Übungen

Abgabetermin: Freitag, 12.12.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Betaverteilungen $\{\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)\colon (\alpha,\beta)\in(0,\infty)^2\}$ eine zweiparametrige Exponentialfamilie bilden.

(ii) Es seien $X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass die Statistik

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2,\ (x_1,...,x_n)\mapsto\left(\prod_{i=1}^n x_i,\prod_{i=1}^n(1-x_i)\right)$$

minimalsuffizient ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen mit $X_i\sim\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$ wobei $\alpha>0$ bekannt und $\beta>0$ unbekannt sei. Konstruieren Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $1/\beta$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
In einer Urne liegen k Bälle, die mit $1,\dots,k$ nummeriert sind. Dabei ist die Zahl $k\in\mathbb{N}$ unbekannt und soll geschätzt werden. Man zieht aus der Urne n Bälle mit Zurücklegen und notiert die Nummern dieser Bälle: $x_1,\dots,x_n$.

(i) Schätzen Sie k mit der Momentenmethode.

(ii) Schätzen Sie k mit der Maximum-Likelihood-Methode.

(iii) Zeigen Sie, dass die Statistik $T:=\max\{x_1,\dots,x_n\}$ suffizient ist.

(iv) Zeigen Sie, dass die Statistik $T:=\max\{x_1,\dots,x_n\}$ vollständig ist.

(v) Konstruieren Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für k.

Bemerkung: Bei dieser Aufgabe müssen die Werte des Schätzers nicht in $\{0,1,\dots\}$ liegen. Werte in $(0,\infty)$ seien erlaubt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2),\ \theta \in \Theta = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, und es sei $T(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2)$ für $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Prüfen Sie, ob die Statistik T suffizient und vollständig ist.