Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 10

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und φ eine maßtreue Abbildung. φ heißt *schwach mischend*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} |\mathbb{P}(A \cap \varphi^{-j}(B)) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) φ mischend $\Rightarrow$ φ schwach mischend

(b) φ schwach mischend $\Rightarrow$ φ ergodisch

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)
Der Zentrale Grenzwertsatz kann für eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n$ auch mit Hilfe der sogenannten Lindeberg-, Lyapunov- oder Feller-Bedingung formuliert werden. Mit $s_n := \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)}$ lauten die Bedingungen:

- Lindeberg-Bedingung: Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$, wobei

$$L_n(\varepsilon) := \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_j - \mathbb{E}(X_j))^2;\ |X_j - \mathbb{E}(X_j)| \geq \varepsilon s_n\right].$$

- Lyapunov-Bedingung: Es existiert ein $\delta > 0$, für das gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[|X_j - \mathbb{E}X_j|^{2+\delta}\right] = 0.$$

- Feller-Bedingung: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{1\leq j\leq n} \frac{\sqrt{\mathbb{V}X_j}}{s_n} \right) = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Genügt eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n$ der Lyapunov-Bedingung, so genügt sie auch der Lindeberg-Bedingung.

(b) Genügt eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n$ der Lindeberg-Bedingung, so genügt sie auch der Feller-Bedingung.

Abgabetermin: Mo. 16.1.2017 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.