Übungen

Abgabetermin: Freitag, 5.12.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien jeweils eine einparametrige Exponentialfamilie sind:

(i) $\{\mathrm{Exp}(\theta) : \theta > 0\}$.

(ii) $\{\mathrm{Poi}(\theta) : \theta > 0\}$.

(iii) $\{\mathrm{Geo}(\theta) : \theta \in (0,1)\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die auf einem Intervall (θ_1, θ_2) gleichverteilt sind. Dabei seien $\theta_1 \in \mathbb{R}$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$ die zu schätzenden Parameter mit $\theta_1 < \theta_2$. Zeigen Sie, dass die Statistik

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)}) = \left(\min_{i=1,\ldots,n} X_i, \max_{i=1,\ldots,n} X_i \right)$$

suffizient ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{U}[0, \theta]$ unabhängig und identisch verteilt. Betrachten Sie die Schätzer

$$\hat{\theta}_1 = X_{(n)}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}.$$

Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ und für alle $\theta > 0$

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) > \mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_2).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte bzw. Zähldichte $h_\theta, \theta \in \Theta$. Zwei Stichproben $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine Konstante $c = c(x, y) > 0$ gibt mit $L(x; \theta) = cL(y; \theta)$ für alle $\theta \in \Theta$. Dabei bezeichnet L die Likelihood–Funktion. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen und finden Sie (ohne Verwendung von Exponentialfamilien) eine minimalsuffiziente Statistik, wenn

(i) $X_i \sim \mathrm{Poi}(\theta)$, $\theta > 0$.

(ii) $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, $\theta > 0$.

(iii) $X_i \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, $\theta > 0$.

(iv) $X_i \sim \mathrm{Geo}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.