Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei S_n die Summe von n i.i.d. Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0 < p < 1$. Zeigen Sie für $a < b$ und $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n^\alpha} \in (a,b)\right) = -\inf_{x\in(a,b)} \frac{x^2}{2p(1-p)}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie Satz 1.24 (Varadhan) der Vorlesung ohne die Voraussetzung, dass f nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $(X_i)_i$ eine Folge von i.i.d. Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$

$$R_m := \max\left\{l - k : 0 \le k < l \le m, \frac{S_l - S_k}{l - k} \in A\right\}$$

und

$$T_r := \inf\left\{l : \frac{S_l - S_k}{l - k} \in A \text{ für ein } 0 \le k \le l - r\right\}.$$

Zeigen Sie, falls

$$I_A := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in A)$$

existiert, dann gilt fast sicher

$$\lim_{m\to\infty} \frac{R_m}{\log m} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\log T_r} = \frac{1}{I_A}.$$

Abgabetermin: Mo. 14.11.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.