Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Liu/Schubert
WS 2016/2017

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien X_1,X_2,... reellwertige, i.i.d. Zufallsvariablen mit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Sei weiter

$$-I(a) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq na).$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) $I(a) = \infty$,

(ii) $\mathbb{P}(X_1 \geq a) = 0$,

(iii) $\mathbb{P}(S_n \geq na) = 0$ für alle n.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion I konvex ist, d.h.

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(I(a) + I(b)\right), \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ratenfunktion für X_i, die Poisson–verteilt sind zum Parameter $\lambda > 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ratenfunktion für X_i, die Bernoulli–verteilt sind zum Parameter $p = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)$. Verwenden Sie hierzu die Definition von I und zeigen Sie $I(x) = x \log\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\log\frac{1-x}{1-p} =: H(x|p)$.

Abgabetermin: Mo. 31.10.2016 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 145 und 154.