Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 6

Definition: *Sei $(X_n)_n$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf S heißt **reversibel** bzgl. $(X_n)_n$ (oder bzgl. P), falls für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ gilt $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$. Eine Markov Kette X heißt reversibel, wenn eine reversible Verteilung π bzgl.X existiert.*

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Sei $(X_n)_n$ eine Markov-Kette auf S und sei π reversibel bzgl. X. Zeigen Sie, dass π auch stationär ist.

(b) Betrachten Sie die Irrfahrt auf dem Kreis gemäß Beispiel 2.21 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass die zugehörige Markov-Kette reversibel ist.

(c) Geben Sie Übergangswahrscheinlichkeiten für die Markov-Kette aus (b) an, so dass die Markov-Kette nicht reversibel ist (Nachweis).

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die stationäre Verteilung im Ehrenfests Urnenmodell durch die Binomialverteilung gegeben ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe wird eine Methode vorgestellt, mit Hilfe eines Computers eine Realisierung einer Markov-Kette zu generieren. Wir betrachten dabei den Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, die Übergangsmatrix P und die Startverteilung μ als gegeben. Weiter nehmen wir an, dass wir mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators unabhängige auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariablen $U_0, U_1, \dots$ generieren können (warum ist das problematisch?). Wir suchen dann deterministische Funktionen ψ (Initialisierungsfunktion) und ϕ (Update-Funktion), mit denen wir (iterativ) aus $U_0, U_1, \dots$ eine Realisierung der Markov-Kette konstruieren können. Diese ist dann gegeben durch

$$X_0 := \psi(U_0), \quad X_1 := \phi(X_0, U_1), \quad X_2 := \phi(X_1, U_2), \quad X_3 := \phi(X_2, U_3), \dots \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass ψ und ϕ folgende Bedingungen erfüllen:

- $\psi : [0, 1] \to S$ sei stückweise konstant und für jedes $s \in S$ gelte

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\psi(x)=s\}}(x)dx = \mu(s)$$

- $\phi : S \times [0,1] \to S$ sei stückweise konstant in der zweiten Komponente (d.h. für festes s_i ist $\phi(s_i, \cdot)$ stückweise konstant) und es gelte

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\phi(s_i,x)=s_j\}}(x)dx = P_{i,j}, \quad \forall s_i, s_j \in S.$$

(a) Zeigen Sie, dass aus diesen beiden Bedingungen an ψ und ϕ folgt, dass $X_0, X_1, \ldots$ (berechnet gemäß (1)) die gewünschte Verteilung haben (d.h. die Startverteilung ist durch μ gegeben und die Übergangswahrscheinlichkeiten durch P).

(b) Geben Sie mögliche Funktionen ψ und ϕ an, die die Bedingungen erfüllen. (Hinweis: Sie können ψ durch μ und ϕ durch P definieren).

Abgabetermin: Mo. 5.12.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.