Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass unter den Bedingungen von Theorem 1.6 der Vorlesung die Funktion I strikt konvex auf dem Inneren von $D_I := \{z \in \mathbb{R} : I(z) < \infty\}$ ist.

Hinweis: Sie dürfen hierfür (ohne Beweis) die strikte Konvexität der momenterzeugenden Funktion φ verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $(X_i)_i$ und $(S_n)_n$ wie in Theorem 1.6 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass dann für $a < \mathbb{E}X_1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \leq na) = -I(a)$$

wobei $I(a) := \sup_{t\in\mathbb{R}}[ta - \psi(t)]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei V ein endliches Volumen, indem wir unabhängig n Teilchen realisieren. Wir unterteilen V in r Zellen Z_1 bis Z_r mit relativen Volumina (in Bezug auf V), $\pi_1 := \mathrm{vol}(Z_1)/\mathrm{vol}(V), \dots, \pi_r := \mathrm{vol}(Z_r)/\mathrm{vol}(V)$. Die Wahrscheinlichkeit in den Zellen $Z_1, \dots, Z_r$ Teilchenzahlen $k_1, \dots, k_r$ zu haben ist dann gegeben durch die Multinomialverteilung zu den Parametern n und $\pi_1, \dots, \pi_r$. Sei $\mathcal{M}(X)$ die Menge der Wahrscheinlichkeiten auf $X := \{1, \dots, r\}$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{\sup}$. Wir identifizieren $\mathcal{M}(X)$ mit der Menge $\{(\rho_1, \dots, \rho_r) : \rho_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=1}^r \rho_i = 1\}$. Wir definieren eine Entropie-Funktion durch

$$H(\rho|\pi) := \sum_{i=1}^r \rho_i \log\left(\frac{\rho_i}{\pi_i}\right), \quad \rho, \pi \in \mathcal{M}(X), \quad \pi_i \geq 0 \text{ für alle i.}$$

Weiter sei $L_n(\omega, \cdot)$ der Vektor der relativen Häufigkeiten der Teilchenzahlen in den verschiedenen Zellen, also $L_n(\omega, i) = \frac{k_i}{n}$, falls k_i die Zahl der Teilchen in der Zelle Z_i ist. Für $\varepsilon > 0$ sei $A := \{\nu \in \mathcal{M}(X) : \|\nu - \pi\|_{\sup} \geq \varepsilon\}$.

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_\pi(L_n(\omega, \cdot) \in A) = \max_{\rho\in A} -H(\rho|\pi) = -\inf_{\rho\in A} H(\rho|\pi).$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{P}_\pi$ das durch π gebildete n-fache Produktmaß.

Abgabetermin: Mo. 7.11.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.