Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

# Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 7

**Definition:** *Für Verteilungen $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ und $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ auf $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ definieren wir den Totalvariationsabstand durch*

$$d_{TV}(\mu, \nu) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} |\mu_i - \nu_i|.$$

**Aufgabe 1** (6 Punkte) In dieser Aufgabe wird ein alternativer Beweis des Ergodensatzes für Markov-Ketten mit Hilfe der Kopplungsmethode vorgestellt. Der Satz lautet:

*Sei $(X_n)_n$ eine irreduzible und aperiodische Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, Übergangsmatrix $P$ und Startverteilung $\mu$. Weiter sei $\pi$ stationäre Verteilung und $\mu^{(n)} := \mu P^n$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi) = 0$.*

Gehen Sie beim Beweis wie folgt vor:

(i) Wir nehmen an, wir erhalten die Markov-Kette durch $X_0 = \psi_\mu(U_0)$ , $X_1 = \phi(X_0, U_1), \ldots$ gemäß Aufgabe 3, Blatt 6, wobei $\psi_\mu$ eine Initialisierungsfunktion zur Startverteilung $\mu$ bezeichnet und $\phi$ eine Update-Funktion. Weiter sind $U_0, U_1$ i.i.d. uniform verteilte Zufallsvariablen auf $[0, 1]$.

Als zweite MK betrachten wir $X_0' = \psi_\pi(U_0'), X_1 = \phi(X_0', U_1'), \ldots$ für eine Initialisierungsfunktion $\psi_\pi$ zur Startverteilung $\pi$ und eine weitere (von $U_0, U_1, \ldots$ unabhängige) Folge von i.i.d. uniform verteilten ZV $U_0', U_1', \ldots$ auf $[0, 1]$.

Welche Verteilung hat $X_n'$? Warum sind die beiden Markov-Ketten unabhängig?

(ii) Setze $T := \min\{n : X_n = X_n'\}$ (und $T = \infty$ falls die Menge leer ist). Sei $M > 0$, so dass $P_{ij}^M > 0$ für alle $i, j$ und setze $\alpha := \min_{ij}\{P_{ij}^M : P_{ij}^M > 0\}$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(T \leq M) \geq \alpha^2.$$

Folgern Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ (d.h. die beiden MK treffen sich mit W'keit 1).

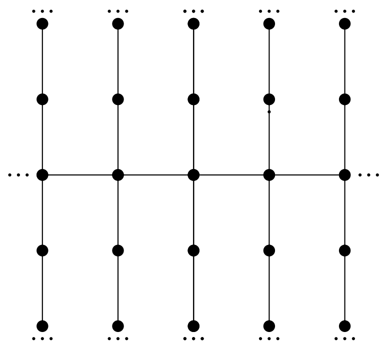
(iii) Betrachten Sie eine dritte Markov-Kette $X_0'', X_1'', \ldots$ gegeben durch

$$X_0'' := X_0, \quad X_{n+1}'' := \begin{cases} \phi(X_n'', U_{n+1}), & X_n'' \neq X_n' \\ \phi(X_n'', U_{n+1}'), & X_n'' = X_n' \end{cases}.$$

Welche Verteilung hat $X''$?

(iv) Beweisen Sie den Satz, indem Sie für festes $i$ zeigen, dass $|\mu_i^{(n)} - \nu_i| \leq \mathbb{P}(T > n)$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein symmetrischer Random Walk auf dem Kammgraphen $\mathrm{Comb}(\mathbb{Z})$ rekurrent ist. Dabei entsteht $\mathrm{Comb}(\mathbb{Z})$ dadurch, dass wir an $\mathbb{Z}$ jeweils in jedem Knoten eine Kopie von $\mathbb{Z}$ anhängen.



**Aufgabe 3** (4 Punkte)
Wir betrachten die eindimensionale Irrfahrt $(S_k)_k$ der Länge $2n$. Bezeichne $L_{2n}$ den Zeitpunkt der letzten Nullstelle, also

$$L_{2n} := \max\{2j : j \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } S_{2j} = 0\}.$$

Zeigen Sie für $0 \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k} u_{2(n-k)}, \quad \text{wobei } u_{2m} := \binom{2m}{m} 2^{-2m},\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

*Hinweis:* Betrachten Sie die Fälle $k = 0$ und $k = n$ gesondert. Für $0 < k < n$: Überlegen Sie sich, wie Sie die gesuchten Pfade durch Pfade von 0 bis $2k$ und von $2k$ bis $2n$ darstellen können.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Der Weihnachtsmann befindet sich mit seinem Schlitten auf seiner Route von Dach zu Dach, um in jedem Haus ein Geschenk abzuliefern. Erschöpft von der bisherigen Arbeit macht er in einer Bar Rast. Einige Zeit später setzt er seine Reise fort, um auch die letzten Geschenke rechtzeitig abzuliefern. Leider hat er seine Karte mit seiner Reiseroute in der Bar vergessen und beschließt zunächst die Straße, an der die Bar liegt weiter mit Geschenken zu versorgen. Begünstigt durch einige Glühwein, verliert er jedoch die Orientierung und bewegt sich nunmehr zufällig von Dach zu Dach entlang der Hauptstraße. Dabei entscheidet er sich nach jedem Haus erneut mit gleicher Wahrsscheinlichkeit für eine der beiden Richtungen. Wie lange dauert es durchschnittlich bis der Weihnachtsmann wieder in der Bar ankommt und mit seiner Karte seinen Weg planmäßig fortsetzen kann?

**Abgabetermin:** Mo. 12.12.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.