In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit zwei verschiedenen Themen, die wir inhaltlich leider nicht verknüpfen können, wir haben also zwei unabhängige Themenblöcke. Der erste Teil beschäftigt sich mit einer diskreten Modellierung eines stark vereinfachten Finanzmarktes, im zweiten Teil beweisen wir einen wichtigen Satz über Produktmartingale und wenden das Ergebnis in einem Beispiel an.

Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das CRR-Modell (oder auch Binomial-Modell) ist eine diskrete Version des berühmteren Black-Scholes-Modells, das als erstes wirklich interessante mathematische Resultate über moderne Finanzmärkte lieferte. Es gibt uns die Möglichkeit der Bewertung von sogenannten Optionen, die wir nach einer Einführung in das Modell definieren werden.

Im Folgenden befinden wir uns in diskreter Zeit, also $n=0,\dots,N$, und es ex. genau eine Aktie und ein Wertpapier: (A., WP. von jetzt an)

Def: WP, deterministisches Anlageobjekt. $V_0>0$, $V_n=(1+r)^n V_0$ gibt den Wert im Intervall $[n,n+1)$ an; ω_n ist die Anzahl der WP, die der Anleger im ZP n besitzt.

Def: A., zufallsabh. Anlageobjekt. $S_0>0$, S_n gibt Wert im Intervall $[n,n+1)$ an; A_n ist die Anzahl der A., die der Anleger im ZP n besitzt. Weiter def. wir implizit R_n durch: $S_n = S_{n-1}(1+R_n)$ $(\Leftrightarrow S_n - S_{n-1} = R_n S_{n-1})$, als zufallsabh. „Zinssatz" der Aktie

Da hier schon alles an Zufall „drinsteckt", was wir im Folgenden brauchen werden, können wir schon unser Modell weiter ausbauen:

$\Omega=\{a,b\}^N$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}_n=\sigma(S_1,\dots,S_n)=\sigma(R_1,\dots,R_n)$ und wir gehen insbesondere davon aus, dass die $(R_n)_n$ die Projektionen ~~sind~~ auf $\{a,b\}$ sind unter

$\mathbb{P}_\Theta(\{(\omega_1,\dots,\omega_N)\}) = \Theta^{n(\omega)}(1-\Theta)^{N-n(\omega)}$, $n(\omega)=|\{i \mid \omega_i=b\}|$

also ~~mit~~ $\sigma = \mathbb{P}_\sigma(R_1 = b) = 1 - \mathbb{P}_\sigma(R_1 = a)$ $\quad \sigma \in (0,1)$ $\quad -1 < a < r < b < \infty$

~~Die (R_n) sollen also Projektion sein: $R_n(\omega_1 ... \omega_N) = \omega_n \quad \forall (\omega_1 ... \omega_n) \in \Omega$.~~

Die Bed. für a,b ist notwendig, um die sog. Arbitrage-Freiheit zu simulieren, was eine i.A. vernünftige Annahme ist, die besagt, dass man kein Geld verdienen kann, ohne etwas einzusetzen.

Def: Die Folge $(A_n, \omega_n)_{n=0..N}$ heißt eine Handelsstrategie (HS) und ist eine vorhersagbare Folge bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ (was sofort klar ist, ~~da~~ wie wir in der folgenden Erläuterung sehen werden)

Wir def nun: $X_n = \omega_n V_n + A_n S_n$ als den Wert meines Portfolios im Intervall $[n, n+1)$. Die diskrete Formulierung des Modells bedeutet nun, dass die Werte der WP und. A. immer in $n = 1..N$ umspringen. In dem dazwischenliegenden Intervall $(n, n+1)$ ~~[illegible]~~ kann der Anleger das Verhältnis der WP&A umschichten, wobei wir vereinfachend von einem geschlossenen System ausgehen, d.h.: keine Transaktionskosten, es kommt kein Geld hinzu und fließt auch keines ab. Damit können wir dann schreiben:

$X_n = \omega_{n+1} V_n + A_{n+1} S_n$, die A. & WP gleichen sich also aus.

Als letztes, bevor wir zu den Optionen kommen, definieren wir den diskontierten Portfoliowert $Y_n := (1+r)^{-n} X_n$, der ein Maß angibt, wie sich das ~~[illegible]~~ Portfolio im Verhältnis zur sicheren Anlage in WP schlägt, und stellen fest, dass gilt:

$$Y_n - Y_{n-1} = (1+r)^{-n}(\omega_n V_n + A_n S_n) - (1+r)^{-(n-1)}(\omega_n V_{n-1} + A_n S_{n-1})$$
$$= (1+r)^{-n}\left[\omega_n V_0 (1+r)^n + A_n S_n - \omega_n V_0 (1+r)^n - A_n S_{n-1}\right] = (1+r)^{-n} A_n S_{n-1} (R_n - r)$$

Unter einer (europäischen Kauf-) Option versteht man eine Vertrag zum ZP $n=0$ zwischen Anleger und Aktienbesitzer, der dem Anleger das Recht gewährt, die Aktie zum ZP $n=N$ zum Preis K zu kaufen. Insbesondere hat der Anleger auch das Recht, auf den Kauf zu verzichten, was im Fall $S_N < K$ der Fall sein wird, der Wert kann also als $(S_N - K)^+$ angegeben werden, der aber natürlich in $n=0$ noch unbekannt ist. Man interessiert sich also dafür, wie viel man für eine solche Option bezahlen sollte.

Wir **Def:** Selbstfinanzierende HS (SHS) $(\omega_n, A_n)_{n=0..N}$ mit Anfangswert $X_0 = x$ ist ein HS für die gilt:

(1) $X_0 = x$ (2) $X_n \geq 0 \;\forall n=0..N$ (3) $X_N = (S_N - K)^+$

Wenn wir eine solche SHS kennen, dann brauchen wir also in $n=0$ genau x Startkapital um in $n=N$ $X_N = (S_N - K)^+$ zu erhalten, also das gleiche Resultat, wie die Option uns ermöglicht hätte. Der folgende Satz liefert uns u.a. die Eindeutigkeit einer SHS und somit auch einen eindeutigen „fairen" Preis für die Option!

Bem: für eine SHS müssen A_n, ω_n nicht notwendigerweise ≥ 0 sein! negatives ω_n heißt, wir leihen uns Geld mit Zinssatz r und hoffen, dass $R_n \geq r$. Negatives A_n steht für sog. „Leerkäufe", dh wir „leihen" uns Aktien zahlen sie später zum dann gültigen Kurs. Hier hoffen wir auf $R_n < r$.

Satz: Eine SHS $(\omega_n, A_n)_{n=0..N}$ mit AW x ex. gdw

$$x = x_0 = (1+r)^{-N} E_{\Theta^*}(S_N - K)^+ \quad \text{mit } \Theta^* = \frac{r-a}{b-a}$$

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir allerdings noch einen Darstellungssatz für Martingale.

Darstellungssatz: Im obigen setting gilt: Jede bzgl $\mathcal{F}_n$ adaptierte Folge $(M_n)_{n=0..N}$, die unter einem $\Theta \in (0,1)$ ein Mtgl darstellt, lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (R_k - E_{\theta_0} R_1),$$

mit $H = (H_1 \ldots H_k)$ vorhersagbarer Folge. H ist dabei eindeutig (und nicht nur f.s.) bestimmt.

Der Beweis für beide Sätze verläuft analog zum Skript (und wird im Vortrag auch durchgeführt) $\lrcorner$

Beweis des Satzes:

„⇒" Wir müssen zeigen $x = x_0$ für eine SHS (ϑ_n, A_n)

zuerst stellen wir fest, dass $E_{\Theta^*} R_1 = r$

Damit folgt dann: $E_{\Theta^*}(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E_{\Theta^*}\left((1+r)^{-n} A_n S_{n-1}(R_n - r) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$

$= (1+r)^{-n} A_n S_{n-1} E_{\Theta^*}(R_n - r) = 0$, also ist $(Y_n)_n$ ein Mtgle bzgl $(\mathcal{F}_n)_n$ unter P_{Θ^*} und deshalb:

$$x = E_{\Theta^*} Y_0 \underset{\text{Mtgle}}{=} E_{\Theta^*} Y_N = E_{\Theta^*}\left((1+r)^{-N} X_N\right) \underset{\text{SHS}}{=} (1+r)^{-N} E_{\Theta^*}(S_N - K)^+ = x_0$$

„⇐" Konstruktion einer SHS (ϑ_n, A_n)

zuerst def. $Y_n = (1+r)^{-N} E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid \mathcal{F}_n\right)$ $n = 0 \ldots N$, also ein Doob-Mtgle unter P_{Θ^*}

Mithilfe des Dst. Satzes ergibt sich

$Y_n = Y_0 + \sum_1^n H_k(R_n - r)$ für $H = (H_1 \ldots H_N)$ vorhes. und $r_{\Theta^*} = E_{\Theta^*} R_1 = r$

wir def. $A_n = \frac{H_n}{S_{n-1}}(1+r)^n$, also gerade so, dass

$$Y_n - Y_{n-1} = H_n(R_n - r) = (1+r)^{-n} A_n S_{n-1}(R_n - r)$$ wie oben,

und damit

$X_n = (1+r)^n Y_n$ und $\vartheta_n = \frac{(X_n - A_n S_n)}{V_n}$

(ϑ_n, A_n) ist SHS, denn:

(1) A_n offensichtlich vorhersagbar

(2) $\vartheta_n = \frac{X_n - A_n S_n}{V_n} = \frac{1}{V_n}\left((1+r)^n \left(Y_0 + \sum_1^n H_k(R_k - r)\right) - \underbrace{\frac{H_n}{S_{n-1}}(1+r)^n}_{A_n} \underbrace{(1+R_n) S_{n-1}}_{S_n}\right)$

und das R_n kürzt sich raus, ϑ_n ist also auch vorhersagbar

(3) $X_n \geq 0$ ist klar

(4) $X_N = E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid \mathcal{F}_N\right) = (S_N - K)^+$

Beweis des Darstellungssatzes.

Eindeutigkeit von H: induktiv

$n=1$: $\quad M_1 = M_0 + H_1(R_1 - r_{\Theta_0}) = M_0 + \hat{H}_1(R_1 - r_{\Theta_0})$

$\iff H_1(R_1 - r_{\Theta_0}) = \hat{H}_1(R_1 - r_{\Theta_0}) \iff H_1 = \hat{H}_1$, da $R_1(\omega) \neq r_{\Theta_0}$ $(\Theta_0 \in (0,1))$

$n \to n+1$: $\quad M_{n+1} = M_0 + \sum^{n+1} H_k (R_k - r_{\Theta_0}) = M_0 + \sum^{n+1} \hat{H}_k (R_k - r_{\Theta_0})$

$\overset{IV}{\iff} H_{n+1}(R_{n+1} - r_{\Theta_0}) = \hat{H}_{n+1}(R_{n+1} - r_{\Theta_0}) \iff H_{n+1} = \hat{H}_{n+1}$

Existenz der Darstellung durch Konstruktion

$R^n := (R_1, \dots, R_n) \quad \forall n \quad \rightsquigarrow \mathcal{F}_n = \sigma(R^n)$

M_n $\mathcal{F}_n$-mb $\overset{\text{Faktorisierungslemma}}{\Longrightarrow}$ $M_n = f_n \circ R^n$ für ein $f_n: \{a,b\}^n \to \mathbb{R}$

damit folgt: für $\omega \in \Omega$ bel.

$$0 \overset{\text{Mge}}{=} E_{\Theta_0}(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega) \overset{R_i \text{ Projektionen}}{=} E_{\Theta_0}(f_n \circ R^n \mid \mathcal{F}_{n-1})(\omega) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

$$\overset{R_i \text{ unabh.}}{=} \Theta_0 f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, b) + (1-\Theta_0) f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, a) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

$$\iff \Theta_0 f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, b) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = -(1-\Theta_0) f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, a) \quad \Big| + (1-\Theta_0) f_{n-1} \circ R^{n-1}(\omega)$$

$$\iff \Theta_0 \big(f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, b) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \big) = (1-\Theta_0)\big(-f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, a) + f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})\big)$$

$$\iff \frac{f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, b) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}{(1-\Theta_0)(b-a)} = \frac{-f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, a) + f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}{\Theta_0 (b-a)} =: H_n(\omega)$$

es bleibt der Nachweis, dass $H = (H_1, \dots, H_N)$ tatsächlich vorhersagbar ist und die Gleichung erfüllt:

H_n ist offensichtlich nur von $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ abhängig und somit $\mathcal{F}_{n-1}$-mb.

z.z.: $H_n(R_n - r_{\Theta_0}) = M_n - M_{n-1}$: wir nutzen aus, dass wir zwei vers. Darstellungen für H_n besitzen: 1. Fall: $\omega_n = b$, 1. Darstellung

$$H_n(\omega)(R_n(\omega) - r_{\Theta_0}) = \big(f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) - f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})\big) \cdot \underbrace{\frac{(b - \Theta_0 b - a + \Theta_0 a)}{(1-\Theta_0)(b-a)}}_{1} = M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)$$

2. Fall: $\omega_n = a$, 2. Darstellung

$$H_n(\omega)(R_n(\omega) - r_{\Theta_0}) = -f_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) + f_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \underbrace{\frac{(a - \Theta_0 b - a + \Theta_0 a)}{(b-a)\,\Theta_0}}_{-1} = M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)$$

$\square$

Fortsetzung des Beweises

es bz: $A_n \geq 0 \quad \forall n = 1 \ldots N$

es gilt: $A_n = \dfrac{(Y_n - Y_{n-1})\,((1+r))^n}{S_{n-1}\,(R_n - r)} = \dfrac{H_n\,(R_n - r)\,(1+r)^n}{S_{n-1}\,(R_n - r)}$

$= C \cdot \left(E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}, R_n = b\right) - E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}\right)\right), \quad C = \dfrac{(1+r)^n}{(1-\Theta^*)(b-a)\,S_{n-1}} > 0$

1. Dst von H_n

außerdem gilt $E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}\right) = \Theta^*\, E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}, R_n = b\right)$

$+ (1-\Theta^*)\, E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}, R_n = a\right)$

das in A_n eingesetzt ergibt also gerade:

$A_n \geq 0 \iff E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}, R_n = b\right) \geq E_{\Theta^*}\left((S_N - K)^+ \mid R^{n-1}, R_n = a\right)$

und mit $b > a$, $S_N = S_0 \prod (1 + R_i)$ ergibt sich die Behauptung $\square$

Kakutanis Satz über Produktmartingale

Im folgenden werden wir uns mit Produktmartingalen beschäftigen, das heißt Martingale der Form $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $M_0 = 1$ für $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabh. Folge von ZG mit $X_k \geq 0$ und $EX_k = 1$ $\forall k \geq 1$.

Das dies tatsächlich Martingale sind sieht man leicht ein, denn $E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(M_n \cdot X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n \cdot EX_{n+1} = M_n$, aufgrund der Unabh. der X_k.

Für den folgenden Satz ist der Begriff der gleichgradigen Integrierbarkeit (g.i) wichtig. Für eine Def. und einige essentielle Sätze verweise ich auf den Anhang.

Satz: (von Kakutani): Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ das zu $(X_k)_{k\geq 1}$ gehörige Produktmtgl, wobei $X_k \geq 0$, $EX_k = 1$ $\forall k$, dann gilt:

$M_n \to M_\infty$ f.s., und die folgenden fünf Aussagen sind äquivalent:

(a) $EM_\infty = 1$

(b) $M_n \xrightarrow{L^1} M_\infty$

(c) $(M_n)_{n\geq 0}$ ist g.i.

(d) $\prod_{n\geq 1} EX_n^{1/2} > 0$

(e) $\sum_{n\geq 1} (1 - EX_n^{1/2}) < \infty$

Sofern eine (also alle) Bedingung verletzt ist, so gilt: $M_\infty = 0$ f.s.

Beweis: das $M_n \to M_\infty$ f.s. für ein M_∞ folgt sofort aus dem Mtgl-Konvergenzsatz und $EM_n = 1$ $\forall n$

betrachten wir zuerst (c)$\Leftrightarrow$(d):

def $u_n := EX_n^{1/2}$. $0 < u_n$ ist klar, da $X_n \geq 0$, $u_n \leq 1$ folgt sofort aus der Jensenschen Ugl. für konkave Fkt ($p^{1/2}$ ist konkav)

dann definiert $N_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{X_k^{1/2}}{u_k}$, $n \geq 0$ aufgrund der Normierung wieder ein Produktmtgl., $N_n \geq 0$ $\forall n$

(d)=>(c): nach (d) gilt:

$$E N_n^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\right)^2 \le \left(\prod_{k\ge1}\mu_k\right)^{-2} < \infty$$

also ist N_n L^2-beschr.

also gilt: $\sup_n E N_n^2 < \infty$ und damit nach Satz 4.28

$E(\sup N_n^2) < \infty$ aber $\sup M_n \le \sup \frac{M_n}{\prod \mu_k^2} = \sup N_n^2$

also $(M_n)_{n\ge1}$ durch $\sup M_n \in L^1$ dominiert $\overset{50.3}{\Rightarrow}$ g.i.

(c)=>(d)

A: $0 = \prod_{n\ge1} E X_n^{1/2} = \prod_{n\ge1}\mu_n$. Nach Mtgl.-Konvergenzsatz konvergiert N_n weiterhin gegen N_∞ und damit gilt:

$$0 = \left(\prod_{k\ge1}\mu_k\right) N_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right) N_n = \lim_{n\to\infty} M_n^{1/2} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig}}{=} M_\infty^{1/2} \quad P\text{-f.s.}$$

wäre nun (M_n) g.i. würde folgen, dass $1 = \lim_{n\to\infty} E M_n \overset{50.5}{=} E M_\infty$ ↯

(d)<=>(e) wir zeigen allgemein $\prod_{n\ge1} a_n > 0 \iff \sum_{n\ge1}(1-a_n) < \infty$

für eine bel. Folge $(a_n)_{n\ge1}$ mit $0 < a_n \le 1 \ \forall n$

In beiden Fällen muss offensichtlich $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gelten

dann gilt: $\prod_{n\ge1} a_n > 0 \iff \sum \log\left(\frac{1}{a_n}\right) < \infty$ (durch Kehrwert nehmen und log anwenden)

$\iff \sum(1-a_n) < \infty$, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1/a_n)}{1-a_n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim \frac{-1/a_n}{-1} = 1$,

dh $(1-a_n)$ und $\log(1/a_n)$ verhalten sich im Limes gleich.

(a)<=>(b) und (b)<=>(c) folgen sofort aus dem Satz von Riesz und ~~dem Hilfssatz~~ aus 4.24 (a), b))

Anwendung von Kakutanis Satz

Zuerst def. wir: $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^\infty$, $X_n = pr_n$, $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1 - X_n)$

$(P_n)_{n\geq 1}$ und $(Q_n)_{n\geq 1}$ seien Folgen von Vert. auf $\mathbb{R}$ mit λ-Dichten $(f_n)_n$, $(g_n)_n$,

wobei $f_n, g_n > 0 \quad \forall n \geq 1$. $\mathbb{P} = \bigotimes_{n\geq 1} P_n$, $\mathbb{P}^{(n)} = \bigotimes_1^n P_n$, analog $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^{(n)}$

$L_n := \frac{dP_n}{dQ_n} = \frac{f_n}{g_n}$, $Y_k = L_k(X_k)$, $M_n = \prod_{k=1}^n Y_k$

$(M_n)_n$ ist ein Mtgl bzgl $(\mathcal{A}_n)_n$ unter $\mathbb{Q}$

die Y_k sind unabh. und $E_\mathbb{Q} Y_k = \int_\Omega Y_k \, d\mathbb{Q} = \int_\Omega L_k(X_k) \, d\mathbb{Q}$

$= \int_\mathbb{R} \frac{f_k}{g_k} \, dQ_k = 1$.

Lemma: $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ auf $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $(M_n)_n$ ist g.i. unter $\mathbb{Q}$ und $M_\infty = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$

„$\Leftarrow$" Mit 4.24 a), e) folgt aus g.i. $M_n = E(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ $\mathbb{Q}$-f.s.

$\forall A \in \mathcal{A}_n$ gilt: $A = B \times \mathbb{R}^\infty$ $B \in \mathcal{B}^n$ und dann

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^{(n)}(B) = \int_B \prod_1^n \frac{f_k}{g_k}(\omega_k) \mathbb{Q}^{(n)}(d\omega_1 - d\omega_n) = \int_A M_n \, d\mathbb{Q} = \int_A M_\infty \, d\mathbb{Q}$

mit der definierenden Eig. des bed. EW. Das heißt M_∞ ist $\mathbb{Q}$-Dichte für $\mathbb{P}$ auf allen $\mathcal{A}_n$. $\bigcup \mathcal{A}_n$ ist $\cap$-stabil und Erzeuger von $\mathcal{A}$, mit einem DSA folgt dann, dass $M_\infty = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ auf ganz $\mathcal{A}$.

„$\Rightarrow$" $\mathbb{P}(A) = \int_A M_\infty \, d\mathbb{Q} = \int_A E_\mathbb{Q}(M_\infty | \mathcal{A}_n) \, d\mathbb{Q} = \int_A M_n \, d\mathbb{Q} \quad \forall A \in \mathcal{A}_n$, also

$M_n = E_\mathbb{Q}(M_\infty | \mathcal{A}_n)$ $\mathbb{Q}$-f.s. und wieder mit 4.24 a), e) $\Rightarrow$ g.i. □

Satz: $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q} \Leftrightarrow \prod E_\mathbb{Q} Y_n^{1/2} > 0 \Leftrightarrow \sum \int_\mathbb{R} (f_n^{1/2} - g_n^{1/2})^2 \, d\lambda < \infty \Leftrightarrow \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$

$\mathbb{P} \ll \mathbb{Q} \overset{\text{Lemma}}{\Leftrightarrow} (M_n)_n$ ist g.i. $\overset{\text{Kakutani}}{\Leftrightarrow} \prod_{n\geq 1} E_\mathbb{Q} Y_n^{1/2} > 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} (1 - E_\mathbb{Q} Y_n^{1/2}) < \infty$

aber $\int (f_n^{1/2} - g_n^{1/2})^2 \, d\lambda = \int f_n - 2 f_n^{1/2} g_n^{1/2} + g_n \, d\lambda = 2(1 - \int f_n^{1/2} g_n^{1/2} \, d\lambda)$

$= 2(1 - \int (\frac{f_n}{g_n})^{1/2} \, dQ_n) = 2(1 - E_\mathbb{Q} Y_n^{1/2})$ □

Korollar: $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ sind entweder äquivalent oder singulär im zweiten Fall gilt: $\mathbb{P}(M_n \to \infty) = 1$, $\mathbb{Q}(M_n \to 0) = 1$

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ nicht äquivalent, dann ist $(M_n)_n$ nicht g.i. und deshalb nach Kakutani $M_\infty = 0$ $\mathbb{Q}$-f.s.

Da M_n^{-1} eine $\mathbb{P}$-Dichte von $\mathbb{Q}$ ist folgt sofort auch $M_\infty \to \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.

aus $\mathbb{P}((M_n \to \infty)^c) + \mathbb{Q}(M_n \to \infty) = 0$ folgt die Singularität.

Die Rückrichtung folgt sofort aus dem vorherigen Satz $\square$