Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit $|X_i| \leq 1$ für alle i. Weiter gelte die Martingaldifferenz-Eigenschaft. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathbb{E}(e^{tX_n}|X_1, \dots, X_{n-1}) \leq e^{Ct^2}$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Betrachte die Menge aller Graphen mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$. Auf dieser Menge, sei ein Maß dadurch gegeben, dass jede Kante i.i.d. mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ gewählt wird. Ein Graph G mit Knotenmenge $V \subset \{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge $E = \{\{i, j\} : i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$ mit $|E| = k$ (wobei $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$) hat also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(G) = p^k(1-p)^{\binom{n}{2}-k}$. Ein solcher zufälliger Graph heißt Erdös-Rényi-Graph. Für einen Graphen G ist die chromatische Zahl $\chi(G)$ die kleinste Zahl k, für die der Graph eine zulässige Knotenfärbung mit k Farben besitzt. Eine Färbung heißt dabei zulässig, wenn es keine benachbarten Knoten gibt, die mit der gleichen Farbe gefärbt sind.

Zeigen Sie, dass dann für alle $b > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(|\chi(G) - \mathbb{E}(\chi(G))| \geq b\sqrt{n-1}\right) \leq 2e^{-\frac{b^2}{2}}.$$

Hinweis: Sie können z.B. $\chi(G)$ mit Hilfe der Zufallsvariablen $X_i = (\mathbb{1}_{\{\{i,j\} \in G\}} : j < i)$ schreiben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei

$$B(u) := \frac{2}{u^2}\left((1+u)\log(1+u) - u\right), \quad u > 0.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, v > 0$ gilt

$$H\left(\frac{x+v}{1+v}\Big|\frac{v}{1+v}\right) \geq \frac{x^2}{2v} B\left(\frac{x}{v}\right).$$

Abgabetermin: Mo. 21.11.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.