Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
7. November 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 5

Abgabe: 13. November 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (1+3 Punkte)

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal mit $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bildet.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein an der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann ein Martingal bildet, wenn $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$ für jede beschränkte $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit τ gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, die nicht fast sicher 0 sind. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$ ist eine symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe eines 0-1-Gesetzes, dass fast sicher

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Damit ist $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für $a, b > 0$ der Erwartungswert der Stoppzeit $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{-a, b\}\}$ durch $\mathbb{E}\tau = ab$ gegeben ist.
Hinweis: Betrachten Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}S_\tau^2$.

Aufgabe 4 (2+4 Punkte)

(a) Y sei eine Zufallsvariable, die nur Werte im Intervall $[-c, c]$ mit $c > 0$ annimmt und $\mathbb{E}Y = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\theta Y} \le \cosh(\theta c) \le \mathrm{e}^{\frac{\theta^2 c^2}{2}}$$

gilt. Definieren Sie dazu die Funktion $f\colon [-c, c] \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = \mathrm{e}^{\theta z}$ und zeigen Sie für alle $y \in [-c, c]$ die Gültigkeit von

$$f(y) \le \frac{c-y}{2c} f(-c) + \frac{c+y}{2c} f(c).$$

(b) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein Martingal, dessen Startwert fast sicher $M_0 = 0$ ist und dessen Zuwächse durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte also

$$|M_n - M_{n-1}| \le c.$$

Zeigen Sie, dass für $x > 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\le k\le n} M_k \ge x\right) \le \exp\left(-\frac{x^2}{2nc^2}\right)$$

erfüllt ist.
Hinweis: Die Lösung ähnelt dem Beweis der Exponentialungleichung im Beweis des Gesetzes vom iterierten Logarithmus.