Seminar - Ausarbeitung Fabian Schlüter

Martingale: Quadratische Integrierbarkeit und Garsias Beweis des Martingalkonvergenzsatzes

Das Ziel dieser Ausarbeitung ist es, den Beweis des Martingalkonvergenzsatzes von Adriano Mario Garsia (*20.08.1928) vorzustellen.

Während wir in der Vorlesung WT den MKS mithilfe der Überquerungsungleichung bewiesen haben, bedient sich Garsia in seinem Beweis an verschiedenen Zerlegungen für Folgen und Martingale. Diese werden nun im Folgenden eingeführt.

Zunächst zwei Bezeichnungen:

Ein Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ heißt quadratisch integrierbar (oder L^2-Martingal), wenn $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ $\forall n \geq 0$.

Es heißt L^2-beschränkt, wenn $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}M_n^2 < \infty$.

1. L^2-Beschränktheit und orthogonale Zerlegung

Aus der WT ist bekannt, dass $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ einen Hilbertraum bildet. D. h. auf diesem ist Orthogonalität definiert. Dies nutzen wir in

1.1 Lemma: Für ein L^2-Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ gilt:

Die Zuwächse $M_0, M_1 - M_0, M_2 - M_1, \dots$ sind paarweise unkorreliert und es gilt

$$(1.1) \quad \mathbb{E}M_n^2 = \mathbb{E}M_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 .$$

Bew: Zeige: $\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})(M_k - M_{k-1})) = 0 \quad \forall n, k \geq 0, n \neq k$.

Sei o.E. stets $n > k$.

$\Rightarrow \mathbb{E}((M_n - M_{n-1})(M_k - M_{k-1})) \overset{(a)}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})(M_k - M_{k-1}) \mid M_1, \dots, M_k))$

$\overset{(b)}{=} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1}) \cdot \mathbb{E}(M_n - M_{n-1} \mid M_1, \dots, M_k)) \overset{(c)}{=} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1}) \cdot \underbrace{(M_k - M_k)}_{=0}) = 0$

Dabei wurde benutzt:

(a) Eigenschaft des bedingten Erwartungswerts

(b) $(M_k - M_{k-1})$ ist $(M_1, \dots, M_k)$-messbar

(c) Martingaleigenschaft (ME) von $(M_n)_{n \geq 0}$. $\square$

Mit dem folgenden Satz können wir jetzt eine Bedingung für L^2-Beschränktheit sowie L^2-Konvergenz angeben.

<u>1.2 Struktursatz</u>: Ein L^2-Martingal $(M_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann L^2-beschränkt ($\Rightarrow$ f.s.-konvergent sowie L^2-konvergent), wenn

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(M_n - M_{n-1})^2 < \infty.$$

Für den Limes M_∞ geschrieben in der Form

(1.2) $M_\infty = M_0 + \sum_{n \geq 1} (M_n - M_{n-1})$ gilt

$$\mathbb{E} M_\infty^2 = \mathbb{E} M_0^2 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(M_n - M_{n-1})^2$$

<u>Bew</u>: Zeige zunächst die Äquivalenz.

„$\Rightarrow$" Sei $(M_n)_{n \geq 0}$ L^2-beschränkt, d.h. $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^2 < \infty$.

$$\infty > \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^2 \overset{(1.1)}{=} \underbrace{\mathbb{E} M_0^2}_{<\infty, \text{ da } L^2\text{-Martingal}} + \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 \Rightarrow \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 < \infty$$

„$\Leftarrow$" Es gelte $\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 < \infty$.

Nach (1.1) gilt: $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^2 = \underbrace{\mathbb{E} M_0^2}_{<\infty, \text{ da } L^2\text{-Martingal}} + \underbrace{\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2}_{<\infty \text{ nach Vor.}}$

also $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^2 < \infty$, also ist $(M_n)_{n \geq 0}$ L^2 beschränkt. #

Bleibt die Gleichung zu zeigen:

Es gilt $M_n \xrightarrow{L^2} M_\infty$

$$\mathbb{E} M_\infty^2 = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} M_n^2 \overset{(1.1)}{=} \mathbb{E} M_0^2 + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2. \quad \square$$

Der Struktursatz hat uns offensichtlich auch die Orthogonalzerlegung eines Martingals geliefert, nämlich (1.2).
Die Orthogonalität hatten wir bereits in 1.1 Lemma gezeigt.

2. Die Doob-Zerlegung

Nun kommen wir zur Doob-Zerlegung (nach Joseph L. Doob). Mit dieser lässt sich eine integrierbare Folge als Martingal darstellen.

2.1 Doob-Zerlegung: Sei $S=(S_n)_{n\geq 0}$ eine int.bare Folge mit kanonischer Filtration $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(a) Dann besitzt S eine Doob-Zerlegung

$$S = S_0 + M + A,$$

Dabei ist $M=(M_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal und $A=(A_n)_{n\geq 0}$ eine vorhersagbare Folge bzgl. $\mathcal{F}$ mit $M_0 = A_0 = 0$.
(vorhersagbar bedeutet: A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, $\forall n\geq 0$).
Diese Zerlegung ist eindeutig modulo Modifikation auf Nullmengen.

(b) S bildet ein Submartingal $\Leftrightarrow$ A ist aufsteigend, d.h. $\mathbb{P}(A_0 \leq A_1 \leq \dots) = 1$.

Bew: (a) 1. Zeige die Eindeutigkeit der Zerlegung:
Besitze S also die obige Doob-Zerlegung $S = S_0 + M + A$.
Dann gilt: $\mathbb{E}(S_n - S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(S_0 + M_n + A_n - S_0 - M_{n-1} - A_n | \mathcal{F}_{n-1})$

$$= \underbrace{\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})}_{\overset{ME}{=} 0} + \mathbb{E}(A_n - A_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \underset{A \text{ vorhersagbar bzgl. } \mathcal{F}_n}{=} A_n - A_{n-1}$$

Also ist A bestimmt durch $A_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(S_k - S_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}))$ $\mathbb{P}$-f.s. $(A_0 = 0)$
Somit ist A f.s. eindeutig.

Dadurch ist auch M mit $M = S - S_0 - A$ f.s. eindeutig.

2. Zur Existenz.

Nach Definition bildet A eine vorhersagbare Folge (siehe 1.)

M ist bestimmt durch

$$M_t = S_t - A_t - S_0 = \sum_{i=1}^{t} (S_i - S_{i-1}) - \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}(S_i - S_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1}) - S_0$$
$$\overset{(i)}{=} \sum_{i=1}^{t} (S_i - S_{i-1}) - \sum_{i=1}^{t} (\mathbb{E}(S_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) - S_{i-1}) - S_0$$
$$= \sum_{i=1}^{t} (S_i - \mathbb{E}(S_i \mid \mathcal{F}_{i-1})) - S_0$$

⌈zu (i): S_{i-1} ist $\mathcal{F}_{i-1}$-messbar⌋

M bildet ein Martingal, denn:

$$\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\cancel{X_n}^{S_n} - \mathbb{E}(\cancel{X_n}^{S_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \overset{ME}{=} 0$$

Die Doob-Zerlegung existiert also. #

(b) „⇒" Sei S Submartingal.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k - S_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\underbrace{\mathbb{E}(S_k \mid \mathcal{F}_{k-1})}_{\geq S_{k-1}} - S_{k-1})}_{\geq 0}$$

Die Summanden von A_n sind ≥ 0, also ist A monoton wachsend.

„⇐" Sei A monoton wachsend, d.h. $A_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$,

d.h. $\mathbb{E}(S_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - S_{k-1} \geq 0$, $\forall k \geq 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(S_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \geq S_{k-1}$

$\Rightarrow S$ ist ein Submartingal.

◻

<u>2.2 Anmerkung</u>: Wann ist die Doob-Zerlegung nicht mehr f.s. eindeutig?

Antwort: Wenn $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine größere Filtration bildet als die kanonische.

<u>Bsp.</u>: o.E. $S_0 := 0$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots)$, $\forall n \geq 0$.

In diesem Fall bildet S_n selbst bereits eine vorhersagbare

Folge. Dann ist $S = 0 + S$ eine Doob-Zerlegung von S mit dem Martingal $M = 0$.

3. Die Krickeberg-Zerlegungen

Jetzt lernen wir noch die beiden Krickeberg-Zerlegungen (nach Klaus Krickeberg, *1929) kennen. Sie beschäftigen sich mit der Zerlegung eines L^1-beschränkten (Sub-)Martingals in nichtnegative Martingale.
Anzumerken ist, dass nur die 1. Krickeberg-Zerlegung direkt für Garsias Beweis benötigt wird. Hingegen taucht im Beweis der zweiten ein nützlicher Schritt auf, der den Aufwand für Garsias Beweis reduziert.

3.1 Erste Krickeberg-Zerlegung:

Jedes L^1-beschränkte Martingal (d.h. $\mathbb{E} \sup_{n \geq 0} M_n < \infty$) $(M_n)_{n \geq 0}$ kann als Differenz von zwei nichtnegativen Martingalen dargestellt werden:

$$M_n = M_{1,n} - M_{2,n} \quad , n \geq 0 ,$$

wobei $M_{1,n}$ und $M_{2,n}$ nichtnegative Martingale bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ von $(M_n)_{n \geq 0}$ bilden.

Anmerkung: Diese Zerlegung ist nicht eindeutig!

Beweis: $(M_n)_{n \geq 0}$ ist Martingal $\overset{WT}{\Longrightarrow} (M_n^+)_{n \geq 0}$ ist ein Submartingal.
Eine einfache Folgerung der Submartingaleigenschaft ist:
$\mathbb{E}(M_n^+ | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(M_{n+1}^+ | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(M_{n+2}^+ | \mathcal{F}_n) \leq \dots \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$
Obiges ist also eine monotone Folge. Da $(M_n^+)_{n \geq 0}$ nach Voraussetzung beschränkt ist, existiert auch der Limes dieser Folge, nämlich $M_{1,n} := \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}(M_{n+k}^+ | \mathcal{F}_n)$.

Dieses $(M_{1,n})$ sei nun das erste nichtnegative Martingal der Zerlegung (nichtnegativ nach Definition).

Zeige also: $(M_{1,n})_{n\geq 0}$ ist Martingal.

- <u>Int.barkeit</u>: $\mathbb{E}\, M_{1,n} = \mathbb{E}\big(\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(M^+_{n+k} \mid \mathcal{F}_n)\big)$

$$\underset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Kgz.}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(M^+_{n+k} \mid \mathcal{F}_n)\big) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(M^+_{n+k}) \underset{\substack{\text{Monotonie-}\\ \text{Kriterium}}}{\leq} \sup_{k\geq 0} \mathbb{E}(M^+_k) \underset{\substack{\text{Voraussetzung}\\ L^1\text{-beschränkt}}}{<} \infty.$$

- <u>zur ME</u>: $\mathbb{E}(M_{1,n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(M^+_{n+1+k} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big)$

$$\underset{\substack{\text{mon.}\\ \text{Kgz.}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(M^+_{n+1+k} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big) \underset{\substack{\text{Turm-}\\ \text{eigenschaft}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(M^+_{n+1+k} \mid \mathcal{F}_n) = M_{1,n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \forall n \geq 0$$

$(M_{1,n})_{n\geq 0}$ ist also nichtnegatives Martingal.

Definiere $M_{2,n} := M_{1,n} - M_n$. Dies ist als Differenz zweier Martingale wieder ein Martingal.

Bleibt also z.z.: $(M_{2,n})_{n\geq 0}$ ist nichtnegativ.

- $M_{2,n} = M_{1,n} - M_n = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(M^+_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) - M_n \underset{\substack{(M_n^+)_{n\geq 0} \text{ ist}\\ \text{Submartingal}}}{\geq} M_n^+ - M_n \geq 0$

Damit ist die Zerlegung gezeigt. □

Wir können also ein L^1-beschränktes Martingal als Differenz zweier nichtnegativen Martingale darstellen. Wie sieht das im Falle eines L^1-beschränkten Submartingals aus? Die Antwort gibt uns:

<u>3.2 Zweite Krickeberg-Zerlegung</u>

Jedes L^1-beschränkte Submartingal $(S_n)_{n\geq 0}$ kann als Differenz eines nichtnegativen Martingals $(M_n)_{n\geq 0}$ und eines nichtnegativen Supermartingals $(T_n)_{n\geq 0}$ bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ von $(M_n)_{n\geq 0}$ geschrieben werden: $S_n = M_n - T_n$, $\forall n \geq 0$

Bew: Wir zerlegen $(S_n)_{n\geq 0}$ in seine Doob-Zerlegung

$S_n = S_0 + W_n + A_n$, $n \geq 0$ mit $W_0 = A_0 = 0$.

Wir beweisen nun die 2. Kr.-Zerl. für die Doob-Zerlegung.

- Es gilt $0 \leq \mathbb{E} A_n = \mathbb{E}(S_n - S_0 - W_n) = \mathbb{E}S_n - \mathbb{E}S_0 - \mathbb{E}W_n \leq \sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E}S_n^+ - \mathbb{E}S_0 \underset{\text{Vor.}}{<} \infty$

$\ulcorner \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(W_n | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(W_0) = 0$, da $W_0 = 0 \lrcorner$

$\Rightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E} A_n < \infty$, A_n ist also L^1-beschränkt.

Da A_n monoton wachsend und beschränkt ist, existiert der monotone Limes A_∞ von A_n mit $\mathbb{E}A_\infty < \infty$

- $\sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E}(W_n^+) = \sup\limits_{n\geq 0} (\mathbb{E}(S_n - S_0 - A_n)^+) \underset{A_n \geq 0}{\leq} \sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E}S_n^+ + \mathbb{E}S_0^+ \underset{\text{Vor.}}{<} \infty$

Somit ist $(W_n)_{n\geq 0}$ ein L^1-beschränktes Martingal und wir können W_n als Differenz zweier nichtnegativen Martingale $W_{1,n}$ und $W_{2,n}$ schreiben, also

$W_n = W_{1,n} - W_{2,n}$ (nach 1. Krickeberg-Zerlegung)

- Definiere: $M_n := S_0^+ + W_{1,n} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_n)$

und $T_n := S_0^- + W_{2,n} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_n) - A_n$.

Es gilt also $M_n - T_n = S_n = S_0 + W_n + A_n$

- $(M_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal, denn

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(S_0^+ + W_{1,n} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1})$$
$$= S_0^+ + W_{1,n-1} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_n)$$

$(M_n)_{n\geq 0}$ ist int.bar nach Definition.

- $(T_n)_{n\geq 0}$ ist ein Supermartingal, denn:

$$\mathbb{E}(T_n | \mathcal{F}_{n-1}) = S_0^- + W_{2,n-1} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_{n-1}) - A_n$$
$$\geq S_0^- + W_{2,n-1} + \mathbb{E}(A_\infty | \mathcal{F}_{n-1}) - A_{n-1} = T_{n-1}, \text{ denn } A_n \geq A_{n-1}$$

$(T_n)_{n\geq 0}$ ist int.bar nach Definition.

$\square$

Jetzt haben wir alle notwendigen Vorkehrungen getroffen, um Garsias Beweis des Martingalkonvergenzsatzes zu führen.

MKS: „Jedes Submartingal $(M_n)_{n \geq 0}$ mit $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^+ < \infty$ konvergiert f.s. gegen eine Zufallsgröße M_∞ mit $\mathbb{E}|M_\infty| < \infty$."

4. Garsias Beweis des MKS

Vorbemerkung: Sei $(M_n)_{n \geq 0}$ also ein L^1 beschränktes Submartingal. Wir haben im Beweis der 2. Kr.-Zerl. gesehen, dass $(M_n)_{n \geq 0}$ vermöge der Doob-Zerlegung zerfällt in ein L^1-beschränktes Martingal und eine aufsteigende L^1-beschr. Folge. Diese Folge konvergiert dann gegen eine int'bare ZG (s.o.).

Folglich genügt es den Fall zu untersuchen, in dem $(M_n)_{n \geq 0}$ selbst ein Martingal ist.

Der Beweis wird in 3 Schritten geführt. Dabei wird von Schritt zu Schritt verallgemeinert und jeweils die Ergebnisse aus dem vorigen Schritt verwendet.

Bew:

1. Schritt: Sei $(M_n)_{n \geq 0}$ ein L^2-beschr. Martingal, also $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} M_n^2 < \infty$

- WT $\Rightarrow (M_n^2)_{n \geq 0}$ ist ein Submartingal und darüber hinaus L^1-beschränkt, denn $\sup_{n \geq 0} (\mathbb{E} M_n^2)^1 < \infty$ nach Vor.
- $(M_n^2)_{n \geq 0}$ ist Submartingal $\Rightarrow \mathbb{E}(M_n^2) \leq \mathbb{E}(M_{n+1}^2) \leq \ldots$ $\mathbb{P}$-f.s.
  Wir erhalten also eine monoton wachsende Folge.
  Da $(M_n^2)_{n \geq 0}$ L^1-beschränkt ist, konvergiert diese Folge gegen einen Limes $\mathbb{E}(M_\infty^2) < \infty$.
- Jetzt wissen wir, dass $(M_n)_{n \geq 0}$ ein L^2-Martingal bildet und können daher Lemma 1.1 anwenden: Die Zuwächse von $(M_n)_{n \geq 0}$ sind paarweise unkorreliert.

- $\Rightarrow (M_n)_{n\geq 0}$ bildet eine Cauchy-Folge in L^2, denn:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|M_m - M_n\|_2^2 = \left(\left(\int |M_m - M_n|^2 d\mathbb{P}\right)^{1/2}\right)^2 = \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}(M_m - M_n)^2 = 0.$$

- Anwendung WT $\Rightarrow$ Cauchy-Folge in L^2 $\Rightarrow$ konvergent im quadratischen Mittel gegen eine quadr. int. bare ZG M_∞ $\Rightarrow$ stochastische Kgz. $\Rightarrow$ <u>f.s. Kgz. für geeignete Teilfolgen</u>
- Letzteres impliziert: $\exists\, 0 =: n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ mit $\lim_{k\to\infty} M_{n_k} = M_\infty$ f.s. und $\mathbb{E}(M_{n_{k+1}} - M_{n_k})^2 \leq 2^{-k}$, $\forall k \geq 0$ (*)
- $(M_n - M_{n_k})_{n\geq n_k}$ bildet als Differenz zweier Martingale wieder ein Martingal. Daher können wir die Doob-Ungleichung (siehe Anhang) anwenden:

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(\max_{n_k\leq n\leq n_{k+1}} |M_n - M_{n_k}| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k\geq 0} \int_{\{\max_{n_k\leq n\leq n_{k+1}} |M_n - M_{n_k}| > \varepsilon\}} (M_n - M_{n_k})\, d\mathbb{P}$$

Tschebyschev

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(M_{n_{k+1}} - M_{n_k})^2 < \infty \quad \text{wegen (*)}$$

- Letzteres zusammen mit dem Lemma von Borel-Cantelli impliziert $\Rightarrow \mathbb{P}(\max_{n_k\leq n\leq n_{k+1}} |M_n - M_{n_k}| > \varepsilon \text{ u.o.}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$.
- Einsetzen: $\mathbb{P}(|M_n - M_\infty| > \varepsilon \text{ u.o.})$

$$\leq \underbrace{\mathbb{P}(|M_{n_k} - M_\infty| > \varepsilon \text{ u.o.})}_{=0,\text{ da } M_{n_k}\to M_\infty \text{ f.s. (s.o.)}} + \underbrace{\mathbb{P}(\max_{n_k\leq n\leq n_{k+1}} |M_n - M_{n_k}| > \varepsilon \text{ u.o.})}_{=0,\text{ nach vorigem Schritt.}} = 0$$

- Insgesamt erhalten wir also:

$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty$ f.s., d.h. das L^2-beschränkte Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ konvergiert f.s. gegen M_∞.

<u>2. Schritt: $(M_n)_{n\geq 0}$ ist ein nichtnegatives Martingal</u>

- WT $\Rightarrow (e^{-M_n})_{n\geq 0}$ ist ein Submartingal.

Dieses ist beschränkt, denn $(M_n)_{n\geq 0}$ nichtnegativ $\Rightarrow (e^{-M_n}) \in (0,1]$, $\forall n\geq 0$. Es ist auch L^2-beschränkt, da $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(e^{-M_n})^2 < \infty$.

- Nach dem 1. Schritt ist $(e^{-M_n})_{n\geq 0}$ also f.s. konvergent.

· Die Abbildung $x \mapsto e^{-x}$ ist stetig.

$\Rightarrow$ M_n konvergiert auch f.s. gegen ein M_∞.

· bleibt zu zeigen: $\mathbb{E} M_\infty < \infty$.

$\mathbb{E} M_\infty = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} M_n) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} M_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E} M_n < \infty$.

· Insgesamt: Das nichtnegative Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ konvergiert f.s. gegen eine int.bare ZG M_∞.

3. Schritt: $(M_n)_{n\geq 0}$ ist ein L^1-beschränktes Martingal

· 1. Krickeberg-Zerl. $\Rightarrow$ $(M_n)_{n\geq 0}$ lässt sich als Differenz zweier nichtnegativer Martingale darstellen:

$M_n = M_{1,n} - M_{2,n}$

$M_{1,n}$ und $M_{2,n}$ sind nach dem 2. Schritt f.s. konvergent gegen int.bare ZG $M_{1,\infty}$ und $M_{2,\infty}$.

· Somit konvergiert auch $(M_n)_{n\geq 0}$ f.s. gegen

$M_\infty := M_{1,\infty} - M_{2,\infty}$

Es gilt: $\mathbb{E} M_\infty = \underbrace{\mathbb{E} M_{1,\infty}}_{<\infty} - \underbrace{E_{2,\infty}}_{<\infty} < \infty$

2. Schritt

Das L^1-beschränkte Martingal konvergiert also f.s. gegen eine int.bare ZG M_∞. □

Im ersten Teil dieser Ausarbeitung haben wir uns also mit L^2-Martingalen und einem Kriterium für ihre L^2-Beschränktheit befasst. Außerdem können wir nun dank der Doob-Zerlegung eine int.bare Folge als Summe eines Martingals und einer vorhersagbaren Folge darstellen. Die Krickeberg-Zerlegungen vereinfachen (Sub-)Martingale, indem sie diese als nichtnegative (Super-)Martingale ausdrücken.

Im zweiten Teil haben wir uns in Garsias Beweis der MKS dann diese Ergebnisse zunutze gemacht. Hierbei sei angemerkt, dass wir den Beweis auf den Fall eines L^1-beschränkten Martingals einschränken konnten, was das Ganze vereinfacht hat.

Anhang (später auf der Seitentafel)

- Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ der zugrundegelegte W-Raum
- $T \subset [0,\infty]$ Zeitparametermenge
- $\mathcal{F}^T := (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ Filtration
- Definition Martingal

  Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein $\mathcal{F}^T$-adaptierter stochastischer Prozess und int bar.

  $(M_t)_{t\in T}$ heißt

  - Martingal bzgl. $\mathcal{F}^T$, falls $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ $\mathbb{P}$-f.s., $\forall s,t\in T$, $s\le t$
  - Submartingal ——— $\geq$ ———
  - Supermartingal ——— $\leq$ ———
- Satz: Ist $(M_t)_{t\in T}$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}^T$ und φ eine konvexe Funktion mit $\mathbb{E}|\varphi(M_t)|<\infty$, $\forall t\in T$, so ist $(\varphi(M_t))_{t\in T}$ ein Submartingal bzgl. $\mathcal{F}^T$.
- MKS: Jedes Submartingal $(M_n)_{n\geq 0}$ mit $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E} M_n^+ < \infty$ konvergiert f.s. gegen eine ZG M_∞ mit $\mathbb{E}|M_\infty|<\infty$.
- Doob-Ungleichung: Sei $(M_j)_{0\le j\le n}$ ein Submartingal. Dann gilt:

  $\forall t>0$:
  $$t\,\mathbb{P}(\max_{0\le j\le n} M_j \geq t) \leq \int_{\{\max_{0\le j\le n} M_j \geq t\}} M_n \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E} M_n^+ .$$

- Definition: Ein Martingal $(M_n)_{n\geq 0}$ heißt quadratisch int. bar (oder L^2-Martingal), wenn $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ $\forall n \geq 0$.

  Es heißt L^2-beschränkt, wenn $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E} M_n^2 < \infty$.