Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = -1)$ für ein $p \in [0,1]$. Ferner sei $Y_n := X_n X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für welche p bildet $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X eine Markoff-Kette mit mit Zustandsraum $\{s_1,\dots,s_k\}$, Übergangsmatrix P und $X_0 = s_1$. Sei

$$T_j := \inf\{n \geq 1 : X_n = s_j\}$$

und $\tau_j := \mathbb{E}(T_j)$. Sei weiter $\mathbb{P}(T_j < \infty) = 1$ und $\mathbb{E}(T_j) < \infty$ für alle $j \in \{1,\dots,k\}$ (man kann zeigen, dass dies z.B. für irreduzible und aperiodische Markoff-Ketten erfüllt ist). Für $i = 1,\dots,k$ setze

$$\rho_i := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = s_i, T_1 > n), \quad \pi = (\pi_1,\dots,\pi_k) := \left(\frac{\rho_1}{\tau_1},\dots,\frac{\rho_k}{\tau_1}\right).$$

Zeigen Sie, dass π eine stationäre Verteilung ist, d.h. dass gilt

(i) $\pi_i \geq 0$ für alle $i = 1,\dots,k$ und $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$,

(ii) $\pi P = \pi$ (also $\sum_{i=1}^k \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ für $j = 1,\dots,k$).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_n$ eine irreduzible und aperiodische Markoff-Kette mit Zustandsraum $S = \{s_,\dots,s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Zeigen Sie: Es existiert ein $M < \infty$, so dass $(P^n)_{ij} > 0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,k\}$ und $n \geq M$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $i = j$. Sie dürfen (ohne Beweis) das unten stehende Lemma verwenden (definieren Sie hierfür für jedes s_i eine geeignete Menge A_i). Folgern Sie dann die allgemeine Aussage aus der Aussage für $i = j$ zusammen mit der Irreduzibilität.

Lemma *Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ mit $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$ für alle i. Es sei ggt$(a_1, a_2, \dots) = 1$ und für $a \in A, a' \in A$ sei $a + a' \in A$. Dann gilt: Es gibt ein $N < \infty$, so dass $n \in A$ für alle $n \geq N$.*

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $(Y_{n,k})_{n\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in N_0, wobei $Y_{n,k}$ die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums in der n-ten Generation modelliert. Wir nehmen an, dass $\mu := \mathbb{E}(Y_{n,k}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Populationsgröße $S_n, n \in \mathbb{N}_0$ der n-ten Generation ist dann rekursiv definiert durch

$$S_0 := 1, \quad S_n := \sum_{k=1}^{S_{n-1}} Y_{n-1,k}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass durch $Z_n := \frac{S_n}{\mu^n}, n \geq 0$ ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$ definiert wird.

Abgabetermin: Mo. 28.11.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.