ij} = (\langle \beta_i v_i, \beta_j v_j\rangle)_{ij} = (\beta_i\beta_j a_{ij})_{ij}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^n \beta_i\beta_{\sigma(i)} \prod_i a_{i,\sigma(i)} \\ &= \det A \cdot \prod_i \beta_i^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} |\det A| \leq \prod_i ||v_i||^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \prod_i \beta_i^2 |\det A| \leq \prod_i \beta_i^2 \prod_i ||v_i||^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |\det B| \leq \prod_i ||w_i||^2 = 1 \end{aligned}$$

genügt es $|\det B| \leq 1$ zu zeigen.

1.Fall: w_i linear abhängig.
Dann existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i \alpha_i w_i = 0$.
Damit ist für alle j: $\sum_i \alpha_i \langle w_i, w_j\rangle = \langle \sum_i \alpha_i w_i, w_j\rangle = 0$, und somit sind die Zeilen von B linear abhängig, und es folgt $\det B = 0$.

2.Fall: w_i linear unabhängig.
Es gilt $B = B^T$, und damit hat B reelle Eigenwerte. Außerdem ist für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \neq (0, \dots, 0)$

$$\langle \alpha, B\alpha\rangle = \left\| \sum_i \alpha_i w_i \right\|^2 > 0.$$

Damit ist B positiv definit und für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
|\det B|^{\frac{1}{n}} &= \left(\prod_i \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \stackrel{*}{\leq} \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i = \frac{1}{n}\operatorname{Spur}(B) \\
&= \frac{1}{n}\sum_i \langle w_i, w_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_i ||w_i||^2 = 1.
\end{aligned}$$

Es bleibt die Relation $(*)$ zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel zu zeigen.

Wegen $e^{x-1} \geq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $x = \frac{\lambda_j}{\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i}$ für alle j:

$$\exp\left(\frac{\lambda_j}{\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i} - 1\right) \geq \frac{\lambda_j}{\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i}.$$

Multiplizieren dieser n Gleichungen für $j = 1, \ldots, n$ liefert

$$\exp\underbrace{\left(\frac{\sum_j \lambda_j}{\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i} - n\right)}_{=n-n=0} \geq \frac{\prod_j \lambda_j}{(\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i)^n}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
e^0 = 1 &\geq \prod_j \lambda_j \left(\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i\right)^{-n} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i\right)^n &\geq \prod_j \lambda_j.
\end{aligned}$$

Daraus folgt Behauptung $(*)$ und damit ist die Hadamard-Ungleichung bewiesen.

$\square$

Lemma 2.1.8. *Lemma zum Vergleich von zwei Determinanten*
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$, $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$ und

$$\sup_{i,j} |a_{ij}| \leq t, \quad \sup_{i,j} |b_{ij}| \leq t \textit{ und } \sup_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| \leq s.$$

Dann gilt:

$$|\det A - \det B| \leq n! \cdot n \cdot t^{n-1} s.$$

Beweis:
Die Determinanten von A und B lassen sich nach Leibniz folgendermaßen entwickeln:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma(i)},$$
$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_i b_{i,\sigma(i)}.$$

Für festes $\sigma \in S_n$ setze $b_i := b_{i,\sigma(i)}$ und $a_i := a_{i,\sigma(i)}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\prod_{i<j} b_i \right) (b_j - a_j) \left(\prod_{k>j} a_k \right) \right] \\
= &\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\prod_{i\le j} b_i \right) \left(\prod_{k>j} a_k \right) - \left(\prod_{i<j} b_i \right) \left(\prod_{k\ge j} a_k \right) \right] \\
= &\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i\le j} b_i \right) \left(\prod_{k>j} a_k \right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i\le j-1} b_i \right) \left(\prod_{k>j-1} a_k \right) \\
= &\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i\le j} b_i \right) \left(\prod_{k>j} a_k \right) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{i\le j} b_i \right) \left(\prod_{k>j} a_k \right) \\
= &\prod_i b_i - \prod_i a_i. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $\sigma \in S_n$

$$\left| \prod_i b_i - \prod_i a_i \right| \le \sum_{j=1}^{n} \left| \left(\prod_{i<j} b_i \right) (b_j - a_j) \left(\prod_{k>j} a_k \right) \right| \le n \cdot t^{n-1} s, \qquad (2.14)$$

und mit (2.14) folgt

$$|\det B - \det A| \le \sum_{\sigma \in S_n} \left| \prod_i b_{i,\sigma(i)} - \prod_i a_{i,\sigma(i)} \right| \le n! \cdot n \cdot t^{n-1} s,$$

und wir haben das Lemma zur Abschätzung der Differenz zweier Determinanten bewiesen. □

Mit den letzten beiden Lemmata können wir nun Satz 2.1.6 beweisen.

Beweis von Satz 2.1.6:

zu 1) Es gilt

$$(\psi(a)N)^m B_{N,m}(t_1,\dots,t_m) = \left| \begin{pmatrix} K_N(t_1,t_1) & K_N(t_1,t_2) & \dots & K_N(t_1,t_m) \\ K_N(t_2,t_1) & K_N(t_2,t_2) & \dots & K_N(t_2,x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_N(t_m,t_1) & K_N(t_m,t_2) & \dots & K_N(t_m,t_m) \end{pmatrix} \right|.$$

Da jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellbar ist, genügt es, die Aussage für eine Transposition $(i\ j)$ zu zeigen. Dies folgt sofort durch Vertauschung der i-ten mit der j-ten Zeile und anschließender Vertauschung der i-ten mit der j-ten Spalte.

zu 2) Nach [2, (5.38)] gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{N-m}} \det\left(K_N(t_i,t_j)\right)_{1\le i,j\le N} dt_{m+1}\dots dt_N = (N-m)! \det\left(K_N(t_i,t_j)\right)_{1\le i,j\le m}. \tag{2.15}$$

Mit Definition 2.1.5 gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{N-m}} B_{N,N}(t_1,\dots,t_N) dt_{m+1}\dots dt_N \\ = & \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^N \int_{\mathbb{R}^{N-m}} \det\left(K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})\right)_{1\le i,j\le N} dt_{m+1}\dots dt_N \\ & \text{und mit der Substitution } t_i = N\psi(a)(\widetilde{t_i}-a) \text{ gilt weiter} \\ = & \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^m \int_{\mathbb{R}^{N-m}} \det\left(K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})\right)_{1\le i,j\le N} \widetilde{dt_{m+1}}\dots\widetilde{dt_N} \\ \overset{(2.15)}{=} & (N-m)! \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^m \det\left(K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})\right)_{1\le i,j\le m} \\ = & (N-m)! B_{N,m}(t_1,\dots,t_m). \end{aligned}$$

zu 3) Wir wollen die Hadamard-Ungleichung aus Lemma 2.1.7 verwenden.

Sei dazu $v_i := \begin{pmatrix} \varphi_0(\widetilde{t_i}) \\ \varphi_1(\widetilde{t_i}) \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}(\widetilde{t_i}) \end{pmatrix}$ für $i = 1,\dots,m$.

Dann ist $K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j}) = \langle v_i, v_j\rangle$ und $\|v_i\|^2 = K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_i})$. Es gilt

$$\begin{aligned} |B_{N,m}(t_1,\ldots,t_m)| &= \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^m |\det K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})_{1\le i,j\le m}| \\ &= \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^m |\det(\langle v_i, v_j\rangle)_{1\le i,j\le m}| \\ &\overset{2.1.7}{\le} \left(\frac{1}{N\psi(a)}\right)^m \prod_{i=1}^m ||v_i||^2 \\ &\overset{(2.7)}{\le} 2^m. \end{aligned}$$

zu 4) Für ein Intervall $I = I_N$ mit $|I_N| \to 0$ und $N\psi(a)|I_N| \to \infty$ für $N \to \infty$ gilt nach Satz 2.1.6

$$\frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta}) = \frac{\sin(\pi(\zeta-\eta))}{\pi(\zeta-\eta)} + \mathcal{O}\left(|I_N|\right),$$

und wegen

$$\frac{1}{N\psi(a)} K_N(\widetilde{\zeta},\widetilde{\eta}) \le 2$$

und

$$\frac{\sin(\pi(\zeta-\eta))}{\pi(\zeta-\eta)} \le 2$$

folgt mit Lemma 2.1.8

$$\begin{aligned} &\left| B_{N,k+2}(t_1,\ldots,t_{k+2}) - \det\left(\frac{\sin\left(\pi(t_i-t_j)\right)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i,j\le k+2} \right| \\ &\qquad \le (k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|). \end{aligned}$$

Damit sind die vier Aussagen von Satz 2.1.6 bewiesen. □

Bemerkung 2.1.9. *Wir verwenden die Notation*

$$W(t_1,\ldots,t_{k+2}) := \det\left(\frac{\sin\left(\pi(t_i-t_j)\right)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i,j\le k+2}.$$

Dann gilt mit Satz 2.1.6 für alle $\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_{k+2}} \in I_N$

$$B_{N,k+2}(t_1,\ldots,t_{k+2}) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} W(t_1,\ldots,t_{k+2}).$$

Mit

$$|B_{N,k+2}(t_1,\ldots,t_{k+2})| \le 2^{k+2}$$

folgt

$$|W(t_1,\ldots,t_{k+2})| \le 2^{k+2}. \tag{2.16}$$

Die folgende Bemerkung und Lemma 2.1.11 liefern nützliche Umformungen, um später einfacher bezüglich $d\mathbb{P}$ integrieren zu können.

Bemerkung 2.1.10. *Für eine Funktion* $f : \mathbb{R}^N(ord) \to \mathbb{R}$ *mit* $\mathbb{R}^N(ord) := \{(t_1,\ldots,t_N)^T \in \mathbb{R}^N : t_1 \leq \ldots \leq t_N\}$ *gilt*

$$\int_{\widetilde{A}} f(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N})d\mathbb{P}_N(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N}) = \int_A f(t_1,\ldots,t_N)B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N$$

wobei $t_i = \varphi(\widetilde{t_i}) = N\psi(a)(\widetilde{t_i} - a)$ *und* $A := \varphi^{-1}(\widetilde{A})$.

Dies gilt nach Substitutionsregel und Identität (2.4).

Um später auftretende Terme der Form $\int_{\widetilde{t_1}\leq\ldots\leq\widetilde{t_N}} f(\widetilde{t_{i_1}},\ldots,\widetilde{t_{i_m}})d\mathbb{P}_N(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N})$ mit $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq N$ und $f(t_1,\ldots,t_m) = f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(m)})$ für alle $\sigma \in S_m$ einfacher berechnen zu können verwenden wir folgendes

Lemma 2.1.11. *Sei* $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq N$ *und* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *mit* $f(t_1,\ldots,t_m) = f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(m)})$ *für alle* $\sigma \in S_m$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{\widetilde{t_1}\leq\ldots\leq\widetilde{t_N}} f(\widetilde{t_{i_1}},\ldots,\widetilde{t_{i_m}})d\mathbb{P}_N(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N}) \\ = &\frac{(N-m)!}{N!}\int_{\mathbb{R}^m} f(t_1\ldots,t_m)B_{N,m}(t_1,\ldots,t_m)dt_1\ldots dt_m \end{aligned}$$

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\widetilde{t_1}\leq\ldots\leq\widetilde{t_N}} f(\widetilde{t_{i_1}},\ldots,\widetilde{t_{i_m}})d\mathbb{P}_N(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N}) \\ = &\int_{\widetilde{t_1}\leq\ldots\leq\widetilde{t_N}} f(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_m})d\mathbb{P}_N(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N}) \\ \overset{2.1.10}{=} &\int_{t_1\leq\ldots\leq t_N} f(t_1,\ldots,t_m)B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N \\ \overset{(2.9)}{=} &\frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} f(t_1,\ldots,t_m)B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N \\ \overset{(2.10)}{=} &\frac{(N-m)!}{N!}\int_{\mathbb{R}^m} f(t_1,\ldots,t_m)B_{N,m}(t_1,\ldots,t_m)dt_1\ldots dt_m \end{aligned}$$

□

3 Kombinatorik und Maße

Um später den Hauptsatz 1.0.4 beweisen zu können, wollen wir in diesem Kapitel einige Begriffe einführen. Insbesondere werden wir für eine hermitesche $(N \times N)$-Matrix H das Maß $\sigma_N(H)$ definieren, mit dem sich die im Hauptsatz zentrale Größe S_{N,a,I_N} darstellen lässt, und außerdem werden wir einige vorbereitende Lemmata zusammenstellen. Die beiden für den späteren Beweis wichtigsten Aussagen befinden sich dabei in Abschnitt 3.3 und betreffen den Grenzwert $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f \, d\sigma_N(\cdot)\right]$. So garantiert Lemma 3.3.1 die Existenz des Grenzwertes unter bestimmten Voraussetzungen und Lemma 3.3.3 liefert eine zentrale Abschätzung für den Beweis des Hauptsatzes, wie wir sie in Kapitel 5 verwenden werden.

Für die Beweise dieser Lemmata benötigen wir ein Hilfsmaß $\gamma_N(c, H)$, welches zuvor in Abschnitt 3.2 definiert wird und dessen Zusammenhang mit $\sigma_N(H)$ ebenfalls in Abschnitt 3.2 aufgezeigt wird.

Um eine Beziehung zwischen den Maßen σ_N und γ_N herzuleiten, benötigen wir die kombinatorischen Überlegungen zu Beginn dieses Kapitels. Dort werden die Größen Sep und Clump definiert und eine Relation zwischen den beiden Größen hergestellt. Dann lässt sich die Integration bezüglich σ_N mit Hilfe von Sep und die Integration bezüglich γ_N mit Hilfe der Größe Clump darstellen und die Aussagen über den Zusammenhang von Sep und Clump lassen sich auf die Maße übertragen.

3.1 Kombinatorik

Wir betrachten N der Größe nach geordnete reelle Zahlen und werden die zwei Größen Sep und Clump definieren. Diese geben an, wie viele Paare dieser Zahlen unter bestimmten Nebenbedingungen einen vorgegebenen Abstand $s \in \mathbb{R}$ haben.

Definition 3.1.1. *$Sep_X(a)(s)$ und $Clump_X(a)(s)$*
Sei $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \in \mathbb{N}$ und $X = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ mit $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$.

$$Sep_X(a)(s) := \#\{1 \leq i \leq N - a - 1 : x_{i+a+1} - x_i = s\}$$

und

$$\mathit{Clump}_X\,(a)(s) := \#\{1 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_{a+1} \leq N : \; x_{i_{a+1}} - x_{i_0} = s\}.$$

$\mathrm{Sep}_X\,(a)(s)$ gibt also an, wie viele Paare der Zahlen $x_1, \ldots, x_N$, zwischen denen genau a andere x_j liegen, den Abstand s haben. Wir werden später sehen, dass wir im Hauptsatz über die Abstandsverteilung *benachbarter* Eigenwerte $\mathrm{Sep}(0)(s)$ benötigen und insbesondere das Maß $\sigma_N(H)$ mit Hilfe von $\mathrm{Sep}(0)(s)$ darstellen können.
Mit $\overline{X} := \{x_1, \ldots, x_N\}$ ist $\mathrm{Clump}_X\,(a)(s)$ die Anzahl der $(a+2)$-elementigen Teilmengen von $\overline{X}$, für die die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Element genau s beträgt.

Dabei ist zu beachten, dass Sep die Anordnung aller x_i verwendet und wir für Clump lediglich Teilmengen von $\overline{X}$ und deren größtes und kleinstes Element betrachten, wodurch sich Aussagen über Clump einfacher beweisen lassen. Wir werden dies ausnutzen, indem wir $\mathrm{Sep}(0)(s)$ im nächsten Abschnitt durch Clump-Größen ausdrücken. Dabei erhalten wir die Aussagen über $\mathrm{Sep}(0)(s)$ als Spezialfall einer Relation zwischen $\mathrm{Sep}(a)(s)$ und der Summe über Terme der Form $\mathrm{Clump}(n)(s)$.

Bemerkung 3.1.2. *Wir nehmen im Folgenden an, dass $X = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ mit $x_1 \leq \ldots \leq x_N$ und verwenden die Schreibweise $Sep(a)(s)$ statt $Sep_X(a)(s)$ und $Clump(n)(s)$ statt $Clump_X(n)(s)$*

3.1.1 Zusammenhang von Clump und Sep

Das folgende Lemma liefert einen Zusammenhang der Größen Sep und Clump und gibt insbesondere eine Darstellung von Sep als Summe über Clump und umgekehrt an.

Lemma 3.1.3. *Für $a, b, n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden zwei Identitäten:*

1.
$$\mathit{Clump}\,(a)(s) = \sum_{b \geq a} \binom{b}{a} \mathit{Sep}(b)(s) \tag{3.1}$$

2.
$$\mathit{Sep}(a)(s) = \sum_{n \geq a} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathit{Clump}\,(n)(s). \tag{3.2}$$

Beweis:

Die im Beweis betrachteten Summen haben jeweils nur endlich viele Summanden, da für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{Sep}(n)(s) = 0$ und $\mathrm{Clump}(n)(s) = 0$ für $n > N - 2$.

zu 1) Wir stellen folgende kombinatorische Überlegung an:

Wir betrachten das Paar (x_i, x_j) mit $j \geq i$ und $x_j - x_i = s$ und bezeichnen mit $b := j - i - 1$ die Anzahl der Elemente von $\overline{X}$, die zwischen x_i und x_j liegen.
Das Paar (x_i, x_j) liefert dann einen Beitrag zu $\mathrm{Sep}(b)(s)$.
Außerdem trägt (x_i, x_j) nur dann zu $\mathrm{Clump}(a)(s)$ bei, wenn $b \geq a$. In diesem Fall liefert es $\binom{b}{a}$ Beiträge zu $\mathrm{Clump}(a)(s)$, da es so viele Tupel $(i_0, \ldots, i_{a+1})$ mit $i = i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{a+1} = j$ gibt.

zu 2) Sei $T \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{b\geq 0} \mathrm{Sep}(b)(s)(1+T)^b &= \sum_{b\geq 0} \mathrm{Sep}(b)(s) \sum_{a=0}^{b} \binom{b}{a} T^a \\
&= \sum_{a\geq 0} \underbrace{\sum_{b\geq a} \mathrm{Sep}(b)(s) \binom{b}{a}}_{\mathrm{Clump}(a)(s)} T^a \\
&= \sum_{a\geq 0} \mathrm{Clump}(a)(s) T^a. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Ersetzen von T durch $T-1$ in (3.3) liefert

$$\sum_{b\geq 0} \mathrm{Sep}(b)(s) T^b = \sum_{a\geq 0} \mathrm{Clump}\,(a)(s)(T-1)^a,$$

und durch Umformen der rechten Seite mit dem binomischen Lehrsatz ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{b\geq 0} \mathrm{Sep}(b)(s) T^b &= \sum_{a\geq 0} \mathrm{Clump}\ (a)(s) \sum_{n=0}^{a} \binom{a}{n} (-1)^{a-n} T^n \\
&\overset{a\leftrightarrows n}{=} \sum_{n\geq 0} \mathrm{Clump}\ (n)(s) \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} (-1)^{n-a} T^a \\
&= \sum_{a\geq 0} \sum_{n\geq a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\ (n)(s)(-1)^{n-a} T^a.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für Polynome ergibt die Behauptung. □

Bemerkung 3.1.4. *Da wir später lediglich an der Größe $\mathrm{Sep}(0)(s)$ interessiert sind und die allgemeine Größe $\mathrm{Sep}(a)(s)$ nur verwenden, um den entsprechenden*

Zusammenhang zu Clump herzustellen, ist der Fall $a = 0$ aus (3.2) von besonderem Interesse. Es gilt

$$Sep(0)(s) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \, Clump\,(n)(s). \tag{3.4}$$

Die zentrale Aussage von Lemma 3.1.3 ist Identität (3.2), nach der wir die Größe Sep durch Summation über Clump-Werte ausdrücken können. Betrachtet man dabei nur die Summation bis zu einem Wert $m \in \mathbb{N}$, so erhält man statt der Gleichung eine Ungleichung.

Satz 3.1.5. $\forall\, a \geq 0, \quad \forall\, m \geq 0$ *gilt*

$$\sum_{n=a}^{m} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} Clump\,(n)(s) \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} Sep(a)(s) \begin{array}{lll} \textit{für} & m-a & \textit{ungerade} \\ \textit{für} & m-a & \textit{gerade} \end{array} .$$

Beweis:
Sei $m \geq a$. Es gilt mit (3.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Sep}(a)(s) &= \sum_{n \geq a} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\,(n)(s) \\ &= \sum_{n=a}^{m} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\,(n)(s) + \sum_{n \geq m+1} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\,(n)(s). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen

$$\sum_{n \geq m+1} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\,(n)(s) \begin{array}{llll} \geq 0 & \textit{für} & m-a & \textit{ungerade} \\ \leq 0 & \textit{für} & m-a & \textit{gerade} \end{array} .$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$(-1)^{m-a-1} \sum_{n \geq m+1} (-1)^{n-a} \binom{n}{a} \mathrm{Clump}\,(n)(s) \geq 0.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m-a-1} \sum_{n\geq m+1} (-1)^{n-a}\binom{n}{a}\operatorname{Clump}(n)(s)\\
&= \sum_{n\geq m+1} (-1)^{n-m-1}\binom{n}{a}\operatorname{Clump}(n)(s)\\
&\overset{(3.1)}{=} \sum_{n\geq m+1} (-1)^{n-m-1}\binom{n}{a}\sum_{b\geq n}\binom{b}{n}\operatorname{Sep}(b)(s)\\
&= \sum_{b\geq m+1} \underbrace{\operatorname{Sep}(b)(s)}_{\geq 0} \sum_{n=m+1}^{b} (-1)^{n-m-1}\binom{b}{n}\binom{n}{a}.
\end{aligned}
$$

Es genügt damit zu zeigen, dass für alle $b \geq m+1$ gilt

$$\sum_{n=m+1}^{b} (-1)^{n-m-1}\binom{b}{n}\binom{n}{a} \geq 0.$$

Da

$$\binom{b}{n}\binom{n}{a} = \binom{b}{a}\binom{b-a}{n-a},$$

gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=m+1}^{b} (-1)^{n-m-1}\binom{b}{n}\binom{n}{a} = \sum_{n=m+1}^{b} (-1)^{n-m-1}\binom{b}{a}\binom{b-a}{n-a} \geq 0\\
\overset{\binom{b}{a}\geq 0}{\Leftrightarrow}\quad &\sum_{n=m+1}^{b} (-1)^{n-m-1}\binom{b-a}{n-a} \geq 0\\
\Leftrightarrow\quad &\sum_{k=j}^{l} (-1)^{k-j}\binom{l}{k} \geq 0, \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

wobei in (3.5) die Substitution $k := n-a$, $j := m+1-a$ und $l := b-a$ verwendet wurde.

Mit $\binom{l}{k} = \binom{l-1}{k} + \binom{l-1}{k-1}$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{l}(-1)^{k-j}\binom{l}{k} &= \sum_{k=j}^{l-1}(-1)^{k-j}\binom{l}{k} + 1 \\
&= \sum_{k=j}^{l-1}(-1)^{k-j}\binom{l-1}{k} + \sum_{k=j}^{l-1}(-1)^{k-j}\binom{l-1}{k-1} + 1 \\
&= \sum_{k=j}^{l-1}(-1)^{k-j}\binom{l-1}{k} + \sum_{k=j}^{l}(-1)^{k-j}\binom{l-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=j}^{l-1}(-1)^{k-j}\binom{l-1}{k} + \sum_{k=j-1}^{l}(-1)^{k-j+1}\binom{l-1}{k} \\
&= (-1)^{j-j}\binom{l-1}{j-1} \geq 0,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wir haben damit in diesem Abschnitt die später wichtige Größe $\mathrm{Sep}(0)(s)$ in (3.4) als alternierende Reihe über Terme der Form $\mathrm{Clump}(n)(s)$ dargestellt und in Satz 3.1.5 für $a = 0$ daraus eine Ungleichung erhalten, falls man die Summation bei einem Wert m abbricht, wobei die Richtung der Ungleichung von der Parität von m abhängt.

3.2 Die benötigten Maße und deren Zusammenhang

In diesem Abschnitt werden wir das für S_{N,a,I_N} im Hauptsatz benötigte Maß σ_N und das später im Beweis verwendete Hilfsmaß γ_N definieren und die Integration bezüglich dieser Maße mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt definierten Größen Sep und Clump ausdrücken. Die Zusammenhänge zwischen Sep und Clump liefern dann Zusammenhänge der beiden Maße. Als zentrale Relation zwischen den Erwartungswerten der Integration bezüglich der beiden Maße erhalten wir Lemma 3.2.7.

Bemerkung 3.2.1. *In den weiteren Ausführungen dieser Arbeit sei $\widetilde{x} = a + \frac{x}{N\psi(a)}$ und I_N Intervall wie in Satz 1.0.4 und wir setzen $A_N := [-c, c] \subset \mathbb{R}$, so dass gilt $\widetilde{x} \in I_N \Leftrightarrow x \in A_N$.*

Bezeichne mit δ_x das in x konzentrierte Dirac-Maß. Wir definieren folgende Maße auf $\mathbb{R}$:

Definition 3.2.2. *Für $X := (x_1, \dots, x_N)$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_N$ definiere*

$$\sigma_N(X) := \frac{1}{|A_N|} \sum_{x_j, x_{j+1} \in A_N} \delta_{(x_{j+1} - x_j)}$$

und

$$\gamma_N(c, X) := \frac{1}{|A_N|} \sum_{\substack{i_0 < \dots < i_{c+1} \\ x_{i_0}, x_{i_{c+1}} \in A_N}} \delta_{(x_{i_{c+1}} - x_{i_0})}.$$

Definition 3.2.3.
Definiere die Funktion $sort : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch

$$sort(a_1, \dots, a_N) := (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(N)})$$

für ein σ in S_N, so dass gilt $a_{\sigma(1)} \leq \dots \leq a_{\sigma(N)}$.

Für $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei $A(ord) := sort(A)$.

Definition 3.2.4. *Sei $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\widetilde{t_1}, \dots, \widetilde{t_N}$ und wie bisher skalierten Eigenwerten $t_1, \dots, t_N$.*

Definiere

$$\sigma_N(H) := \sigma_N(sort(t_1, \dots, t_N))$$

und

$$\gamma_N(c, H) := \gamma_N(c, sort(t_1, \dots, t_N)).$$

Bemerkung 3.2.5. *Für eine Matrix H mit Eigenwerten $\widetilde{t_1}, \dots, \widetilde{t_N}$ und $t_i = N\psi(a)(\widetilde{t_i} - a)$ gilt*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{s} d\sigma_N(H) &= \frac{1}{|A_N|} \#\{j : t_{j+1} - t_j \leq s \text{ und } t_j \in A_N\} \\ &= \frac{1}{N\psi(a)|I_N|} \#\{j : \widetilde{t_{j+1}} - \widetilde{t_j} \leq \frac{s}{N\psi(a)} \text{ und } \widetilde{t_j} \in I_N\}. \end{aligned}$$

Damit ist die Verteilungsfunktion des Maßes $\sigma_N(H)$ an einer Stelle s genau die Größe $S_{N,a,I_N}(s, H)$ und wir werden diese Identität im Beweis des Hauptsatzes verwenden.

Obwohl der Hauptsatz 1.0.4 mit Bemerkung 3.2.5 nur über das Maß σ_N eine Aussage macht, benötigen wir zusätzlich das Maß γ_N. So werden wir im nächsten Kapitel wichtige Abschätzungen zum Beweis des Hauptsatzes erhalten und diese werden Aussagen über die Integration bezüglich des Maßes γ_N sein. Außerdem werden wir den Zusammenhang zwischen γ_N und σ_N, den wir in diesem Kapitel herstellen, später zum Beweis des Hauptsatzes verwenden.

Wir wollen nun die Integration bezüglich der Maße $\sigma_N(H)$ und $\gamma_N(H)$ mit den Größen Sep und Clump darstellen.

Dazu seien $t_1, \ldots, t_{\tilde{N}}$ die skalierten Eigenwerte der Matrix H, die im Intervall A_N liegen und sei $Y := \mathrm{sort}(t_1, \ldots, t_{\tilde{N}})$.
Dann gilt für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\int f \, d\sigma_N(H) = \frac{1}{|A_N|} \sum_{s \in \mathbb{R}} f(s) \mathrm{Sep}_Y(0)(s)$$

und

$$\int f \, d\gamma_N(c, H) = \frac{1}{|A_N|} \sum_{s \in \mathbb{R}} f(s) \mathrm{Clump}_Y(c)(s).$$

Die beiden Summen haben nur endlich viele Summanden, da $\mathrm{Sep}(0)(s)$ und $\mathrm{Clump}(n)(s)$ jeweils nur für endlich viele Werte von s ungleich Null sind.

Damit lässt sich für die Integration bezüglich der Maße ein ähnlicher Zusammenhang wie in Lemma 3.1.3 herstellen:

$$\begin{aligned}
\int f \, d\sigma_N(H) &= \frac{1}{|A_N|} \sum_{s \in \mathbb{R}} f(s) Sep(0)(s) \\
&\overset{(3.4)}{=} \frac{1}{|A_N|} \sum_{s \in \mathbb{R}} f(s) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathrm{Clump}\,(n)(s) \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{|A_N|} \sum_{s \in \mathbb{R}} f(s) \mathrm{Clump}(n)(s) \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int f \, d\gamma_N(n, H)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgendes Lemma, wobei die Ungleichungen mit Satz 3.1.5 folgen:

Lemma 3.2.6. *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int f \, d\sigma_N(H) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int f \, d\gamma_N(n, H),$$

und für $f \geq 0, \quad m \geq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \int f\, d\gamma_N(n, H) \begin{array}{ll} \leq \int f\, d\sigma_N(H) & \textit{für} \quad m \textit{ ungerade} \\ \geq \int f\, d\sigma_N(H) & \textit{für} \quad m \textit{ gerade} \end{array}$$

Integration liefert dann die Hauptaussage dieses Abschnitts.

Lemma 3.2.7. *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{E}\left(\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \mathbb{E}\left(\int f\, d\gamma_N(n, \cdot)\right),$$

und für $f \geq 0, \quad m \geq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \mathbb{E}\left(\int f\, d\gamma_N(n, \cdot)\right) \begin{array}{ll} \leq \mathbb{E}\left(\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right) & \textit{für} \quad m \textit{ ungerade} \\ \geq \mathbb{E}\left(\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right) & \textit{für} \quad m \textit{ gerade} \end{array}$$

Somit haben wir im vorangegangenen Lemma 3.2.7 eine Darstellung des Erwartungswertes des Integrals bezüglich $\sigma_N(H)$ als unendliche alternierende Reihe über die Erwartungswerte des Integrals bezüglich des Hilfsmaßes $\gamma_N(k, H)$ erhalten. Es gilt statt der Gleichung eine Ungleichung, falls man die Summation in der Reihe abbrechen lässt. Die Richtung der Ungleichung kehrt sich bei Hinzunahme des nächsten Terms der Reihe jeweils um.

3.3 Der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right]$

Für den späteren Beweis des Hauptsatzes ist es nötig, das Verhalten von $\mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right]$ für $N \to \infty$ zu betrachten.

Das folgende Lemma gibt zwei hinreichende Bedingungen zur Existenz von $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right]$ an. Im Falle der Existenz wird eine Darstellung sowie eine obere und untere Schranke des Grenzwertes bewiesen.

Lemma 3.3.1. *Wir setzen voraus, dass für alle $c \geq 0$ und alle borelmessbaren, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $f \geq 0$ die Aussagen 1) und 2) gelten.*

1.

$$\exists \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(c,\cdot)\right] =: E(f,c)$$

2.

$$\sum_{k\geq 0} E(f,k) \quad \textit{konvergiert.}$$

Dann gilt:
Es gibt ein Maß $\mu(univ)$, so dass für alle borelmessbaren, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $f \geq 0$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] = \int f\, d\mu(univ)$$

und $\mu(univ)$ ist gegeben durch

$$\int f\, d\mu(univ) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k E(f,k)$$

und

$$\int f\, d\mu(univ) \begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix} \sum_{k\geq 0}^{m}(-1)^k E(f,k) \quad \textit{für} \begin{matrix} m \textit{ ungerade} \\ m \textit{ gerade}\end{matrix} .$$

Beweis: Für $m \geq 0$ und m ungerade gilt nach Lemma 3.2.7 die Ungleichungskette

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,\cdot)\right] \leq \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] \leq \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,\cdot)\right].$$

Wir bilden nun den Limes inferior und Limes superior über N. Mit Voraussetzung 1) folgt dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k E(f,k) &\leq \liminf_N \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] \\ &\leq \limsup_N \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k E(f,k).\end{aligned}$$

Wir betrachten den Grenzwert für $m \to \infty$. Nach Voraussetzung 2) konvergieren die beiden Summen gegen den gleichen Grenzwert und es ist

$$\liminf_N \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] = \limsup_N \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right],$$

also existiert $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right]$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k E(f,k) \le \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] \le \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k E(f,k) \tag{3.6}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] = \sum_{k\ge 0}(-1)^k E(f,k). \tag{3.7}$$

Nach [4, Seite 120] gibt es ein Maß $\mu(\text{univ})$, so dass gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] = \int f\, d\mu(\text{univ}).$$

□

Bemerkung 3.3.2. *Aus den im nächsten Kapitel bewiesenen Ungleichungen (4.1) und (4.2) folgen sofort die in diesem Lemma angegebenen hinreichenden Bedingungen zur Existenz des Grenzwertes* $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right]$.

Existiert der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int f\, d\sigma_N(\cdot)\right] = \int f\, d\mu(\text{univ})$ mit Lemma 3.3.1, so lässt sich eine obere Schranke für seine Abweichung zu $\int f\, d\sigma_N(H)$ herleiten. Diese wird im folgenden Lemma bewiesen und bildet die Hauptaussage dieses Kapitels und eine wichtige Abschätzung zum Beweis des Hauptsatzes.

Lemma 3.3.3. *Sei $L \ge 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine borelmessbare, beschränkte Funktion mit kompaktem Träger und $f \ge 0$.*
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\int f\, d\mu(univ) - \int f\, d\sigma_N(H)\right| \\
\le\ & \sum_{k=0}^{L}\left|E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right| + E(f,L) + E(f,L+1) \\
\le\ & \sum_{k=0}^{L}\left|\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right| \\
+\ & \sum_{k=0}^{L}\left|\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,\cdot)\right] - E(f,k)\right| + E(f,L) + E(f,L+1)
\end{aligned}$$

Beweis:
Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten durch Verwendung der Dreiecksungleichung.

Zum Beweis der ersten Ungleichung sei $m \geq 0$ gerade.

1. Fall: $\int f\, d\mu(\text{univ}) - \int f\, d\sigma_N(H) \geq 0$
Nach Identität (3.6) und Lemma 3.2.6 gelten die folgenden zwei Abschätzungen:

$$\int f\, d\mu(\text{univ}) \leq \sum_{k=0}^{m} (-1)^k E(f,k)$$

und

$$\int f\, d\sigma_N(H) \geq \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \int f\, d\gamma_N(n,H).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int f\, d\mu(\text{univ}) - \int f\, d\sigma_N(H) \\
&\leq \sum_{k=0}^{m} (-1)^k E(f,k) - \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \int f\, d\gamma_N(n,H) \\
&= \left| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k E(f,k) - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \int f\, d\gamma_N(k,H) \right| \\
&\leq \underbrace{E(f,m)}_{\geq 0,\ \text{da}\ f \geq 0} + \sum_{k=0}^{m-1} \left| E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H) \right|. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Für $L = m$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\left| \int f\, d\mu(\text{univ}) - \int f\, d\sigma_N(H) \right| \\
\leq\ & E(f,L) + \sum_{k=0}^{L-1} \left| E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H) \right| \\
\leq\ & E(f,L) + \underbrace{E(f,L+1)}_{\geq 0} + \sum_{k=0}^{L} \left| E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H) \right|.
\end{aligned}$$

Ungleichung (3.8) gilt auch für $m+2$ und damit folgt für $L = m+1$

$$\begin{aligned}
&\left|\int f\, d\mu(\text{univ}) - \int f\, d\sigma_N(H)\right| \\
\leq\quad & E(f, m+2) + \sum_{k=0}^{m+1}\left|E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right| \\
\overset{L=m+1}{=}\quad & E(f, L+1) + \sum_{k=0}^{L}\left|E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right| \\
\leq\quad & E(f, L+1) + E(f,L) + \sum_{k=0}^{L}\left|E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right|.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\int f\, d\sigma_N(H) - \int f\, d\mu(\text{univ}) \geq 0$
Der Beweis erfolgt analog mit Verwendung von

$$\int f\, d\sigma_N(H) \leq \sum_{n=0}^{m}(-1)^n \int f\, d\gamma(n,H)$$

und

$$\int f\, d\mu(\text{univ}) \geq \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k E(f,k).$$

Dann gilt analog zu (3.8)

$$\begin{aligned}
0 \quad\leq\quad & \int f\, d\sigma_N(H) - \int f\, d\mu(\text{univ}) \\
\leq\quad & E(f, m+1) + \sum_{k=0}^{m}\left|E(f,k) - \int f\, d\gamma_N(k,H)\right|.
\end{aligned}$$

Mit $L = m$ und $L = m-1$ folgt die Aussage analog zu Fall 1. □

Bemerkung 3.3.4. *Wir bezeichnen in den folgenden Kapiteln das universelle Maß* $\mu(\mathit{univ})$ *aus Lemma 3.3.1 mit* μ.

4 Zentrale Abschätzungen zum Beweis des Hauptsatzes

In diesem Kapitel wollen wir die folgenden drei Ungleichungen (4.1) bis (4.3) beweisen.

Sei $f := \chi_{[0,\alpha]}$ die charakteristische Funktion auf $[0, \alpha]$ für ein $\alpha > 0$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $$\left| \mathbb{E}\left[\int f \, d\,\gamma_N(k, M) \right] \right| \leq 2(2\alpha)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \tag{4.1}$$

- Es gibt eine reelle Zahl $E(f, k)$ so dass gilt
$$\left| \mathbb{E}\left[\int f \, d\,\gamma_N(k, M) \right] - E(f, k) \right|$$
$$\leq 2 \frac{1}{(k+1)!} \frac{\alpha^{k+2}}{|A_N|} 2^{k+2} + (k+2)!(k+2)2^{k+2} \mathcal{O}(|I_N|) \alpha^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \tag{4.2}$$

- $$Var\left(\int f \, d\gamma_N(k, M) \right) \leq (32\alpha)^{2k+2} \left(\frac{2k+5}{|A_N|} + \mathcal{O}\left(|I_N|\right) \right) \tag{4.3}$$

Also wollen wir obere Schranken für Varianz und Erwartungswert des Integrals bezüglich des Hilfsmaßes $\gamma_N(k, M)$ beweisen sowie die Konvergenz und eine Konvergenzrate des Erwartungswertes von $\int f \, d\gamma_N(k, M)$ für $N \to \infty$ herleiten. Um Aussagen über den Erwartungswert und die Varianz bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes aus (1.4) machen zu können, benötigen wir die Darstellung der Dichte mit Hilfe der Funktion K_N aus (2.4) und die Eigenschaften dieser Funktion aus Abschnitt 2.1. Wir beginnen mit einer hilfreichen Darstellung des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[\int f \, d\gamma_N(k, M)\right]$ im nächsten Abschnitt 4.1 und werden in den darauf folgenden Abschnitten jeweils eine der Ungleichungen (4.1),(4.2) und (4.3) beweisen.

4.1 Darstellung des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]$

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Identität für $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]$ herleiten, mit der sich die Schranke aus (4.1) beweisen lässt und die ebenfalls beim Beweis von (4.2) nützlich sein wird.

Mit der Definition des Maßes $\gamma_N(k,M)$ aus 3.2.2 und für $t_1,\dots,t_N$ wie bisher skalierte Eigenwerte der Matrix M gilt:

$$\begin{aligned}
&\int f\, d\gamma_N(k,M)\\
=\ & \frac{1}{|A_N|}\sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N} f\left(\max_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j - \min_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j\right)\chi_{A_N}(t_{i_0})\ldots\chi_{A_N}(t_{i_{k+1}})\\
=\ & \frac{1}{|A_N|}\sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N} F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}}),
\end{aligned}$$

wobei wir hier und im weiteren Kapitel 4 die Notation

$$\begin{aligned}
F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}}) &:= f\left(\max_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j - \min_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j\right)\chi_{A_N}(t_{i_0})\ldots\chi_{A_N}(t_{i_{k+1}})\\
&= f\left(\max_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j - \min_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j\right)\chi_{I_N}(\widetilde{t_{i_0}})\ldots\chi_{I_N}(\widetilde{t_{i_{k+1}}})
\end{aligned}$$

verwenden. Dann ist $F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}}) = F(t_{\sigma(i_0)},\ldots,t_{\sigma(i_{k+1})})$ für alle $\sigma\in S_{k+2}$ und wir können zur Berechnung des Erwartungswertes Lemma 2.1.11 verwenden.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]\\
=\ & \frac{1}{|A_N|}\sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N}\int_{\widetilde{t_1}\le\ldots\widetilde{t_N}} F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}})d\mathbb{P}(\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_N})\\
\overset{2.1.11}{=}\ & \frac{1}{|A_N|}\sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N}\frac{(N-(k+2))!}{N!}\\
&\times\int_{\mathbb{R}^{k+2}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})B_{N,k+2}(t_1,\ldots,t_{k+2})dt_1\ldots dt_{k+2}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Die Summanden in (4.4) hängen nicht mehr von der Wahl der Indizes $i_0,\ldots,i_{k+1}$ ab und es gibt $\binom{N}{k+2}$ Möglichkeiten, diese $(k+2)$ Indizes aus N möglichen Indizes auszuwählen. damit hat die Summe $\binom{N}{k+2}$ Summanden. Also erhalten wir als Ergebnis dieses Abschnittes für den betrachteten Erwartungswert:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right] \\
= \quad & \frac{1}{|A_N|} \underbrace{\frac{(N-(k+2))!}{N!}\binom{N}{k+2}}_{=\frac{1}{(k+2)!}} \int_{\mathbb{R}^{k+2}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) B_{N,k+2}(t_1,\dots,t_{k+2}) dt_1 \dots dt_{k+2} \\
= \quad & \frac{1}{|A_N|(k+2)!} \int_{A_N^{k+2}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) B_{N,k+2}(t_1,\dots,t_{k+2}) dt_1 \dots dt_{k+2} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

4.2 Abschätzung des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]$

Wir beweisen in diesem Abschnitt Ungleichung (4.1) und geben damit eine obere Schranke für den Erwartungswert $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]$ an.

Es ist zu zeigen

$$
\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right] \le 2(2\alpha)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}.
$$

Wir verwenden die Darstellung des Erwartungswertes aus (4.5) und die Ungleichung $|B_{N,k+2}(t_1,\dots,t_{k+2})| \le 2^{k+2}$ aus (2.11) und erhalten folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]\right| \\
\le \quad & \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \frac{1}{(k+2)!} \int_{A_N^{k+2}} f\left(\max_{j\in\{1,\dots,k+2\}} t_j - \min_{j\in\{1,\dots,k+2\}} t_j\right) dt_1 \dots dt_{k+2} \\
= \quad & \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \int_{A_N^{k+2}(\mathrm{ord})} f(t_{k+2}-t_1) dt_1 \dots dt_{k+2} \\
= \quad & \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \mathrm{Vol}(-c \le t_1 \le \dots \le t_{k+2} \le c; \quad t_{k+2}-t_1 \le \alpha) \\
= \quad & \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \mathrm{Vol}(0 \le t_1 \le \dots \le t_{k+2} \le |A_N|; \quad t_{k+2}-t_1 \le \alpha) \\
\le \quad & \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \mathrm{Vol}(0 \le t_1 \le |A_N|;\ t_1 \le t_2 \le \dots \le t_{k+2};\ t_{k+2}-t_1 \le \alpha).
\end{aligned}
$$

Mit $y_0 := t_1$ und $y_i := t_{i+1} - t_1$ für $i = 2, \dots, k+1$ gilt weiter

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{k+2}}{|A_N|} \mathrm{Vol}(A_N \times \{(y_1, \dots, y_{k+1}) : 0 \le y_1 \le \dots \le y_{k+1} \le \alpha\}) \\
&= 2(2\alpha)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Damit ist Ungleichung (4.1) bewiesen.

4.3 Konvergenz des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[\int f \, d\gamma_N(k, M)\right]$

In (4.2) ist die Existenz des Grenzwertes von $\mathbb{E}\left[\int f \, d\gamma_N(k, M)\right]$ für $N \to \infty$ und eine Konvergenzrate zu beweisen. In diesem Abschnitt werden wir den Grenzwert $E(f, k)$ explizit angeben und dann die Gültigkeit der geforderte Schranke aus (4.2) zeigen.

4.3.1 Weitere Darstellung des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[\int f \, d\gamma_N(k, M)\right]$

Wir wollen die in (4.5) erhaltene Darstellung weiter umformen und unter Verwendung der asymptotischen Aussage über $\det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})$ aus Satz 2.1.1 den Erwartungswert als Summe von zwei Integralen darstellen, wovon eines das Integral einer Hilfsfunktion $g(s)$ in einer Veränderlichen ist.

Für den Erwartungswert gilt mit (4.5) und (2.12)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int f \, d\gamma_N(k, M)\right] \\
= \; & \frac{1}{|A_N|(k+2)!} \int_{A_N^{k+2}} F(t_1, \dots, t_{k+2}) W(t_1, \dots, t_{k+2}) dt_1 \dots dt_{k+2} \\
+ \; & \frac{1}{|A_N|(k+2)!} \int_{A_N^{k+2}} F(t_1, \dots, t_{k+2})(k+2)!(k+2)2^{k+2} \mathcal{O}(|I_N|) dt_1 \dots dt_{k+2}
\end{aligned}
$$

Wir betrachten den ersten Summanden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|A_N|(k+2)!} \int_{A_N^{k+2}} F(t_1, \dots, t_{k+2}) W(t_1, \dots, t_{k+2}) dt_1 \dots dt_{k+2} \\
= \; & \frac{1}{|A_N|} \int_{A_N^{k+2}(\mathrm{ord})} F(t_1, \dots, t_{k+2}) W(t_1, \dots, t_{k+2}) dt_1 \dots dt_{k+2} \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Für $A_N = [-c,c]$ und $-c \leq t_1 \leq \ldots t_{k+2} \leq c$ gilt

$$F(t_1,\ldots,t_{k+2}) = F(-c, t_2 - t_1 - c, \ldots, t_{k+2} - t_1 - c)$$

und

$$W(t_1,\ldots,t_{k+2}) = W(-c, t_2 - t_1 - c, \ldots, t_{k+2} - t_1 - c)$$

Mit der Substitution

$$t_1 = s, \qquad z_i = t_{i+1} - t_1 - c, \qquad i = 1,\ldots,k+1 \tag{4.7}$$

lässt sich (4.6) weiter umformen zu

$$\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} \underbrace{\left(\int_{[-c,-s]^{k+1}(\mathrm{ord})} F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1}) W(-c,z_1,\ldots,z_{k+1}) dz_1 \ldots dz_{k+1}\right)}_{:=g(s)} ds.$$

$$= \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s) ds$$

Dann erhalten wir die folgende Darstellung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right] &= \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s) ds \\ + \quad \frac{1}{|A_N|(k+2)!} &\int_{A_N^{k+2}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})(k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|) dt_1 \ldots dt_{k+2}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3.2 Die Funktion $g(s)$

Wir betrachten aus (4.8) die Funktion

$$g(s) = \int_{[-c,-s]^{k+1}(\mathrm{ord})} F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1}) W(-c,z_1,\ldots,z_{k+1}) dz_1 \ldots dz_{k+1}$$

Bemerkung 4.3.1.

Für $(z_1,\ldots,z_{k+1}) \in [-c,-s]^{k+1}(ord)$ *ist* $F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1}) = 0$*, falls* $z_{k+1} + c \geq \alpha$*, also* $z_{k+1} \geq \alpha - c$*.*

Da wir später ein Integral über $g(s)$ abzuschätzen haben, leiten wir eine obere Schranke für $|g(s)|$ her.

Schranke für $|g(s)|$
Es gilt

$$\begin{aligned}
|g(s)| &\overset{\text{def}}{=} \left| \int_{[-c,-s]^{k+1}(\text{ord})} F(-c, z_1, \dots, z_{k+1}) W(-c, z_1, \dots, z_{k+1}) dz_1 \dots dz_{k+1} \right| \\
&\leq \int_{[-c,-s]^{k+1}(\text{ord})} |F(-c, z_1, \dots, z_{k+1}) W(-c, z_1, \dots, z_{k+1})| dz_1 \dots dz_{k+1} \\
&\overset{\text{Bem. 4.3.1}}{\leq} \int_{[-c,\min(-s,\alpha-c)]^{k+1}(\text{ord})} \|F\|_{\text{sup}} |W(-c, z_1, \dots, z_{k+1})| dz_1 \dots dz_{k+1} \\
&\leq \int_{[-c,\alpha-c]^{k+1}(\text{ord})} |W(-c, z_1, \dots, z_{k+1})| dz_1 \dots dz_{k+1} \\
&\leq \alpha^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} ||W||_{\text{sup}} \\
&\overset{(2.16)}{\leq} \alpha^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} 2^{k+2}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$|g(s)| \leq \alpha^{k+1} \frac{2^{k+2}}{(k+1)!} \qquad \text{für } s \in [-c, c]. \tag{4.9}$$

4.3.3 Der Grenzwert von $\mathbb{E}[\int f \, d\gamma_N(k, M)]$

Wir geben nun eine explizite Darstellung des Wertes $E(f, k)$ an und werden im nächsten Abschnitt sehen, dass dadurch der Grenzwert von $\mathbb{E}[\int f \, d\gamma_N(k, M)]$ für $N \to \infty$ gegeben ist.

Definition 4.3.2.

$$E(f, k) := \int_{[-c,-c+\alpha]^{k+1}(ord)} F(-c, z_1, \dots, z_{k+1}) W(-c, z_1, \dots, z_{k+1}) dz_1 \dots dz_{k+1}$$

Bemerkung 4.3.3. *Wir haben in Lemma 3.3.1 bereits den Grenzwert von* $\mathbb{E}[\int f \, d\gamma_N(k, M)]$ *mit* $E(f, k)$ *bezeichnet, verwenden im folgenden* $E(f, k)$ *aber wie in Definition 4.3.2 angegeben und zeigen mit dem Beweis von (4.2), dass die beiden Definitionen übereinstimmen.*

Bemerkung 4.3.4. *Aus der Definition von* $E(f, k)$ *und der Abschätzung von* W *aus (2.16) folgt sofort*

$$|E(f, k)| \leq \alpha^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \|F\|_{sup} \|W\|_{sup} \leq \alpha^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} 2^{k+2}.$$

4.3.4 Konvergenzrate

Wir berechnen nun eine Schranke für $|E(f,k) - \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]|$ und zeigen damit, dass $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]$ gegen $E(f,k)$ konvergiert für $N \to \infty$:

Mit (4.8) und Verwendung der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|E(f,k) - \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]\right| \\
\leq\ &\left|E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s)ds\right| \\
+\ &\left|\frac{1}{|A_N|(k+2)!}\int_{A_N^{k+2}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})(k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|)d\,t_1\ldots d\,t_{k+2}\right|.
\end{aligned}$$

Wir betrachten das im zweiten Summanden auftretende Integral:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{|A_N|(k+2)!}\int_{A_N^{k+2}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})d\,t_1\ldots d\,t_{k+2}\right| \\
\leq\ &\frac{1}{|A_N|}\int_{A_N^{k+2}(\mathrm{ord})} |F(t_1,\ldots,t_{k+2})|d\,t_1\ldots d\,t_{k+2} \\
&\text{mit der Substitution aus Abschnitt 4.3.1 gilt weiter} \\
=\ &\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,-s]^{k+1}(\mathrm{ord})} |F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1})|d\,z_1\ldots d\,z_{k+1}ds \\
\leq\ &\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,\min(-s,-c+\alpha)]^{k+1}(\mathrm{ord})} |F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1})|d\,z_1\ldots dz_{k+1}ds \\
\leq\ &\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,-c+\alpha)]^{k+1}(\mathrm{ord})} |\underbrace{F(-c,z_1,\ldots,z_{k+1})}_{\leq 1}|d\,z_1\ldots dz_{k+1}ds \\
\leq\ &\alpha^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left|E(f,k) - \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]\right| \ \leq\ &\left|E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s)ds\right| \\
+\ &(k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|)\alpha^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Wir betrachten nun den Term $\left|E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s)ds\right|$ aus (4.10).

Da $|A_N| = N\psi(a)|I_N| \to \infty$ für $N \to \infty$ ist $\alpha \leq |A_N| = 2c$, d.h. $-c \leq c - \alpha \leq c$ für N hinreichend groß.
Dann gilt:

$$\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s)ds = \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c-\alpha]} g(s)ds + \frac{1}{|A_N|}\int_{[c-\alpha,c]} g(s)ds \tag{4.11}$$

Wir betrachten den ersten Summanden aus (4.11):
Für $s \in [-c, c-\alpha]$ ist $\min(-s, \alpha - c) = \alpha - c$ und mit der Überlegung aus Bemerkung 4.3.1 gilt für $s \in [-c, c-\alpha]$, dass $g(s) = E(f,k)$ und da $g(s)$ damit nicht von s abhängt, gilt

$$\frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c-\alpha]} g(s)ds = \frac{1}{|A_N|}(|A_N| - \alpha)E(f,k) = \left(1 - \frac{\alpha}{|A_N|}\right)E(f,k) \tag{4.12}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left|E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c]} g(s)ds\right| \\
\overset{(4.11)}{=}\ &\left|E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[-c,c-\alpha]} g(s)ds - \frac{1}{|A_N|}\int_{[c-\alpha,c]} g(s)ds\right| \\
\overset{(4.12)}{=}\ &\left|\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{|A_N|}\right)\right)E(f,k) - \frac{1}{|A_N|}\int_{[c-\alpha,c]} g(s)ds\right| \\
\overset{Bem\,4.3.4}{\leq}\ &\frac{\alpha}{|A_N|}2^{k+2}\alpha^{k+1}\frac{1}{(k+1)!} + \left|\frac{1}{|A_N|}\int_{[c-\alpha,c]} g(s)ds\right| \\
\leq\ &\frac{\alpha^{k+2}}{|A_N|}2^{k+2}\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{|A_N|}\alpha \sup_{s\in[c-\alpha,c]} g(s) \\
\overset{(4.9)}{\leq}\ &\frac{\alpha^{k+2}}{|A_N|}2^{k+2}\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{|A_N|}\alpha^{k+2}\frac{1}{(k+1)!}2^{k+2} \\
=\ &2\frac{1}{(k+1)!}\frac{\alpha^{k+2}}{|A_N|}2^{k+2}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.10) erhalten wir als Ergebnis dieses Abschnittes

$$\begin{aligned}
\left|E(f,k) - \mathbb{E}\left[\int f\,d\gamma_N(k,M)\right]\right| \ &\leq\ 2\frac{1}{(k+1)!}\frac{\alpha^{k+2}}{|A_N|}2^{k+2} \\
&+\ (k+2)!(k+2)2^{k+2}\mathcal{O}(|I_N|)\alpha^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

und haben damit die Gültigkeit von (4.2) gezeigt.

4.4 Varianz von $\int f\, d\gamma_N(k,M)$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ungleichung (4.3) für die Varianz des Integrals $\int f\, d\gamma_N(k,M)$ beweisen und werden dafür zunächst eine geeignete Darstellung der Varianz als Summe zweier Terme herleiten, welche wir im Zwischenergebnis in Abschnitt 4.4.3 festhalten, und dann die beiden Summanden in Abschnitt 4.4.4 und 4.4.5 getrennt abschätzen.

4.4.1 Berechnung von $\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2$

Da für eine Zufallsvariable X gilt $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, leiten wir eine geeignete Darstellung von X^2, also in unserem Fall von $\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2$, her. Dabei bezeichnen wir mit $\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_N}$ die Eigenwerte von M und skalieren diese wie bisher zu $t_i = N\psi(a)(\widetilde{t_i} - a)$.

Wegen

$$\begin{aligned}
&\int f\, d\gamma_N(k,M)\\
=\;& \frac{1}{|A_N|} \sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N} \underbrace{f\left(\max_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j - \min_{j\in\{i_0,\ldots,i_{k+1}\}} t_j\right) \chi_{I_N}(\widetilde{t_{i_0}}) \ldots \chi_{I_N}(\widetilde{t_{i_{k+1}}})}_{=F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}})}\\
=\;& \frac{1}{|A_N|} \sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N} F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}})
\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}
&\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2\\
=\;& \frac{1}{|A_N|^2} \sum_{1\le i_0<\ldots<i_{k+1}\le N} F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}}) \sum_{1\le j_0<\ldots<j_{k+1}\le N} F(t_{j_0},\ldots,t_{j_{k+1}}).
\end{aligned}$$

Wir verwenden folgende verkürzende Schreibweise:

Für

$$T \subset \{1,\ldots,N\}, \quad T = \{i_0,\ldots,i_{k+1}\} \text{ sei } F(T) := F(t_{i_0},\ldots,t_{i_{k+1}}).$$

Dann ist

$$\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2 = \frac{1}{|A_N|^2} \sum_{\substack{T=\{i_0,\dots,i_{k+1}\}\\ \subset\{1,\dots,N\}}} F(T) \sum_{\substack{S=\{j_0,\dots,j_{k+1}\}\\ \subset\{1,\dots,N\}}} F(S)$$
$$= \frac{1}{|A_N|^2} \sum_{\substack{S,T\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(T)=\mathrm{Card}(S)=k+2}} F(T)F(S). \tag{4.13}$$

Um später die Summanden für disjunkte S und T gesondert zu betrachten, verwenden wir folgende Darstellung für die Summe in (4.13)

$$\frac{1}{|A_N|^2} \sum_{l=k+2}^{2k+4} \sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(C)=l}} \sum_{\substack{T,S\; mit C=S\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S),$$

wobei der letzte Summand der äußeren Summe ($l = 2k+4$) genau den Fällen disjunkter S und T entspricht.

Nach Abspalten dieses letzten Summanden gilt also

$$\mathbb{E}\left[\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2} \sum_{l=k+2}^{2k+3} \sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(C)=l}} \sum_{\substack{T,S\; mit C=S\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \tag{4.14}$$
$$+ \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2} \sum_{\substack{C\subset\{1,\dots,N\}\\ \mathrm{Card}(C)=2k+4}} \sum_{\substack{S,T\; mit C=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right]. \tag{4.15}$$

Wir werden in den folgenden Abschnitten die beiden Summanden aus (4.14) und (4.15) getrennt betrachten, beginnend mit dem zweiten Summanden.

4.4.2 Betrachtung des Summanden für $S \dot\cup T$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{\substack{C\subset\{1,\dots,N\}\\ \mathrm{Card}(C)=2k+4}}\ \sum_{\substack{S,T\ mit C=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right]\\
=\ &\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{\substack{C\subset\{1,\dots,N\}\\ \mathrm{Card}(C)=2k+4}} \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{S,T\ mit C=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right]. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Für $C = \{1,\dots,2k+4\}$ sei

$$
H(t_1,\dots,t_{2k+4}) := \sum_{\substack{S,T\ mit\{1,\dots,2k+4\}=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S). \qquad (4.17)
$$

Dann gilt mit Vertauschung der Summanden in (4.17) für alle $\sigma \in S_{2k+4}$

$$
H(t_1,\dots,t_{2k+4}) = H(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(2k+4)}).
$$

Da eine entsprechende Permutationsinvarianz für alle Mengen C gilt, können wir für jeden Summanden der C-Summation aus (4.16) Lemma 2.1.11 anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{S,T\ mit C=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right]\\
=\ &\sum_{\substack{S,T\ mit C=S\dot\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} \frac{(N-(2k+4))!}{N!}\\
\times\ &\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})B_{N,2k+4}(t_1,\dots,t_{2k+4})dt_1\dots dt_{2k+4}.
\end{aligned}
$$

Damit hängen die Summanden der Doppelsumme in (4.16) nicht von der Wahl der Mengen C, S und T ab. Die Anzahl der Summanden der Doppelsumme ist $\binom{N}{2k+4}\binom{2k+4}{k+2}$, denn es gibt $\binom{N}{2k+4}$ Teilmengen von $\{1,\dots,N\}$ der Kardinalität $2k+4$. Für jede dieser Mengen gibt es $\binom{2k+4}{k+2}$ Aufteilungen in zwei disjunkte

Teilmengen jeweils der Größe $k+2$. Für die Binomialkoeffizienten und Fakultäten gilt

$$\frac{(N-(2k+4))!}{N!}\binom{N}{2k+4}\binom{2k+4}{k+2} = \frac{1}{(2k+4)!}\binom{2k+4}{k+2} = \left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2$$

und wir erhalten aus (4.16)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{\substack{C\subset\{1,\ldots,N\}\\ \mathrm{Card}(C)=2k+4}}\ \sum_{\substack{S,T;\, mit C=S\dot{\cup}T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \\
= \ & \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \\
\times \ & \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})F(t_{k+3},\ldots,t_{2k+4})B_{N,2k+4}(t_1,\ldots,t_{2k+4})dt_1\ldots dt_{2k+4} \\
= \ & \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \\
\times \ & \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})F(t_{k+3},\ldots,t_{2k+4})\det K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})_{1\le i,j\le 2k+4}d\widetilde{t_1}\ldots\widetilde{t_{2k+4}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Um das erhaltene Integral weiter umformen zu können, benötigen wir eine andere Darstellung der Funktion $\det K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})_{1\le i,j\le 2k+4}$.

Bemerkung 4.4.1. *Entwickelt man* $\det K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})_{1\le i,j\le 2k+4}$ *nach Leibniz als eine Summe über Permutationen, lässt sich diese aufteilen in zwei Teilsummen über die Permutationen, die die Mengen* $\{1,\ldots,k+2\}$ *und* $\{k+3,\ldots,2k+4\}$ *jeweils in sich selbst überführen, und solche ohne diese Eigenschaft.*
Es gilt

$$\begin{aligned}
& \det K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_j})_{1\le i,j\le 2k+4} \\
= \ & \sum_{\varphi\in S_{2k+4}} sgn(\varphi)\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}}) \\
= \ & \sum_{\substack{\varphi\in S_{2k+4}\\ \varphi(\{1,\ldots,k+2\})=\{1,\ldots,k+2\}}} sgn(\varphi)\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}}) \\
+ \ & \underbrace{\sum_{\substack{\varphi\in S_{2k+4}\\ \varphi(\{1,\ldots,k+2\})\neq\{1,\ldots,k+2\}}} sgn(\varphi)\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}})}_{=:D(2k+4,N)(t_1,\ldots,t_{2k+4})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\varphi\, Permutation \\ auf\, \{k+3,\dots,2k+4\}}} \sum_{\psi \in S_{k+2}} sgn(\varphi) sgn(\psi) \prod_{i=1}^{k+2} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_{\psi(i)}}) \prod_{i=k+3}^{2k+4} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_{\varphi(i)}}) \\
&+ \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) \\
&= \left(\sum_{\substack{\varphi\, Permutation \\ auf\, \{k+3,\dots,2k+4\}}} sgn(\varphi) \prod_{i=k+3}^{2k+4} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_{\varphi(i)}}) \right) \left(\sum_{\psi \in S_{k+2}} sgn(\psi) \prod_{i=1}^{k+2} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_{\psi(i)}}) \right) \\
&+ \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) \\
&= \det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{1 \le i,j \le k+2} \cdot \det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{k+3 \le i,j \le 2k+4} \\
&+ \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}).
\end{aligned}
$$

Damit haben wir eine Darstellung von $\det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{i,j \le 2k+4}$ *erhalten, bei der ein Summand das Produkt der beiden Teildeterminanten über die ersten und die letzten* $(k+2)$ *Variablen ist.*

Mit Bemerkung 4.4.1 ergibt sich für (4.18)

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|A_N|^2} \left(\frac{1}{(k+2)!} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
& \times \; \det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{i,j \le k+2} K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{k+3 \le i,j \le 2k+4} d\widetilde{t_1} \dots d\widetilde{t_{2k+4}} \\
& + \; \frac{1}{|A_N|^2} \left(\frac{1}{(k+2)!} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
& \times \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) d\widetilde{t_1} \dots \widetilde{t_{2k+4}} \\
= \; & \left(\frac{1}{|A_N|(k+2)!} \int_{\mathbb{R}^{k+2}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) \det K_N(\widetilde{t_i}, \widetilde{t_j})_{i,j \le k+2} d\widetilde{t_1} \dots d\widetilde{t_{k+2}} \right)^2 \\
& + \; \frac{1}{|A_N|^2} \left(\frac{1}{(k+2)!} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
& \times \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) d\widetilde{t_1} \dots d\widetilde{t_{2k+4}} \\
= \; & \mathbb{E} \left[\int f \, d\gamma_N(k,M) \right]^2 \\
& + \; \frac{1}{|A_N|^2} \left(\frac{1}{(k+2)!} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
& \times \; D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) d\widetilde{t_1} \dots d\widetilde{t_{2k+4}}. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung gilt mit der Darstellung des Erwartungswertes aus (4.5).

4.4.3 Zwischenergebnis für die Varianz

Wir haben bisher $\mathbb{E}\left[\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2\right]$ in (4.15) als Summe über Mengen C, S und T dargestellt und beim Summanden für $S \dot\cup T$ haben wir in Abschnitt 4.4.2 $\mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]^2$ als Summanden abspalten können. Insgesamt erhalten wir mit den letzten beiden Abschnitten als Zwischenergebnis für die Varianz

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right) \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]^2 \\
\overset{(4.15)}{=} \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\ \sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \operatorname{Card}(C)=l}}\ \sum_{\substack{T,S\, mit C=S\cup T\\ \operatorname{Card}(S)=\operatorname{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \\
+ \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \operatorname{Card}(C)=2k+4}}\ \sum_{\substack{S,T;\, mit C=S\dot\cup T\\ \operatorname{Card}(S)=\operatorname{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \\
- \quad & \mathbb{E}\left[\int f\, d\gamma_N(k,M)\right]^2 \\
\overset{(4.19)}{=} \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\ \sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \operatorname{Card}(C)=l}}\ \sum_{\substack{T,S\, mit C=S\cup T\\ \operatorname{Card}(S)=\operatorname{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \\
+ \quad & \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
\times \quad & D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4})\widetilde{dt_1}\dots\widetilde{dt_{2k+4}}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Wir haben also $\operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)$ in zwei Summanden zerlegt. Um die geforderte obere Schranke für die Varianz zu erhalten schätzen wir die beiden Summanden aus (4.20) getrennt ab.

4.4.4 Abschätzung des ersten Summanden des Zwischenergebnisses aus (4.20)

Es gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(C)=l}}\sum_{\substack{T,S\, mit C=S\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}}F(T)F(S)\right]$$
$$= \frac{1}{|A_N|}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(C)=l}}\sum_{\substack{T,S\, mit C=S\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}}\frac{1}{|A_N|}\mathbb{E}\left[F(T)F(S)\right] \tag{4.21}$$

Für festes $l \in \{k+2,\dots,2k+3\}$, $C \subseteq \{1,\dots,N\}$ mit $\mathrm{Card}(C)=l$ und $C = S\cup T$ mit $\mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2$ ist $S\cap T \neq \emptyset$. Sei O.B.d.A $S\cap T = \{i_r,\dots,i_{k+2}\}$, so dass gilt

$$F(T)F(S) = F(t_{i_1},\dots,t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}})F(t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}},\dots,t_{i_l})$$

Wir setzen

$$G(t_{i_1},\dots,t_{i_l}) := \begin{cases} 1 \text{ falls } \max_{j\in 1,\dots,l} t_{i_j} - \min_{j\in 1,\dots,l} t_{i_j} \le 2\alpha \\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$

Dann folgt aus

$$F(t_{i_1},\dots,t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}})F(t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}},\dots,t_{i_l}) = 1,$$

dass $G(t_{i_1},\dots,t_{i_l}) = 1$, denn

$$F(t_{i_1},\dots,t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}})F(t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}},\dots,t_{i_l}) = 1$$
$$\Rightarrow \max_{j,d\in\{1,\dots,k+2\}}|t_{i_j}-t_{i_d}| \le \alpha \text{ und } \max_{j,d\in\{r,\dots,l\}}|t_{i_j}-t_{i_d}| \le \alpha$$
$$\Rightarrow \max_{j,d\in\{1,\dots,l\}}|t_{i_j}-t_{i_d}| \le \max_{j\in\{1,\dots,k+2\}}|t_{i_j}-t_{i_r}| + \max_{j\in\{r,\dots,l\}}|t_{i_r}-t_{i_j}| \le 2\alpha$$
$$\Rightarrow G(t_{i_1},\dots,t_{i_l}) = 1$$

also gilt, da F und G jeweils nur die Werte 0 und 1 annehmen können,

$$F(t_{i_1},\dots,t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}})F(t_{i_r},\dots,t_{i_{k+2}},\dots,t_{i_l}) \le G(t_{i_1},\dots,t_{i_l}).$$

Dann gilt mit Lemma 2.1.11 für jede Wahl von S und T

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|A_N|}\mathbb{E}\left[F(T)F(S)\right] \\
\leq\ & \frac{1}{|A_N|}\frac{(N-l)!}{N!}\int_{A_N^l} G(t_1,\dots,t_l)\underbrace{B_{N,l}(t_1,\dots,t_l)}_{\leq 2^l\ nach (2.11)}dt_1\dots dt_l \\
\leq\ & 2^l\cdot l!\frac{(N-l)!}{N!}\frac{1}{|A_N|}\int_{A_N^l(\mathrm{ord})} G(t_l-t_1)dt_1\dots dt_l.
\end{aligned}$$

Analog zur Abschätzung des Erwartungswertes in Abschnitt 4.2 erhalten wir

$$\leq\ 2^l\cdot l!\frac{(N-l)!}{N!}(2\alpha)^{l-1}\frac{1}{(l-1)!}.$$

Damit hängt die obere Schranke für $\mathbb{E}\left[F(T)F(S)\right]$ nicht von der Wahl von C, S und T ab und wir benötigen die Anzahl möglicher Mengen C, S und T mit $C\subseteq\{1,\dots,N\}$, $\mathrm{Card}(C)=l$, $C=S\cup T$ und $\mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2$.

Es gibt $\binom{N}{l}$ Möglichkeiten die l-elementige Menge C auszuwählen. Für jede Wahl von C gibt es $\binom{l}{k+2}$ Möglichkeiten aus den l Elementen von C die $k+2$ Elemente von T auszuwählen. Die Menge S muss dann die Elemente aus $C\setminus T$ enthalten und für die restlichen $l-(k+2)$ Elemente, die ebenfalls in T liegen, gibt es $\binom{k+2}{l-(k+2)}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $\binom{N}{l}\binom{l}{k+2}\binom{k+2}{l-(k+2)}$ Möglichkeiten für C, S und T.

Damit gilt für den ersten Summanden aus (4.20):

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\sum_{\substack{C\subseteq\{1,\dots,N\};\\ \mathrm{Card}(C)=l}}\sum_{\substack{T,S\ mit C=S\cup T\\ \mathrm{Card}(S)=\mathrm{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{|A_N|}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\binom{l}{k+2}\binom{k+2}{l-(k+2)}2^l(2\alpha)^{l-1}\frac{1}{(l-1)!} \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

4.4.5 Abschätzung des zweiten Summanden des Zwischenergebnisses aus (4.20)

Wir betrachten den zweiten Summanden aus (4.20)

$$\left|\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})\right.$$
$$\left.\times D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4})d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}\right|,$$

wobei nach Bemerkung 4.4.1 gilt

$$D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) := \sum_{\substack{\varphi\in S_{2k+4}\\ \varphi(\{1,\dots,k+2\})\neq\{1,\dots,k+2\}}} sgn(\varphi)\prod_i K_N(\widetilde{t_i}\widetilde{t_{\varphi(i)}}).$$

Nach Vertauschung von Summation und Integration und Verwendung der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})D(2k+4,N)d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}\right|\\
\leq\ & \sum_{\substack{\varphi\in S_{2k+4}\\ \varphi(\{1,\dots,k+2\})\neq\{1,\dots,k+2\}}}\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})\\
&\times\left|\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}})\right| d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Sei $\varphi\in S_{2k+4}$ mit $\varphi(\{1,\dots,k+2\})\neq\{1,\dots,k+2\}$. Dann existieren $a,b,c,d\in\{1,\dots,k+2\}$ mit

$$\varphi(a)=b+k+2 \quad\text{und}\quad \varphi(d+k+2)=c.$$

Dann gilt für den zu φ gehörenden Summanden aus (4.23)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})\\
&\times\left|\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}})\right| d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}\\
=\ &\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})\\
&\times\left|\prod_{\substack{i\neq a;\\ i\neq n+k+2}} K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}})\right| |K_N(\widetilde{t_a},\widetilde{t_{b+k+2}})||K_N(\widetilde{t_{d+k+2}},\widetilde{t_c})|d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}\\
\overset{(2.7)}{\leq}\ &\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2(\psi(a)2N)^{2k+2}\int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2})F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4})\\
&\times|K_N(\widetilde{t_a},\widetilde{t_{b+k+2}})||K_N(\widetilde{t_{d+k+2}},\widetilde{t_c})|d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}}. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Substituiere $\widetilde{s}=\widetilde{t_a}$, $\widetilde{t}=\widetilde{t_{b+k+2}}$, $\widetilde{u_i}=\widetilde{t_i}-\widetilde{t_a}$ für $i\in\{1,\dots,k+2\}\backslash\{a\}$ und $\widetilde{v_i}=\widetilde{t_{i+k+2}}-\widetilde{t_{b+k+2}}$ für $i\in\{1,\dots,k+2\}\backslash\{b\}$. Außerdem sei $s=t_a$, $t=t_{b+k+2}$, $u_i=t_i-t_a=\widetilde{u_i}N\psi(a)$ und $v_i=t_{i+k+2}-t_{b+k+2}=\widetilde{v_i}N\psi(a)$.

Es gilt $F(t_1,\ldots,t_{k+2}) = 0$ für $\max_{i,j}|t_i - t_j| > \alpha$ und $\max_{i,j}|t_i - t_j| > \alpha \Leftrightarrow \max_{i,j}|\widetilde{t_i} - \widetilde{t_j}| > \frac{\alpha}{\psi(a)N}$, da $\widetilde{t_k} = a + \frac{t_k}{\psi(a)N}$.

Damit lässt sich (4.24) nach oben abschätzen durch

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (\psi(a)2N)^{2k+2}||F||_{sup} \\
& \times \int_{[-\frac{\alpha}{\psi(a)N},\frac{\alpha}{\psi(a)N}]^{2k+2}} \left(\int_{I_N}\int_{I_N} |K_N(\widetilde{s},\widetilde{t})||K_N(\widetilde{v_d}+\widetilde{t},\widetilde{u_c}+\widetilde{s})|d\widetilde{s}d\widetilde{t}\right)\prod_{i\neq a} d\widetilde{u_i}\prod_{i\neq b} d\widetilde{v_i} \\
\leq\ & \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (\psi(a)2N)^{2k+2} \\
& \times \int_{[-\frac{\alpha}{\psi(a)N},\frac{\alpha}{\psi(a)N}]^{2k+2}} \underbrace{\left(\int_{A_N}\int_{A_N} \frac{1}{(\psi(a)N)^2}|K_N(\widetilde{s},\widetilde{t})||K_N(\widetilde{v_d}+\widetilde{t},\widetilde{u_c}+\widetilde{s})|dsdt\right)}_{=:\mathrm{INT}(u_c,v_d)} \\
& \times \prod_{i\neq a} d\widetilde{u_i}\prod_{i\neq b} d\widetilde{v_i} \\
\leq\ & \left(\frac{1}{(k+2)!|A_N|}\right)^2 \left(\frac{2\alpha(\psi(a)2N)}{\psi(a)N}\right)^{2k+2} \sup_{u_c,v_d\in[-\alpha,\alpha]} \mathrm{INT}(u_c,v_d) \\
=\ & \left(\frac{1}{(k+2)!|A_N|}\right)^2 (4\alpha)^{2k+2} \sup_{u_c,v_d\in[-\alpha,\alpha]} \mathrm{INT}(u_c,v_d). \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Wir werden später in Abschnitt 4.4.6 folgende Behauptung beweisen

$$
\sup_{u_c,v_d\in[-\alpha,\alpha]} \mathrm{INT}(u_c,v_d) \leq 2K + (2K)^2\mathcal{O}(|I_N|), \qquad (4.26)
$$

wobei $K := c+\alpha$, also $2K = |A_N| + 2\alpha$.

Damit lässt sich (4.25) weiter abschätzen durch

$$
\leq \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (4\alpha)^{2k+2}\left(2K + (2K)^2\mathcal{O}(|I_N|)\right).
$$

Wegen $K \leq 2|A_N|$ für N hinreichend groß, gilt weiter

$$
\leq \left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (4\alpha)^{2k+2}\left(\frac{4}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)\right).
$$

Insgesamt gilt

$$
\frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})F(t_{k+3},\ldots,t_{2k+4})\left|\prod_i K_N(\widetilde{t_i},\widetilde{t_{\varphi(i)}})\right| d\widetilde{t_1}\ldots d\widetilde{t_{2k+4}} \qquad (4.27)
$$

$$\leq \left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (4\alpha)^{2k+2} \left(\frac{4}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)\right)$$

für alle $\varphi \in S_{2k+4}$ mit $\varphi(\{1,\dots,k+2\}) \neq \{1,\dots,k+2\}$. Da es höchstens $(2k+4)!$ solcher Permutationen gibt, gilt mit (4.23)

$$\begin{aligned}
& \Bigg| \frac{1}{|A_N|^2} \left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\dots,t_{k+2}) F(t_{k+3},\dots,t_{2k+4}) \\
\times \quad & D(2k+4,N)(t_1,\dots,t_{2k+4}) d\widetilde{t_1}\dots d\widetilde{t_{2k+4}} \Bigg| \\
\leq \quad & (2k+4)! \left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 (4\alpha)^{2k+2} \left(\frac{4}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)\right) \\
= \quad & \binom{2k+4}{k+2} (4\alpha)^{2k+2} \left(\frac{4}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)\right). \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

4.4.6 Beweis der Behauptung (4.26)

Es bleibt aus dem vorherigen Abschnitt noch folgende Behauptung über die Größe $\mathrm{INT}(u_c, v_d)$ zu zeigen:

$$\sup_{u_c, v_d \in [-\alpha,\alpha]} \mathrm{INT}(u_c, v_d) \leq 2K + (2K)^2 \mathcal{O}(|I_N|) \qquad (4.29)$$

wobei

$$\mathrm{INT}(u_c, v_d) = \int_{A_N} \int_{A_N} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} |K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})||K_N(\widetilde{v_d} + \widetilde{t}, \widetilde{u_c} + \widetilde{s})| ds dt.$$

Beweis von Behauptung 4.29: Sei $u_c, v_d \in [-\alpha, \alpha]$.

Wegen

$$|K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})||K_N(\widetilde{v_d} + \widetilde{t}, \widetilde{u_c} + \widetilde{s})| \leq \frac{1}{2} \left(K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})^2 + K_N(\widetilde{v_d} + \widetilde{t}, \widetilde{u_c} + \widetilde{s})^2\right)$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{INT}(u_c, v_d) &\le \frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,c]} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} K_N(\widetilde{v_d}+\widetilde{t}, \widetilde{u_c}+\widetilde{s})^2 dsdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,c]} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})^2 dsdt \\
&\le \frac{1}{2}\int_{[-c-v_d,c+v_d]}\int_{[-c-u_c,c+u_c]} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} K_N(\widetilde{t}, \widetilde{s})^2 dsdt \qquad (4.30) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{[-c,c]}\int_{[-c,c]} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})^2 dsdt \qquad (4.31) \\
&\le \int_{[-K,K]}\int_{[-K,K]} \frac{1}{(\psi(a)N)^2} K_N(\widetilde{s}, \widetilde{t})^2 dsdt. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Um die letzte Ungleichung zu erhalten, haben wir bei beiden Integrationen in (4.30) und (4.31) den Integrationsbereich auf $[-c-\alpha, c+\alpha] = [-K, K]$ vergrößert und dabei verwendet, dass $v_d, u_c \in [-\alpha, \alpha]$. Mit Korollar 2.1.4 und Supremumbildung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sup_{u_c, v_d \in [-\alpha,\alpha]} \mathrm{INT}(u_c, v_d) &\le \int_{[-K,K]}\int_{[-K,K]} \left(\frac{\sin(\pi(s-t))}{\pi(s-t)}\right)^2 + \mathcal{O}(|I_N|)\, dsdt \\
&= \int_{[-K,K]}\int_{[-K,K]} \left(\frac{\sin(\pi(s-t))}{\pi(s-t)}\right)^2 dsdt + (2K)^2 \mathcal{O}(|I_N|).
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun folgende Ungleichung für das verbleibende Doppelintegral beweisen:

$$
\int_{[-K,K]}\int_{[-K,K]} \left(\frac{\sin(\pi(s-t))}{\pi(s-t)}\right)^2 dsdt \le 2K. \qquad (4.33)
$$

Die Substitution $u := s - t$ und anschließende Vergrößerung des Integrationsbereiches der u-Integration auf $\mathbb{R}$ liefern

$$
\begin{aligned}
\int_{[-K,K]^2} \left(\frac{\sin(\pi(s-t))}{\pi(s-t)}\right)^2 dsdt &= \int_{[-K,K]}\int_{[-K-t,K-t]} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 dudt \\
&\le \int_{[-K,K]}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 dudt. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

Wir berechnen das innere Integral aus (4.34) und werden mit Hilfe von Fourriertransformation zeigen, dass es den Wert 1 hat.

Sei

$$
f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},
$$

dann ist
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 = 2.$$
Die Fourriertransformierte $\hat{f}$ von f ist gegeben durch
$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos(-\lambda t) + i \sin(-\lambda t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos(-\lambda t) dt \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{\lambda} \sin(-\lambda t)|_{-1}^{1}\right) & \text{für } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 & \text{für } \lambda = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} & \text{für } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 & \text{für } \lambda = 0 \end{cases} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(\lambda).
\end{aligned}$$
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 du &\overset{v=\pi u}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(v)}{v}\right)^2 dv \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)^2 dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)^2 dv \qquad (4.35) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = 1.
\end{aligned}$$

Dabei entspricht das Integral über das Quadrat der Fourriertransformierten in (4.35) nach der Parsevallschen Gleichung dem Integral über das Quadrat der ursprünglichen Funktion f. Mit (4.34) gilt dann
$$\int_{[-K,K]^2} \left(\frac{\sin(\pi(s-t))}{\pi(s-t)}\right)^2 ds dt \leq \int_{[-K,K]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 du}_{=1} dt = 2K,$$

also gilt (4.33) und Behauptung (4.26) ist damit bewiesen. □

Damit ist der Beweis der Abschätzung in Abschnitt 4.4.5 vollständig.

4.4.7 Zusammenfassung der letzten Abschnitte und die Ungleichung für die Varianz mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.4.4 und 4.4.5

Mit den bisher erhaltenen Ungleichungen der vorherigen Abschnitte können wir nun die Schranke für die Varianz aus (4.3) herleiten.

Wir haben in (4.20) folgende Zerlegung der Varianz in zwei Summanden erhalten

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right) \\
= \quad & \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A_N|^2}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\ \sum_{\substack{C\subseteq\{1,\ldots,N\};\\ \operatorname{Card}(C)=l}}\ \sum_{\substack{T,S\ mit C=S\cup T\\ \operatorname{Card}(S)=\operatorname{Card}(T)=k+2}} F(T)F(S)\right] \\
+ \quad & \frac{1}{|A_N|^2}\left(\frac{1}{(k+2)!}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{2k+4}} F(t_1,\ldots,t_{k+2})F(t_{k+3},\ldots,t_{2k+4}) \\
\times \quad & D(2k+4,N)(t_1,\ldots,t_{2k+4})d\widetilde{t_1}\ldots d\widetilde{t_{2k+4}}
\end{aligned}
$$

Mit den Ungleichungen (4.22) und (4.28) für den ersten und zweiten Summanden gilt dann

$$
\begin{aligned}
& \left|\operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)\right| \\
\leq \quad & \left[\frac{1}{|A_N|}\sum_{l=k+2}^{2k+3}\binom{l}{k+2}\binom{k+2}{l-(k+2)}\frac{1}{(l-1)!}2^l(2\alpha)^{l-1}\right] \\
+ \quad & \left[\binom{2k+4}{k+2}(4\alpha)^{2k+2}\left(\frac{4}{|A_N|}+\mathcal{O}(|I_N|)\right)\right] \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Um dieses Ergebnis weiter zu vereinfachen, können wir die Ungleichungen des folgenden Lemmas für Binomialkoeffizienten verwenden.

Lemma 4.4.2. *Für $l,k\in\mathbb{N}$ mit $l\geq k+2$ und $k+2\geq(l-k-2)$ gilt*

1.
$$\binom{l}{k+2}\binom{k+2}{l-(k+2)}\frac{1}{(l-1)!} \leq 3,$$

2.
$$\binom{2k+4}{k+2} \leq 2^{2k+4}.$$

Beweis:

zu 1) Nach Definition der Binomialkoeffizienten genügt es zu zeigen

$$\frac{1}{3}l \leq ((l-(k+2))!)^2\,(2(k+2)-l)!$$

Wegen $l = (l-(k+2)+(l-(k+2)+(2(k+2)-l)$ ist dies ein Spezialfall der folgenden Ungleichung für $a,b,c \in \mathbb{N}$:

Sei $a = 1+x_1$, $b = 1+x_2$ und $c = 1+x_3$ mit $x_i \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} & a!\cdot b!\cdot c! \\ \geq\ & a\cdot b\cdot c \\ =\ & (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \\ \geq\ & 1+(x_1+x_2+x_3) \\ \geq\ & \frac{1}{3}(a+b+c). \end{aligned}$$

Mit $a = b = l-(k+2)$ und $c = 2(k+2)-l$ folgt die Behauptung.

zu 2) Die Behauptung folgt durch Entwicklung von $2^{2k+4} = (1+1)^{2k+4}$ mit dem binomischen Lehrsatz. $\square$

Mit Lemma 4.4.2 und Ungleichung (4.36) folgt

$$\begin{aligned} & \left|\mathrm{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)\right| \\ \leq\ & \left[\frac{1}{|A_N|}\sum_{l=k+2}^{2k+3} 3\cdot 2^l(2\alpha)^{l-1}\right] + \left[2^{2k+4}(4\alpha)^{2k+2}\left(\frac{4}{|A_N|}+\mathcal{O}(|I_N|)\right)\right] \\ =\ & \left[\frac{6}{|A_N|}\sum_{l=k+2}^{2k+3}(4\alpha)^{l-1}\right] + \left[2^{2k+4}(4\alpha)^{2k+2}\left(\frac{4}{|A_N|}+\mathcal{O}(|I_N|)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Für die Summe $\sum_{l=k+2}^{2k+3}(4\alpha)^{l-1}$ gilt, dass entweder der erste oder der letzte Summand der Größte ist und damit ist jeder Summand kleiner als die Summe aus erstem und letztem Summanden. Damit erhalten wir als Abschätzung für die Varianz

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,M)\right)\\
\leq\;& \left[\frac{6}{|A_N|}(k+2)((4\alpha)^{k+1}+(4\alpha)^{2k+2})\right]+\left[2^{2k+4}(4\alpha)^{2k+2}\left(\frac{4}{|A_N|}+\mathcal{O}\left(|I_N|\right)\right)\right]\\
\leq\;& (32\alpha)^{2k+2}\left(\frac{2(k+2)+1}{|A_N|}+\mathcal{O}\left(|I_N|\right)\right)\\
=\;& (32\alpha)^{2k+2}\left(\frac{2k+5}{|A_N|}+\mathcal{O}\left(|I_N|\right)\right).
\end{aligned}
$$

5 Der Beweis des Hauptsatzes

5.1 Notation

Wir wollen im Hauptsatz eine Abschätzung für $\mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|S_{N,a,I_N}(s,H) - \int_{-\infty}^{s} d\mu\right|\right]$ beweisen. Mit Bemerkung 3.2.5 ist $S_{N,a,I_N}(s,H)$ die Verteilungsfunktion eines Maßes, nämlich $\sigma_N(H)$. Wir betrachten im Hauptsatz damit die maximale Abweichung zweier Verteilungsfunktionen. Deshalb verwenden wir folgende Notation.

Definition 5.1.1. *Für zwei endliche Maße ν_1, ν_2 auf $\mathbb{R}$ sei*

$$\textit{discrep}(\nu_1,\nu_2) := \sup_{s\in\mathbb{R}\cup\infty}\left|\int_{-\infty}^{s} d\nu_1 - \int_{-\infty}^{s} d\nu_2\right|.$$

Bemerkung 5.1.2. *Es genügt zur Berechnung von discrep alle Werte $s \in \mathbb{R}$ zu betrachten.*
Es gilt

$$\textit{discrep}(\nu_1,\nu_2) \quad = \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\nu_1((-\infty,x]) - \nu_2(-\infty,x])|. \tag{5.1}$$

Begründung der Gleichung in (5.1):

Trivialerweise ist

$$\sup_{x\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}\left|\int_{-\infty}^{x} d\nu_1 - \int_{-\infty}^{x} d\nu_2\right| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\infty}^{x} d\nu_1 - \int_{-\infty}^{x} d\nu_2\right|.$$

Außerdem gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}\left|\int_{-\infty}^{x} d\nu_1 - \int_{-\infty}^{x} d\nu_2\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\infty}^{x} d\nu_1 - \int_{-\infty}^{x} d\nu_2\right|,$$

denn für $x = \infty$ gilt die Ungleichung wegen folgender Überlegung:

Betrachte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$, also $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Dann ist

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (-\infty, x_i] \quad \textit{und} \quad (-\infty, x_{n-1}] \subseteq (-\infty, x_n].$$

Wir verwenden für beide Maße die Stetigkeit von unten und für $n \to \infty$ folgt

$$\nu_1((-\infty, x_n]) \to \nu_1(\mathbb{R}) \quad \textit{und} \quad \nu_2((-\infty, x_n]) \to \nu_2(\mathbb{R}).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |\nu_1(\mathbb{R}) - \nu_2(\mathbb{R})| &= \lim_{n\to\infty} |\nu_1((-\infty, x_n]) - \nu_2((-\infty, x_n])| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu_1((-\infty, x]) - \nu_2(-\infty, x]| \end{aligned}$$

Um die Aussage über $\mathbb{E}[\mathrm{discrep}(\sigma_N(H), \mu)]$ des Hauptsatzes 1.0.4 zu beweisen, werden wir eine andere Größe für die Abweichung zweier Maße einführen, nämlich $\mathrm{discrep}_M$, die von dem Parameter $M \in \mathbb{N}$ abhängt und leichter zu berechnen ist als discrep. Dann wollen wir in Lemma 5.2.2 eine Beziehung zwischen den beiden Größen herstellen, um damit die einfacher zu erhaltenden Ungleichungen für $\mathrm{discrep}_M$ auf discrep zu übertragen. Mit Erwartungswertbildung und weiteren Abschätzungen folgt dann die zu beweisende Behauptung.

5.2 Stützstellen und discrep$_M$

Bezeichne mit G die Verteilungsfunktion von μ und nehme an, dass G stetig ist. Dann ist G monoton wachsend und es gilt $\lim_{x\to 0} G(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existieren somit $s_0, \ldots, s_M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{M-1} < s_M = \infty$$

und

$$G(s_j) = \frac{j}{M}, \quad j = 0, \ldots, M$$

Wir setzen $\beta := \max\{1, s_{M-1}\}$.

Definition 5.2.1. *Für ein endliches Maß ν und μ wie in Lemma 3.3.1 sei*

$$\Delta_\nu(s) := \int_{-\infty}^{s} d\nu - \int_{-\infty}^{s} d\mu$$

und

$$\Delta_{\nu,M} := \textit{discrep}_M(\mu, \nu) := \max\{|\Delta_\nu(s)| : s \in \{s_1, \ldots, s_{M-1}\}\}.$$

Während discrep also die maximale Abweichung zweier Maße auf den überabzählbar vielen Intervallen $(-\infty, x]$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist, betrachten wir bei discrep$_M$ nur $M-1$ dieser Intervalle, nämlich nur solche, deren obere Intervallgrenze eine der $M-1$ reellen Stützstellen ist.

Das folgende Lemma liefert einen Zusammenhang zwischen discrep und discrep$_M$.

Lemma 5.2.2. *Sei ν ein endliches Borelmaß mit $\nu(-\infty, 0) = 0$.*
Dann gilt

$$\mathit{discrep}(\mu, \nu) \leq \frac{2}{M} + 2\, \mathit{discrep}_M(\mu, \nu) + \nu(\mathbb{R}) - 1. \tag{5.2}$$

Beweis: Es gilt

$$\operatorname{discrep}(\mu, \nu) = \sup_{s \in \mathbb{R}} |\Delta_\nu(s)|.$$

Es gelten folgende Abschätzungen:

- Für $s \leq 0$ ist offensichtlich $\Delta_\nu(s) = 0$.
- Für $s_{j-1} \leq s < s_j$ mit $1 \leq j \leq M-1$ gilt $|\Delta_\nu(s)| \leq \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M}$, denn

$$\Delta_\nu(s) \leq \int_{-\infty}^{s_j} d\nu - G(s_{j-1}) = \Delta_\nu(s_j) + G(s_j) - G(s_{j-1}) \leq \Delta_{\nu,M} + \frac{1}{M} \tag{5.3}$$

  und

$$-\Delta_\nu(s) \leq G(s_j) - \int_{-\infty}^{s_{j-1}} d\nu = G(s_j) - G(s_{j-1}) - \Delta_\nu(s_{j-1}) \leq \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M}. \tag{5.4}$$

  Aus (5.3) und (5.4) folgt $|\Delta_\nu(s)| \leq \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M}$
- Für $s \geq s_{M-1}$ gilt

$$\Delta_\nu(s) \leq \nu(\mathbb{R}) - G(s_{M-1}) = \nu(\mathbb{R}) - 1 + \frac{1}{M}$$

  und

$$-\Delta_\nu(s) \leq \mu(\mathbb{R}) - \int_{-\infty}^{s_{M-1}} d\nu = \frac{1}{M} - \Delta_\nu(s_{M-1}) \leq \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M}.$$

Insgesamt gilt damit

$$\operatorname{discrep}(\mu, \nu) = \sup_{s \in \mathbb{R}} |\Delta_\nu(s)| \leq \max\left(\frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M}, \frac{1}{M} + \nu(\mathbb{R}) - 1\right). \tag{5.5}$$

Wir verwenden

$$\nu(\mathbb{R}) - \left(1 - \frac{1}{M}\right) \geq \int_{-\infty}^{s_{M-1}} d\nu - G(s_{M-1}) = \Delta_\nu(s_{M-1}) \geq -\Delta_{\nu,M}. \tag{5.6}$$

Aus (5.6) folgt für den ersten Term des Maximums in (5.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M} &\leq \frac{1}{M} + \Delta_{\nu,M} + \underbrace{\nu(\mathbb{R}) - \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \Delta_{\nu,M}}_{\geq 0} \\ &= \frac{2}{M} + 2\Delta_{\nu,M} + \nu(\mathbb{R}) - 1. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term des Maximums gilt ebenfalls

$$\frac{1}{M} + \nu(\mathbb{R}) - 1 \leq \frac{1}{M} + \nu(\mathbb{R}) - 1 + \frac{1}{M} + 2\Delta_{\nu,M} = \frac{2}{M} + 2\Delta_{\nu,M} + \nu(\mathbb{R}) - 1.$$

Damit folgt die Behauptung des Lemmas. □

Die Aussage von Lemma 5.2.2 gilt auch für $\nu = \sigma_N(H)$. Erwartungswertbildung liefert dann:

Korollar 5.2.3. *Für alle $M \geq 1$ gilt*

$$\mathbb{E}\left[\mathit{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \leq \frac{2}{M} + 2\,\mathbb{E}\left[\mathit{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] + \mathbb{E}\left[\sigma_N(\cdot)(\mathbb{R}) - 1\right]. \tag{5.7}$$

Wir werden in den folgenden Abschnitten 5.3 und 5.4 die mit Korollar 5.2.3 erhaltenen Summanden $\mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))\right]$ und $\mathbb{E}\left[\sigma_N(\cdot)(\mathbb{R}) - 1\right]$ getrennt betrachten und abschätzen.

5.3 Obere Schranke für $\mathbb{E}[\mathrm{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))]$

Im folgenden Lemma wollen wir eine Ungleichung für $\mathbb{E}[\mathrm{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))]$ herleiten.

Lemma 5.3.1. *Für $L, M \in \mathbb{N}$ und $\beta = \max(1, s_{M-1})$ gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mathit{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))\right) &\leq M\left(\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}} + \sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)}\right) 2(32\beta)^{L+1} \\ &+ \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\ &+ \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!} \end{aligned}$$

Beweis:
Wir beweisen zunächst die folgenden beiden Behauptungen:

Behauptung 1: Für $0 \leq s \leq \beta$, $L \in \mathbb{N}_0$ und H eine hermitesche $(N \times N)$-Matrix gilt die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|\mu([0,s]) - \sigma_N(H)([0,s])| \quad \leq & \quad \sum_{k=0}^{L} \left| \mathbb{E}\left[\int_0^s d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^s d\gamma_N(k,H) \right| \\
+ & \quad \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\
+ & \quad \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}
\end{aligned}
$$

Behauptung 2:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{discrep}_M(\mu, \sigma_N((H)) \quad \leq & \quad \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=0}^{L} \left| \mathbb{E}\left[\int_0^{s_j} d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^{s_j} d\gamma_N(k,H) \right| \\
+ & \quad \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\
+ & \quad \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}
\end{aligned}
$$

Beweis von Behauptung 1:
Wir benötigen die Abschätzungen (4.1) bis (4.3) aus Kapitel 4 mit $\alpha = s \leq \beta$. Dann lauten die Ungleichungen mit $f = \chi_{[0,\beta]}$

-
$$
\begin{aligned}
\left| \mathbb{E}\left[\int f\, d\,\gamma_N(k,H)\right] - E(f,k) \right| \quad \leq & \quad 2\frac{(2\beta)^{k+2}}{(k+1)!}\frac{1}{|A_N|} \\
+ & \quad (k+2)^2 2^{k+2} \mathcal{O}(|I_N|)\beta^{k+1} \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

- Ungleichung (4.1) bleibt auch für $N \to \infty$ erhalten und es gilt

$$
|\mathbb{E}(f,k)| \leq \frac{(4\beta)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (5.9)
$$

- $$\sqrt{\operatorname{Var}\left(\int f\, d\gamma_N(k,H)\right)} \leq (32\beta)^{k+1}\left(\sqrt{\frac{2k+5}{|A_N|}} + \mathcal{O}\left(|I_N|\right)\right). \tag{5.10}$$

Wir verwenden $\mu([0,s]) = \int_0^s d\mu$ und $\sigma_N(H)([0,s]) = \int_0^s d\sigma_N(H)$, um die Ungleichung aus Lemma 3.3.3 zur Abschätzung der Differenz der beiden Integrale verwenden zu können.

Dann gilt mit $f = \chi_{[0,s]}$

$$\begin{aligned}
&|\mu([0,s]) - \sigma_N(H)([0,s])| = \left|\int_0^s d\mu - \int_0^s d\sigma_N(h)\right| \\
\overset{3.3.3}{\leq}\;& \sum_{k=0}^{L}\left|\mathbb{E}\left[\int_0^s d\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^s d\gamma_N(k,H)\right| \\
+\;& \sum_{k=0}^{L}\left|\mathbb{E}\left[\int_0^s d\gamma_N(k,\cdot)\right] - E(f,k)\right| + E(f,L) + E(f,L+1) \\
\overset{(5.8),(5.9)}{\leq}\;& \sum_{k=0}^{L}\left|\mathbb{E}\left[\int_0^s d\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^s d\gamma_N(k,H)\right| \\
+\;& \sum_{k=0}^{L}\left(2\frac{(2\beta)^{k+2}}{(k+1)!}\frac{1}{|A_N|} + (k+2)^2 2(2\beta)^{k+1}\mathcal{O}(|I_N|)\right) \\
+\;& \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}.
\end{aligned}$$

Wir schätzen die auftretende Summe folgendermaßen weiter ab:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{L} 2\left(\frac{(2\beta)^{k+2}}{(k+1)!}\frac{1}{|A_N|} + (k+2)^2(2\beta)^{k+1}\mathcal{O}(|I_N|)\right) \\
\leq\;& \frac{1}{|A_N|}\sum_{k=0}^{L}(4\beta)^{k+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2\sum_{k=0}^{L}(4\beta)^{k+1} \\
\leq\;& \frac{1}{|A_N|}\frac{(4\beta)^{L+3}-1}{(4\beta)-1} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2\frac{(4\beta)^{L+2}-1}{(4\beta)-1} \\
\leq\;& \frac{1}{|A_N|}(4\beta)^{L+2}\frac{(4\beta)}{(4\beta)-1} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1}\frac{(4\beta)}{(4\beta)-1} \\
=\;& \frac{1}{|A_N|}(4\beta)^{L+2}\left(1+\frac{1}{(4\beta)-1}\right) + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1}\left(1+\frac{1}{(4\beta)-1}\right) \\
\overset{\beta\geq 1}{\leq}\;& \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Beweis von Behauptung 2:
Nach Definition ist

$$\text{discrep}_M := \max\{|\Delta_\nu(s)| : s \in \{s_1, \dots, s_{M-1}\}\}.$$

Behauptung 1 liefert eine Abschätzung der Art

$$|\Delta_\nu(s_i)| \leq C + D(s_i),$$

wobei C unabhängig von s_i und D abhängig von s_i ist und $D \geq 0$. Das Maximum über alle $i = 1, \dots, M-1$ lässt sich dann abschätzen durch

$$\max_{i=1,\dots,M-1} |\Delta_\nu(s_i)| \leq C + \sum_i D(s_i).$$

Mit

$$C := \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} + \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}$$

und

$$D := \sum_{k=0}^{L} \left| \mathbb{E}\left[\int_0^{s_i} d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^{s_i} d\gamma_N(k,H) \right|$$

folgt dann Behauptung 2.

Erwartungswertbildung von Behauptung 2 liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\text{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \quad \leq \quad & \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=0}^{L} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_0^{s_i} d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^{s_i} d\gamma_N(k,H)\right|\right] \\
+ \quad & \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\
+ \quad & \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}.
\end{aligned}$$

Da mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_0^{s_i} d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^{s_i} d\gamma_N(k,H)\right|\right] \\
\leq \; & \sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_0^{s_i} d\,\gamma_N(k,\cdot)\right] - \int_0^{s_i} d\gamma_N(k,H)\right|^2\right]} \\
= \; & \sqrt{\operatorname{Var}\left(\int_0^{s_i} d\gamma_N(k,H)\right)} \\
\overset{5.10}{\leq} \; & (32\beta)^{k+1}\sqrt{\frac{2k+5}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)},
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}_M(\mu,\sigma_N(\cdot))\right] \; \leq \; & \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{k=0}^{L}(32\beta)^{k+1}\sqrt{\frac{2k+5}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)} \\
+ \; & \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\
+ \; & \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}.
\end{aligned}$$

Wir schätzen die Doppelsumme unter Verwendung von $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ weiter ab.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{k=0}^{L}(32\beta)^{k+1}\sqrt{\frac{2k+5}{|A_N|} + \mathcal{O}(|I_N|)} \\
\leq \; & M\left(\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}} + \sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)}\right)\sum_{k=0}^{L}(32\beta)^{k+1} \\
\leq \; & M\left(\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}} + \sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)}\right)(32\beta)^{L+1}\frac{32\beta}{32\beta-1} \\
\overset{\beta\geq 1}{\leq} \; & M\left(\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}} + \sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)}\right)2(32\beta)^{L+1}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}_M(\mu,\sigma_N(\cdot))\right] &\leq M\left(\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}}+\sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)}\right)2(32\beta)^{L+1}\\ &+ \frac{2}{|A_N|}(4\beta)^{L+2}+\mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1}\\ &+ \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!}+\frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!}\end{aligned}$$

und Lemma 5.3.1 ist bewiesen □

5.4 Abschätzung für $\mathbb{E}[\sigma_N(\cdot)(\mathbb{R})-1]$

Mit der Definition von $\sigma_N(H)$ aus 3.2.4 gilt

$$\mathbb{E}[\sigma_N(H)(\mathbb{R})-1]=\frac{\mathbb{E}\left[\text{Anzahl Eigenwerte von H in } I_N\right]-1}{|A_N|}-1.$$

Wir berechnen die erwartete Anzahl der Eigenwerte von H, die im Intervall I_N liegen:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\text{Anzahl Eigenwerte von H in } I_N]\\ =&\int_{t_1\leq\ldots\leq t_N}\#\{t_i: t_i\in A_N\}B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N\\ =&\int_{t_1\leq\ldots\leq t_N}\sum_{i=1}^{N}\chi_{A_N}(t_i)B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N\end{aligned}$$

Vertauschung von Summation und Integration und anschließende Vertauschung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
&= N\int_{t_1\leq\ldots\leq t_N} \chi_{A_N}(t_1)B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_1\ldots dt_N \\
&= N\int_{A_N}\left(\int_{t_2\leq\ldots\leq t_N} B_{N,N}(t_1,\ldots,t_N)dt_2\ldots dt_N\right)dt_1 \\
&\overset{2.1.11}{=} N\frac{(N-1)!}{N!}\int_{A_N} B_{N,1}(t_1,t_1)dt_1 \\
&= N\psi(a)\int_{I_N}\frac{1}{\psi(a)N}K_N(\widetilde{t_1},\widetilde{t_1})d\widetilde{t_1} \\
&\overset{2.1.4}{=} N\psi(a)\int_{I_N}\frac{\sin(\pi(t_1-t_1))}{\pi(t_1-t_1)}+\mathcal{O}(|I_N|)d\widetilde{t_1} \\
&= N\psi(a)|I_N|\left(1+\mathcal{O}(|I_N|)\right) \\
&= |A_N|\left(1+\mathcal{O}(|I_N|)\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma_N(\cdot)(\mathbb{R})-1] &= 1+\mathcal{O}(|I_N|)-\frac{1}{|A_N|}-1 \\
&= -\frac{1}{|A_N|}+\mathcal{O}(|I_N|). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

5.5 Zusammenfassung und Vorbereitungen für den Abschluss des Beweises

Mit Korollar 5.2.3 und den vorherigen beiden Abschnitten 5.3 und 5.4 lässt sich folgendes Zwischenergebnis herleiten:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\
\overset{5.2.3}{\leq} \quad & \frac{2}{M} + 2\mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}_M(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] + \mathbb{E}[\sigma_N(M)(\mathbb{R}) - 1] \\
\overset{\text{Lemma 5.3.1,(5.11)}}{\leq} \quad & \frac{2}{M} + M4(32\beta)^{L+1}\sqrt{\frac{2L+5}{|A_N|}} + M4(32\beta)^{L+1}\sqrt{\mathcal{O}(|I_N|)} \\
+ \quad & \frac{4}{|A_N|}(4\beta)^{L+2} + \mathcal{O}(|I_N|)(L+2)^2(4\beta)^{L+1} \\
+ \quad & \frac{(4\beta)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{(4\beta)^{L+2}}{(L+2)!} + \mathcal{O}(|I_N|) - \frac{1}{|A_N|}.
\end{aligned}$$

Es gibt ein $K_{max} \in \mathbb{R}$, so dass weiter gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\
\leq \; & \frac{2}{M} + K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(M\sqrt{\frac{L}{|A_N|}} + M\sqrt{|I_N|} + \frac{1}{|A_N|} + L^2|I_N| + \frac{1}{(L+1)!}\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Abschätzung für $\mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right]$ in Abhängigkeit der frei wählbaren Parameter M und L erhalten. Zum weiteren Beweis benötigen wir

Lemma 5.5.1. *Es gibt A, $B \in \mathbb{R}$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mu((s, \infty]) \leq Ae^{-Bs^2}.$$

Bemerkung 5.5.2. *Wir nehmen dabei O.B.d.A. an, dass $A \geq 1$ und $B \leq 1$ ist. Das Lemma gilt nach [5, Seite 90] für das dort verwendete $\mu(univ)$. In [5] ist $\mu(univ)$ über den Grenzwert für $n \to \infty$ der Funktion $E(n, F, univ)$ (explizite Angabe der Funktion auf Seite 127 in [5]) bestimmt. In unserem Fall ist μ durch den Grenzwert von $E(f, n)$ bestimmt (vgl. Lemma 3.3.1). Wenn man in Kapitel 4 die Substitution aus (4.7) so ändert, dass das Integral über $F(0, z_1, \ldots, z_{k+1})W(0, z_1, \ldots, z_{k+1})$ statt $F(-c, z_1, \ldots, z_{k+1})W(-c, z_1, \ldots, z_{k+1})$ gebildet wird und die folgenden Rechnungen und Definitionen anpasst, dann entspricht $E(n, F, univ)$ aus [5] genau dem hier verwendeten $E(f, n)$. Damit stimmen die Maße μ und $\mu(univ)$ aus [5] überein und Lemma 5.5.1 gilt auch für das hier verwendete Maß μ.*

Bevor wir den restlichen Beweis betrachten, benötigen wir die obere Schranke für β aus Lemma 5.5.3 und einige Standardungleichungen sowie die Stirlingsche Formel aus Lemma 5.5.4.

Lemma 5.5.3. *Sei $M \geq 3$ und $C := \sqrt{\frac{1+\ln A}{B}}$ mit A und B wie in Bemerkung 5.5.2.*

Dann gilt

$$\beta \leq C\sqrt{\ln M}.$$

Beweis:

Es ist $\beta = \max(1, s_{M-1})$.

Da $C \geq 1$ und $M \geq 3$ gilt $1 \leq C\sqrt{\ln M}$.
Außerdem ist

$$\begin{aligned} \mu([C\sqrt{\ln M}, \infty)) &\overset{Bem5.5.2}{\leq} Ae^{-B\cdot C^2 \ln M} \\ &\leq Ae^{-(1+\ln A)\ln M} \\ &\leq Ae^{-\ln M - \ln A} = \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

Wegen $\mu([s_{M-1,\infty})) = \frac{1}{M}$ folgt $s_{M-1} \leq C\sqrt{\ln M}$. □

Lemma 5.5.4. *Standardungleichungen und Stirlingsche Formel*
Es gilt:

1. *Stirlingsche Formel: Für $x > 0$ gilt*

   $$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\varphi(x)}$$

   mit $0 < \varphi(x) < \frac{1}{12x}$. Also gilt

   $$\ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \varphi(x).$$

2. *Sei $K \geq 1$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Konstante $N_4(\varepsilon, K)$, so dass gilt*

   $$K^{x+1} \leq \Gamma(x)^{\varepsilon} \textit{ für } x \geq N_4(\varepsilon, K).$$

3. *Für $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gibt es ein $N_5(\varepsilon)$, so dass gilt*

   $$(\ln(\Gamma(x)))^{x+1} \leq \Gamma(x)^{1+\varepsilon} \textit{ für } x \geq N_5(\varepsilon).$$

Beweis von 1): Die Stirlingsche Formel gilt nach [1, Seite 448].

Wir können daraus folgende obere und untere Schranke für $\ln(\Gamma(x))$ herleiten.

Wegen $\varphi(x) \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma(x)) &\geq \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \frac{1}{2} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=\ln(\sqrt{\frac{1}{e}})} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\right) \\
&\geq \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\ln(x) - 1\right), \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

und für $x \geq 2$ ist $-x + \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12x} \leq 0$ und damit gilt

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma(x)) &\leq \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \frac{1}{12x} \\
&\leq \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x).
\end{aligned}$$

Logarithmieren liefert

$$\ln(\ln(\Gamma(x))) \leq \ln(x - \frac{1}{2}) + \ln(\ln(x)). \qquad (5.13)$$

Beweis von 2): Sei $K \geq 1$ und $x \geq eK^{\frac{2}{\varepsilon}} = N_4(\varepsilon, K)$. Dann gilt $x + 1 \geq 3$ und folglich

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2 \cdot 3} \leq 1 - \frac{3}{2(x+1)}. \qquad (5.14)$$

Die Behauptung lässt sich dann folgendermaßen beweisen:

$$\begin{array}{rcl}
x & \geq & eK^{\frac{2}{\varepsilon}} \\
\Rightarrow \ln(x) & \geq & \ln(e) + \ln(K^{\frac{2}{\varepsilon}}) = 1 + \frac{2}{\varepsilon}\ln(K) \\
\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\ln(K) & \leq & \frac{1}{2}(\ln(x) - 1) \\
\overset{(5.14)}{\Rightarrow} \frac{1}{\varepsilon}\ln(K) & \leq & (\ln(x) - 1)\left(1 - \frac{3}{2(x+1)}\right) = (\ln(x) - 1)\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x+1}\right) \\
\Rightarrow (x+1)\ln(K) & \leq & \varepsilon(\ln(x) - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
\overset{(5.12)}{\Rightarrow} (x+1)\ln(K) & \leq & \varepsilon\ln(\Gamma(x)) \\
\Rightarrow \ln(K^{x+1}) & \leq & \ln(\Gamma(x)^{\varepsilon}) \\
\Rightarrow K^{x+1} & \leq & \Gamma(x)^{\varepsilon}
\end{array}$$

Beweis von 3):
Sei $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Wähle $N_5(\varepsilon)$ so groß, dass für $x \geq N_5(\varepsilon)$ gilt:

- $$\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.15}$$

- $$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \tag{5.16}$$

- $$\frac{3}{2x+2} \leq \frac{\varepsilon}{12}. \tag{5.17}$$

Dies ist möglich, da die drei Terme mit $x \to \infty$ gegen Null konvergieren.

Dann gelten die folgenden zwei Ungleichungen:

$$\frac{1}{\ln(x)} + \frac{3}{2x+2} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.18}$$

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} = 1 + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{6} \overset{\varepsilon^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}}{\leq} 1 + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{3} = (1+\varepsilon)(1 - \frac{\varepsilon}{3}). \tag{5.19}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
1+\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} &\overset{(5.15)}{\leq} 1+\frac{\varepsilon}{2} \overset{(5.19)}{\leq} (1+\varepsilon)(1-\frac{\varepsilon}{3}) \\
&\overset{(5.18)}{\leq} (1+\varepsilon)\left(1-\frac{3}{2x+2}-\frac{1}{\ln(x)}\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)\left(1-\frac{3}{2x+2}-\frac{1}{\ln(x)}+\frac{3}{(2x+2)\ln(x)}\right) \\
&= (1+\varepsilon)\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)\left(1-\frac{1}{\ln(x)}\right). \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Multiplizieren von (5.20) mit $\ln(x)$ führt zu

$$\ln(x)+\ln(\ln(x)) \leq (1+\varepsilon)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right)(\ln(x)-1).$$

Da $\ln(x) \geq \ln(x-\frac{1}{2})$ gilt

$$\ln(x-\frac{1}{2})+\ln(\ln(x)) \leq (1+\varepsilon)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right)(\ln(x)-1)$$

und weiter

$$(x+1)\underbrace{\left(\ln(x-\frac{1}{2})+\ln(\ln(x))\right)}_{\overset{(5.13)}{\geq}\ln(\ln(\Gamma(x)))} \leq (1+\varepsilon)\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)(\ln(x)-1)}_{\overset{(5.12)}{\leq}\ln(\Gamma(x))}.$$

Somit gilt für $x \geq N_5(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
(x+1)\ln(\ln(\Gamma(x))) &\leq (1+\varepsilon)\ln(\Gamma(x)) \\
\Rightarrow \ln\left(\ln(\Gamma(x))^{x+1}\right) &\leq \ln\left(\Gamma(x)^{1+\varepsilon}\right) \\
\Rightarrow (\ln(\Gamma(x)))^{x+1} &\leq \Gamma(x)^{1+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

□

5.6 Abschluss des Beweises des Hauptsatzes

Wir haben in Abschnitt 5.5 bereits folgendes Zwischenergebnis erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathrm{discrep}(\mu,\sigma_N(\cdot))\right] \\
\leq\ &\frac{2}{M}+K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(M\sqrt{\frac{L}{|A_N|}}+M\sqrt{|I_N|}+\frac{1}{|A_N|}+L^2|I_N|+\frac{1}{(L+1)!}\right)
\end{aligned} \qquad (5.21)$$

Beweis von Aussage a) des Hauptsatzes 1.0.4:
Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $M \geq 3$ so, dass $\frac{2}{M} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Es ist $|A_N| = N\psi(a)|I_N|$, $\frac{1}{|A_N|} \to 0$ und $|I_N| \to 0$ für $N \to \infty$, und wir setzen

$$B_N := \max\left(|I_N|, \frac{1}{|A_N|}\right) \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Mit Lemma 5.5.3 und Standardungleichung 5.5.4 2.) folgt

$$K_{max}(32\beta)^{L+2} \leq \sqrt{L!}$$

für hinreichend großes L. Aus (5.21) folgt dann für hinreichend großes N

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\ \leq\ & \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{L!}\left(M\sqrt{L|B_N|} + M\sqrt{|B_N|} + |B_N| + L^2|B_N| + \frac{1}{(L+1)!}\right) \\ \leq\ & \frac{\varepsilon}{3} + \left(4M\sqrt{L!}L^2|B_N|\right) + \frac{1}{\sqrt{(L+1)!}}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dann können wir L als Funktion von N so wählen, dass $L(N) \to \infty$ und $\sqrt{L!}L^2|B_N| \to 0$ für $N \to \infty$, und damit gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\ \leq\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned} \tag{5.23}$$

für $N \geq N_1$. Somit ist die behauptete Konvergenz von $\mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right]$ gegen Null gezeigt und Aussage a) des Hauptsatzes 1.0.4 bewiesen. □

Beweis von Aussage b) des Hauptsatzes 1.0.4:
Es gilt $I_N = [a - N^{-\frac{1}{2}}, a + N^{-\frac{1}{2}}]$ und damit $\mathcal{O}(|I_N|) = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$, und wegen $|A_N| = N\psi(a)|I_N|$ ist ebenso $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|A_N|}\right) = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$.

Wir erhalten dann aus (5.21)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\ \leq\ & \frac{2}{M} + K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(M\sqrt{LN^{-\frac{1}{2}}} + M\sqrt{N^{-\frac{1}{2}}} + N^{-\frac{1}{2}} + L^2N^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(L+1)!}\right) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Wir werden M und L als Funktionen in N so wählen, dass sich die nötigen Abschätzungen ergeben. Dazu sei

$$\gamma := \frac{\frac{1}{2} + 4\varepsilon}{3 + 3\varepsilon},$$

$$\alpha := \frac{1}{2}\gamma - \frac{3}{2}\varepsilon = \frac{\frac{1}{4} + 2\varepsilon}{3 + 3\varepsilon} - \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Bemerkung 5.6.1. *Für α und γ gelten folgende Gleichungen:*

$$-\alpha = -\frac{\gamma}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon \tag{5.25}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\gamma + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma - \frac{1}{8} + \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\frac{1}{4} + 2\varepsilon + \frac{3}{4}\varepsilon + 6\varepsilon^2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\varepsilon + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2}{6 + 6\varepsilon} \\ &= \frac{9\varepsilon^2 - \frac{1}{2} + 5\varepsilon}{6 + 6\varepsilon} \\ &= \frac{9\varepsilon + 9\varepsilon^2 - \frac{1}{2} - 4\varepsilon}{6 + 6\varepsilon} \\ &= \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\frac{1}{4} + 2\varepsilon}{3\varepsilon + 3} \\ &= -\alpha. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Aus (5.26) folgt

$$-\alpha = \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2}\varepsilon\gamma + \alpha - \frac{1}{4} + \varepsilon. \tag{5.27}$$

Für $\varepsilon \le \frac{1}{12}$ ist $\gamma \le 1$ und aus (5.25) folgt

$$-\alpha \ge -\frac{\gamma}{2} + \frac{3}{2}\gamma\varepsilon.$$

Für $0 < \varepsilon \le \frac{1}{12}$ ist $\alpha > 0$ und wir betrachten N hinreichend groß, so dass $N^\alpha \ge 2$ und $N^\gamma \ge e^7$. Wir wählen nun $M \in \mathbb{N}$ mit

$$N^\alpha - 1 < M \le N^\alpha$$

und L größte natürliche Zahl mit

$$L! < N^\gamma.$$

Dann gelten folgende sieben Ungleichungen:

1. $\frac{1}{2}N^\alpha \le N^\alpha - 1 < M \le N^\alpha$ und damit gilt $\frac{1}{M} \le 2N^{-\alpha}$
2. $(L+1)! \ge N^\gamma > L!$ und damit gilt $\frac{1}{(L+1)!} \le N^{-\gamma}$
3. $L! = \frac{(L+1)!}{(L+1)} > \frac{N^\gamma}{L+1}$

4. $\ln(M) \leq \ln(N^{\alpha}) = \frac{\alpha}{\gamma}\ln(N^{\gamma}) \leq \frac{\alpha}{\gamma}\ln((L+1)!)$

5. für $L+1 \geq e^2$ und $N^{\gamma} \geq e^7$ gilt: $L \leq \gamma \ln N$, denn wegen $L! = \Gamma(L+1)$ gilt mit (5.12)

$$\begin{aligned} \gamma \ln N &= \ln(N^{\gamma}) > \ln(L!) \\ &\geq (L+\frac{1}{2})\underbrace{(\ln(L+1)-1)}_{\geq 1, da\, L+1 \geq e^2} \geq L + \frac{1}{2} \\ &\geq L. \end{aligned}$$

Für N hinreichend groß gilt damit $\sqrt{L} \leq L^2 \leq (\gamma \ln N)^2 \leq N^{\varepsilon}$.

6. $K_{max}(32\beta)^{L+2} \leq (L+1)^{(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}} N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}}$, denn

$$\begin{aligned} K_{max}(32\beta)^{L+2} &\overset{Lemma\, 5.5.3}{\leq} (K_{max}32C)^{L+2}\sqrt{\ln M}^{L+2} \\ &\overset{L+2 \leq L+3}{\leq} (K_{max}32C)^{L+3}\sqrt{\ln M}^{L+3} \\ &\overset{4.)}{\leq} \left(K_{max}32C\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{L+3} \sqrt{(\ln(L+1)!)^{L+3}} \\ &\leq (L+1)!^{\varepsilon}(L+1)!^{\frac{1+\varepsilon}{2}} = (L+1)!^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt dabei für hinreichend großes N unter Verwendung der Standardungleichungen aus Lemma 5.5.4. Mit

$$(L+1)!^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon} = (L+1)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon} L!^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon} \leq (L+1)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon} N^{\gamma(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon)}$$

folgt die Behauptung.

7. Um später N mit den verschiedenen auftretenden Exponenten zusammenfassen zu können verwenden wir die unten aufgeführte obere Schranke für die vier Terme

   a) $N^{\alpha-\frac{1}{4}} \leq N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}$
   b) $N^{-\frac{1}{2}} \leq N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}$
   c) $N^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \leq N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}$
   d) $N^{\varepsilon+\alpha-\frac{1}{4}} \leq N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}$

Mit diesen Abschätzungen lässt sich dann die Behauptung b) des Hauptsatzes 1.0.4 folgendermaßen beweisen:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \\
\leq \quad & \frac{2}{M} + K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(M\sqrt{LN^{-\frac{1}{2}}} + M\sqrt{N^{-\frac{1}{2}}} + N^{-\frac{1}{2}} + L^2N^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(L+1)!}\right) \\
\overset{1.)2.)5.)}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(N^{\varepsilon+\alpha-\frac{1}{4}} + N^{\alpha-\frac{1}{4}} + N^{-\frac{1}{2}} + N^{\varepsilon-\frac{1}{2}} + N^{-\gamma}\right) \\
\overset{7.)}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + K_{max}(32\beta)^{L+2}\left(4N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} + N^{-\gamma}\right) \\
\overset{6.)}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + (L+1)^{(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}}N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}}\left(4N^{\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} + N^{-\gamma}\right) \\
\overset{\varepsilon\leq\frac{1}{3}}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + 2L\left(N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} + N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}-\gamma}\right) \\
\overset{5.)}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + 2\gamma\ln N\left(N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon} + N^{\gamma(1+3\varepsilon)\frac{1}{2}-\gamma}\right) \\
\overset{\text{Bem 5.6.1}}{\leq} \quad & 4N^{-\alpha} + 2\gamma\ln N \cdot N^{-\alpha} \\
\leq \quad & C\ln N \cdot N^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

für ein C in $\mathbb{R}$.

Da $-\alpha \to -\frac{1}{12}$ für $\varepsilon \to 0$ und $-\alpha \geq -\frac{1}{12}$ für alle $\varepsilon > 0$, gibt es ein $r(\varepsilon) > 0$, so dass für N hinreichend groß $\ln N \leq N^{r(\varepsilon)}$ und $r(\varepsilon) - \alpha = \varepsilon - \frac{1}{12}$.

Also gilt für N hinreichend groß

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{discrep}(\mu, \sigma_N(\cdot))\right] \leq CN^{\varepsilon-\frac{1}{12}},$$

und Aussage b) des Hauptsatzes 1.0.4 ist damit bewiesen. □

Also haben wir das Hauptziel dieser Arbeit, den Beweis von Satz 1.0.4, erreicht.

6 Anhang

Beweisskizze von Satz 2.1.1:

Kombiniert man die Darstellung der Kernfunktion durch die Lösung eines Riemann-Hilbert Problems und deren Analyse wie sie in [6, Abschnitt 6] skizziert ist mit dem asymptotischen Resultat [3, (8.34)], so erhält man folgende Darstellung für alle $x, y \in [-1+\delta, 1-\delta]$:

$$\frac{1}{N\psi(a)} K_N(x,y) = \frac{\sin(\gamma_-(x))\cos(\gamma_+(x)) - \sin(\gamma_-(y))\cos(\gamma_+(y))}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}} N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \tag{6.1}$$

wobei $\gamma_\pm(x) = N\alpha(x) \pm \beta(x)$ mit $\alpha(x) = \pi \int_1^x \psi(t)dt$ und $\beta(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x)$ und die in $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ implizit auftretende Konstante nur von δ abhängt.

Mit Hilfe der Additionstheoreme zeigt man, dass

$$\begin{aligned}
& \sin(\gamma_-(x))\cos(\gamma_+(x)) - \sin(\gamma_-(y))\cos(\gamma_+(y)) \\
= \; & \sin(N\alpha(x) - \beta(x))\cos(N\alpha(x) + \beta(x)) - \sin(N\alpha(y) - \beta(y))\cos(N\alpha(y) + \beta(y)) \\
= \; & \cos\left(N(\alpha(x) + \alpha(y))\right)\sin\left(\beta(y) - \beta(x)\right) + \cos(\beta(x) + \beta(y))\sin\left(N(\alpha(x) - \alpha(y))\right),
\end{aligned}$$

und damit folgt aus (6.1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N\psi(a)} K_N(x,y) &= \frac{\cos\left(N(\alpha(x)+\alpha(y))\right)\sin\left(\beta(y)-\beta(x)\right)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}} N\psi(a)\pi(x-y)} \\
&+ \frac{\cos(\beta(x)+\beta(y))\sin\left(N(\alpha(x)-\alpha(y))\right)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}} N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{\cos\left(N(\alpha(x)+\alpha(y))\right)\sin\left(\beta(y)-\beta(x)\right)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}} N\psi(a)\pi(x-y)} \\
&+ g(x,y)\frac{\sin\left(N\pi \int_x^y \psi(t)dt\right)}{N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

mit

$$g(x,y) := \frac{\cos(\beta(x)+\beta(y))}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Es existiert ein $L(\delta) \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\cos\left(N(\alpha(x)+\alpha(y))\right)\sin\left(\beta(y)-\beta(x)\right)}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(1-y^2)^{\frac{1}{4}}\psi(a)\pi(x-y)}\frac{1}{N} \leq L(\delta)\frac{\sin(\beta(y)-\beta(x))}{x-y}\frac{1}{N},$$

und wegen

$$\left|\frac{\sin(\beta(y)-\beta(x))}{x-y}\right| \leq \left|\frac{\beta(y)-\beta(x)}{y-x}\right| \leq \sup\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} : s \in [-1+\delta, 1-\delta]\right\} < \infty$$

folgt aus (6.2)

$$\frac{1}{N\psi(a)}K_N(x,y) = g(x,y)\frac{\sin\left(N\pi\int_x^y \psi(t)dt\right)}{N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{6.3}$$

Wegen

$$g(x,x) = \frac{\cos(2\beta(x))}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

und

$$\sup\left\{\left|\frac{dg}{dy}(x,y) : x,y \in [-1+\delta, 1-\delta]\right|\right\} < \infty$$

gilt für $x, y \in I$

$$g(x,y) = g(x,x) + g(x,y) - g(x,x) = 1 + \mathcal{O}\left(|I|\right). \tag{6.4}$$

Für $a, x, y \in I$ erhält man weiter

$$N\pi\int_x^y \psi(t)dt = N\psi(a)(x-y)\left(1+\mathcal{O}\left(|I|\right)\right). \tag{6.5}$$

Für $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\Delta \in \mathbb{R}$ gilt unter Verwendung der Additionstheoreme zudem

$$\left|\frac{\sin(z(1+\Delta))}{z} - \frac{\sin z}{z}\right| = 2\underbrace{\left|\cos(z(1+\frac{\Delta}{2}))\right|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left|\frac{\sin(z\frac{\Delta}{2})}{z}\right|}_{\leq|\frac{\Delta}{2}|} \leq |\Delta|. \tag{6.6}$$

Mit (6.3), (6.4), (6.5) und (6.6) folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{N\psi(a)}K_N(x,y) &= \left(1+\mathcal{O}\left(|I|\right)\right)\cdot\left(\frac{\sin(N\psi(a)\pi(x-y))}{N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(|I|\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{\sin(N\psi(a)\pi(x-y))}{N\psi(a)\pi(x-y)} + \mathcal{O}\left(|I|\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).\end{aligned}$$

Setzt man nun $x = \widetilde{\zeta}$ und $y = \widetilde{\eta}$, so folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] Barner, M. ; Flohr, F. : *Analysis I.* Berlin, New York : Walter de Gryter, 1974

[2] Deift, P. : *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach.* New York : American Mathematical Society, 1999

[3] Deift, P. ; Kriecherbauer, T. ; McLaughlin, K. T.-R. ; Venakides, S. ; Zhou, X. : Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 52 (1999), S. 1491–1552

[4] Feller, W. : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* New York : Wiley & Sons, 1971

[5] Katz, N. M. ; Sarnak, P. : *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy.* Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1999

[6] Vanlessen, M. : Strong Asymptotics of Laguerre-Type Orthogonal Polynomials and Applications in Random Matrix Theory. In: *Constructive Approximation* 25 (2007), S. 125–175

Selbständigkeitserklärung

Hiemit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Bochum, den 18. März 2007 Kristina Schubert