Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß für $C([0,1])$ mit Hilfe von Bernsteinpolynomen. Dabei sei für eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ das n-te Bernsteinpolynom B_n^f gegeben durch

$$B_n^f(t) := \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Zeigen Sie, dass für $f \in C([0,1])$ die Folge B_n^f gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei der Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dim normalverteilt, d.h. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Zeigen Sie, dass aus der paarweisen Unkorreliertheit der Komponenten X_i die Unabhängigkeit folgt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Beweisen Sie die Doob'sche Maximalungleichung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass fast sicher gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lim_{n\to\infty} \frac{B(n)}{n} = 0$ fast sicher. Zeigen Sie dann (z.B. mit Hilfe der Doob'schen Maximalungleichung und dem Borel-Cantelli-Lemma)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\max_{n\leq t\leq n+1} B(t) - B(n) \right) = 0, \quad \text{f.s..}$$

Abgabetermin: Mo. 23.1.2017 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.