Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\varphi : \Omega \to \Omega$. Zeigen Sie, dass die φ-invarianten Mengen $\{A \in \mathcal{F} : \varphi^{-1}(A) = A\}$ eine σ-Algebra bilden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1$ und $\mathbb{P} = \lambda^1$. Weiter sei $\theta \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_n$ mit

$$X_n(\omega) := (\omega + n\theta) \bmod 1$$

stationär ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Zahl in $[0, 1)$ ist genau dann Lebesgue-verteilt, wenn in ihrer b-adischen Darstellung (für ein $b \geq 2$) alle Ziffern unabhängig und gleichverteilt sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1$. Betrachten Sie die folgenden Transformationen $T : \Omega \to \Omega$

(i) $T(x) = \lambda x, \quad 0 < \lambda < 1,$

(ii) $T(x) = x^2$.

Zeigen Sie jeweils, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gibt, so dass $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in [0, 1)$ und T maßtreu ist.

Abgabetermin: Mo. 19.12.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.