Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 20. November 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Explizite Bewertungsformeln) (5 Punkte)
Seien $K > 0$. Geben Sie jeweils eine möglichst explizite Formel (entspr. Satz 3.15) für den Wert

(a) einer digitale Option, welche 1 Euro ausschüttet, wenn der Wert der Aktie zur Maturität T über K liegt

(b) eines Straddle mit Ausübungspreis K

im arbitragefreien Binomialmodell an.

Aufgabe 2 (Monte-Carlo Simulation) (7 Punkte)
Seien $C, C_1, C_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte quadratintegrierbare Zufallsvariablen. Eine Möglichkeit zur approximativen Berechnung des Erwartungswerts $\mathbf{E}[C]$ stellt das Monte-Carlo Verfahren dar. Hierbei wird $\mathbf{E}[C]$ durch die Zufallsvariablen

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} C_n$$

mit $N \in \mathbb{N}$ approximiert.

(a) Stellen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathbf{E}[(S_N - \mathbf{E}[C])^2]$ mithilfe der Varianz von C dar.

(b) Es sei ein Finanzmarktmodell mit monoton wachsendem Numeraire und ein Bewertungsmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann für jede digitale Option $\mathcal{C}$ die entsprechende Monte-Carlo Approximation S_N die Abschätzung

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[(S_N - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C])^2] \leq \frac{1}{4N}$$

erfüllt.

(c) Implementieren Sie eine Funktion `asiatischerCall` in MATLAB oder R zur Bewertung eines Asiatischen Calls mit der Ausschüttung

$$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} S_t - K \right)_+$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

zur Maturität T im arbitragefreien Binomialmodell. Hierbei sollen die Werte T, s_0, u, d, r, K, N als Funktionswerte übergeben werden. Überlegen Sie sich hierzu, wie Sie einzelne Kurstrajektorien auf dem Computer generieren können:

- Der Befehl für die Generierung einer $\mathcal{U}(0,1)$-verteilten Zufallszahl lautet `rand` in MATLAB und `runif()` in R.
- Wie kann man mithilfe $\mathcal{U}(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen Bernoulli Zufallsvariablen definieren?

Berechnen Sie anschließend die Preise zu Parametern ihrer Wahl.

Allgemeine endliche Finanzmarktmodelle sind auf natürliche Weise mit Bäumen assoziiert und wir werden auf diesem und weiteren folgenden Aufgabeblättern eine spezielle Bewertungstheorie herleiten.

Es sei ein endliches Finanzmarktmodell mit Numeraire gegeben (entsprechend Def. 2.10). Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

- Eine Menge $A \in \mathcal{F}_t \setminus \{\emptyset\}$ heißt *t-Atom*, wenn für $B \in \mathcal{F}_t$ mit $B \subset A$ bereits $B \in \{\emptyset, A\}$ gilt.
- Betrachten Sie die Menge
$$\mathbb{T} := \{(t, A) \mid t \in \{0, \dots, T\}, A \text{ } t\text{-atomar}\}.$$
Wir nennen $(t, A) \in \mathbb{T}$ *Vater* von $(t+1, B) \in \mathbb{T}$, wenn $B \subset A$, entsprechend heißt $(t+1, B)$ *Kind* von (t, A).
- Die Menge $\mathbb{T}$ wird zu einem Graphen, indem jeweils Väter mit ihren Kindern mittels Kanten verbunden werden, d.h. die Kantenmenge ist gegeben durch
$$\mathbb{E} := \Big\{\{v, w\} \in \mathbb{T}^2 : v \text{ ist Vater von } w\Big\}.$$
Für eine (ungerichtete) Kante $\{v, w\} \in \mathbb{E}$ schreiben wir meist $\langle v, w\rangle := \{v, w\}$.
- Ein *Pfad* der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{T}$ ist eine Folge $v_0, \dots, v_l \in \mathbb{T}$, so dass für alle $i = 1, \dots, l$, $\langle v_{i-1}, v_i\rangle \in \mathbb{E}$.

Aufgabe 3 (Endliche Finanzmarktmodelle und Bäume) (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass bis auf $(0, \Omega)$ jeder Knoten $w \in \mathbb{T}$ genau einen Vater hat und der Graph zusammenhängend ist (d.h. jedes Paar von Knoten ist durch einen Pfad verbunden).

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}$ ein Baum ist, d.h. dass es keine Kreise gibt. Ein *Kreis* ist ein Pfad $v_0, \dots, v_l$ mit
$$l \in \mathbb{N},\ v_0 = v_l \text{ und } \langle v_0, v_1\rangle, \dots, \langle v_{l-1}, v_l\rangle \text{ paarweise verschieden.}$$

(c) Für einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozess X sei
$$\begin{aligned} \mathfrak{X} : \mathbb{T} &\to \mathbb{R}^d \\ (t, A) &\mapsto X_t(\omega) \text{ mit } \omega \in A. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Zeigen Sie weiter, dass umgekehrt jede Abbildung $\mathfrak{X} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ eindeutig einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten stochastischen Prozess definiert.