Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion h aus dem Beweis von Satz 4.18 (Urysohn) ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum $(C([0,1]), d)$ nicht kompakt ist. Hierbei bezeichnet d die durch die Supremumsnorm induzierte Metrik.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei (S, d) ein separabler, metrischer Raum, $\mathcal{B}_S$ die Borel'sche σ-Algebra über S und $\mathcal{M}^1(S)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{B}_S)$.

Die *Prohorov Metrik* $\rho : \mathcal{M}^1(S) \times \mathcal{M}^1(S) \to \mathbb{R}_+$ ist gegeben durch

$$\rho(P, Q) := \inf\{\varepsilon > 0 : \forall\, A \in \mathcal{B}_S,\ P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon \ \text{ und } \ Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon\}$$

wobei $A^\varepsilon := \{x \in S : d(x, A) < \varepsilon\}$ und $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

(a) Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik auf $\mathcal{M}^1(S)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz bezüglich ρ die schwache Konvergenz der Maße impliziert.

Hinweis: Sie dürfen nutzen, dass für ein W-Maß P gilt: $\forall\, M \in \mathcal{B}_S$ und für jedes $\varepsilon > 0$, existiert eine abgeschlossene Menge $A \in \mathcal{B}_S$ und eine offene Menge $O \in \mathcal{B}_S$, so dass $A \subseteq M \subseteq O$ und $P(O \setminus A) < \varepsilon$ gilt.

Abgabetermin: Mo. 30.1.2017 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.