

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe von Fourier-Analyse (wie bei der Drehung auf dem Kreis), dass der Bernoulli-Shift ergodisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ eine maßtreue Abbildung. Weiter sei \mathcal{J} die σ -Algebra der φ -invarianten Mengen, also $\mathcal{J} := \{A \in \mathcal{F} : \varphi^{-1}(A) = A\}$. Zeigen Sie, dass $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann \mathcal{J} -messbar ist, wenn $X \circ \varphi = X$ fast sicher.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, ohne Verwendung der Aussage des Birkhoffschen Ergodensatzes, für eine Folge $(X_i)_i$ von i.i.d. verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_0| < \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m \rightarrow \mathbb{E}(X_0) \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P}).$$

Hinweis: Verwenden Sie ähnliche Techniken wie im Beweis des Ergodensatzes.

Abgabetermin: Mo. 9.1.2017 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.